TEXTO Nº 3

VECTORES
PLANO Y ESPACIO

Conceptos Básicos
Ejercicios Resueltos
Ejercicios Propuestos

Edicta Arriagada D. Victor Peralta A
Diciembre 2008
Sede Maipú, Santiago de Chile

Introducción

Este material ha sido construido pensando en el estudiante de nivel técnico de las carreras de INACAP. El objetivo principal de este trabajo es que el alumno adquiera y desarrolle la técnica para resolver problemas diversos de la unidad de **Vectores**. En lo particular pretende que el alumno logre el aprendizaje indicado en los criterios de evaluación (referidos al cálculo de variables) del programa de la asignatura Física Mecánica.

El desarrollo de los contenidos ha sido elaborado utilizando un lenguaje simple que permita la comprensión de los conceptos involucrados en la resolución de problemas. Se presenta una síntesis inmediata de los conceptos fundamentales de la unidad de Vectores, seguida de ejemplos y problemas resueltos que presentan un procedimiento de solución sistemático que va desde un nivel elemental hasta situaciones más complejas, esto, sin saltar los pasos algebraicos que tanto complican al alumno, se finaliza con problemas propuestos incluyendo sus respectivas soluciones.

Vectores

Magnitudes escalares

Son todas aquellas magnitudes físicas fundamentales o derivadas que quedan completamente definidas con números, como ejemplo , unidades de : longitud ; masa ; tiempo ; superficie ; volumen ; densidad ; temperatura ; presión ; trabajo mecánico ; potencia, etc.

Magnitudes vectoriales

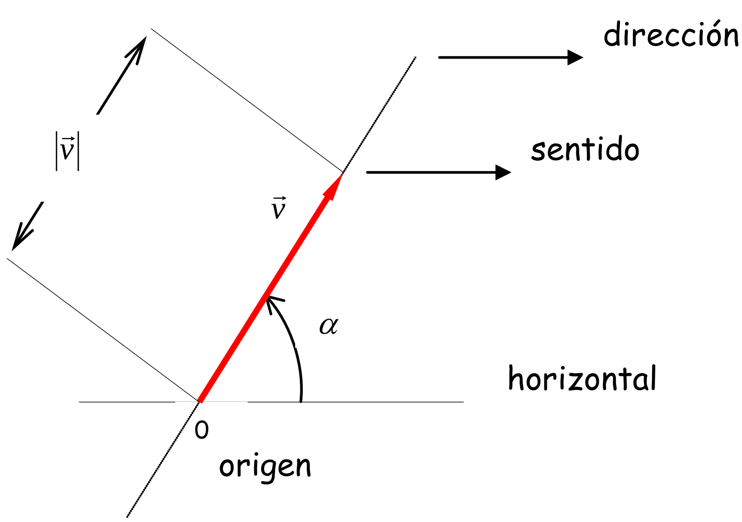
Son todas aquellas magnitudes físicas fundamentales o derivadas que para quedar completamente definidas necesitan de una dirección y sentido como por ejemplo , unidades de : desplazamiento ; velocidad ; aceleración ; fuerza ; momento , etc.
Las magnitudes vectoriales se representan gráficamente por vectores (flechas) y se simbolizan mediante letras con una flecha en su parte superior por ejemplo $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{F}$, etc.
En todo vector se debe distinguir las siguientes características:

- **Origen** : es el punto donde nace el vector (punto 0 de la figura)

- **Magnitud o módulo** : corresponde al tamaño del vector , se simboliza como valor absoluto $|\vec{v}|$ (ver figura)

- **Dirección**: corresponde a la línea recta en la cual el vector está contenido, también se llama línea de acción o recta soporte. Generalmente la dirección de un vector se entrega por medio de un ángulo que el vector forma con la horizontal u otra recta dada

- **Sentido** : es el indicado por la punta de flecha (por ejemplo derecha o izquierda, arriba o abajo)



Vectores libres

Se llama vector libre a aquel que no pasa por un punto determinado del espacio.

Vector fijo

Es aquel vector que debe pasar por un punto determinado del espacio.

Suma de vectores libres

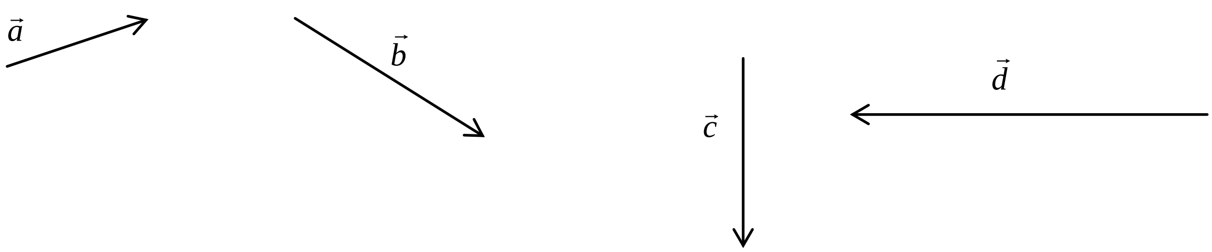
Método del polígono

Consiste en lo siguiente: se dibuja el primer vector a sumar, luego en el extremo de éste se dibuja el origen del segundo vector a sumar y así sucesivamente hasta dibujar el ultimo vector a sumar, la resultante se obtiene trazando un vector que va desde el origen del primer vector hasta el extremo del ultimo (ver figura) , durante este proceso se debe conservar magnitud dirección y sentido de cada uno de los vectores a sumar.

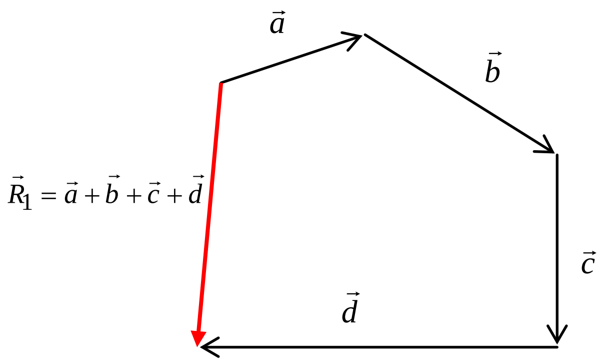
Ilustración

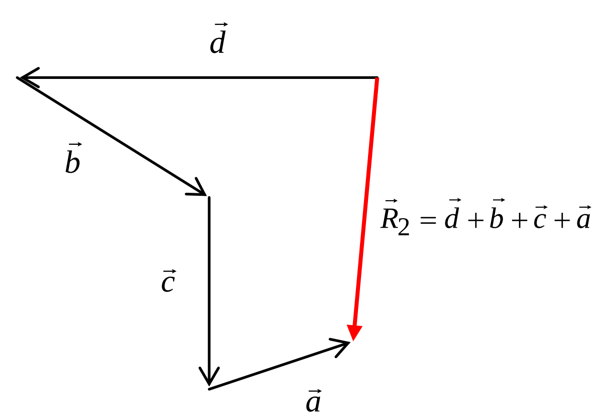
Dados los vectores $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ y $\vec{d}$ tal como se indica, trazar las siguientes resultantes:

$\vec{R}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ y $\vec{R}_2 = \vec{d} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{a}$



Solución
Siguiendo la regla anterior se obtiene para cada caso lo siguiente:





Es fácil observar que las resultantes $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ son iguales, esto permite admitir que la suma de vectores cumple ciertas propiedades.

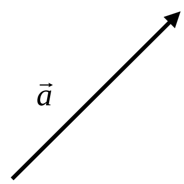
Propiedades para la suma de vectores

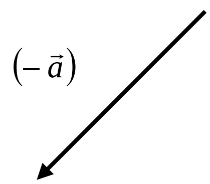
1) **Asociativa**
$\forall\, \vec{a}, \vec{b}\ y\ \vec{c}$ vectores , se cumple que $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

2) **Elemento neutro**
$\forall\, \vec{a}$ vector , $\exists\, \vec{0}$ (cero vector) tal que se cumple: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

3) **Elemento opuesto**
$\forall\, \vec{a}, \exists!\left(-\vec{a}\right)\ /\ \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=0$
$\left(-\vec{a}\right)$ es el vector opuesto del vector $\vec{a}$.

$\left(-\vec{a}\right)$ tiene igual magnitud y dirección que $\vec{a}$, pero es de sentido contrario

si 

entonces 

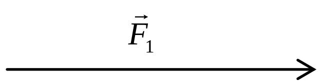
4) **Conmutatividad**

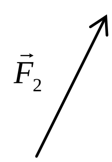
$\forall\, \vec{a}, \vec{b},$ se cumple que $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Método del paralelogramo

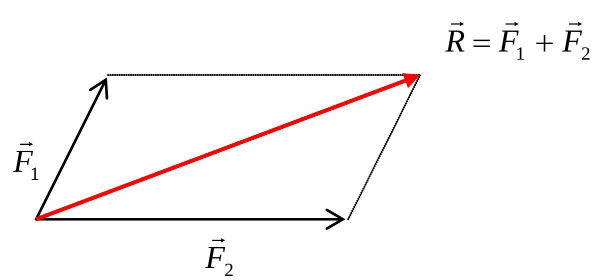
Es un método para sumar dos vectores y consiste en lo siguiente:
Se dibujan ambos vectores con un origen común, enseguida en cada uno de los extremos se dibujan las paralelas a dichos vectores, la resultante o vector suma se obtiene trazando un vector que va desde el origen común hasta el punto donde se intersectan las paralelas (diagonal del paralelogramo formado).

Si los vectores son:



y


Entonces $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ resulta:



Origen común

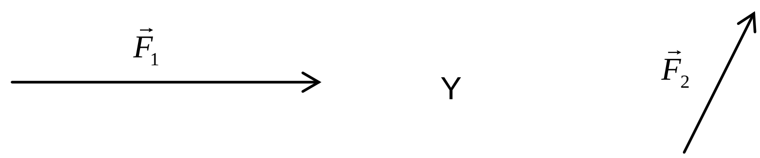
Resta de vectores

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores la resta $\vec{a}-\vec{b}$ queda definida por:

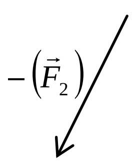
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

Es decir, la resta se reemplaza por la suma del opuesto del vector sustraendo

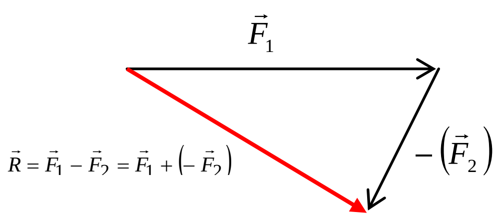
Dados los vectores:



Según la definición anterior $\vec{R}=\vec{F}_1-\vec{F}_2=\vec{F}_1+\left(-\vec{F}_2\right)$, por lo tanto se utilizará el vector:



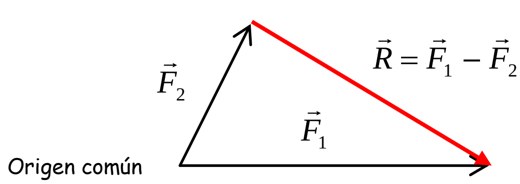
Entonces la resultante $\vec{R}=\vec{F}_1-\vec{F}_2$ es:



OBS.
Se obtiene la misma resultante si se utiliza el método del paralelogramo

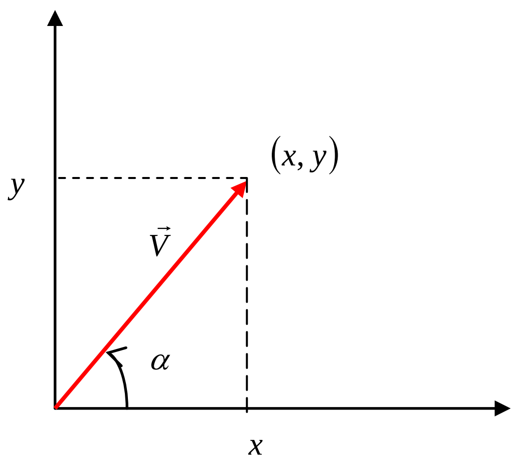
Otra forma de restar dos vectores es la siguiente:

Dibujar ambos vectores con un origen común, la resultante se obtiene trazando un vector que va desde el extremo del vector sustraendo hasta el extremo del vector minuendo (ver figura)



Vectores en el plano

Todo punto (x, y) del plano cartesiano representa un vector que tiene por origen, el origen del sistema cartesiano y por extremo, el punto de coordenadas (x, y).



Componentes cartesianas o rectangulares de un vector del plano

Todo vector $\vec{V}$ del plano puede ser descompuesto en dos componentes $\vec{V}_X$ y $\vec{V}_Y$ llamadas componentes cartesianas o rectangulares, de tal manera que el vector $\vec{V}$ queda expresado como una suma de sus componentes, es decir:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

La magnitud del vector $\vec{V}$ queda determinada por:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\left(\vec{V}_X\right)^2 + \left(\vec{V}_Y\right)^2}$$

La dirección α del vector $\vec{V}$ queda determinada por:

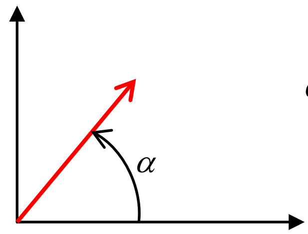
$$\alpha = tag^{-1}\left(\frac{V_Y}{V_X}\right)$$

Además se cumple que:

$$\vec{V}_x = \left|\vec{V}\right| \cdot \cos\alpha \quad \text{(Componente de } \vec{V} \text{ sobre el eje x)}$$

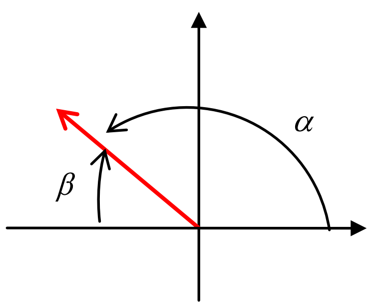
$$\vec{V}_Y = \left|\vec{V}\right| \cdot sen\alpha \text{ (Componente de } \vec{V} \text{ sobre el eje y)}$$

Primer cuadrante



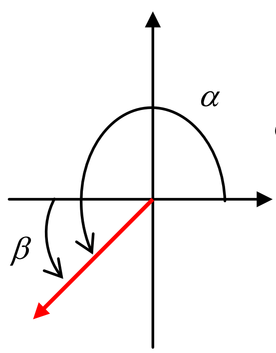
$$dirección = \alpha$$

Segundo cuadrante



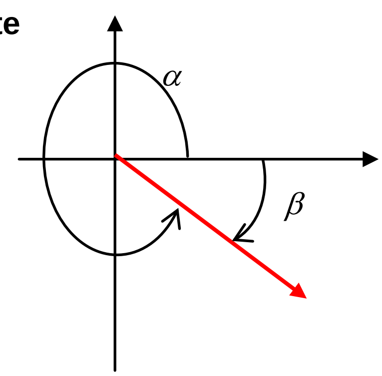
$$dirección = \alpha = 180^{o} - \beta$$

Tercer cuadrante



$$dirección = \alpha = 180^{o} + \beta$$

Cuarto cuadrante



$$dirección = \alpha = 360^{o} - \beta$$

En cada uno de los casos anteriores $\beta = tag^{-1}\left(\frac{\vec{V}_Y}{\vec{V}_X}\right)$

Sistema de vectores en el plano

Si $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots \ \ldots \vec{V}_n$ son vectores del plano, entonces la resultante $\vec{R}$ del sistema de vectores es:

$$\vec{R} = \vec{R}_X + \vec{R}_Y$$

La magnitud de la resultante $\vec{R}$ **es**:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{\left(\vec{R}_X\right)^2 + \left(\vec{R}_Y\right)^2}$$

La dirección de la resultante $\vec{R}$ **es**:

$$\alpha = tag^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Y}{\vec{R}_X}\right)$$

Donde:

$$\vec{R}_X = \vec{V}_{1X} + \vec{V}_{2X} + \ldots \quad . \ . \ . + \vec{V}_{nx}$$

$$\vec{R}_Y = \vec{V}_{1Y} + \vec{V}_{2Y} + . \ . \ . \quad . \ . \ . \ \vec{V}_{ny}$$

Vector unitario

Todo vector $\vec{V}$ del plano tiene asociado un vector unitario (magnitud unidad que puede ser simbolizado con las letras $\hat{V}$ o e o λ

El vector unitario de $\vec{V}$ queda definido por:

$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} = \frac{\vec{V}_X + \vec{V}_Y}{\left|\vec{V}\right|} = \frac{\vec{V}_X}{\left|\vec{V}\right|} + \frac{\vec{V}_Y}{\left|\vec{V}\right|}$$

Los ejes coordenados x e y también tienen sus respectivos vectores unitarios, estos son:

$\hat{i} = (1,0)$ se lee i tongo y representa al vector unitario para el eje x

$\hat{j} = (0,1)$ se lee jota tongo y representa al vector unitario para el eje y

Utilizando los vectores unitarios de los ejes coordenados, el vector $\vec{V}$ puede ser representado como sigue:

$$\vec{V} = V\hat{i} + V\hat{j}$$

Notación polar de un vector del plano

Cuando se conoce la magnitud y dirección de un vector del plano, se dice que se conocen sus coordenadas polares y en este caso el vector $\vec{V}$ queda representado por:

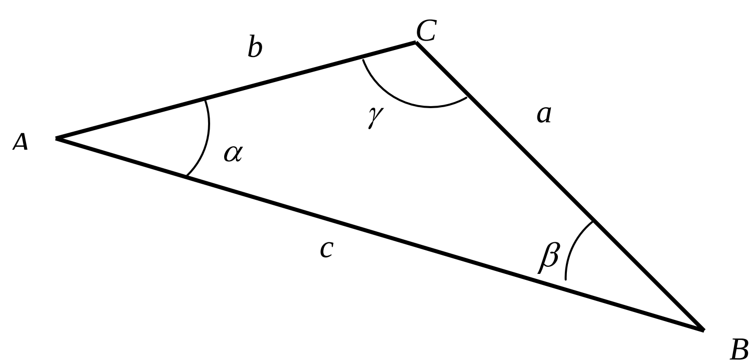
$$\vec{V} = \left(\left|\vec{V}\right|, \alpha \right)$$

Siendo $\left|\vec{V}\right|$ la magnitud de $\vec{V}$ y α su dirección

Teoremas trigonométricos utilizados en el estudio de vectores

Teorema del seno

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$



Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Ejercicios Resueltos - Vectores

1) Determinar magnitud y dirección de un vector del plano cuyas componentes rectangulares son $\vec{V}_X = -12$ y $\vec{V}_Y = 8$

Solución:

Como se conocen las componentes cartesianas del vector $\vec{V}$ es posible aplicar en forma inmediata la ecuación que define el módulo de un vector, es decir:

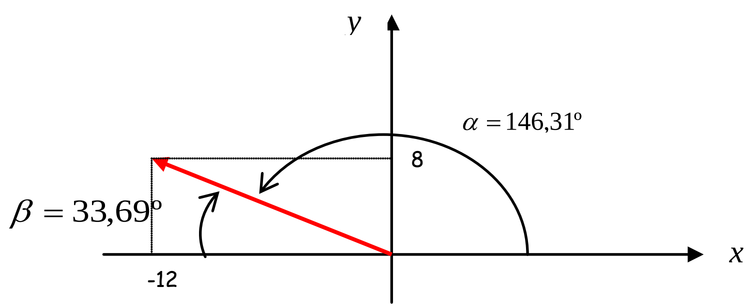
$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\left(\vec{V}_X\right)^2 + \left(\vec{V}_Y\right)^2}$$

Reemplazando los valores correspondientes resulta:

$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208} = 14{,}422$, es decir, la magnitud del vector $\vec{V}$ es 14,422.

Como $\vec{V}_X$ es negativa y $\vec{V}_Y$ es positiva, el vector se encuentra en el segundo cuadrante, y por lo tanto la dirección queda determinada por $\alpha = 180º - \beta$

$$\beta = tag^{-1}\left(\frac{\vec{V}_Y}{\vec{V}_X}\right)$$



$$\Rightarrow \beta = tag^{-1}\left(\frac{8}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \beta = 33{,}69º$$

Por lo tanto la dirección es:

$\alpha = 180º - 33{,}69º$, es decir

$\boxed{\alpha = 146{,}31º}$ Dirección de $\vec{V}$

2) Encontrar las componentes cartesianas de un vector $\vec{V}$ cuya magnitud vale 80 y su dirección es de 230º

Solución:

Como las componentes de un vector quedan determinadas con las ecuaciones:

$$\vec{V}_x = \left|\vec{V}\right| \cdot \cos\alpha$$
$$\vec{V}_Y = \left|\vec{V}\right| \cdot sen\alpha$$

Solo hay que reemplazar los valores correspondientes a la magnitud y dirección del vector, es decir:

$$\vec{V}_X = 80 \cdot \cos 230º$$
$$\vec{V}_Y = 80 \cdot sen 230º$$

Realizando la operatoria se obtiene finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V}_X &= -51{,}423 \\ \vec{V}_Y &= -61{,}284\end{aligned}}$$

3) Dados los vectores $\vec{F}_1 = 7\hat{i} - 20\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = 2\hat{i} + 24\hat{j}$, encontrar magnitud , dirección y vector unitario de la resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Solución

Se pide obtener la resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, reemplazando los valores de cada vector, se obtiene:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 7\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 2\hat{\imath} + 24\hat{\jmath}$$

Reuniendo los términos semejantes resulta:

$$\vec{R} = 9\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

Aplicando la fórmula de la magnitud:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{9^2 + 4^2}$$

Realizando la operatoria se tiene finalmente la magnitud de la resultante, es decir:

$$\boxed{\left|\vec{R}\right| = 9{,}849}$$

Como la resultante es:

$$\vec{R} = 9\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

Significa que se encuentra en el primer cuadrante, luego la dirección queda determinada por:

$$\alpha = tag^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Y}{\vec{R}_X}\right)$$

Reemplazando valores:

$$\alpha = tag^{-1}\left(\frac{4}{9}\right)$$

Realizando la operatoria se tiene la dirección:

$$\boxed{\alpha = 23{,}962^{\circ}}$$

Determinación del vector unitario:

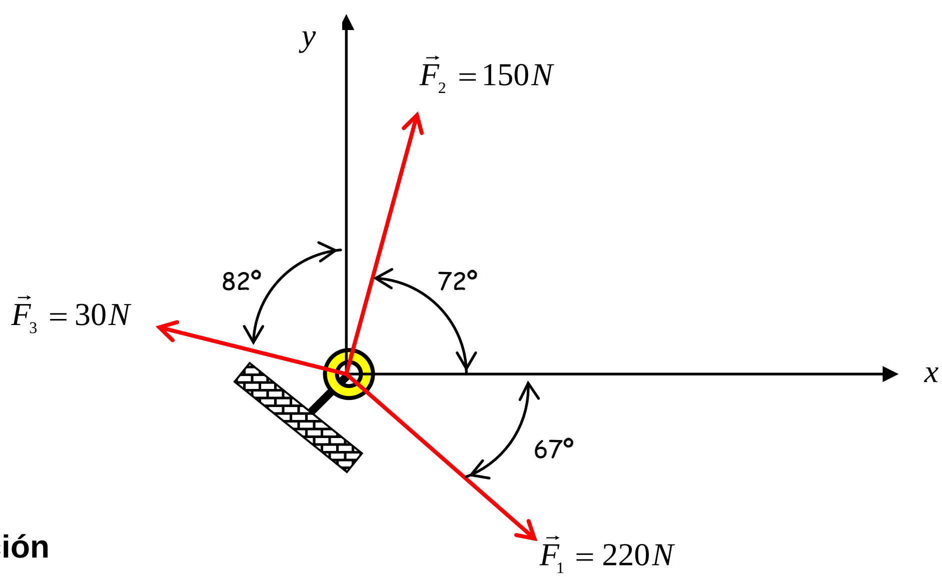
Por definición, el vector unitario queda determinado por:

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{R}_X + \vec{R}_Y}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{R}_X}{|\vec{R}|} + \frac{\vec{R}_Y}{|\vec{R}|}$$

Reemplazando los valores para cada componente resulta:

$\hat{R} = \frac{9}{9{,}849}\hat{i} + \frac{4}{9{,}849}\hat{j}$ o que es lo mismo $\hat{R} = \frac{9}{\sqrt{97}}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{97}}\hat{j}$

4) Sobre el anclaje indicado en la figura, actúan tres fuerzas tal como se indica, determinar magnitud y dirección de la resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$



Solución

Como se trata de un sistema de vectores, la resultante es de la forma:

$$\vec{R} = \vec{R}_X + \vec{R}_Y$$

En este caso:

$\vec{R}_X = \vec{F}_{1X} + \vec{F}_{2X} + \vec{F}_{3X}$ y $\vec{R}_Y = \vec{F}_{1Y} + \vec{F}_{2Y} + \vec{F}_{3Y}$

Aplicando la fórmula de las componentes y reemplazando los valores para cada fuerza , se tiene :

$\vec{R}_X = 220N\cos 293º + 150N\cos 72º + 30N\cos 172º$

$\vec{R}_Y = 220N sen 293º + 150N sen 72º + 30N sen 172º$

Realizando la operatoria resulta:

$\vec{R}_X = 102{,}605N$ y $\vec{R}_Y = -55{,}677N$

Por lo tanto la resultante $\vec{R}$ es:

$\vec{R} = 102{,}605\hat{i} - 55{,}677\hat{j}\ N$

Su magnitud es:

$$\boxed{\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(102{,}605)^2 + (-55{,}677)^2} = \sqrt{13627{,}714} = 116{,}738\ N}$$

Como le vector resultante se encuentra en el cuarto cuadrante, significa que su dirección es $\alpha = 360º - \beta$, el ángulo β se calcula por medio de la $\tan g^{-1}$, es decir:

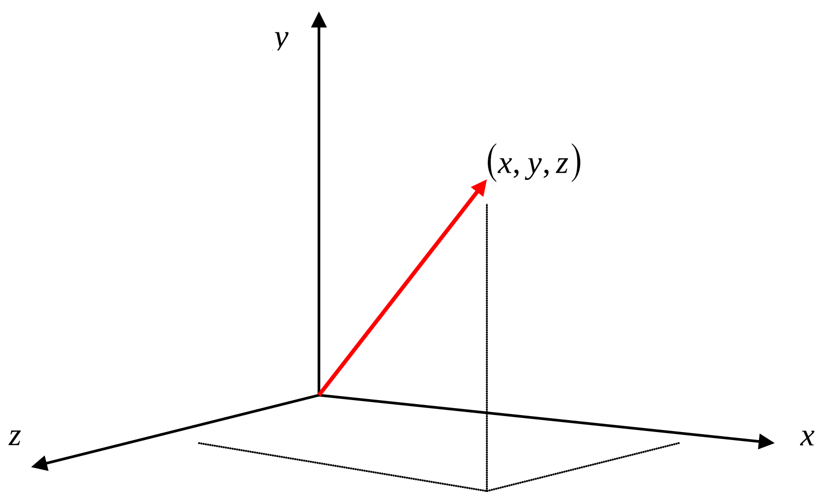
$$\beta = tg^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Y}{\vec{R}_X}\right) = tg^{-1}\left(\frac{55{,}677}{102{,}605}\right) = 28{,}486º$$

Por lo tanto la dirección de la fuerza resultante es:

$$\boxed{\alpha = 360º - \beta = 360º - 28{,}486º = 331{,}514º\ ,}$$

Vectores en el espacio

Todo punto del espacio (x, y, z) representa un vector que tiene por origen, el origen del sistema y por extremo, el punto de coordenadas (x, y, z)



Todo vector $\vec{V}$ del espacio puede ser descompuesto en $\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$, $\vec{V}_Z$ llamadas componentes rectangulares o cartesianas.

$\vec{V}_X$ = componente de $\vec{V}$ sobre el eje x

$\vec{V}_Y$ = componente de $\vec{V}$ sobre el eje y

$\vec{V}_Z$ = componente de $\vec{V}$ sobre el eje z

El vector $\vec{V}$ puede ser expresado como un asuma de sus componentes, es decir:

$$\vec{V} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y + \vec{V}_Z$$

La magnitud queda determinada por:

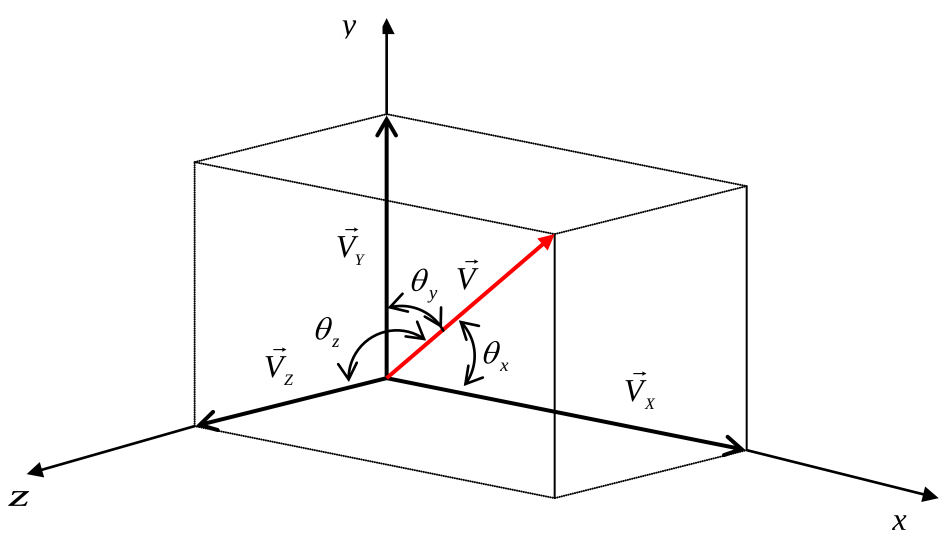
$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\left(\vec{V}_X\right)^2 + \left(\vec{V}_Y\right)^2 + \left(\vec{V}_Z\right)^2}$$

La dirección de $\vec{V}$ queda determinada por los cósenos directores, dados por:

$$\cos\theta_X = \frac{\vec{V}_X}{\left|\vec{V}\right|}$$

$$\cos\theta_Y = \frac{\vec{V}_Y}{\left|\vec{V}\right|}$$

$$\cos\theta_Z = \frac{\vec{V}_Z}{\left|\vec{V}\right|}$$



El vector $\vec{V}$ también puede ser expresado en función de los vectores unitarios de los ejes coordenados, esto es:

$$\vec{V} = V\hat{i} + V\hat{j} + V\hat{k}$$

Donde $\hat{k}$ es el vector unitario para el eje z

Ejercicio 1

Determinar magnitud y dirección del vector $\vec{V} = 5\hat{i} - 8\hat{j} + 10\hat{k}$

Solución

Aplicando la fórmula de magnitud, se tiene:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{5^2 + (-8)^2 + 10^2}$$

Realizando la operación resulta:

$\boxed{\left|\vec{V}\right| = 13{,}748}$ Magnitud de vector $\vec{V}$

La dirección del vector se obtiene aplicando la fórmula de los cósenos directores, es decir:

$$\cos\theta_X = \frac{\vec{V}_X}{\left|\vec{V}\right|} \qquad \cos\theta_Y = \frac{\vec{V}_Y}{\left|\vec{V}\right|} \qquad \cos\theta_Z = \frac{\vec{V}_Z}{\left|\vec{V}\right|}$$

$$\Rightarrow \theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{V}_X}{\left|\vec{V}\right|}\right) \qquad \Rightarrow \theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{V}_Y}{\left|\vec{V}\right|}\right) \qquad \Rightarrow \theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{V}_Z}{\left|\vec{V}\right|}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13{,}748}\right) \qquad \Rightarrow \theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{13{,}748}\right) \qquad \Rightarrow \theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{10}{13{,}748}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_X = 68{,}673^\circ} \qquad \Rightarrow \boxed{\theta_Y = 125{,}584^\circ} \qquad \Rightarrow \boxed{\theta_Z = 43{,}333^\circ}$$

Sistema de vectores en el espacio

Si $\vec{V}_1, \vec{V}_2$, ... $\vec{V}_n$ son n vectores del espacio, entonces la resultante $\vec{R}$ es de la forma:

$$\vec{R} = \vec{R}_X + \vec{R}_Y + \vec{R}_Z$$

La magnitud de $\vec{R}$ queda determinada por

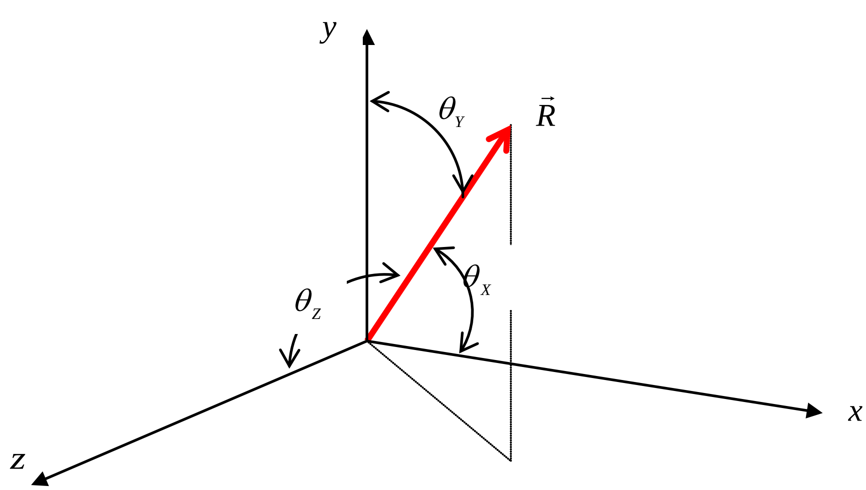
$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{\left(\vec{R}_X\right)^2 + \left(\vec{R}_Y\right)^2 + \left(\vec{R}_Z\right)^2}$$

La dirección de $\vec{R}$ queda determinada por los ángulos directores

$$\theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_X}{\left|\vec{R}\right|}\right)$$

$$\theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Y}{\left|\vec{R}\right|}\right)$$

$$\theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Z}{\left|\vec{R}\right|}\right)$$



Con:

$$\vec{R}_x = \vec{V}_{1X} + \vec{V}_{2X} + \cdots \quad \cdots + \vec{V}_{nX}$$

$$\vec{R}_x = \vec{V}_{1Y} + \vec{V}_{2Y} + \cdots \quad \cdots + \vec{V}_{nY}$$

Ejercicio 2

Dados los vectores $\vec{F}_1 = -5\hat{i} + 8\hat{j} - 15\hat{k}$, $\vec{F}_2 = -7\hat{i} - 12\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{F}_3 = 6\hat{i} + 9\hat{j} + 2\hat{k}$, obtener magnitud y dirección de la resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Solución

La resultante $\vec{R}$ se obtiene simplemente sumando los términos semejantes, es decir:

$$\vec{R} = \left(-5\hat{i} + 8\hat{j} - 15\hat{k}\right) + \left(-7\hat{i} - 12\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \left(6\hat{i} + 9\hat{j} + 2\hat{k}\right)$$

$$\vec{R} = -6\hat{i} + 5\hat{j} - 10\hat{k}$$

La magnitud de $\vec{R}$ es
:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 5^2 + (-10)^2}$$

Realizando la operatoria se obtiene finalmente:

$$\boxed{\left|\vec{R}\right| = \sqrt{161} = 12{,}689}$$

La dirección se obtiene aplicando la ecuación de los cósenos directores, tal como sigue:

$$\theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_X}{|\vec{R}|}\right) \qquad \theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Y}{|\vec{R}|}\right) \qquad \theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Z}{|\vec{R}|}\right)$$

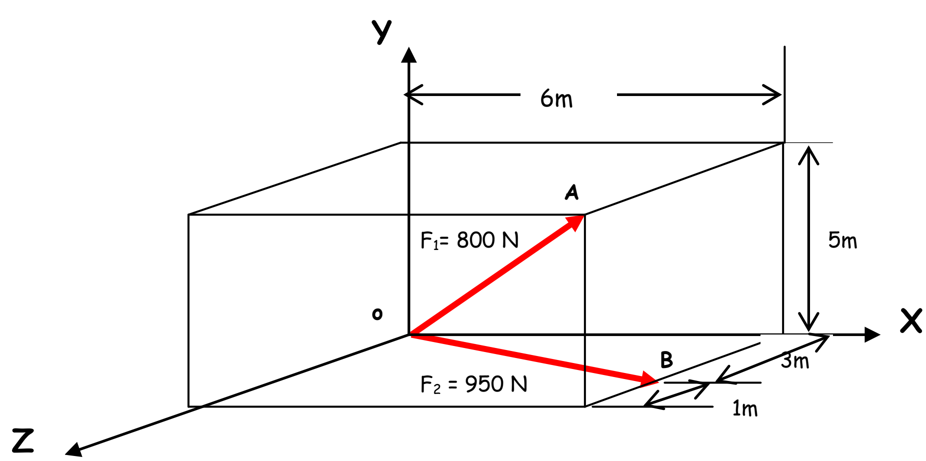
$$\theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{12{,}689}\right) \qquad \theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{5}{12{,}689}\right) \qquad \theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{-10}{12{,}689}\right)$$

$$\boxed{\theta_X = 118{,}219^{o}} \qquad \boxed{\theta_Y = 66{,}794^{o}} \qquad \boxed{\theta_Z = 142{,}007^{o}}$$

Ejercicio 3

Para el sistema de fuerzas de la figura indicada, se pide determinar:

a) Componentes cartesianas de $\vec{F}_1$
b) Componentes cartesianas de $\vec{F}_2$
c) Magnitud de resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
d) Ángulos directores de $\vec{R}$
e) Vector unitario de $\vec{R}$



Solución

Cálculo de componentes

Cuando se conoce la magnitud de una fuerza y las coordenadas del origen y extremo de ésta, es conveniente utilizar el concepto de vector unitario para determinar sus componentes.

Por definición se tiene que:

$\hat{F} = \dfrac{\vec{F}}{\left|\vec{F}\right|}$ al despejar $\vec{F}$ resulta $\vec{F} = \left|\vec{F}\right| \cdot \hat{F}$ pero para $\hat{F}_1 = O\hat{A}$ y para $\vec{F}_2 = O\hat{B}$ Entonces:

$\vec{F}_1 = \left|\vec{F}_1\right| \cdot O\hat{A}$ y $\vec{F}_2 = \left|\vec{F}_2\right| \cdot O\hat{B}$

Componentes para $\vec{F}_1$

Como $\vec{F}_1 = \left|\vec{F}_1\right| \cdot O\hat{A}$ y observando las coordenadas del origen y extremo de $\vec{F}_1$, se puede reemplazar los valores correspondientes, es decir:

$$\vec{F}_1 = 800N \cdot \frac{6\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{6^2 + 5^2 + 4^2}}$$

Realizando la operatoria resulta:

$$\boxed{\vec{F}_1 = 547{,}011\hat{i} + 455{,}842\hat{j} + 364{,}674\hat{k}}$$

Componentes para $\vec{F}_2$

Como $\vec{F}_2 = \left|\vec{F}_2\right| \cdot \hat{O}B$ y observando las coordenadas del origen y extremo de $\vec{F}_2$, se puede reemplazar los valores correspondientes, es decir:

$$\vec{F}_2 = 950N \cdot \frac{6\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{6^2 + 3^2}}$$

Realizando la operatoria se obtiene:

$$\boxed{\vec{F}_2 = 849{,}706\hat{i} + 0\hat{j} + 424{,}853\hat{k}\ \mathrm{N}}$$

Cálculo de magnitud de $\vec{R}$

La resultante $\vec{R}$ se obtiene sumando los términos semejantes entre las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, es decir:

$$\vec{R} = \left(547{,}011\hat{i} + 455{,}842\hat{j} + 364{,}674\hat{k}\right) + \left(849{,}706\hat{i} + 0\hat{j} + 424{,}853\hat{k}\right)$$

$$\vec{R} = 1396{,}717\hat{i} + 455{,}842\hat{j} + 789{,}527\hat{k} \text{ N}$$

Aplicando la fórmula de magnitud se obtiene finalmente:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(1396{,}717)^2 + (455{,}842)^2 + (789{,}527)^2}$$

Realizando la operatoria se tiene:

$$\boxed{\left|\vec{R}\right| = 1667{,}922 \text{ N}}$$

Cálculo de ángulos directores

La dirección se obtiene aplicando la ecuación de los cósenos directores, es decir:

$$\theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_X}{\left|\vec{R}\right|}\right) \qquad \theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Y}{\left|\vec{R}\right|}\right) \qquad \theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_Z}{\left|\vec{R}\right|}\right)$$

$$\theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{1396{,}717}{1667{,}922}\right) \qquad \theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{455{,}842}{1667{,}922}\right) \qquad \theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{789{,}527}{1667{,}922}\right)$$

$$\boxed{\theta_X = 33{,}179^{\circ}} \qquad \boxed{\theta_Y = 74{,}140^{\circ}} \qquad \boxed{\theta_Z = 61{,}747^{\circ}}$$

Cálculo del vector unitario

Por definición se tiene que:

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|} = \frac{\vec{R}_X + \vec{R}_Y + \vec{R}_Z}{\left|\vec{R}\right|}$$

Reemplazando los valores correspondientes se obtiene:

$$\hat{R} = \frac{1396{,}717\hat{\imath} + 455{,}842\hat{\jmath} + 789{,}527\hat{k}}{1667{,}922}$$

Realizando la operatoria se obtiene finalmente:

$$\boxed{\hat{R} = 0{,}837\hat{\imath} + 0{,}273\hat{\jmath} + 0{,}473\hat{k}}$$

Multiplicación de vectores

Producto punto o producto escalar

Es una multiplicación entre dos vectores cuyo resultado es un escalar.
Si los vectores son: $\vec{a} = \vec{a}_X + \vec{a}_Y + \vec{a}_Z$ y $\vec{b} = \vec{b}_X + \vec{b}_Y + \vec{b}_Z$, el producto punto entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se simboliza por $\vec{a} \bullet \vec{b}$ (se lee a punto b) y se define por:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$

Donde θ es el ángulo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares significa que $\theta = 90^{\circ}$ y $\cos 90^{\circ} = 0$, por lo tanto el producto punto entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual a cero, es decir:

Si $\vec{a} \perp \vec{b}$ entonces $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

Por otra parte $\vec{a} \bullet \vec{b} = (\vec{a}_X + \vec{a}_Y + \vec{a}_Z) \bullet (\vec{b}_X + \vec{b}_Y + \vec{b}_Z)$

Multiplicando se obtiene:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a}_X \bullet \vec{b}_X + \vec{a}_X \bullet \vec{b}_Y + \vec{a}_X \bullet \vec{b}_Z + \vec{a}_Y \bullet \vec{b}_X + \vec{a}_Y \bullet \vec{b}_Y + \vec{a}_Y \bullet \vec{b}_Z + \vec{a}_Z \bullet \vec{b}_X + \vec{a}_Z \bullet \vec{b}_Y + \vec{a}_Z \bullet \vec{b}_Z$$

De lo anterior resulta:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a}_X \cdot \vec{b}_X + \vec{a}_Y \cdot \vec{b}_Y + \vec{a}_Z \cdot \vec{b}_Z$$

Lo anterior debido a que las otras combinaciones resultan perpendiculares y por lo tanto su producto punto es igual a cero.

Angulo formado entere $\vec{a}$ y $\vec{b}$

El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ queda determinado al despejar $\cos\theta$ de la definición del producto punto, es decir:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Ejercicio

Dados los vectores $\vec{a} = -7\hat{i} + 4j - 11\hat{k}$ y $\vec{b} = 5\hat{i} + 21\hat{j} - 12\hat{k}$, determinar su producto punto y el ángulo formado entre ellos.

Solución

El producto punto se obtiene aplicando la ecuación:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a}_X \cdot \vec{b}_X + \vec{a}_Y \cdot \vec{b}_Y + \vec{a}_Z \cdot \vec{b}_Z$$

Reemplazando los valores numéricos se tiene:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = -7 \cdot 5 + 4 \cdot 21 - 11 \cdot -12 = -35 + 84 + 132$$

Sumando resulta :

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = 181}$$

Para determinar el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se debe conocer sus respectivos módulos, por lo tanto:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2 + (-11)^2} = 13{,}638$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 21^2 + (-12)^2} = 24{,}698$$

El ángulo formado entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se obtiene aplicando la ecuación:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Reemplazando los valores correspondientes se tiene:

$$\cos\theta = \frac{181}{13{,}638 \cdot 24{,}698} = 0{,}537$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0{,}537)$$

Finalmente:

$$\boxed{\theta = 57{,}496^{\circ}}$$

Ejercicio

Determinar el valor de m de tal manera que los vectores $\vec{a} = 3\hat{i} - 9\hat{j} + m\hat{k}$ y $\vec{b} = -5\hat{i} - 8\hat{j} + 10\hat{k}$ resulten perpendiculares:

Solución

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto punto es igual a cero, por lo tanto:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

Reemplazando los valores de cada vector resulta:

$$3 \cdot -5 + -9 \cdot -8 + m \cdot 10 = 0$$

$$\Rightarrow -15 + 72 + 10m = 0$$

$$\Rightarrow 57 + 10m = 0$$

$$\Rightarrow 10m = -57$$

$$\Rightarrow m = \frac{-57}{10}$$

Finalmente:

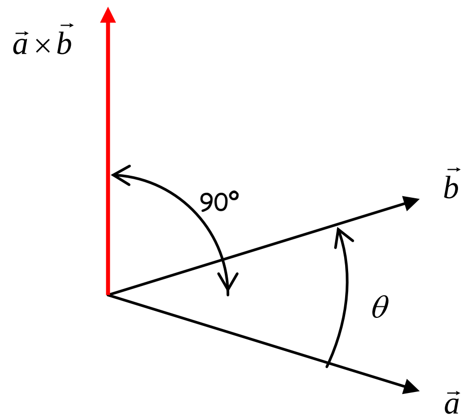
$$\boxed{m = 5{,}7}$$

Producto cruz o producto vectorial

Es una multiplicación entre dos vectores cuyo resultado es un vector, si los vectores son $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el producto cruz entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota por $\vec{a} \times \vec{b}$ (se lee a cruz b) y su módulo se define por:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sen\theta$$

La dirección de $\vec{a}\times\vec{b}$ es perpendicular al plano formado entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, su sentido queda determina por la regla de la mano derecha o regla del tornillo de rosca derecha que al hacerlo girar desde $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$ debe penetrar en el plano formado entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Por otra parte si los vectores son $\vec{a} = \vec{a}_X + \vec{a}_Y + \vec{a}_Z$ y $\vec{b} = \vec{b}_X + \vec{b}_Y + \vec{b}_Z$, el producto $\vec{a}\times\vec{b}$ queda determinado por:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ \vec{b}_X & \vec{b}_Y & \vec{b}_Z \end{vmatrix}$$

Ejercicio

Determinar el producto cruz entre $\vec{a} = -2\hat{i} + 11\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{b} = 10\hat{i} + 3\hat{j} - 9\hat{k}$

Solución

El producto cruz se obtiene aplicando la ecuación anterior, es decir:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ \vec{b}_X & \vec{b}_Y & \vec{b}_Z \end{vmatrix}$$

Reemplazando las coordenadas para cada vector se obtiene:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 11 & 5 \\ 10 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante se tiene:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-99-15)\hat{i} - (18-50)\hat{j} + (-6-110)\hat{k}$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -114\hat{i} + 32\hat{j} - 116\hat{k}}$$

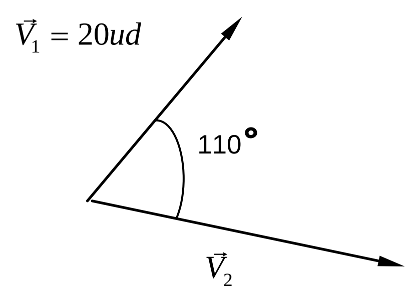
EJERCICIOS RESUELTOS - VECTORES

PROBLEMA n°1

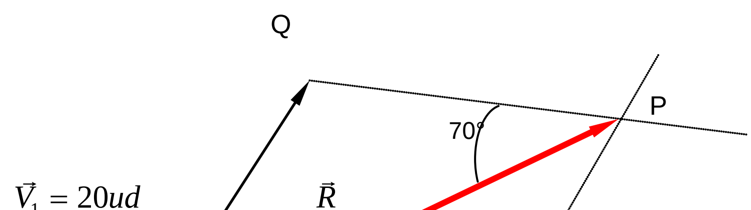
Dos vectores forman un ángulo de 110° y uno de ellos tiene 20 unidades de longitud y hace un ángulo de 40° con el vector resultante de ambos. Determine la magnitud del segundo vector y la del vector resultante.

Solución

Eligiendo arbitrariamente dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ con las condiciones dadas, es decir:



Ahora trazamos la resultante utilizando el método del paralelogramo, es decir:



Utilizando el teorema del seno en triángulo OPQ resulta:

$$\frac{sen70°}{20} = \frac{sen40°}{v_2}$$

1)

$$\Rightarrow v_2 sen70° = 20 sen40°$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{20 sen40°}{sen70°}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_2 = 13{,}68[ud]}$$

$$\frac{sen70°}{20} = \frac{sen70°}{R}$$

2)

$$\Rightarrow R sen70° = 20 sen70°$$

Cancelando por sen70° se obtiene finalmente:

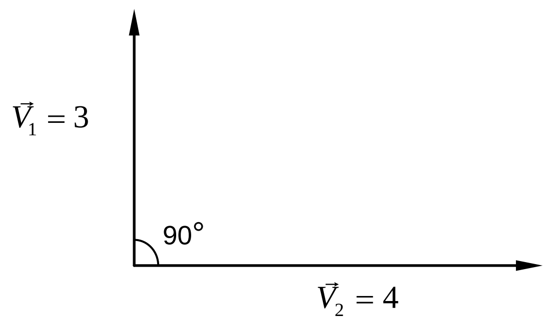
$$\boxed{R = 20[ud]}$$

PROBLEMA n°2

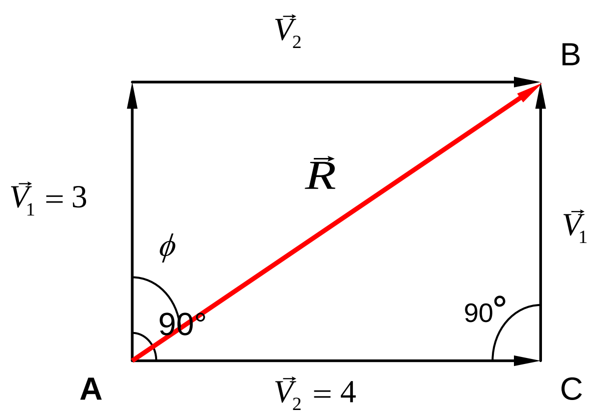
Dos vectores de longitud 3 y 4 forman un ángulo recto, calcule por el teorema del coseno la longitud del vector resultante y el ángulo que forma este con el vector de menor longitud.

Respuesta n°2

Según información, se tienen dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ formando un ángulo recto, es decir:



Por el método del paralelogramo resulta:



Utilizando teorema del coseno en triángulo rectángulo ACB se obtiene:

pero $COS90° = 0$

$$R^2 = V_1^{\ 2} + V_2^{\ 2} - 2V_1V_2COS90°$$

$$\Rightarrow R^2 = V_1^{\ 2} + V_2^{\ 2}$$

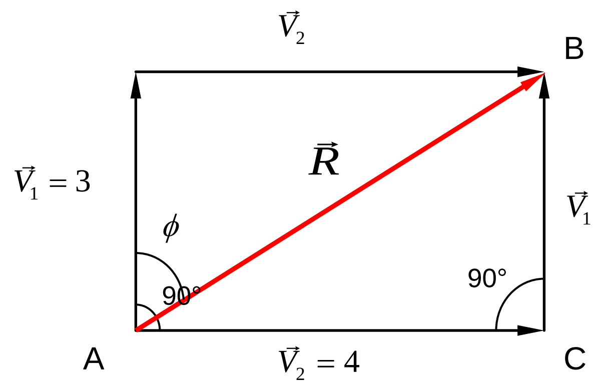
$$\Rightarrow R = \sqrt{V_1^{\ 2} + V_2^{\ 2}}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{9 + 16}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{25}$$

$$\boxed{\Rightarrow R = 5[ud]}$$



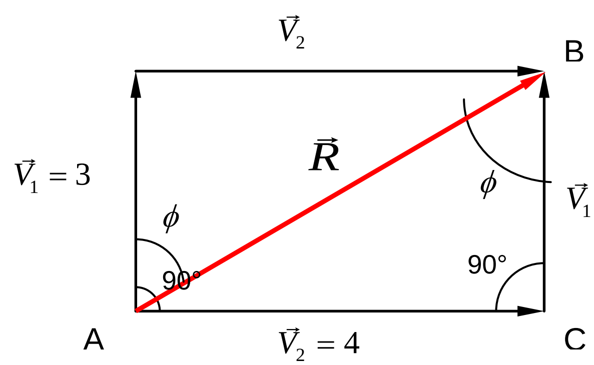
El ángulo ϕ (ángulo que forma la resultante con el vector más pequeño) lo podemos determinar usando la razón tangente, es decir:

$$tg\phi = (\frac{V_2}{V_1})$$

$$\Rightarrow tg\phi = (\frac{4}{3})$$

$$\Rightarrow \phi = tg^{-1}(\frac{4}{3})$$

$$\boxed{\Rightarrow \phi = 53{,}130°}$$

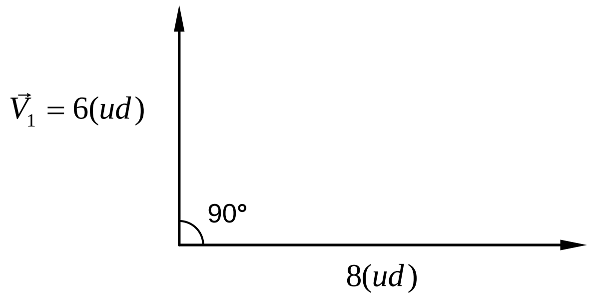


PROBLEMA n°3

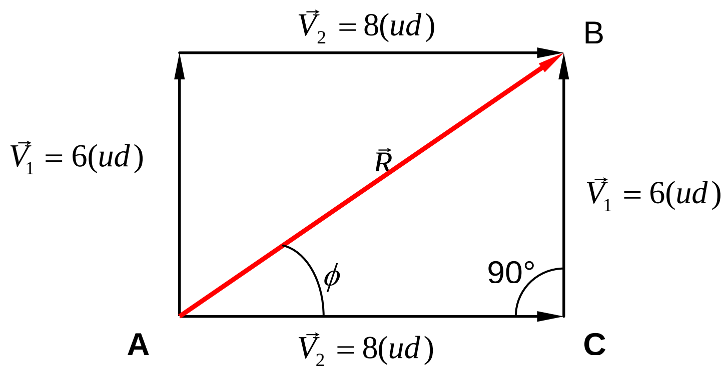
Dos vectores de longitud 6 y 8 unidades forman un ángulo recto, calcule por el teorema del seno la longitud del vector resultante y el ángulo que forma este con el vector de mayor longitud.

Solución:

Según información, se tienen dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ formando un ángulo recto, es decir:



Representando el paralelogramo para estos vectores, se tiene:



La solución a este problema es similar a la del problema anterior, la diferencia es que en éste calcularemos primero el ángulo ϕ y luego utilizaremos el teorema del seno para determinar la magnitud de la resultante $\vec{R}$, es decir:

Por la razón tangente se tiene:

$$tg\phi = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\Rightarrow tg\phi = \frac{6}{8}$$

$$\Rightarrow \phi = tg^{-1}(\frac{6}{8})$$

$$\boxed{\Rightarrow \phi = 36{,}870°}$$

Ahora aplicamos teorema del seno en triángulo rectángulo ACB para obtener el valor de la resultante $\vec{R}$, es decir:

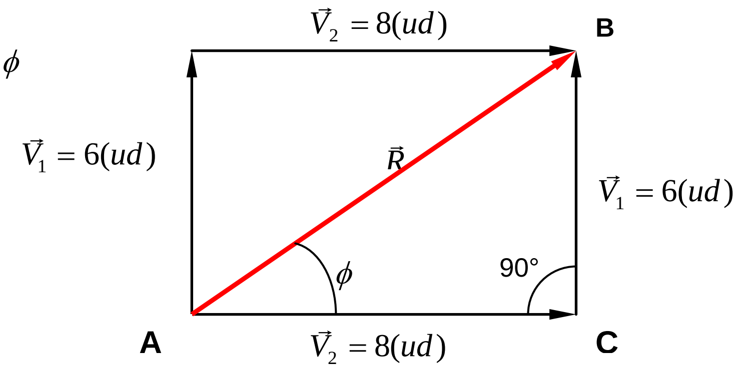
$$\frac{sen90°}{R} = \frac{sen\phi}{V_1}$$

$$\Rightarrow V_1 sen90° = Rsen\phi$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 sen90°}{sen\phi} = R$$

$$\Rightarrow \frac{6sen90°}{sen36{,}870°} = R$$

$$\boxed{\Rightarrow R = 10[ud]}$$



PROBLEMA n°4

Dado los vectores:

$$\vec{A} = 4i + 5j$$
$$\vec{B} = 3i + 6j$$
$$\vec{C} = 9k$$

a) Calcule $\vec{A}X\vec{B}$

b) Grafique este resultado

c) Calcule $\frac{\left|\vec{A}X\vec{B}\right|}{2}$, interprete

d) Calcule $\left(\vec{A}X\vec{B}\right)\bullet C$, interprete

Respuesta n°4

Si:

$$\vec{A} = 4i + 5j$$
$$\vec{B} = 3i + 6j$$
$$\vec{C} = 9k$$

Entonces:

Solución 4 (a):

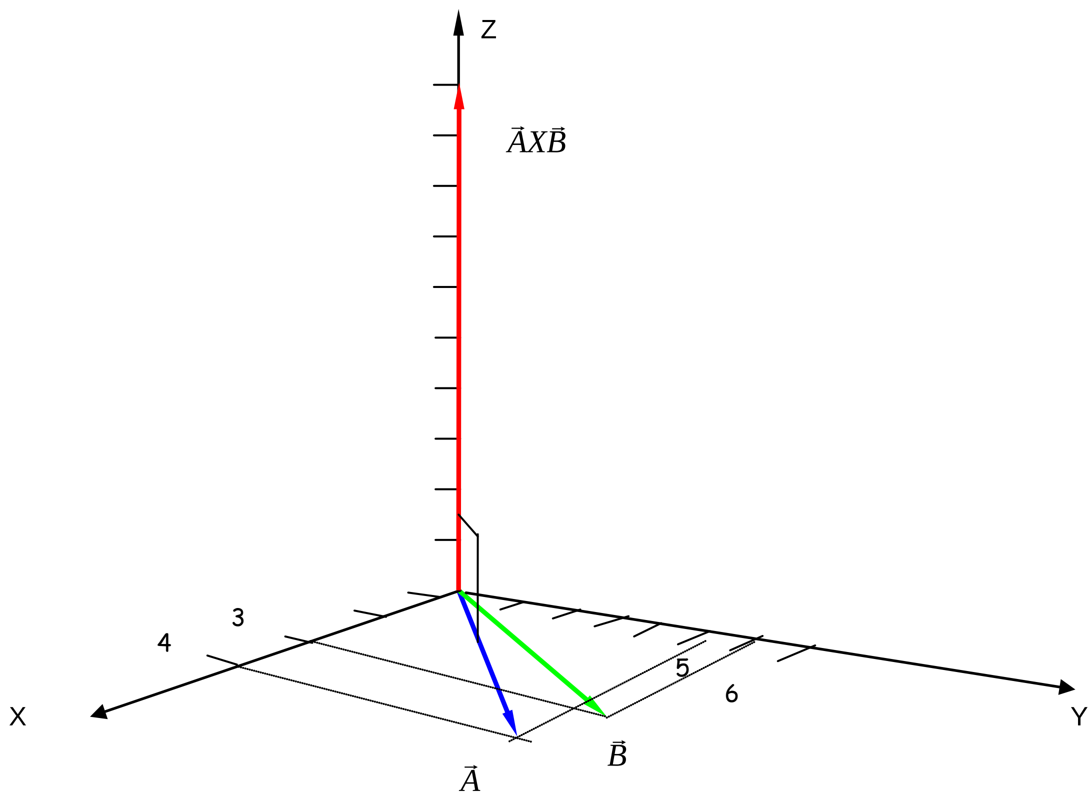
$$\vec{A}X\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (0-0)i - (0-0)j + (4\cdot 6 - 5\cdot 3)k$$

$$\Rightarrow \vec{A}X\vec{B} = (24-15)k$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{A}X\vec{B} = 9k}$$

Solución 4(b):

Grafica



Solución 4(c)

$\left|\vec{A}X\vec{B}\right|$ se calcula utilizando el concepto de módulo de un vector, es decir:

$$\left|\vec{A}X\vec{B}\right| = \sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9$$

Por lo tanto:

$$\frac{\left|\vec{A}X\vec{B}\right|}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$\left(\vec{A}X\vec{B}\right)\bullet\vec{C} = \left(0i + 0j + 9k\right)\bullet\left(0i + 0j + 9k\right)$$

Solución 4(d)

$$\Rightarrow \left(\vec{A}X\vec{B}\right)\bullet\vec{C} = 0 + 0 + 81$$

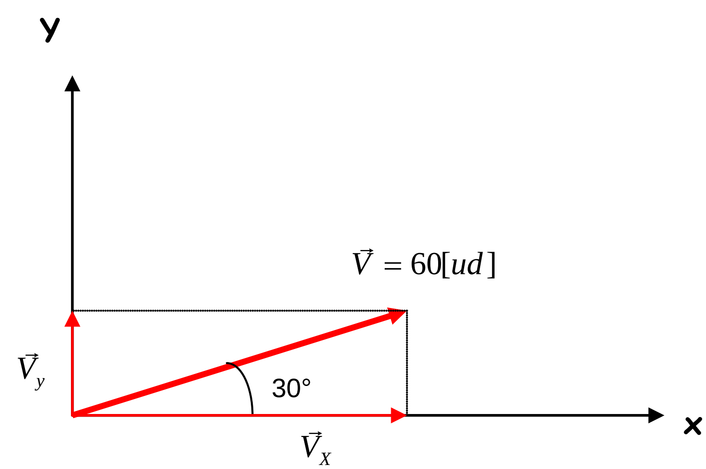
$$\boxed{\Rightarrow \left(\vec{A}X\vec{B}\right)\bullet\vec{C} = 81}$$

PROBLEMA n°5

Un vector tiene una magnitud de 60 unidades y forma un ángulo de 30° con la dirección positiva del eje x. Encuentre sus componentes cartesianas

Solución

Representando gráficamente la información dada se tiene que:



Donde: $\vec{V}_X$ y $\vec{V}_y$ son las componentes cartesianas del vector $\vec{V}$.
Utilizando:

$$\vec{V}_X = \left|\vec{V}\right|\cos\alpha \quad \text{y} \quad \vec{V}_y = \left|\vec{V}\right| sen\alpha$$

Resulta: $\vec{V}_X = 60\cos 30°$ y $\vec{V}_y = 60 sen 30°$

Por lo tanto: $\boxed{\vec{V}_X = 51{,}962[ud] \longrightarrow}$ **y**

$$\boxed{\vec{V}_y = 30[ud] \quad \uparrow}$$

PROBLEMA n°6

El vector resultante de dos vectores tiene 10 unidades de longitud y forma un ángulo de 35° con uno de los vectores componentes, el cual tiene 12 unidades de longitud. Encontrar la magnitud del otro vector y el ángulo entre ellos.

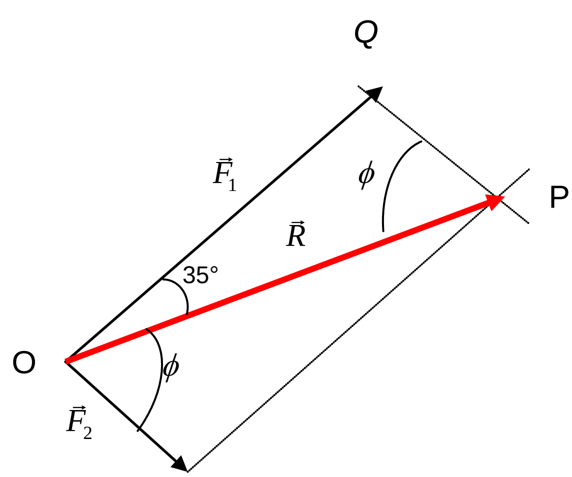
Solucón:

Eligiendo arbitrariamente los dos vectores componentes $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con las condiciones dadas se puede graficar:

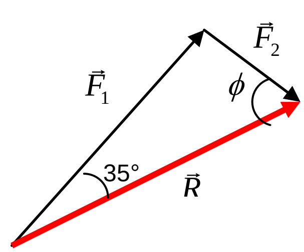
$\vec{F}_1 = 12[ud]$

$\vec{R} = 10[ud]$

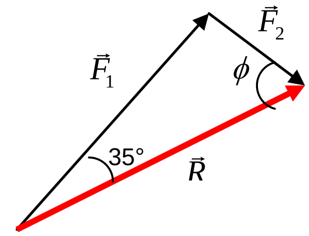
$\vec{F}_2 = ?$



Eligiendo el triángulo OQP se obtiene el esquema:



Como se conoce dos lados del triángulo OPQ y el ángulo comprendido entre ellos, es posible aplicar el teorema del coseno para determinar el valor de $\vec{F}_2$, es decir:



$$F_2^{\ 2} = R^2 + F_1^{\ 2} - 2RF_1 \cos 35°$$

$$\Rightarrow F^{\ 2} = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cos 35°$$

$$\Rightarrow F_2^{\ 2} = 100 + 144 - 196{,}596$$

$$\Rightarrow F_2^{\ 2} = 47{,}404$$

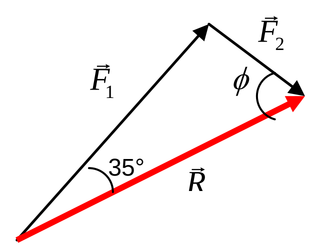
$$\Rightarrow F_2 = \sqrt{47{,}404}$$

$$\boxed{\Rightarrow F_2 = 6{,}885[ud]}$$

El ángulo formado entre los dos vectores es $35° + \phi$, por lo tanto la tarea es determinar el ángulo ϕ. Para esto es posible utilizar teorema del seno en la misma figura, es decir:

$$\frac{sen\phi}{F_1} = \frac{sen35°}{F_2}$$

$$\Rightarrow sen\phi = \frac{F_1 sen35°}{F_2}$$



$$\Rightarrow sen\phi = \frac{12 sen35°}{6{,}885}$$

$$\Rightarrow sen\phi = 0{,}99969$$

$$\Rightarrow \phi = sen^{-1}(0{,}99969)$$

$$\boxed{\Rightarrow \phi = 88{,}584°}$$

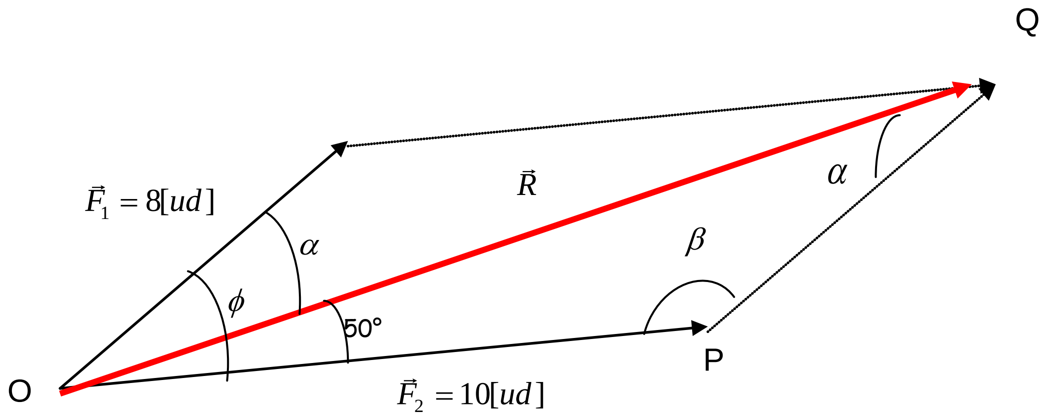
Por lo tanto el ángulo formado entre los vectores es $35° + 88{,}584° = 123{,}584°$

PROBLEMA n°7

Calcular el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de longitud, cuando su resultante forma un ángulo de 50° con el vector mayor. Calcular la magnitud del vector resultante.

Solución:

Sean $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ los vectores, entonces es posible construir la siguiente gráfica:

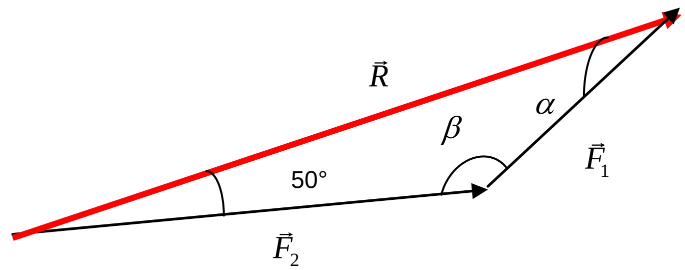


El ángulo formado por los dos vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es $\phi = \alpha + 50°$

Según los datos, es posible aplicar el teorema del seno en triángulo OPQ para determinar el valor del ángulo α,
es decir:

$$\frac{sen\alpha}{F_2} = \frac{sen50°}{F_1}$$

$$\Rightarrow sen\alpha = \frac{F_2 sen50°}{F_1}$$



$$\Rightarrow sen\alpha = \frac{10sen50°}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha = sen^{-1}\left(\frac{10sen50°}{8}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha = 73{,}247°}$$

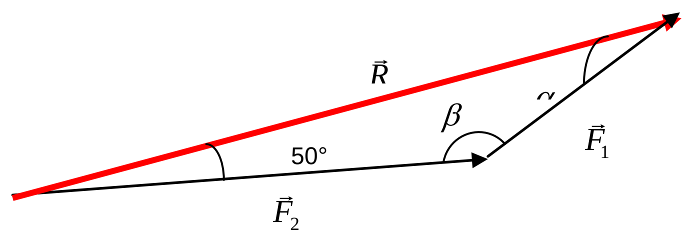
Por lo tanto el ángulo formado por los dos vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es $\phi = \alpha + 50° = 123{,}247°$

Conocido el ángulo α, es posible determinar el ángulo β ya que:

$$50° + \alpha + \beta = 180°$$

$$\Rightarrow \beta = 180° - 50° - \alpha$$

$$\Rightarrow \beta = 56{,}753°$$



Aplicando nuevamente el teorema del seno es posible determinar el valor de la resultante $\vec{R}$.

$$\frac{sen50°}{F_1} = \frac{sen\beta}{R}$$

$$\Rightarrow Rsen50° = F_1 sen\beta$$

$$\Rightarrow R = \frac{F_1 sen\beta}{sen50°}$$

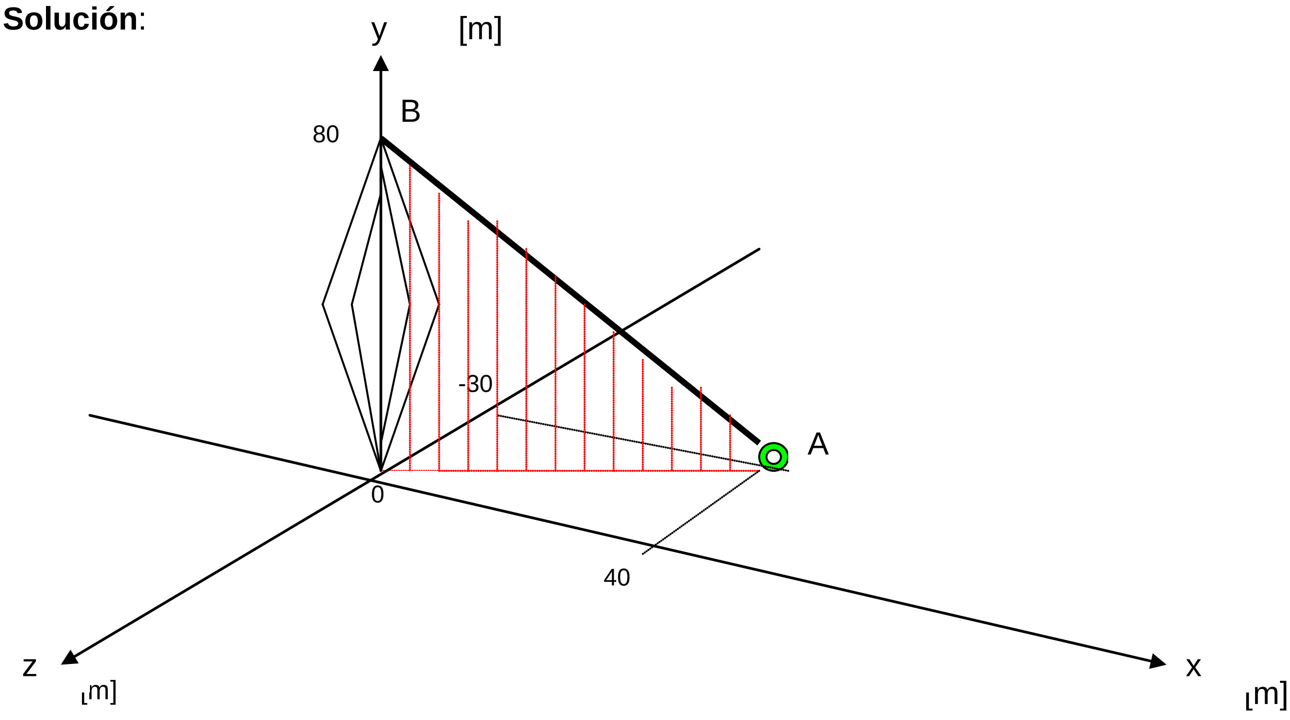
$$\Rightarrow R = \frac{8sen56{,}753°}{sen50°}$$

$$\boxed{\Rightarrow R = 8{,}734[ud]}$$

PROBLEMA n°8

Un viento de alambre de una torre está anclado mediante un perno en A. La tensión en el alambre es de 2500 [N].Determinar: (a) Las componentes $\vec{F}_X, \vec{F}_y, \vec{F}_Z$ de la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el perno A, (b) los ángulos $\theta_x, \theta_y y \theta_z$ que el alambre forma con los ejes coordenados.

Solución:



En este caso, se tiene un vector en un sistema coordenado tridimensional. Como se conoce las posiciones de origen y termino del vector $\vec{F}$ resulta cómodo utilizar el concepto de vector unitario para determinar sus componentes, esto es:

$$\vec{F} = F \cdot \hat{e}$$

Siendo F la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ (tensión del alambre) y $\hat{e}$ el vector unitario en la dirección AB. Por lo tanto:

$$\vec{F} = 2500[N] \cdot \frac{-40\hat{i} + 80\hat{j} + 30\hat{k}}{\sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2}}$$

Realizando la operatoria resulta

$$\Rightarrow \vec{F} = -1060\hat{i} + 2120\hat{j} + 795\hat{k}[N]$$

$$\Rightarrow \vec{F}_X = -1060[N]$$
$$\Rightarrow \vec{F}_y = 2120[N]$$
$$\Rightarrow \vec{F}_Z = 795[N]$$

Componentes rectangulares de la fuerza $\vec{F}$

Cálculo de los ángulos $\theta_x,\theta_y,\theta_z$:

$$\cos\theta_x = \frac{\vec{F}_X}{F}$$
$$\Rightarrow \theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{F}_X}{F}\right)$$
$$\Rightarrow \theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{-1060[N]}{2500[N]}\right)$$
$$\boxed{\Rightarrow \theta_X = 115{,}087°}$$

$$\cos\theta_y = \frac{\vec{F}_Y}{F}$$

$$\Rightarrow \theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{F}_Y}{F}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_Y = \cos^{-1}\left(\frac{2120[N]}{2500[N]}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta_Y = 32{,}0°}$$

$$\cos\theta_z = \frac{\vec{F}_Z}{F}$$

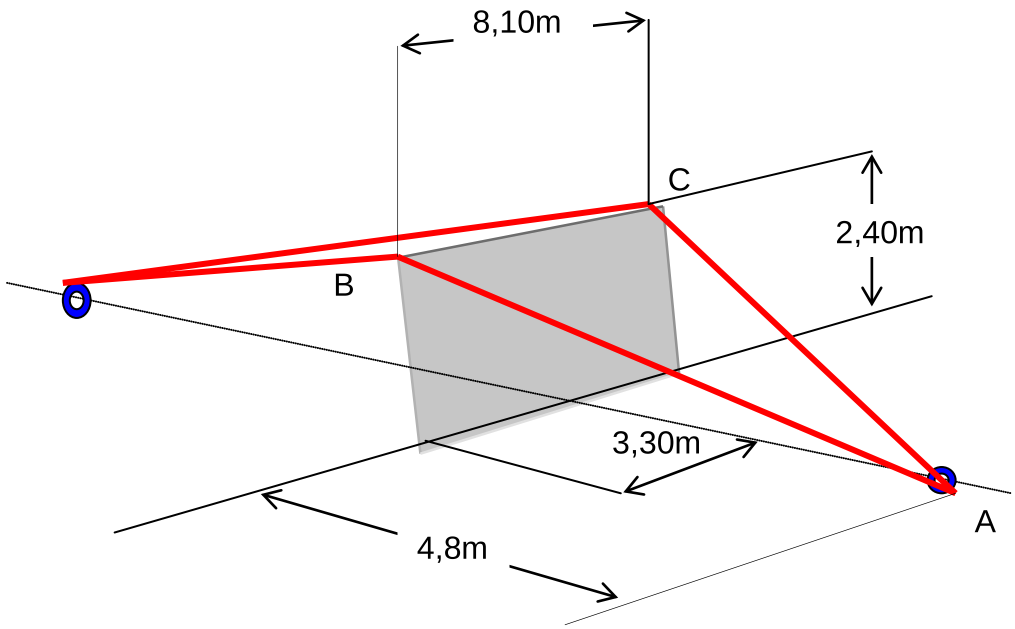
$$\Rightarrow \theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{F}_Z}{F}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_Z = \cos^{-1}\left(\frac{795[N]}{2500[N]}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta_z = 71{,}5°}$$

PROBLEMA n°9

Un tramo de muro de hormigón premoldeado se halla provisoriamente por los cables que se ilustran. Sabiendo que la tensión en el cable AB es de 4200[N] y de 6000 [N] en AC, hallar el módulo y la dirección de la resultante de las fuerzas que ejercen los cables AB y AC sobre la estaca A.

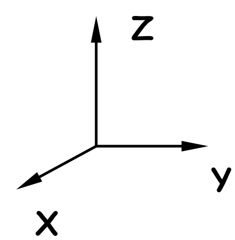


Solución

En este caso, corresponde a un sistema de dos vectores en el espacio y lo primero que se realizara será determinar las componentes de cada una de las dos fuerzas utilizando concepto de vector unitario, según la orientación de los ejes indicada, es decir:

$\vec{F}_1 = F_1 \cdot e_1$ Siendo e_1 el vector unitario en la dirección AC, es decir:

$$\vec{F}_1 = 6000[N] \cdot \frac{-4{,}8\hat{\imath} - 4{,}8\hat{\jmath} + 2{,}4\hat{k}}{\sqrt{(-4{,}8)^2 + (-4{,}8) + (2{,}4)^2}}$$



$$\boxed{\Rightarrow \vec{F}_1 = -4000\hat{\imath} - 4000\hat{\jmath} + 2000\hat{k}[N]}$$

y

$\vec{F}_2 = F_2 \cdot e_2$ Siendo e_2 el vector unitario en la dirección AB, es decir:

$$\vec{F}_2 = 4200[N] \cdot \frac{3{,}3\hat{\imath} - 4{,}8\hat{\jmath} + 2{,}4\hat{k}}{\sqrt{(3{,}3)^2 + (-4{,}8)^2 + (2{,}4)^2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F}_2 = 2200\hat{\imath} - 3200\hat{\jmath} + 1600\hat{k}[N]}$$

Conocido los vectores componentes $\vec{F}_1 y \vec{F}_2$ es posible determinar la resultante $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \text{ es decir:}$$

$$\vec{R} = \left(-4000\hat{\imath} - 4000\hat{\jmath} + 2000\hat{k}\right)[N] + \left(2200\hat{\imath} - 3200\hat{\jmath} + 1600\hat{k}\right)[N]$$

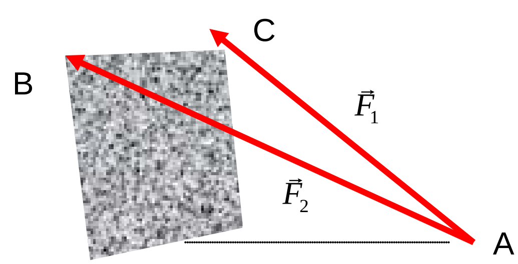
Reuniendo los términos semejantes se obtiene que:

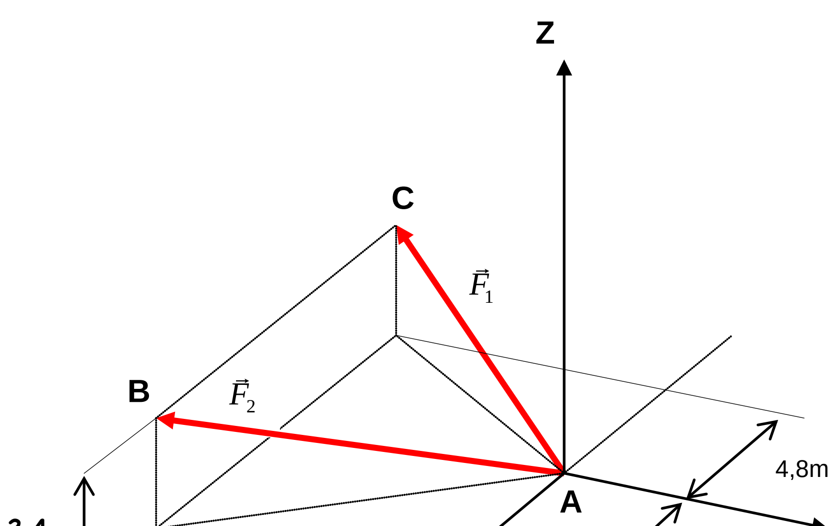
$$\vec{R} = -1800\hat{\imath} - 7200\hat{\jmath} + 3600\hat{k}[N] \text{ Vector resultante.}$$

Por lo tanto la magnitud de la resultante es:

$$R = \sqrt{(-1800)^2 + (-7200)^2 + (3600)^2}\,[N]$$

$$\boxed{\Rightarrow R = 8248{,}636[N]}$$





Calculo de ángulos directores:

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{R_X}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_X = \cos^{-1}\left(\frac{-1800}{8248{,}636}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta_x = 102{,}604°}$$

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_y}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{-7200}{8248{,}636}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta_y = 150{,}794°}$$

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{R}_z}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{3600}{8248{,}636}\right)$$

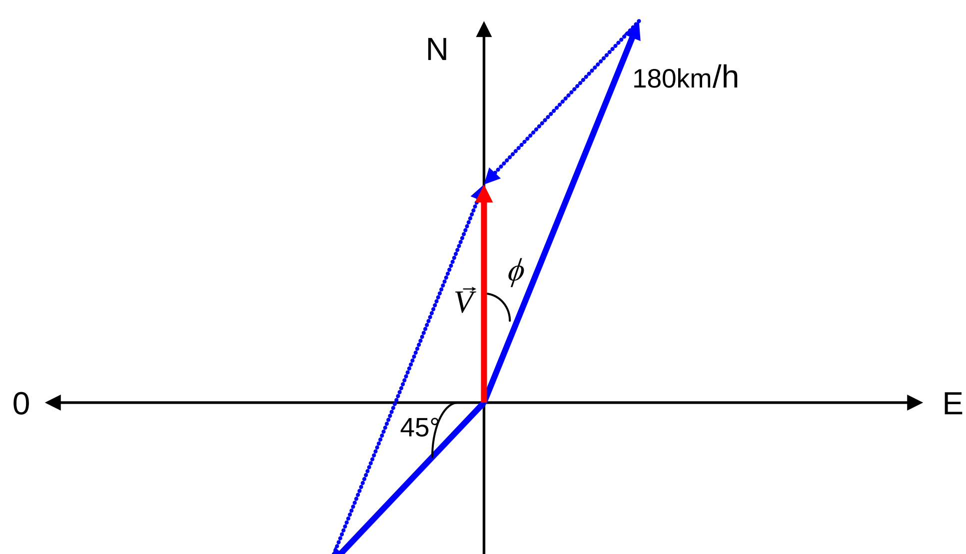
$$\boxed{\Rightarrow \theta_z = 64{,}123°}$$

Problema n°10

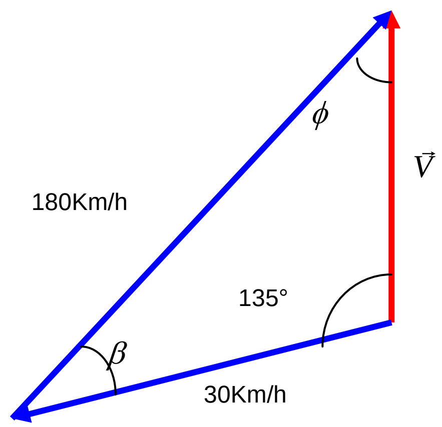
Un piloto de aviación desea volar hacia el norte. El viento sopla de noreste a suroeste a la velocidad de 30 [km/h] y la velocidad del avión respecto al aire es de 180 [Km/h]. (a)¿En que dirección debe mantener el piloto su rumbo? (b) ¿Cuál será su velocidad?

Solución:
En primer lugar es conveniente realizar un diagrama vectorial de las velocidades y para esto se debe considerar que la dirección noreste a suroeste significa justo a 45° entre estos puntos cardinales. Además si el piloto desea volar hacia el norte deberá seguir un rumbo hacia el noroeste ya que será desviado por la velocidad del viento de tal manera que la suma de estas dos velocidades tenga la dirección norte. La gráfica siguiente muestra tal situación.

Método del paralelogramo



Eligiendo el triángulo de fuerzas de la izquierda, se tiene:



Utilizando el teorema del seno es posible calcular el ángulo ϕ , es decir:

$$\frac{sen135°}{180} = \frac{sen\phi}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{30sen135°}{180} = sen\phi$$

$$\Rightarrow sen^{-1}\left(\frac{30sen135°}{180}\right) = \phi$$

$$\boxed{\Rightarrow \phi = 6{,}768°}$$ Rumbo que debe mantener el piloto

Para determinar la velocidad del piloto respecto a tierra, es necesario conocer el ángulo β .

$$\beta = 180° - (135° + \phi)$$

$$\Rightarrow \beta = 38{,}232°$$

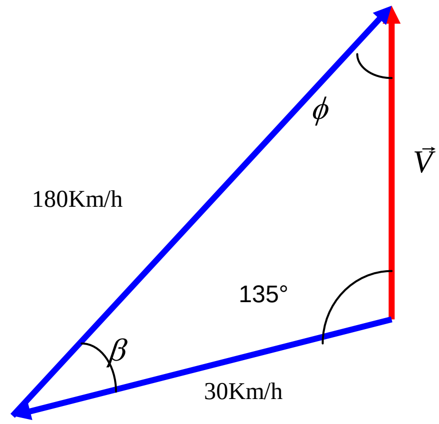
Utilizando nuevamente el teorema del seno, es posible determinar la velocidad del piloto respecto a tierra.

$$\frac{sen135°}{180}=\frac{sen\beta}{V}$$

$$\Rightarrow V\cdot sen135° = 180\cdot sen\beta$$

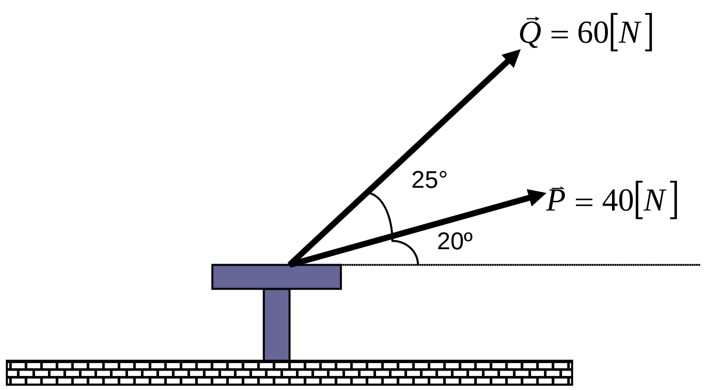
$$\Rightarrow V = \frac{180 sen38,232°}{sen135°}$$

$$\boxed{V = 157,532\left[\frac{Km}{h}\right]}$$

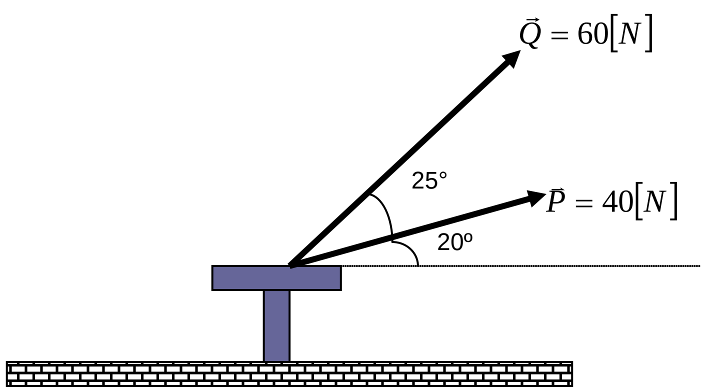


PROBLEMA n°11

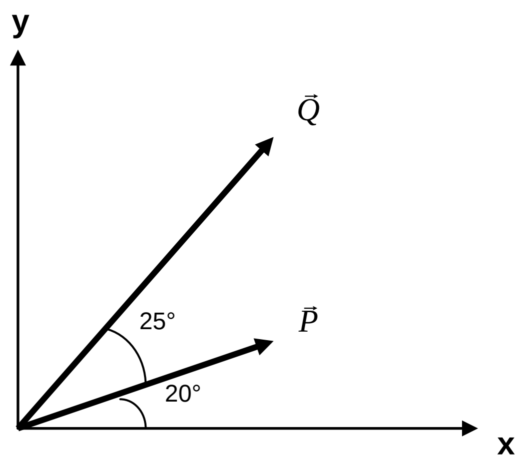
Las dos fuerzas $\vec{P} y \vec{Q}$ actúan sobre un tornillo, tal como indica la figura. Determine su resultante.



Solución:



Considerando un sistema coordenado rectangular se tiene:



Según método de las componentes (trabajar con las componentes rectangulares de cada vector), la resultante $\vec{R}$ queda determinada por:

$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$ y su magnitud por:

$$R = \sqrt{\vec{R}_x^{\,2} + \vec{R}_y^{\,2}}$$

Donde:

$$\vec{R}_x = P_x + Q_X \quad \text{y}$$
$$R_y = p_y + Q_y$$

Por lo tanto:

$$\vec{R}_x = 40[N]\cos 20° + 60[N]\cos 45°$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{R}_x = 80{,}014[N]}$$

Y

$$\vec{R}_y = 40[N]sen20° + 60[N]sen45°$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{R}_y = 56{,}107[N]}$$

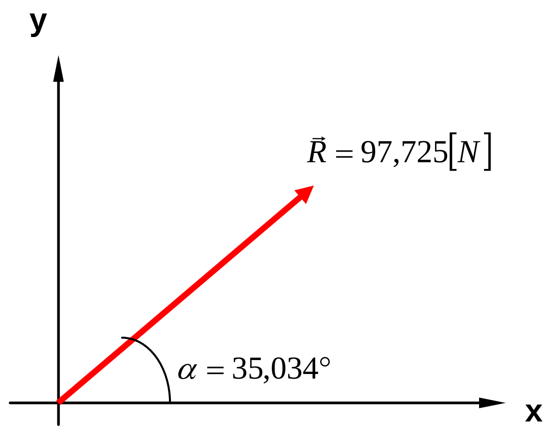
Luego el vector resultante es:

$$\vec{R} = 80{,}014\hat{\imath} + 56{,}107\hat{\jmath}[N]$$

Su magnitud corresponde a:

$$R = \sqrt{(80{,}014)^2 + (56{,}107)^2}[N]$$

$$\boxed{\Rightarrow R = 97{,}725[N]}$$



La dirección queda determinada por:

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{56{,}107}{80{,}014}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha = 35{,}034°}$$

Ejercicios Propuestos – Vectores

1. Dados los vectores $\vec{a} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ **;** $\vec{b} = -8\hat{i} - 7\hat{j} + 6\hat{k}$ **y** $\vec{c} = 7\hat{i} + \hat{j} + 10\hat{k}$
   El vector resultante de $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ es:

   a) $-16\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$
   b) $-2\hat{i} - 3\hat{j} - 23\hat{k}$
   c) $-1\hat{6} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$
   d) $-2\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$

2. Dados los vectores de la pregunta anterior, la magnitud de $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ es:

   a) 1,7029
   b) 17,029
   c) 170,29
   d) 0,1729

3. Dados los vectores de la pregunta 1, el producto escalar $\vec{b} \bullet \vec{c}$ es:

   a) 3
   b) 123
   c) -123
   d) –3

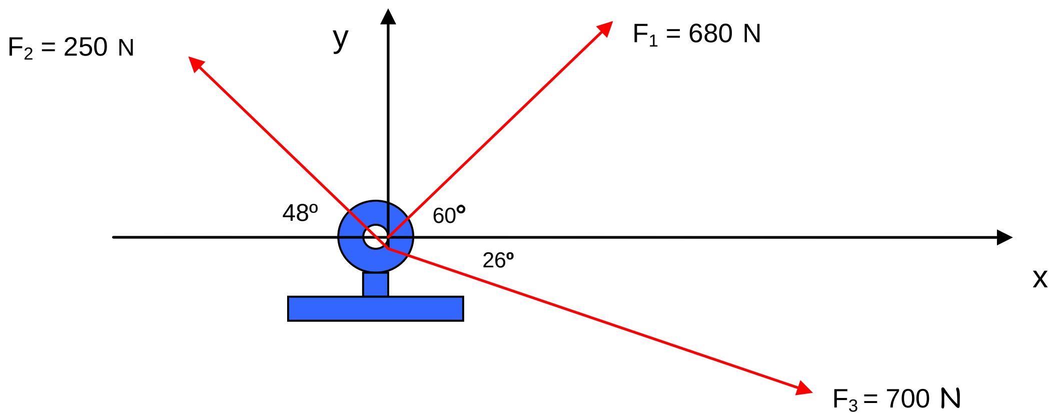
4. Dados los vectores de la pregunta 1, el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{c}$ es:
   a) $23\hat{i} + 59\hat{j} - 22\hat{k}$
   b) $37\hat{i} - 59\hat{j} + 22\hat{k}$
   c) $-23\hat{i} + 58\hat{j} - 22\hat{k}$

d) $23\hat{i}+59\hat{j}+22\hat{k}$

5. Dados los vectores de la pregunta 1, el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:
   a) 18,547º
   b) 62,782º
   c) 71,983º
   d) 82,562º

La figura nº 1 corresponde a los ejercicios 6, 7, 8 y 9

Figura nº 1



6. De acuerdo con la figura nº1, la componente x de la fuerza resultante es:
   a) 873,181 N
   b) 819,808 N
   c) 634,752 N
   d) 801,873 N

7. De acuerdo con la figura nº1, la componente y de la fuerza resultante es:

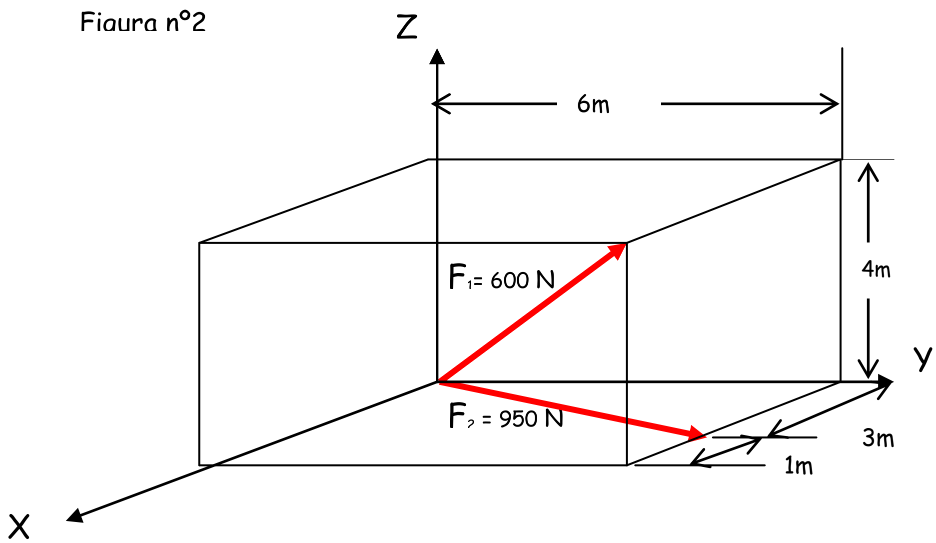
   a) 873,181 N
   b) 467,824 N
   c) 526,912 N
   d) 634,523 N

8. Según la figura nº1, el módulo de la fuerza resultante es:

   a) 9284 N
   b) 928,364 N
   c) 861,926 N
   d) 861926,56 N

9. De acuerdo con la figura nº1, la dirección de la fuerza resultante es:
   a) θ = -30,3º
   b) θ = 30,3º
   c) θ = 59,7º
   d) θ = 120,3º

La figura nº2, corresponde a los ejercicios 10, 11, 12 y 13.



10. Las componentes de la fuerza F_1, según la figura nº2 son:

   a) $-291{,}043\hat{i} + 291{,}043\hat{j} - 368{,}564\hat{k}$ N
   b) $291{,}043\hat{i} + 436{,}564\hat{j} + 291{,}043\hat{k}$ N
   c) $436{,}564\hat{i} + 291{,}043\hat{j} + 368{,}564\hat{k}$ N
   d) $368{,}564\hat{i} + 291{,}043\hat{j} - 436{,}564\hat{k}$ N

11. Las componentes de la fuerza F_2, según la figura nº2 son:

   a) $-424{,}853\hat{i} + 0\hat{j} - 849{,}706\hat{k}$ N
   b) $291{,}043\hat{i} - 436{,}564\hat{j} + 291{,}043\hat{k}$ N
   c) $-436{,}564\hat{i} + 291{,}043\hat{j} + 368{,}564\hat{k}$ N
   d) $424{,}853\hat{i} + 849{,}706\hat{j} + 0\hat{k}$ N

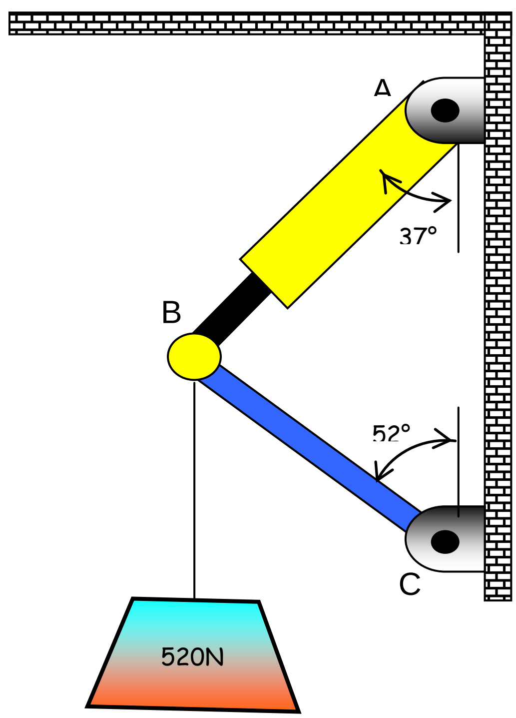
12. Según la figura nº2, la magnitud de la fuerza resultante $F_1 + F_2$ es:
   a) 1.383,211 N
   b) 1500,568 N
   c) 1761,358 N
   d) 1976,154 N

13. Según la figura nº2, el ángulo director en el eje x de la fuerza resultante $F_1 + F_2$ es:

   a) $\theta_x = 52,5º$
   b) $\theta_x = 61,505º$
   c) $\theta_x = 111,248º$
   d) $\theta_x = -71,954º$

La figura nº3, corresponde a los ejercicios 14 y 15.

Figura nº3



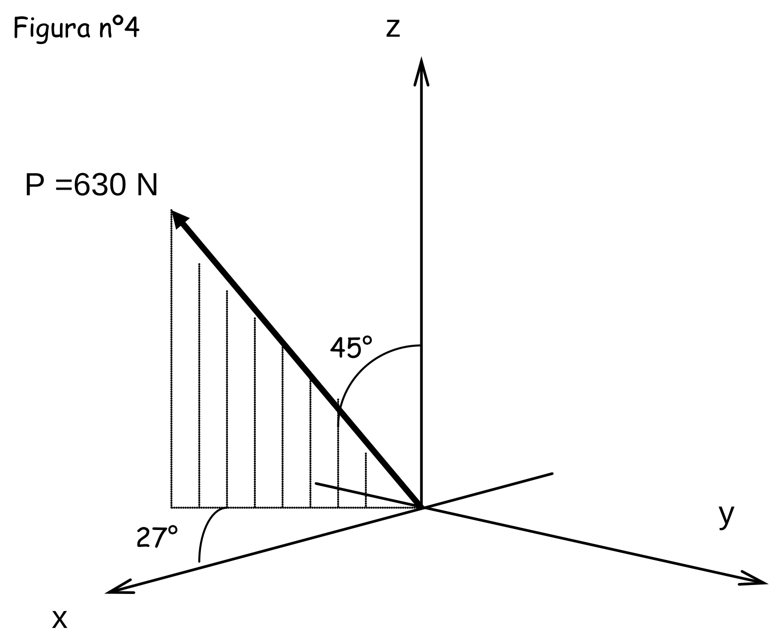
14. La magnitud de la componente del peso de 520N en la dirección BC del mecanismo indicado en la figura nº 3 es:

   e) 272,452 N
   f) 284,186 N
   g) 300,613 N
   h) 312,991 N

14. La magnitud de la componente del peso de 520N en la dirección AB del mecanismo indicado en la figura nº 3 es:

a) 272,452 N
b) 397,131 N
c) 4098280 N
d) 500,321 N

La figura nº4, corresponde al ejercicio 16

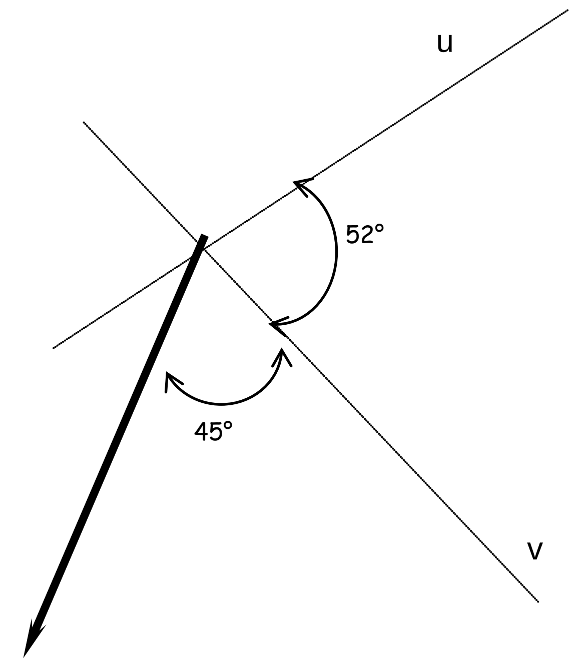


15. Las componentes rectangulares cartesianas de la fuerza P indicada en la figura nº4 son:

a) $396{,}923\hat{i} - 202{,}242\hat{j} + 445{,}477\hat{k}$ N
b) $202{,}242\hat{i} - 396{,}923\hat{j} + 202{,}242\hat{k}$ N
c) $445{,}477\hat{i} + 396{,}923\hat{j} + 202{,}242\hat{k}$ N
d) $-396{,}923\hat{i} + 202{,}242\hat{j} + 396{,}923\hat{k}$

La figura nº 5, se refiere a los ejercicios 17 y 18

Figura nº5



16. La magnitud de la componente de la fuerza de 1200 N de la figura nº5, en la dirección u es:

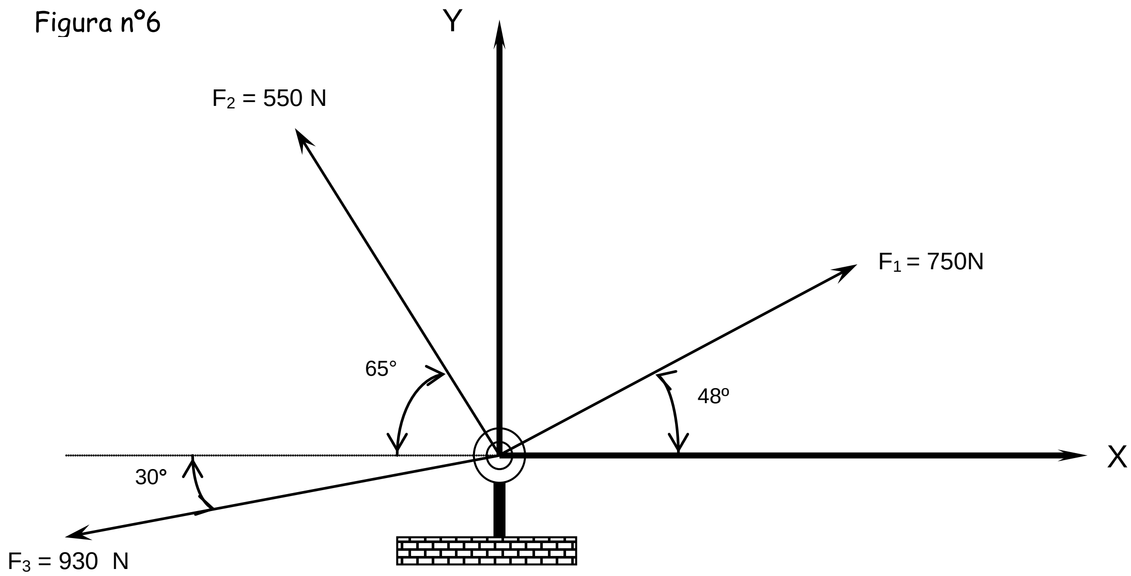
a) 848,528 N
b) 938,564 N
c) 668,649 N
d) 1076,798 N

18. La magnitud de la componente de la fuerza de 1200 N de la figura nº 5, en la dirección v es:

a) 848,528 N
b) 668,649 N
c) 1511,471 N
d) 1176,798 N

La figura nº6, se refiere a los ejercicios 19, 20, 21 y 22.

Figura n°6



19. De acuerdo con la figura 6, la componente X de la fuerza resultante es:

a) - 535,996 N
b) - 663,874 N
c) - 698,556 N
d) - 724,528 N

20. De acuerdo con la figura 6, la componente Y de la fuerza resultante es:

a) 590,828 N
b) 768,649 N
c) 1311,571 N
d) 1676,755 N

21. La magnitud de la fuerza resultante del sistema de la figura 6 es:

a) 490,628 N
b) 768,649 N
c) 797,727 N
d) 636369,016 N

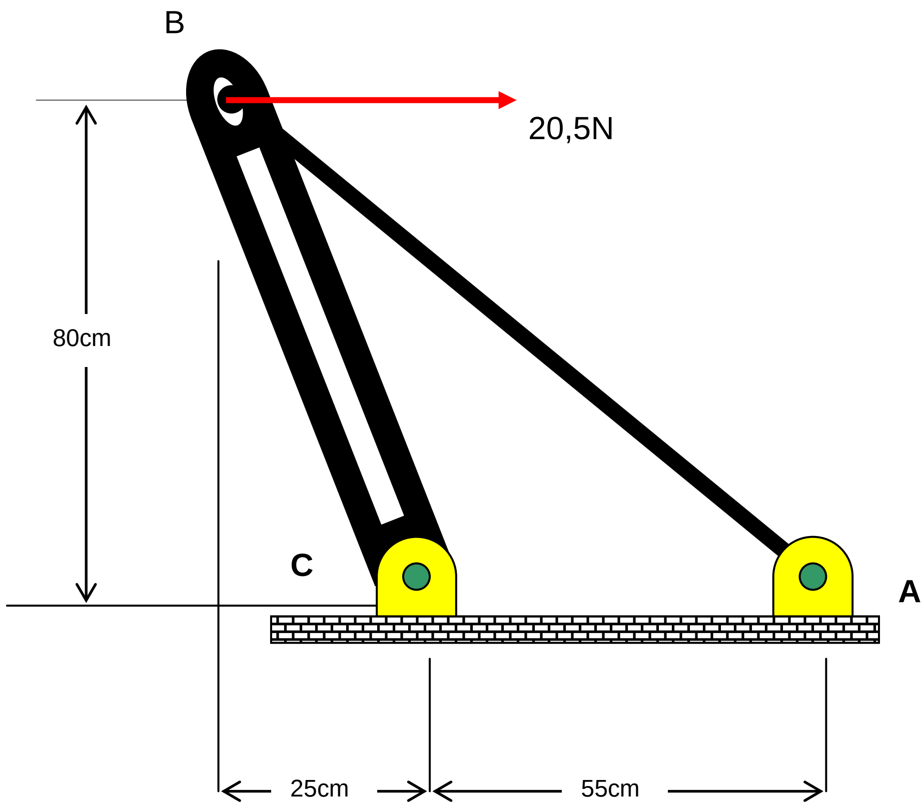
22. La dirección de la resultante del sistema de fuerzas de la figura 6 es:

a) 39,628º
b) 42,649º

c) 47,785º
d) 56,369º

La figura nº 7, se refiere a los ejercicios 23 y 24

Figura nº7



23. La magnitud de la componente de la fuerza de 20,5N en la dirección AB del mecanismo indicado en la figura nº7 es:

a) 42,169 N
b) 49,153 N
c) 56,298 N
d) 59,387 N

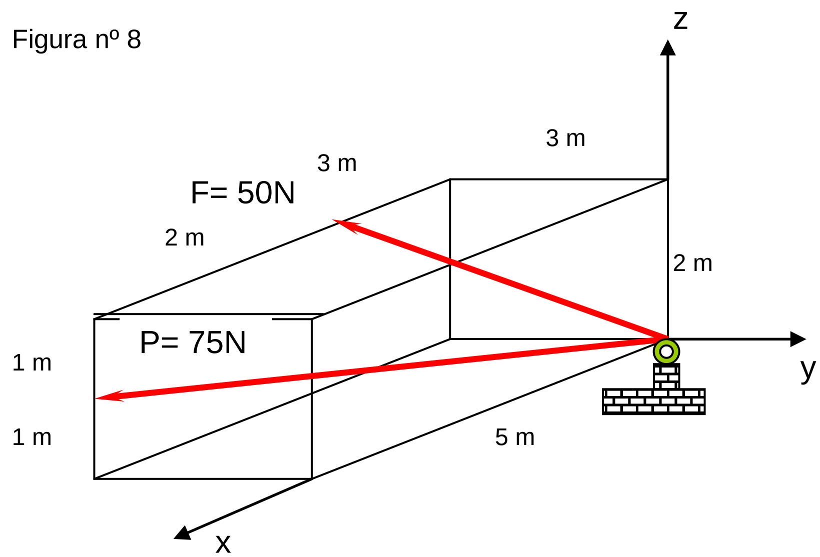
24. La magnitud de la componente de la fuerza de 20,5N en la dirección BC del mecanismo indicado en la figura nº7 es:

a) 12,579 N
b) 27,256 N
c) 31,240 N

d) 44,397 N

La figura nº 8, se refiere a los ejercicios 25, 26, 27, y 28

Figura nº 8



25. Las componentes rectangulares de la fuerza F de la figura nº 8 son
   a) $12{,}540\hat{i} - 31{,}980\hat{j} + 54{,}842\hat{k}$ N
   b) $25{,}637\hat{i} - 28{,}998\hat{j} + 21{,}320\hat{k}$ N
   c) $31{,}980\hat{i} - 31{,}980\hat{j} + 21{,}320\hat{k}$ N
   d) $44{,}351\hat{i} - 44{,}351\hat{j} + 12{,}540\hat{k}$ N

26. Las componentes rectangulares de la fuerza P de la figura nº8 son:
   a) $15{,}320\hat{i} - 44{,}564\hat{j} + 54{,}842\hat{k}$ N
   b) $45{,}662\hat{i} - 31{,}874\hat{j} + 33{,}558\hat{k}$ N
   c) $31{,}980\hat{i} - 31{,}980\hat{j} + 21{,}320\hat{k}$ N
   d) $63{,}387\hat{i} - 38{,}032\hat{j} + 12{,}677\hat{k}$ N

27. La magnitud de la fuerza resultante F + P de la figura nº 8 es:

   a) 123,095 N
   b) 155,894 N
   c) 163,285 N
   d) 198,721 N

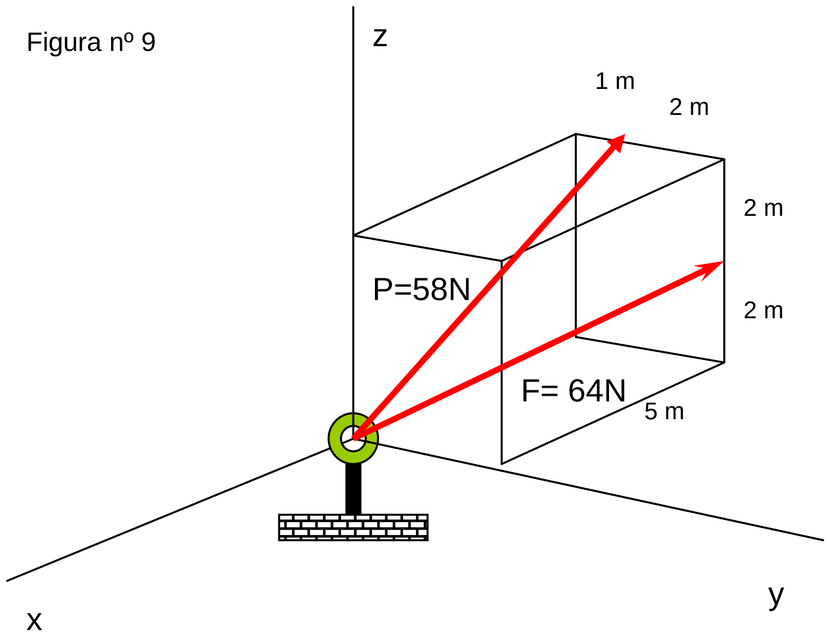
28. El ángulo director de la resultante F + P de la figura nº 8 respecto al eje x vale:

   a) 39,218º
   b) 48,236º

c) 51,772º
d) 58,056º

La figura nº 9, se refiere a los ejercicios 29, 30, 31 y 32

Figura nº 9



29. Las componentes rectangulares de la fuerza F de la figura nº 9 son:

a) $-39{,}842\hat{i} - 24{,}554\hat{j} + 29{,}356\hat{k}$ N
b) $-33{,}589\hat{i} + 44{,}581\hat{j} + 50{,}221\hat{k}$ N
c) $-25{,}339\hat{i} - 34{,}115\hat{j} + 18{,}952\hat{k}$ N
d) $-51{,}911\hat{i} + 31{,}147\hat{j} + 20{,}764\hat{k}$ N

30. Las componentes rectangulares de la fuerza P de la figura nº 9 son:

a) $-44{,}748\hat{i} + 8{,}950\hat{j} + 35{,}798\hat{k}$ N
b) $-33{,}589\hat{i} - 44{,}581\hat{j} + 50{,}221\hat{k}$ N
c) $-50{,}335\hat{i} - 41{,}325\hat{j} + 24{,}115\hat{k}$ N
d) $-61{,}335\hat{i} + 44{,}664\hat{j} + 32{,}472\hat{k}$ N

31. La magnitud de la fuerza resultante F – P de la figura nº 9 es:

a) 18,872 N
b) 22,594 N

c) 27,750 N
d) 33,628 N

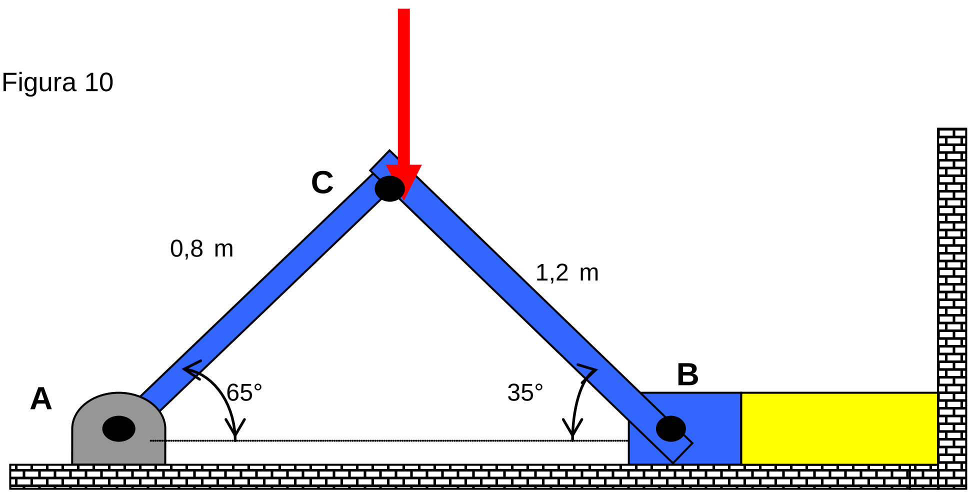
32. El ángulo director de la resultante F - P de la figura nº 9 respecto al eje y vale:

a) 39,218º
b) 36,880º
c) 55,678º
d) 63,223º

Preguntas 33 y 34

El miembro CB del tornillo de banco representado en la figura10, ejerce sobre el bloque B una fuerza F dirigida según la recta CB. Se sabe que F tiene una componente horizontal de 1400 N.

Figura 10



33. El módulo de la fuerza F de la figura 10 vale:

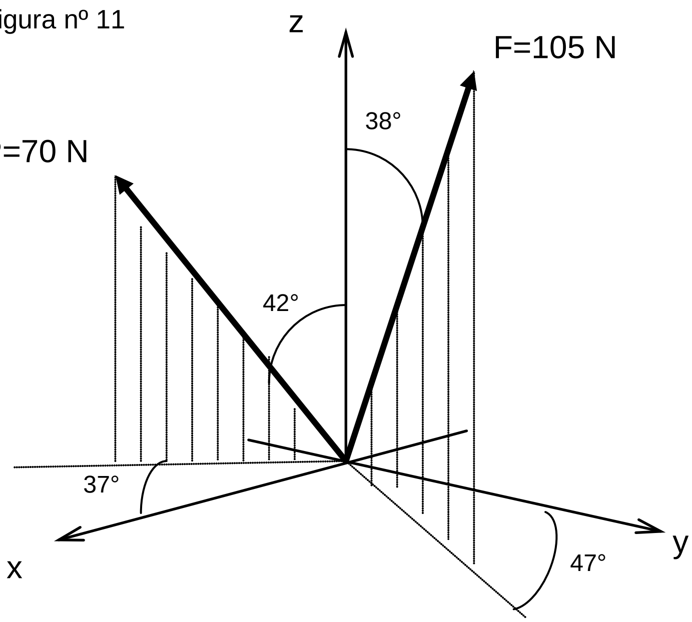
a) 1437,854 N
b) 1664,329 N
c) 1709,084 N
d) 2147,556 N

34. El módulo de la componente vertical de la fuerza F de la figura 10 vale:

a) 980,291 N
b) 1664,329 N
c) 1856,442 N
d) 2020,541 N

La figura nº 11, corresponde a las preguntas 35, 36, 37 y 38

Figura nº 11



35. Las componentes rectangulares de la fuerza P de la figura nº 11 son:

a) $24{,}748\hat{i} + 9{,}950\hat{j} + 55{,}798\hat{k}$ N
b) $33{,}589\hat{i} - 34{,}231\hat{j} + 36{,}221\hat{k}$ N
c) $37{,}407\hat{i} - 28{,}188\hat{j} + 52{,}020\hat{k}$ N
d) $48{,}634\hat{i} - 55{,}210\hat{j} + 66{,}271\hat{k}$ N

36. Las componentes rectangulares de la fuerza F de la figura nº 11 son:

a) $36{,}225\hat{i} + 38{,}887\hat{j} + 61{,}296\hat{k}$ N
b) $47{,}278\hat{i} + 44{,}087\hat{j} + 82{,}741\hat{k}$ N
c) $54{,}664\hat{i} + 48{,}663\hat{j} + 74{,}582\hat{k}$ N
d) $68{,}229\hat{i} + 33{,}941\hat{j} + 88{,}378\hat{k}$ N

37. La magnitud de la fuerza resultante F + P de la figura nº 11 vale:

a) 128,394 N
b) 137,492 N
c) 146,451 N
d) 159,953 N

38. El ángulo director de la fuerza resultante F + P de la figura nº 11, respecto al eje z vale:

a) 32,595º

b) 44,367º
c) 48,564º
d) 58,923º

Pregunta	a	b	c	d
1	x			
2		x		
3				x
4	x			
5			x	
6				x
7		x		
8		x		
9		x		
10		x		
11				x
12		x		
13		x		

Pregunta	a	b	c	d
14				x
15			x	
16	x			
17				x
18		x		
19	x			
20	x			
21			x	
22			x	
23	x			
24			x	
25			x	
26				x

Pregunta	a	b	c	d
27	x			
28	x			
29				x
30	x			
31			x	
32		x		
33			x	
34	x			
35			x	
36		x		
37				x
38	x			

BIBLIOGRAFÍA

- Paúl E. Tippens	- Física, Conceptos y Aplicaciones M^c Gaw Hill, Quinta Edición, 1996
- Halliday – Resnick – Krane	- Física , Vol. 1 CECSA, 4ª Edición 1999
- Raymond A. Serway	- Física, Tomo I M^c Gaw Hill, 4ª Edición 1999
- Sears – Zemansky - Young - Freedman	- Física Universitaria, Vol. 1 Ed. Pearson, 9ª Edición 1996
- Frederick Bueche	- Fundamentos de Física, Tomo I
- F. Beer – R. Johnston	- Mecánica Estática Vectorial para Ingenieros. Estática M^c Gaw Hill, 6ª Edición. 2000
- M. Alonso – E Finn	Física Addison Wesley, 1995