LECTURA

TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

Técnicas de optimización

Pappas y Brigham Fundamentos de Economía y Administración Edit. Mc Graw HiII 1989

TEMA 2. *ECONOM/A y ESTRA TEGIAS DE LA EMPRESA.*

Técnicas de optimización

Optimización es el proceso de determinar la mejor solución posible pan un problema dado. Si sólo es posible una solución o un acto no existirá ningún problema de toma de decisiones ni podrá aplicarse la optimización. Sin embargo « si existe cierto número de modos alternativos de proceder, será óptimo el que produzca el resultado que vaya más de acuerdo con la meta de quien deba tomar la decisión. Optimización es la determinación de esa acción o decisión mejor

OPTIMIZACION: MAXIMIZACION DEL VALOR DE LA EMPRESA

En economía administrativa, el objetivo primordial de la administración se supone que es la elevación al máximo del valor de la empresa. Este objetivo se expresa en la ecuación 2-1: que se presentó en el capítulo 1.[1] La maximización de la ecuación 2-1 es una tarea compleja, que incluye las determinantes de ingresos, costos y la tasa de descuento en cada año futuro de algún horizonte de tiempo no especificado. Además, los ingresos, los costos y la tasa de descuento están interrelacionados, lo que complica el problema todavía más.

Para aclarar tanto el concepto como las dificultades implícitas, utilizaremos un ejemplo de las relaciones recíprocas que participan en la ecuación 2-1. Los ingresos totales de una empresa se determinan, en gran parte, por los productos que diseña, fabrica y vende, las estrategias de publicidad que utiliza, las normas de establecimiento de precios que aplica y el estado general de la economía. De manera típica, el departamento de mercadotecnia de la empresa prepara una pre-dicción de ventas sobre la base de un conjunto de suposiciones relativas a variables tales como los precios establecidos, las erogaciones de publicidad, la calidad de los productos, el nivel general de las actividades económicas, etcétera.

Simultáneamente, el departamento de producción examina las relaciones de costos implícitas en la producción de los artículos de la empresa. Este examen incluye UI'! análisis del costo de los sistemas alternativos de producción. Por ejemplo, por una parte, la empresa podría utilizar una planta pequeña y tiempo extra de trabajo; por otra, podría construir una planta mayor, aceptar costos fijos más elevados; pero evitar el tiempo extra de trabajo. Utilizando esta información y otras similares, el gerente de producción determina el método de menor costo para producir cada combinación alternativa de artículos.

Finalmente, el gerente financiero debe analizar las relaciones que existen entre la tasa de descuento y la mezcla de productos de la compañía, sus bienes físicos y su estructura financiera. Estos factores se combinan para determinar la tasa de descuento utilizada por los inversionistas (en la ecuación 2-1) para establecer un valor para la empresa.

Las decisiones de mercadotecnia, producción y finanzas -así como también las relacionadas con el personal, los transportes, etcétera- se deben combinar en un sistema integrado simple -que muestre el modo en que cualquier acción afecta a todas las diversas partes de la empresa, para determinar verdaderamente cuál es el modo óptimo de proceder.

La complejidad implícita en este método de optimización total integrada limita de manera típica el empleo del procedimiento para la toma de decisiones importantes de planeación. Para muchas decisiones operacionales cotidianas se utilizan técnicas de suboptimización u optimización parcial menos compleja. La optimización parcial se abstrae hasta cierto punto de la complejidad del método de optimización total, concentrándose en objetivos más limitados dentro de los diversos departamentos operacionales de la empresa. Por ejemplo, se requiere por lo común que el departamento de mercadotecnia determine los precios y las normas de publicidad que eleven al máximo las ventas, dada la línea de productos de la empresa.

En el capítulo 1 se señaló que la empresa funciona bajo ciertas limitaciones tales como las leyes antimonopolistas, los contratos laborales, los requisitos de control de la contaminación, etc. Podemos observar también que la empresa trata de maximizar las riquezas de sus *propietarios existentes,* de modo que cualquier acción que haga aumentar el valor de la empresa completa, reduciendo la riqueza de los propietarios actuales, no será óptima. En los capítulos posteriores expondremos de manera más explícita éstas y otras observaciones, tomando en consideración la cuestión de la riqueza en función de la felicidad o la utilidad.

Por su parte, el departamento de producción debe minimizar los costos de producción de una cantidad específica de productos de un nivel establecido de calidad.

El proceso de optimización, sin tomar en cuenta si es parcial o total, se lleva a cabo en dos etapas.

En primer lugar, se 'deben expresar las relaciones económicas en una forma adecuada para su análisis --en general, esto implica expresar el problema en términos analíticos. En segundo lugar, se aplican varias técnicas para determinar la solución óptima para el problema de que se trate. En este capítulo, presentamos primeramente cierto número de métodos muy utilizados para expresar las relaciones económicas y, a continuación, examinamos varios instrumentos analíticos relacionados entre sí, que se emplean con frecuencia en la segunda parte del método de optimización.>

METODOS DE EXPRESION DE LAS RELACIONES ECONOMICAS

Con frecuencia, para expresar las relaciones económicas, se utilizan ecuaciones, cuadros en los que se enumeran las relaciones y gráficas en las que se trazan dichas relaciones. Para los fines de que se trate, puede bastar con un cuadro o una gráfica. No obstante, cuando el problema sea verdaderamente complejo, se necesitarán ecuaciones, que harán necesario utilizar los poderosos instrumentos analíticos del álgebra y el cálculo.

Relaciones funcionales: ecuaciones

Es posible que el modo más sencillo de examinar los diversos medios de expresión de las relaciones económicas que acabamos de mencionar y, al mismo tiempo, obtener discernimiento de las técnicas de optimización, sea el tomar en consideración varias relaciones funcionales que desempeñan papeles clave en el modelo básico de evaluación. Tomemos primeramente en consideración una relación hipotética entre la producción, Q, y los ingresos totales, *TR.* Mediante una notación funcional, podemos expresar la relación en términos generales como sigue:

$$TR = f(Q).$$

La ecuación 2-2 se lee "Ingresos totales en función de la producción". El valor de la variable dependiente, ingresos totales se determina por medio de la variable independiente, la producción."

La ecuación 2-2 no indica la relación específica entre la producción y los ingresos totales sino que establece simplemente que existe cierta relación entre ambas incógnitas. Puede obtenerse una expresión más específica de la relación funcional mediante la ecuación:

$TR = \$1.50Q$. (2-3)

2Se deja para el capítulo 7 una técnica importante de optimización, la programación lineal, y se analiza en ese punto junto con las decisiones de producción.

3En cualquier ecuación como ésta, la variable situada a la izquierda del signo igual se denomina *variable dependiente,* puesto que su valor *depende* de la magnitud de la o las variables situadas a la derecha de dicho signo igual. Las variables a la derecha del signo igual se conocen como *variables independientes,* debido a que sus valores se determinan exteriormente, o bien, en forma *independiente,* del modelo expresado en la ecuación.

En este caso, se especifica el modo preciso en que se relaciona el valor de la variable dependiente con la independiente: Los ingresos totales son siempre iguales a,¡.$1.5 por la cantidad de productos vendidos.

Relaciones funcionales: cuadros y gráficas

Además de las ecuaciones, se utilizan con frecuencia cuadros y gráficas para expresar relaciones económicas. Por ejemplo los datos que figuran en el cuadro 2-1, expresan exactamente la misma relación funcional especificada por la ecuación 2-3 y esa misma función se ilustra en forma gráfica en la figura 2-1. Los tres métodos de expresión de las relaciones desempeñan un papel importante en' la presentación y los datos de análisis para la toma de decisiones administrativas.

CUADRO 2-1. Relación entre los ingresos totales y la producción:

Ingresos totales = $1.50 X Producción.

Ingresos totales	Producción
$1.5	1
3.0	2
4.5	3
6.0	4
7.5	5
9.0	6

RELACIONES TOTALES, MARGINALES y PROMEDIO

Las relaciones totales, marginales y promedio son muy útiles en el análisis de optimización. Las definiciones de totales y promedios se conocen demasiado bien para que sea preciso volver a enunciarlas; sin embargo, quizá sea apropiado definir el término "marginal". *Una relación marginal se define como el cambio de la variable dependiente de una función que se asocia al cambio unitario de una de las variables independientes.* En la función de ingresos totales, los ingresos marginales son el cambio de los ingresos totales que se asocian a un cambio de una unidad de producción.

Puesto que la esencia misma del método de optimización implica el análisis de los cambios, el concepto marginal tiene una importancia crítica. Por lo común, se analiza una función objetiva plenamente especificada, modificando las diversas variables independientes para ver cuáles son los efectos de esos cambios sobre la variable dependiente. En otras palabras, se examinan los efectos *marginales* de los cambios en las variables independientes sobre la variable dependiente. Evidentemente, la finalidad del análisis es localizar el conjunto de valores para las variables independientes que hagan que la función objetiva sea óptima.!

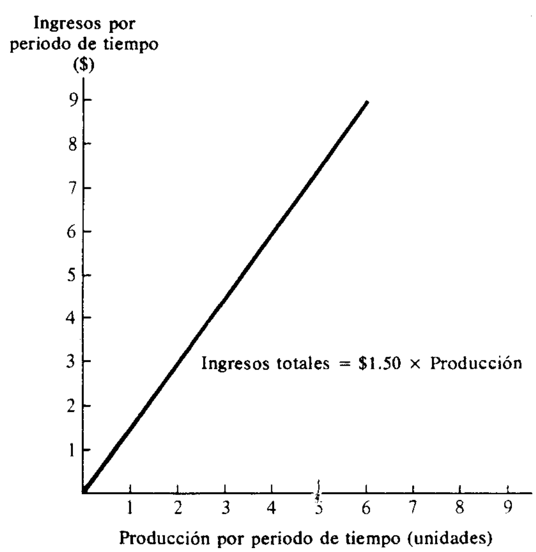

FIG. 2-1. Gráfica de la relación entre los ingresos totales y la producción.

Relaciones entre totales y marginales

En el cuadro 2-2 se muestran las relaciones entre totales, marginales y promedios para una función hipotética de beneficios. En las columnas I y 2 aparece la relación supuesta entre producción y beneficios; en la columna 3 se muestran los beneficios marginales para los cambios unitarios de producción y en la el s[- da la ganancia promedio por unidad de producción.

Los beneficios marginales se refieren al cambio en las ganancias debido él un cambio de una unidad en la producción. Por ejemplo, los beneficios marginales de la primera unidad de producción son de 19 dólares. Se trata del cambio que se produce a partir de las ganancias $0 relacionadas a una producción O unidades a los beneficios de $19 obtenidos al producir una unidad. De manera similar, los beneficios marginales de 33 dólares que se asocian a la segunda unidad de producción son el aumento de los beneficios totales ($52 - $19) que se produce cuando se incrementa la producción de una a dos unidades.

4En economía administrativa no nos interesan con frecuencia los cambios de una unidad, sino los efectos que tienen los cambios a lo largo de gamas más amplias. El análisis de esos cambios más amplios, que se define como *análisis de incrementos,* se puede entender con mayor facilidad después de comprender la naturaleza de las relaciones básicas existentes, a medida que se van desarrollando en el *análisis marginal.* De acuerdo con ello, tanto en este capítulo como en el resto del texto, presentaremos en general los elementos básicos de la teoría económica de acuerdo con el análisis marginal y, a continuación, trataremos de mostrar cómo se modifican y utilizan los conceptos marginales en el análisis de incrementos.

CUADRO 2-2. Relaciones entre los totales, los marginales y los promedios para una función hipotética de beneficios.

Unidades de producción (1)	Beneficios totales (2)	Beneficios marginales = cambio en los beneficios totales* (3)	Beneficios promedio = (2) ÷ (1) (4)
0	$ 0	$ 0	—
1	19	19	$19
2	52	33	26
3	93	41	31
4	136	43	34
5	175	39	35
6	210	35	35
7	217	7	31
8	208	—9	26

*Beneficios marginales = Δ beneficios = beneficios $_Q$ — beneficios totales $_{Q-1}$. El símbolo Δ, que se lee "delta", indica diferencia o cambio.

Obsérvese que los beneficios totales para cualquier nivel de producción son siempre iguales a la suma de todas las ganancias marginales hasta dicho nivel de producción. Los beneficios de 136 dólares que se asocian a cuatro unidades de producción, son iguales a la suma de los beneficios marginales de la primera, la segunda, la tercera y la cuarta unidad de producción; o sea, $136 = $19 + $33 + $41 +,' $43. *Para cualquier relación económica, la función total será siempre igual ala suma de todos los valores marginales precedentes.*

La importancia de la relación entre el total y el marginal en el análisis de optimización se basa en el hecho de que cuando el marginal es positivo, el total aumenta, y cuando el marginal es negativo, disminuye. Los datos que figuran en el cuadro 2-2 se pueden utilizar también para ilustrar este punto. Los beneficios marginales que se asocian a cada una de las primeras siete unidades de producción son positivos y los beneficios totales se incrementan al mismo tiempo que la producción, a 10 largo de esta gama. Puesto que los beneficios marginales de la octava unidad son negativos, las ganancias se reducen al elevarse la producción a ese nivel. Así, se produce una maximización de la función de beneficios -o cualquier otra función- en el punto en que la relación marginal pasa de positiva a negativa. Esta relación se verá en forma más detallada en este mismo capítulo, un poco más adelante.

Relaciones entre promedios y marginales

La relación entre. valores promedio y marginales resulta también muy importante en el análisis de optimización. Puesto que el marginal representa el cambio en el total, de ello se desprende que, cuando el marginal es mayor que el promedio, este último debe incrementarse. Por ejemplo, si 10 jugadores de fútbol tienen un promedio de 100 kilogramos y un undécimo jugador (el marginal) pesa 110 kilos y se agrega al equipo, el peso promedio del equipo aumentará. De manera similar, si el jugador marginal pesa menos de 100 Kg, el promedio disminuirá.

Una vez más, se pueden utilizar los datos que figuran en el cuadro 2-2 para ilustrar la relación entre el marginal y el promedio. Al pasar de cuatro unidades de producción a cinco, los beneficios marginales, de 39 dólares, son mayores que el promedio de 34 dólares para cuatro unidades; por ende, los beneficios promedio aumentan a 35 dólares. Sin embargo, los beneficios marginales asociados a la sexta unidad, son de 35 dólares, o sea, iguales al promedio, por lo que los beneficios promedio permanecerán sin cambios entre 5 y 6 unidades. Finalmente, las ganancias marginales de la séptima unidad se encuentran por debajo del promedio y esto hace que los beneficios promedio disminuyan.

Trazado de gráficas de las relaciones entre el total, el marginal y el promedio

Las relaciones entre totales, marginales y promedios se pueden mostrar en forma geométrica. En la figura *2-2(a)* se presenta una gráfica de la relación hipotética entre los beneficios y la producción que se da en el cuadro 2·2. Cada punto de la curva representa una combinación total de beneficios y producción, al igual que las columnas 1 y 2 del cuadro. En la misma forma en que existe una relación aritmética entre los totales, marginales y los promedios en el cuadro, hay una relación geométrica correspondiente en la figura. Las curvas para las tres cantidades tienen una relación matemática exacta entre sí, que hace que al darse cualquiera de ellas se puedan deducir las otras dos.

Para ver claramente esta relación tomemos en consideración primeramente los beneficios promedio por unidad de producción en cualquier punto a lo largo de la curva de beneficios totales. La cifra promedio es igual a los beneficios totales divididos por el número correspondiente de unidades de producción. Geométricamente, esta relación se representa por el gradiente de una línea a partir del origen hasta el punto de interés en la curva de beneficios totales. Por ejemplo, tomemos en consideración el gradiente de la línea desde el origen hasta el punto *B* de la figura *2-2(a).* El gradiente es una medida J de la inclinación de una línea y se define como el aumento (o la disminución) de altura por unidad de movimiento a lo largo del eje horizontal. El gradiente de una línea que pase por el origen se determina dividiendo la coordenada *Y* en cualquier punto de la línea por la coordenada *X* correspondiente." Así, la pendiente de la línea *OB* se puede calcular dividiendo $93 (la coordenada *Y* en el punto *B)* por 3 (1a coordenada *X* en el punto *B).* Sin embargo, obsérvese que en este proceso se dividen los beneficios totales por las unidades correspondientes de producción. Esta es la definición de los beneficios promedio en este punto. *Así, en cualquier punto a lo largo de una curva total, la cifra promedio correspondiente está dada por el gradiente de una línea recta a partir del origen hasta ese punto.*

La relación marginal tiene una asociación geométrica similar con la curva total. En el cuadro 2-2 se demostró que cada cifra marginal era el cambio en los

"En general, gradiente = *t!>.Y/tJ,X* = *(*Y_2 - Y,)/(X, - X,). Puesto que X, e y, son cero para cualquier línea que pase por el origen, gradiente = *Y,/X,* o bien, en forma más general, gradiente = *y/X.*

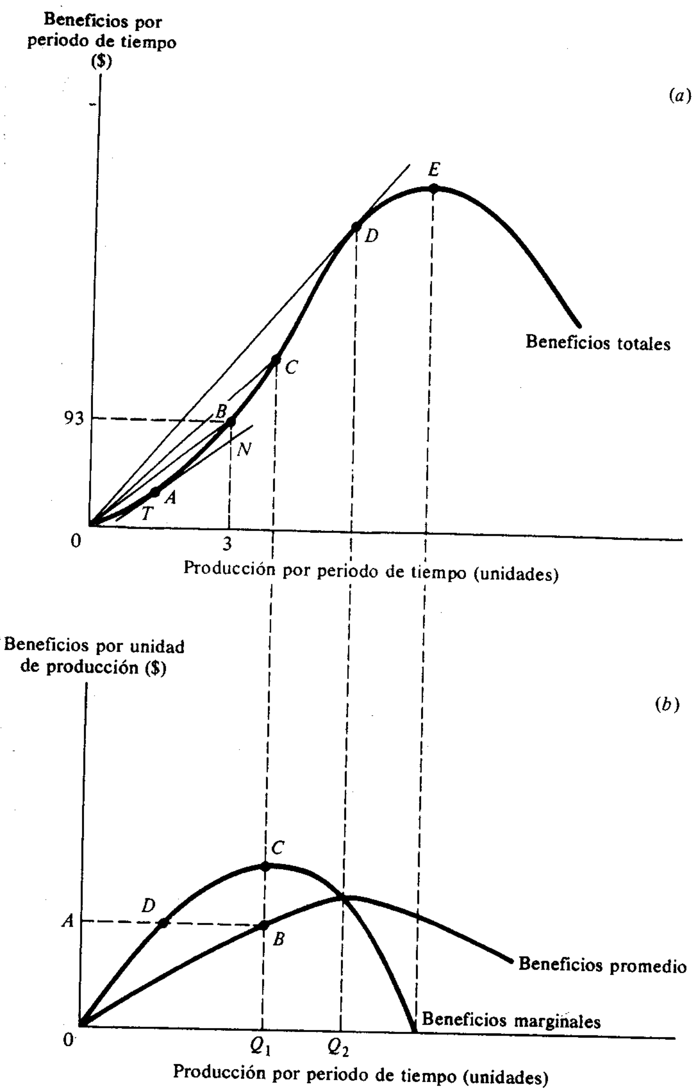

FIG. 2-2. Representación geométrica de las relaciones entre totales, marginales y promedios: *a*) Beneficios totales; *b*) Beneficios marginales y promedios.

Beneficios totales que se asociaba a la última unidad de incremento de la producción. Este aumento (o disminución)' en los beneficios totales asociado a un incremento de una unidad de producción es el *gradiente* de la curva total de beneficios en ese punto.

De manera típica, 'los gradientes de las curvas no lineales se determinan geornétricamente, trazando una' línea tangente a la curva en el punto de interés y determinando el gradiente de la tangente (tangente es una línea que toca a la curva sólo en un punto). Por ejemplo, en la figura 2-2 *(a),* los beneficios marginales en el punto *A* son iguales al gradiente de la curva total de beneficios en ese punto, que es igual al gradiente de la tangente marcada como *TAN, Por consiguiente, en cualquier punto a lo largo de una curva total, la cifra marginal correspondiente está dada por el gradiente de una línea trazada tangente* a *la curva total en ese punto.*

A continuación, podemos examinar varias relaciones importantes entre las cifras totales, marginales y promedio. En primer lugar obsérvese que el gradiente de la curva total de beneficios aumenta desde el origen hasta el punto C. O sea, las líneas trazadas tangentes a la curva de beneficios totales se hacen más pendientes a medida que el punto de tangencia se acerca al punto e, de modo que los puntos marginales se incrementan hasta ese punto. En el punto e, denominado *punto de inflexión,* el gradiente de la curva total de beneficios se eleva al máximo; por ende, en ese punto se maximizan los beneficios marginales (pero no el promedio ni el total). Entre los puntos e y *E,* debido a que los beneficios marginales siguen siendo positivos aun cuando disminuyan. los beneficios totales siguen aumentando. En el punto *E,* una tangente a la curva de beneficios totales tiene un gradiente de cero y, por ende. no aumenta ni disminuye. Por consiguiente. los beneficios marginales en ese punto son nulos y los beneficios totales se maximizan. Más allá de *E,* la curva de beneficios totales tiene un gradiente negativo y los beneficios marginales son negativos.

En la figura *2-2(a)* se muestran también las relaciones entre marginales y promedios, además de las existentes entre totales y promedios y totales y marginales. Obsérvese que los gradientes de las líneas trazadas desde el origen hasta los puntos situados en la curva de los beneficios totales, aumentan al desplazarse a lo largo de la curva hasta el punto *D.* Por ejemplo, la línea Oc, es más pendiente que la *OB,* y la *OD.* a su vez, tiene un mayor gradiente que la Oc. El promedio aumenta continuamente a lo largo de toda esta gama de beneficios totales. Mediante las relaciones entre los promedios y los valores marginales que se vieron antes. llegamos a la conclusión de que si el promedio aumenta, la cifra marginal correspondiente debe ser mayor que el promedio. Geométricamente. esto significa que el gradiente de la curva de beneficios totales en cualquier punto hasta *D* es mayor que el de una línea trazada desde el origen hasta ese punto sobre la curva,

En el punto *D,* una línea desde el origen es tangente a la curva de beneficios totales. Su gradiente es exactamente igual al de la curva total y. en este punto, los beneficios promedio son iguales a Jos marginales. Más allá de *D,* el gradiente de la curva de beneficios totales es menor que el de una línea trazada desde el origen, por lo que los beneficios marginales son menores que los promedios y estos últimos disminuirán al aumentar la producción más allá del punto *D,*

Curvas marginales y promedio: gráfica alternativa

En la figura *2-2(a),* se traza una gráfica de los beneficios marginales y los promedios en términos de los gradientes de la curva de beneficios totales y las líneas trazadas desde el origen hasta esa curva. Las cifras promedio y marginales se pueden trazar también directamente en función de la producción; esta última gráfica aparece en la figura 2-2(*h).*

También pueden verse claramente en la figura 2-2(*h)* las relaciones entre marginales y promedios que se analizaron en la sección anterior. En los bajos niveles de producción, donde la curva de beneficios marginales se encuentra por encima del promedio, este último aumenta. Aunque los beneficios marginales alcanzan un, valor máximo con la producción *Q1* y disminuyen a continuación, la curva promedio sigue. aumentando en tanto los beneficios marginales permanezcan por encima de ella. Para la producción *Q2'* los beneficios promedio y los marginales son iguales y, en ese punto, la curva de beneficios promedio alcanza su valor máximo. Más allá de *Q2* la curva marginal se encuentra por debajo del promedio " este último disminuye.

Deducción de los totales a partir
de la curva de valores marginales o promedios

En la misma forma en que resulta posible deducir las cifras de beneficios marginales o promedios de la curva de beneficios totales de la figura *2-2(a),* se pueden determinar también beneficios totales a partir de las curvas de beneficios marginales y promedios de las figuras *2-2(b).* Tomemos primeramente en consideración la deducción de los beneficios totales a partir de la curva promedio. Los beneficios totales son simplemente los promedios multiplicados por el número correspondiente de unidades de producción. Los beneficios totales que se asocian a *Q1* unidades de producción son los beneficios promedio, *A,* por la producción, *Q10* o bien, de manera equivalente, los beneficios totales son iguales al área del rectángulo *OABQ1'* Esta relación es válida para todos los puntos situados a lo largo de la curva de beneficios promedio.

Existe una relación similar entre los beneficios marginales y los totales. Recuérdese que el total es igual a la suma de todos los marginales hasta el nivel especificado de producción. Así, los beneficios totales para cualquier producción son iguales a la suma de los beneficios marginales hasta esa cantidad de producción. En forma geométrica, es el área bajo la curva marginal que va desde el eje *Y* a la cantidad de producción que se está tomando en consideración. En la producción *Q* **I.** los beneficios totales son iguales al área bajo la curva de beneficios marginales, o sea, *ODCBQ1'*

Deducción de una curva marginal a partir de una curva promedios

El hecho de que el área contenida tanto bajo la curva marginal como la promedio representa la cifra total correspondiente, nos permite construir valores marginales al conocer sólo los datos de los valores promedio. Para poder entender esto con claridad, veamos una vez más los beneficios totales para la producción *Q,* en la figura *2-2(b).* Mediante la curva de beneficios promedio. los beneficios totales son iguales al área del rectángulo *OABQ¡;* con la curva marginal, es el área *ODCBQI'* Puesto que los beneficios totales en Q, deben ser iguales sea cual sea la curva utilizada para su deducción, esas dos áreas tienen que ser iguales. Además, el área *ODBQI* se encuentra dentro de las dos medidas de los beneficios totales en *Q1'* Por consiguiente, de todo ello se desprende que el área *CDB,* contenida en el área bajo la curva marginal, pero no en el rectángulo determinado por la cifra de beneficios promedio, debe ser igual al área *OAD,* que está en el rectángulo *OABQ1'* pero no bajo la curva de beneficios marginales.

6Esta sección se puede omitir sin pérdida de la continuidad. No obstante, si se omite, recomendamos que se tome nota de la relación expresada en la figura 2-3.

CURVAS LINEALES. Puesto que las dos feas tienen que ser iguales, existe una relación geométrica simple que permite construir la curva marginal a partir de la promedio. Esta relación se puede ilustrar con mayor facilidad utilizando curvas lineales, por lo que veremos primeramente la curva de ingresos promedio que se muestra en la figura 2-3. Para la producción *Q,* los ingresos totales se determinan a partir de la curva de ingresos promedio y son iguales al área del rectángulo *OABQ.* La construcción apropiada de la curva de ingresos marginales requiere que comience en el punto en que la curva promedio corta al eje *Y,7* debido a que para la primera unidad de producción, los ingresos marginales y promedio son iguales. Además, se debe tratar la curva de tal modo que los triángulos *ACD y DBE* tengan áreas idénticas; de otro modo, el área *OABQ* no será igual a *OCDEQ,* el área situada bajo la curva marginal.

Obsérvese que. sea cual sea el ángulo en el que la curva marginal corta a la línea *AB,* los triángulos tendrán dos ángulos idénticos; o sea, tienen los .k. un ángulo recto y sus ángulos respectivos en D son también iguales. Por ende, deben

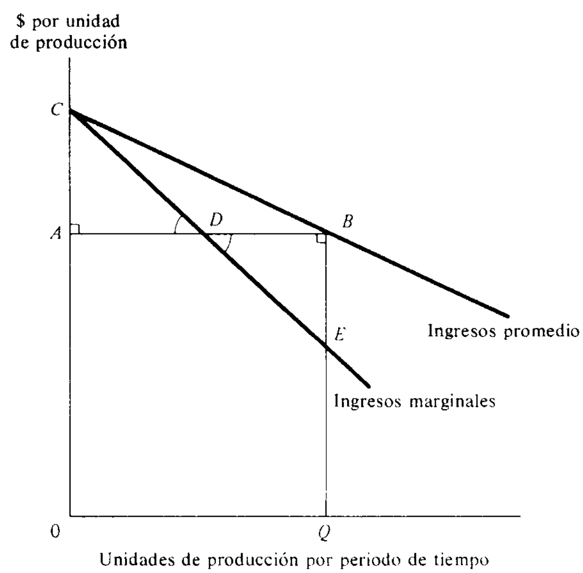

FIG. 2-3. Determinación de una curva marginal a partir de una curva lineal promedio.*

• Para cualquier curva lineal promedio, la curva marginal relacionada comienza en la intercepción *Y* de la curva promedio y corta cualquier línea horizontal que parta del eje *Y* a la curva promedio; o sea. la curva marginal se encuentra a mitad de camino entre la curva promedio y el eje *Y*.

"I'écnicamente, las dos curvas comienzan con la primera unidad; pero, en la práctica se suelen prolongar las curvas hasta el eje *Y* ser triángulos "similares". A continuación, recordando la geometría de secundaria, sabemos que los triángulos similares del área igual son idénticos tanto en tamaño como en forma. Así, el lado *AD* del triángulo *ACD* debe ser igual en longitud al lado *DB* del triángulo *DBE.* Para que esto sea posible, la curva marginal debe intersectar a la línea horizontal *AB.* Esta relación es completamente general: *para cualquier curva lineal promedio, la curva marginal relacionada se inicia en la intercepción y de la curva promedio y corta o cualquier línea horizontal desde el eje Y a la curva promedio; o sea, la curva marginal se encuentra a mitad de camino entre la curva promedio y el eje Y.*

La técnica se ilustra en la figura 2-4 con una curva de costo promedio estándar de forma en U. En este caso, se determina el punto sobre la curva de costos marginales que se asocia al punto *A* de la curva promedio, o bien, de manera alternativa, el costo marginal para la producción °,: 1) Dibujando la línea tangente a ese punto; o sea, la línea *BA* C. 2) Mediante la técnica descrita antes para determinar la curva lineal de costo marginal relacionada. *BA'D.* 3) Mediante la localización de la cifra relacionada de costos marginales en la intersección de una línea perpendicular desde *A* a la curva lineal de costos marginales, o sea, el punto *A',* en la figura 2-4.[8]

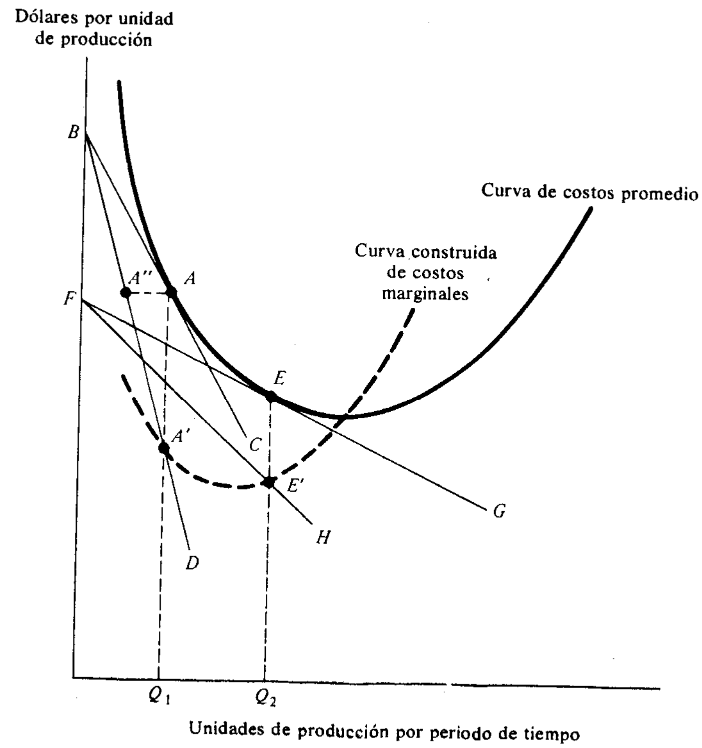

FIG. 2-4. Construcción de una curva marginal no lineal.

Se repite la operación para localizar un segundo punto de la curva marginal *E',* que es el costo marginal asociado al punto *E* de la curva promedio. La línea *F EG* es tangente al punto *E* y *FE' H* es la curva lineal marginal asociada. El punto *E',* que se encuentra sobre esa curva marginal directamente por debajo de *E,* representa el costo marginal para ℚ2 unidades de producción. Este procedimiento se debe repetir para cada punto de la curva de costo promedio. o bien, por lo menos, para un número suficiente de puntos para poder trazar la curva marginal.

Es preciso comprender bien estas relaciones entre los valores promedio, marginales y totales, debido a que se utilizan repetidamente en todo el libro. El ejemplo más común de su utilización es su empleo en la maximización de los beneficios a corto plazo: los costos marginales y las curvas de ingresos se deducen de las cifras promedio o totales y se maximizan los beneficios cuando los beneficios marginales, iguales a los ingresos marginales menos los costos marginales, son iguales a cero. Así pues, los beneficios se elevan al rnáxrmo cuando los ingresos marginales son iguales a los costos marginales. Se trata solamente de un ejemplo del uso de estos conceptos y es posible encontrar muchos otros similares.

No obstante, en primer lugar, resulta útil tomar en consideración el cálculo elemental, que es excepcionalmente útil para determinar soluciones óptimas para los problemas económicos.

CALCULO DIFERENCIAL"

Aunque los cuadros y las gráficas son útiles para explicar conceptos. las ecuaciones son por 10 común más apropiadas para la resolución de problemas. Una de las razones para esto es que se puede utilizaran frecuencia la técnica analítica poderosa del cálculo diferencial para localizar los valores máximos y 111.

8Se debe recalcar que el punto *A"* de la figura 2-4 *no está* en la curva de costos marginales. El único punto de la línea *BD* que es pertinente para la determinación de los costos marginales es el *A',* que se encuentra directamente debajo de la tangencia en el punto *A.*

9Los lectores con conocimientos adecuados de cálculo pueden pasar por alto esta sección. Aún cuando el conocimiento del cálculo no es necesario para entender las ideas principales que se presentan en el texto, puesto que se dan tanto interpretaciones verbales como geométricas para las formulaciones de cálculo, recomendamos a todos los lectores que no comprendan bien el cálculo que estudien esta sección. El cálculo se desarrolló específicamente para la resolución de problemas tales como los que se encuentran en economía administrativa, por lo que algunos conceptos se pueden comprender mucho mejor cuando se expresan en esos términos. Por otra parte, el nivel de cálculo que utilizamos es muy elemental y, por consiguiente, su aprendizaje no resulta difícil.

Concepto de una derivada

Anteriormente, se definió un valor marginal como *el cambio del valor de la variable dependiente que se asocia a un cambio de una unidad en una variable independiente,* Tomemos en consideración la función no especificada $Y = f(X)$. *Visi*tando el signo d (que se lee delta) para indicar el cambio, podemos expresar el cambio de valor de la variable independiente, *X,* mediante la notación *dX* y el cambio de la variable dependiente *Y,* como *dY.*

La razón, *dY / dX* proporciona una especificación muy general del concepto marginal:

El cambio en *Y, dY,* dividido por el cambio en *X, dX,* indica el cambio en la variable dependiente que se asocia a un cambio de una unidad en el valor de *X.*

Esta relación se ilustra en la figura 2-5, que es una gráfica de una función que relaciona *Y* con *X.* Para los valores de *X* cercanos al origen, un cambio relativamente pequeño en *X* produce un cambio grande en *Y.* Así, el valor absoluto de $dY/dX = (Y_2 - Y_l)/(X_2 - Xl)$ es relativamente grande, lo que demuestra que un pequeño aumento de *X* provoca un incremento grande en *Y.* La situación se invierte al avanzar a lo largo del eje *X.* Un aumento grande de *X,* por ejemplo de X_3 a X_4, produce sólo una disminución pequeña de *Y,* de Y_3 a Y_4, por lo que dY / dX es pequeña.

Resulta evidente que la relación marginal entre *X* e *Y,* como se muestra en la figura 2-5, cambia en diferentes puntos de la curva. Cuando la curva es relativa mente pendiente, la variable dependiente *Y* responde mucho a los cambios de la variable independiente; sin embargo, cuando la curva es relativamente plana. *Y* no se ve muy afectada por los cambios en X.

En concepto, una *derivada* es una especificación precisa de la relación marginal general, d y / dX. La determinación de una derivada implica encontrar el valor de la razón d y / dX para cambios extremadamente pequeños de la variable independiente. La notación matemática para una derivada es:

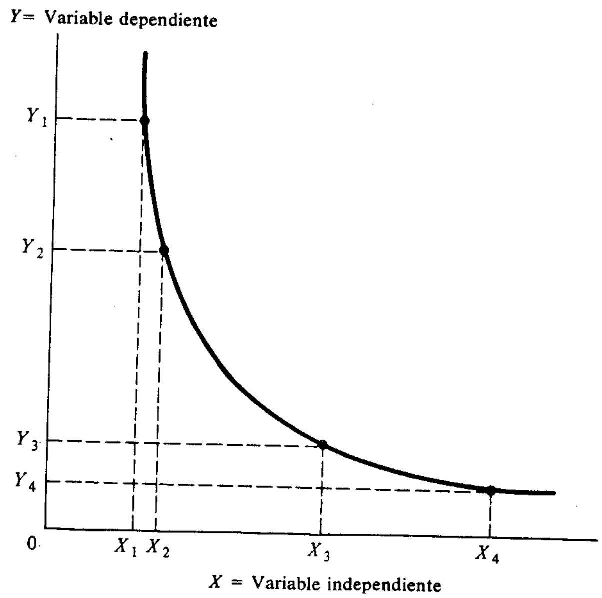

FIG. 2-5. Ilustración del cambio $\Delta Y/\Delta X$ sobre la gama de una curva.

Que se lee: "la derivada de *Y* con respecto a *X* es igual al límite de la razón */lY / dX,* conforme *dX* tiende a cero Y'?

Este concepto de la derivada como límite de una razón es equivalente de manera precisa al gradiente de una curva en un punto. En la figura 2-6 se presenta esta idea, utilizando la misma curva que relaciona *Y* con *X* que se puesta en la figura 2-5. Obsérvese que, en la figura 2-6, el gradiente *promedio* de la curva entre los puntos *A* y *D* se mide como:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_4 - Y_1}{X_4 - X_1},$$

Y se muestra como el gradiente de la cuerda que conecta los dos puntos. De modo similar, el gradiente promedio de la curva se puede medir a lo largo de intervalos cada vez menores de *X,* mostrándose mediante otras cuerdas, tales como las que conectan los puntos *B* y e con *D.* En el límite, conforme *dX* tiende a cero. la razón *dY* / *dX* es igual al gradiente de una línea trazada tangente a la curva en el punto *D. El gradiente de esta tangente se define como la derivada,* dY /dX, *de la función en el punto* D, y *mide el cambio marginal en* Y *que se asocia* a *un cambio muy* *pequeño de* X.

Por ejemplo, la variable dependiente *Y* puede ser el costo total y la variable independiente, la producción. Entonces, la derivada *dY / dX,* muestra de manera precisa el modo en que se encuentran relacionados los costos y la produce ión para un nivel específico de producción. Puesto que el cambio en los costos que se asocia a un cambio en la producción se define como el costo marginal, la de los se puede explicar brevemente un límite como sigue: Si el valor de una función y = *f(X)* tiende a una constante y* conforme el valor de la variable independiente *X* tiende a *X*,* entonces, se dice que y* es el límite de la función cuando *X* tiende a *X* *. Esto se escribiría como sigue:

Límite *(X)* = *Y". X--'>X"*

X - 4, el límite de esta función, conforme *X* tiende a 5, es 1;

Por ejemplo, si *Y*

o sea:

Límite (X - 4) = 1. *X--'>5*

Esto indica que, conforme el valor de *X* tiende a 5, sin llegar a ese valor, la función y = *X* - 4 se hace cada vez más cercana a 1. Este concepto de límite se ex en forma detallada en todos los libros de texto de introducción al cálculo.

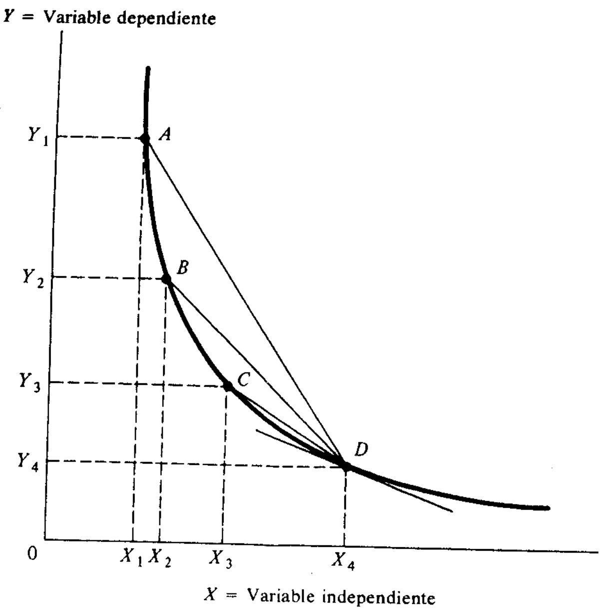

FIG. 2-6. Ilustración de una derivada como gradiente de una curva.

Rifada de la función de costo total proporciona una medida precisa de los costos marginales para cualquier nivel específico de producción. Existe una situación similar para los ingresos totales: la derivada de la función de ingresos totales para cualquier nivel de producción indica los ingresos marginales en ese nivel.

Resulta evidente que las derivadas proporcionan información útil en economía administrativa. Más adelante veremos otras ilustraciones de su utilidad; sin embargo, antes daremos las reglas para determinar las derivadas de ciertas funciones que se encuentran con frecuencia.

REGLAS PARA LA DERIV ACION DE UNA FUNCION

La determinación de la derivada de una función no es una tarea muy difícil, ya que implica solamente la aplicación de una fórmula básica a la función. Las fórmulas o reglas básicas de derivación se dan más adelante. Se omiten las pruebas; pero se pueden encontrar en cualquier libro de texto de introducción al cálculo.

Constantes

La derivada de una constante es siempre cero; o sea, si Y te, entonces:

$$\frac{dY}{dX} = O.$$

Esta situación se presenta gráficamente en la figura 2-7. Puesto que y se define como constante, no varía al cambiar *X* y, por ende, *dY* / *dX* tiene que ser cero.

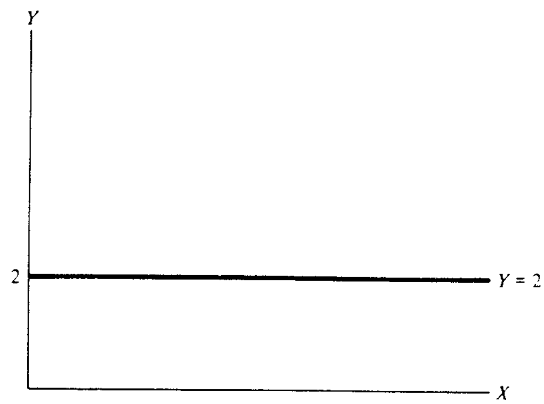

FIG. 2-7. Gráfica de una función constante— Y = constante; $dY/dX = 0$.

Potencias

La derivada de una función de potencia como $Y = aX''$, en donde a y b son constantes, es igual al exponente b multiplicado por el coeficiente a por la variable X elevada a la potencia b - 1:

$$y = aXb$$

$$dY\ \underline{dX}=b.a'X(b-l)$$

Por ejemplo, dada la función:

$$y = 2X3,$$

entonces:

$$dY$$

$$\underline{dX}=3\cdot 2\cdot X(3-1)$$

$$= 6X2.$$

Esta regla se aclarará todavía más mediante otros dos ejemplos de funciones potenciales. La derivada de la función Y = X' está dada como:

$$\underline{dY}=3.X2$$

$$dX\ .$$

El exponente. 3. se multiplica por el coeficiente implícito. 1, y, a su vez, por la variable, X, elevada a la segunda potencia.

Finalmente, la derivada de la función Y = $0.5X$ es 0.5:

$$dY$$

$$\underline{dX}= 1\ .\ 0.5\ .\ XI\text{-}I = 1\ .\ 0.5\ .\ XO = 0.5.$$

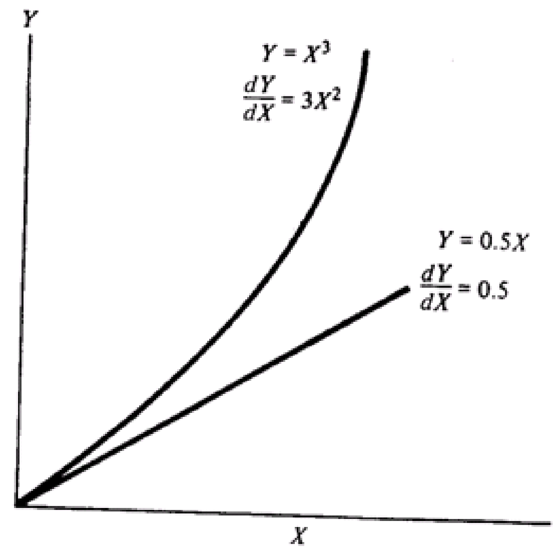

FIG. 2-8. Gráficas de funciones de potencia.

El exponente implícito, 1, se multiplica por el coeficiente, 0.5, por la variable, X, elevada a la potencia cero. Puesto que cualquier número elevado a la potencia cero es igual al, el resultado es 0.5.

Nuevamente, podemos aclarar el concepto de función de potencia mediante una gráfica. En la figura 2-8 se presentan gráficamente las dos últimas funciones de potencias anteriores, $y = X3$ e $Y = O.5X$. Veamos primeramente $y =$¡ $0.5X$. La derivada de esta función, $dY/dX = 0.5$, es una constante, lo que indica que el gradiente de la función es constante. Esto puede verse con facilidad en la gráfica. La derivada mide el *índice de cambio*. Si el índice de cambio es constante, como debe ser para que la función básica sea lineal, la derivada de la función tendrá que ser constante. La segunda función, $Y = X3$, aumenta a un ritmo creciente a medida que se incrementa X. También aumenta la derivada de la función, $dY / dX = 3X2$, a medida que X se hace mayor, lo que indica que el gradiente de la función se incrementa o que el índice de cambio aumenta.

Sumas y diferencias

En todo el resto de esta sección se utiliza la notación que sigue para expresar cierto número de otras reglas importantes de derivación:

$u = g(X)$: U es una función no especificada, g, de X. $V = h(X)$: V es una función no especificada, h. de X.

La derivada de una suma (diferencia) es igual a la suma (diferencia) de las derivadas de los términos individuales. Así, si $Y = U + V$, entonces:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dU}{dX} + \frac{dV}{dX}.$$

Por ejemplo, si $U=g(X) = 2X2$, $V = h(X) = -X3$, e $Y=U+V=2X2-X3$, entonces:

$$\frac{dY}{dX} = 4X - 3X^2.$$

En este caso, se descubre que la derivada de $2X2$ es $4X$, mediante la regla de potencias; la derivada de $-X3$ se determina como $-3X2$, mediante la misma regla, y la derivada de la función es la suma de las derivadas de las partes.

Veamos un segundo ejemplo de esta regla. Si $Y = 300 + 5X + 2X2$, entonces:

$$dY\ \underline{dX} = O + 5 + 4X.$$

Mediante la regla constante, la derivada de 300 es O; la derivada de $5X$ es 5 por la regla de potencias y la derivada de $2X''$ es $4X$, por la misma regla.

Productos

La derivada del producto de dos expresiones es igual a la suma del primer término multiplicado por la derivada del segundo, *más* el segundo término por la derivada del primero. Así, si $Y = U'V$, entonces:

$$\frac{dY}{dX} = U \cdot \frac{dV}{dX} + V \cdot \frac{dU}{dX}.$$

Por ejemplo, si y = $3X2\ (3 - X)$, entonces, haciendo $U = 3X2$ y $V = (3 - X)$:

$$\frac{dY}{dX} = 3X2 \left(\frac{dV}{dX}\right) + (3-X)\left(\frac{dU}{dX}\right)$$

$$= 3X2\ (-1) + (3 - X)\ (6X) = -$$
$$3X2 + 18X - 6X2$$
$$= 18X - 9X2.$$

Cocientes

La derivada del cociente de dos expresiones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador *menos* el numerador por la derivada del denominador -todo ello dividido por el cuadrado del denominador. Así, si $Y = U/V$, entonces:

$$\frac{dY}{dX} \quad \frac{V \cdot \frac{dU}{dX} - U \cdot \frac{dV}{dX}}{V2}$$

Por ejemplo, si $U = 2X - 3$ Y $V = 6X2$, entonces: $2X-3$

Y=f3X2

$$\frac{dY}{dX} = \frac{6X^2 \cdot 2 - (2X-3)12X}{36X^4}$$
$$= \frac{12X^2 - 24X^2 + 36X}{36X^4}$$
$$= \frac{36X - 12X^2}{36X^4}$$
$$= \frac{3-X}{3X^3}.$$

El denominador, $6X2$, se multiplica por la derivada del numerador, 2. Se resta de esto el numerador, $2X - 3$, por la derivada del denominador, $12X$. A continuación, se divide el resultado por el cuadrado del denominador, o sea, $36X4$. La reducción algebraica da como resultado la expresión final de la derivada.

Función de una función (regla de cadena)

La derivada de una función de una función se determina como sigue. Si $y = f(U)$, en donde $U = g(X)$, entonces:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dU} \cdot \frac{dU}{dX}.$$

Por ejemplo, si $Y = 2U - U^2$ y $U = 2X^3$, se determina dY/dX como sigue:

Etapa 1

$$\frac{dY}{dU} = 2 - 2U.$$

Substituyendo para U, se tiene:

$$\frac{dY}{dU} = 2 - 2(2X^3)$$
$$= 2 - 4X^3.$$

Etapa 2

$$\frac{dU}{dX} = 6X^2.$$

Etapa 3

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dU} \cdot \frac{dU}{dX}$$
$$= (2 - 4X^3) \cdot 6X^2$$
$$= 12X^2 - 24X^5.$$

Otros ejemplos de esta regla indicarán su utilidad para obtener derivadas de muchas funciones.

Ejemplo 1

$$y = yX2 -1.$$

Sea $U=xz-l.$ Entonces, $y = yU= Ulh.\ dY= .!U-^{J}\!\iota\, dU\ 2$

$$\frac{1}{-\ 2Un'}$$

Substituyendo U con $X2$ - 1 en la derivad?, se obtiene:

$$\frac{dY}{dU} - \frac{1}{2/X2 - 1) \sim'z}$$

Puesto que $U = X2 - 1$:

$$\frac{dU}{dX} = 2X.$$

Mediante la regla de la función de una función, $dY\ I\ dX$ se tiene: $dY\ IdU \times dU/dX,$

$$\frac{dY}{dX} - 2\,(XZ - 1)\,\frac{1}{m} \cdot 2X$$

$$X$$

$$\frac{}{V'X2 - 1}$$

Ejemplo 2

$$Y = \frac{1}{X2 - 2'}$$

Sea $U = X'' - 2$. Entonces se obtiene: $Y = 1\ /\ U$ y, mediante la regla de los cocientes,

$$\frac{dY}{dU} - \frac{U \cdot O - 1 \cdot 1}{UZ}$$

$$- - \frac{1}{UZ}$$

Substituyendo U con $(X'' - 2)$, se obtiene:

$$)\ \frac{dY}{dU} - - \frac{1}{(X2\ \ 2)2}$$

Puesto que $U = X'' - 2$:

$$\frac{dU}{dX} = 2X.$$

Por consiguiente:

dY dY dU 1
dX = dU . dX = - (X2 -. " . 2X

2X (X2-
=-2)2

~

Ejemplo 3

$$Y= (2X+3)2.$$

Sea $U = 2X + 3$. Entonces, $Y = U2$ y: dY
dU = 2U.

Puesto que $U = 2X + 3$:

dY dU=2(2X+3)

=4X+6

,

y

dU =2.
dX

Por ende:

dY dY dU
dX ~ dU . dX = (4X + 6)2

= 8X + 12.

Reglas diversas para la derivación

Aun cuando las reglas anteriores son las que se necesitan en forma más común para diferenciar expresiones económicas, se utilizan también otras reglas para ciertos tipos especiales de funciones. Damos a continuación una lista de ellas tan sólo con fines de consulta; no volveremos a encontrarlas en las funciones analizadas en este texto.

En estas ecuaciones, *e* es la constante neperiana, 2.718. Se utiliza en modelos de crecimiento, interés compuesto continuo y como base de los logaritmos naturales.

4. Si $Y = a \sin bX$ entonces, $\frac{dY}{dX} = ab \cos bX$.

5. Si $Y = a \cos bX$, entonces, $\frac{dY}{dX} = -ab \sin bX$.

UTILIZACION DE DERIVADAS PARA MAXIMIZAR O MINIMIZAR FUNCIONES

El proceso de optimización requiere con frecuencia que se determine el valor máximo de una función. Para que una función tenga un valor máximo (o mínimo), su gradiente tiene que ser cero y. puesto que la derivada mide el gradiente de una función, se produce una maximización cuando la derivada es igual a cero. Como ilustración, veamos la siguiente función de beneficios:

$$\pi = -\$10000 + \$400Q - \$2Q^2.$$

En este caso π = beneficios totales y Q es la producción en unidades. Come se muestra en la figura 2-9, si la producción es cero, la empresa tendrá una pérdida de $10000 (los costos fijos son de $10000); sin embargo al aumentar la producción, se elevan también los beneficios. Se alcanza un punto crítico en 28 unidades de producción; los beneficios se elevan al máximo (en 10000) para 100 unidades y se alcanza un segundo punto crítico en 172 unidades.

La producción de maximización de beneficios se puede determinar, calculando el valor de la función para diferentes magnitudes de producción y trazando a continuación esos valores como se hizo en la figura 2-9. El máximo se puede situar también, determinando la derivada de la función y, a continuación. el valor de Q que hace que la derivada sea igual a cero.

$$\frac{d\pi}{dQ} = 400 - 4Q,$$

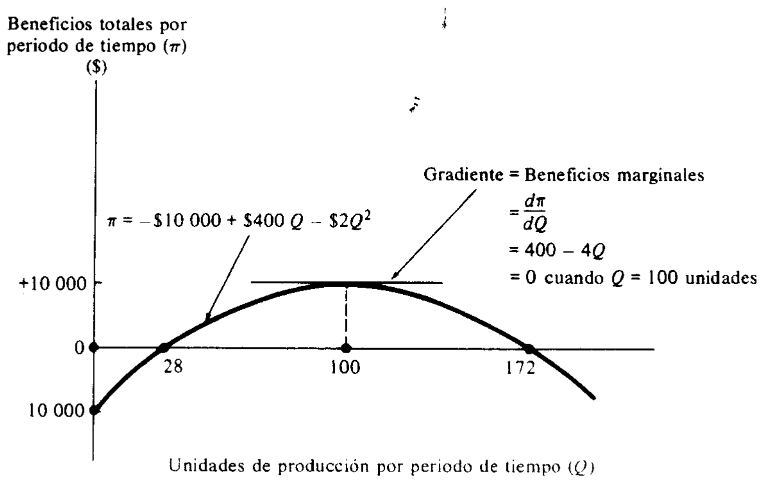

FIG. 2-9. Beneficios en función de la producción.

y al ajustar la derivada igual a cero se obtiene:

$$400-4Q = 0$$
$$4Q = 400 \quad Q = 100.$$

Por consiguiente, cuando Q = 100, los beneficios son máximos. Incluso en esta "ilustración simple, es más fácil determinar el valor de maximización de beneficios mediante el cálculo que por medio del análisis gráfico; en el caso de que la función hubiera sido más compleja, sólo hubiera resultado factible la resolución por medio del cálculo.

Derivadas de, segundo grado

Se puede plantear un problema cuando se utilizan derivadas para localizar máximos o mínimos. La primera derivada de la función total proporciona una me dada de si la función aumenta o disminuye en cualquier punto. Para maximizarse o minimizarse, la función no debe aumentar ni disminuir; o sea, el gradiente medido mediante la primera derivada tiene que ser cero; sin embargo, existe la condición $dY/dX = 0$ tanto para el valor máximo como para el mínimo de una función y se necesita un análisis posterior para determinar si se ha localizado un punto máximo o mínimo.

Esto se ilustra en la figura 2-10, donde puede verse que el gradiente de la curva de beneficios totales es cero tanto en el punto *A* como en el *B*. Sin embargo, el punto *A*, localiza la producción que minimiza los beneficios, mientras que el *B* indica la producción de beneficios máximos.

Esto se ilustra en la figura 2-10, donde puede verse que el gradiente de la curva de beneficios totales es cero tanto en el punto *A* como en el *B*. Sin embargo, el punto *A*, localiza la producción que minimiza los beneficios, mientras que el *B* indica la producción de beneficios máximos.

El concepto de derivada de segundo grado se utiliza para distinguir entre los puntos máximos y los mínimos a lo largo de una función. La derivada de segundo orden es simplemente la derivada de la derivada original; se determina precisamente en la misma forma que la primera' derivada. Así, si $\pi = a - bQ + cQ^2 - dQ^3$, como en la figura *2-10*, entonces, la derivada de primer orden es:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -b + 2cQ - 3dQ^2 \qquad (2\text{-}6)$$

y la derivada del segundo orden es la derivada de la ecuación 2-6, o sea:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = 2c - 6dQ.$$

En la misma forma en que la primera derivada mide el gradiente de la función de beneficios totales, la segunda representa el gradiente de la primera derivada, o sea, en este caso, el gradiente de la curva de beneficios marginales. Se puede utilizar el concepto de segunda derivada para efectuar una distinción entre los puntos de maximización y minimización debido al hecho de que la segunda derivada es siempre ***negativa*.** cuando se evalúa en un punto de *maximización,* y ***positiva*.** en un punto de ***minimización*.**

La razón de esta relación inversa se puede ver al consultar la figura 2-10. Obsérvese que los beneficios alcanzan un mínimo local en el punto *A* puesto que los beneficios marginales, que eran negativos y, por ende, hacían que los beneficios totales disminuyeran, se vuelven repentinamente positivos. Dicho de otro modo,

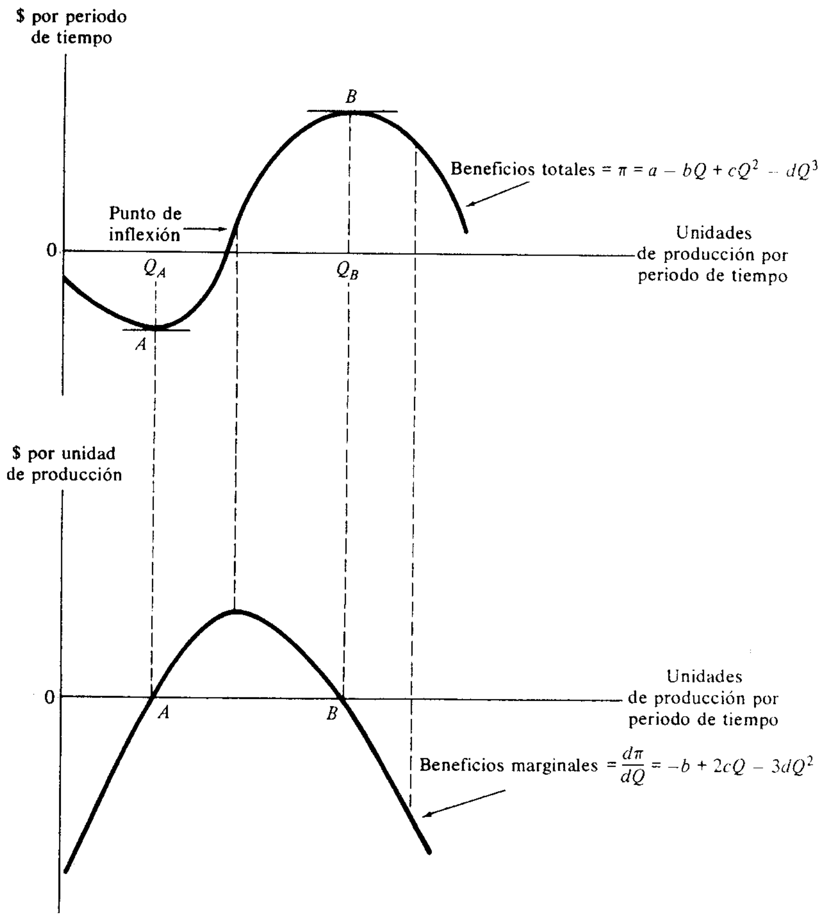

FIG. 2-10. Localización de los valores máximo y mínimo de una función.

FIG. 2-10. Localización de los valores máximo y mínimo de una función.

los beneficios marginales pasan por el nivel cero desde abajo, en el punto *A* y, por consiguiente, aumentan o tienen un gradiente positivo. La situación inversa es válida en un punto de maximización local; el valor marginal disminuye y, por ende, su gradiente es negativo.

Podemos contribuir a una mejor comprensión de este concepto mediante un ejemplo numérico. Supóngase que la función de beneficios totales que se ilustra en la figura 2·10 se da mediante la ecuación siguiente:

Beneficios totales ree 7T = -$3 OOO - $2 400Q + $350Q2 - $8333Q3. (2-7)

Los beneficios marginales se dan mediante la primera derivada beneficios de la función de totales:

Beneficios marginales = ~; = ~$2 400 + ~J700Q - $25Q2. (2-8)

Los beneficios totales se maximizan o minimizan en los puntos en que la primera derivada, los beneficios marginales, es cero; o sea, donde:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -\$2400 + \$700Q - \$25Q^2 = 0. \qquad (2\text{-}9)$$

Las cantidades de producción de 4 y 24 unidades satisfacen la ecuación 2-9 y, por ende, son puntos de beneficios máximos o mínimos.

•. La evaluación de la segunda derivada de la función de beneficios totales en cada uno de esos puntos indicará si son mínimos o máximos. La segunda derivada de la función de beneficios totales se determina tomando la derivada de la función de beneficios marginales, ecuación 2-8:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = +\$700 - \$50Q.$$

En la cantidad de producción $Q = 4$:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = \$700 - \$50 \cdot 4 = \$700 - \$200 = \$500.$$

Puesto que la segunda derivada es positiva, lo que indica que los beneficios marginales aumentan, los beneficios totales se *minimizan* para cuatro unidades de

12Cualquier ecuación de la forma $Y= a + bX + CX2$ es de segundo grado y sus dos raíces se pueden determinar mediante la ecuación general de segundo grado:

$$X = \frac{-b \pm v1Ji =-4ae}{2c}$$

Substituyendo los valores de la ecuación de segundo grado con los de la ecuación ~.9 se obtiene:

$$x = \frac{=700 \pm \backslash 1'700' - 4(-2\,400)(-25)}{2(-\cdot 25)} = \frac{-700 \pm v'490\,000 - 240\,(JüO}{-50}$$

$$X= \frac{-700 \pm \backslash 1'250000}{-50} = \frac{-700 \pm 500.}{-50}$$

La raíz menor es: $X, = \frac{-700 - 500}{-50} _- \frac{-1200}{-50} - 24$ unidades

y la solución positiva e..~:

$$\frac{-700 + 500}{} _- \frac{-200}{} = 4$$

unidades

X_2= -SO - -50

Advertencia: los alumnos deben recordar que la ecuación de segundo grado tiene 2a en el denominador en lugar de *2c*. La razón es que en muchos libros de matemáticas la relación funcional se escribe corno sigue: $Y = aX2 + bX + c$. Preferimos no escribir la ecuación en esta forma, debido a que en las expresiones *de economía*. el término constante, que denominamos a, se coloca por lo general en primer lugar.

Uso de derivadas para maximizar la
diferencia entre dos funciones

El corolario muy importante y bien conocido de microeconomía que dice que los ingresos marginales son iguales a los costos marginales cuando los beneficios son máximos, se basa en el cálculo de optimización. Se deriva del hecho de que la distancia entre dos funciones es máxima en el punto en que sus gradientes son iguales. Esto se ilustra en la figura 2-11. En este caso, se muestran las funciones hipotéticas de ingresos y costos. Los beneficios totales son iguales a los ingresos totales menos los costos totales y, por consiguiente, iguales a la distancia vertical entre las dos curvas. Esta distancia se eleva al máximo con una producción *QB'* donde los gradientes de las curvas de ingresos y costos son iguales. Puesto que los gradientes de las curvas de ingresos totales y costos totales miden los ingresos marginales y los costos marginales, donde esos gradientes son iguales, $MR = MC$.

La razón por la que QB es la producción de beneficios máximos. se puede ver en otra forma, tomando en consideración las formas de las dos curvas situadas a la derecha del punto *A*. En *A*, los ingresos totales son iguales. a los costo': totales y se tiene un punto crítico, o sea, una cantidad de producción en la que los beneficios son cero. En las cantidades de producción inmediatamente más allá de *QA'* los ingresos totales aumentan con mayor rapidez que los costos totales, de manera que los beneficios se incrementan y las curvas se separan todavía más. Esta divergencia de las curvas prosigue en tanto los ingresos totales aumenten con mayor rapidez que los costos totales; en otras palabras. en tanto $MR > MC$. Una vez que el gradiente de la curva de ingresos totales es exactamente igual .l de la curva de costos totales -en otras palabras, donde los ingresos marginales sean iguales a los costos marginales, serán paralelas y ya no. divergentes. Esto ocurre en el caso de la producción *QB'* Más allá de *QB'* el gradiente de la curva de costos es mayor que el de la curva de ingresos (lo; costos marginales son mayores que los ingresos marginales), de modo que la distancia entre ellas disminuye y los beneficios totales se reducen.

Un ejemplo numérico contribuirá a esclarecer este empleo de las derivadas.
Sean las siguientes funciones de ingresos, costos y beneficios:

Ingresos totales $= TR = 41{,}5Q - 1{,}1Q2.$

Costos totales $= TC =$ 150,+ 10Q - O.5Q2 + 0.02Q3.

Beneficios totales $= \pi = TR - TC.$

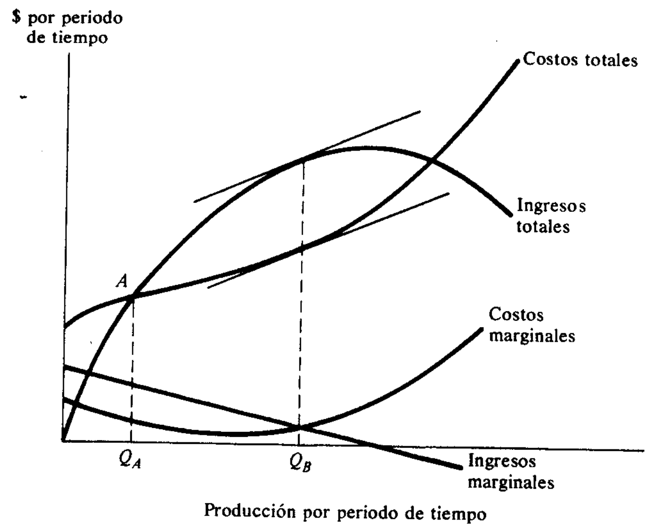

FIG. 2-11. Ingresos totales, costos totales y maximización de los beneficios.

La producción de beneficios máximos se puede determinar substituyendo en la función de beneficios las funciones de ingresos totales y costos totales y analizan. do a continuación la primera y la segunda derivada de esa ecuación:

$$7T= TR- Te$$
$$= 41.5Q - 1.1Q2 - (150 + 10Q - 0.5Q2 + 0.02Q3) = 41.5Q - 1.1Q2 - 150 - 10Q + 0.5Q2 - 0.02Q3 = -150 + 31.5Q - 0.6Q2 - 0.02Q3.$$

Los beneficios marginales, la primera derivada de la función de beneficios, son:

$$M7T = \underline{\sim Q} = 31.5 - 1.2Q - 0.06Q2.$$

Al hacer los beneficios marginales iguales a cero y utilizar la ecuación de segundo grado para resolver las dos raíces, se obtiene $Ql = -35$ Y $Q2 = + 15$. Puesto que no. son posibles cantidades negativas de producción, QI no es una solución factible ,y puede descartarse.

La evaluación de la segunda derivada de la función de beneficios en $Q = 15$, indicará! si el punto es de maximización o minimización de los beneficios. La segunda derivada está dada por:

$$\frac{d2_{7T}}{dQ2} = -1.2 - 0.12Q.$$

La evaluación de esta derivada en $Q = 15$ indica un valor de -3.0; por consiguiente" $Q = 15$, es un punto de maximización de beneficios.

La producción de beneficios máximos se puede determinar substituyendo en la función de beneficios las funciones de ingresos totales y costos totales y analizan. do a continuación la primera y la segunda derivada de esa ecuación:

7T= *TR- Te*
= *41.5Q - 1.1Q2* - (150 + 10Q - *0.5Q2* +
0.02Q3) = *41.5Q - 1.1Q2* - 150 - *10Q* + *0.5Q2* -
0.02Q3 = **-150 +** *31.5Q - 0.6Q2 - 0.02Q3.*

Los beneficios marginales, la primera derivada de la función de beneficios, son:

M7T = ~Q= 31.5 - *1.2Q - 0.06Q2.*

Al hacer los beneficios marginales iguales a cero y utilizar la ecuación de segundo grado para resolver las dos raíces, se obtiene *Ql* = -35 Y *Q2* = + 15. Puesto que no. son posibles cantidades negativas de producción, *Q1* no es una solución factible ,y puede descartarse.

La evaluación de la segunda derivada de la función de beneficios en Q = 15, indicará! si el punto es de maximización o minimización de los beneficios. La segunda derivada está dada por:

d2 7T
dQ2= **-1.2** - *0.12Q.*

La evaluación de esta derivada en Q = 15 indica un valor de -3.0; por consiguiente" Q = 15, es un punto de maximización de beneficios.

Para entender la relación de los ingresos marginales y los costos marginales con la maximización de los beneficios, veamos una vez más la expresión general de beneficios 1t = *TR - Te*. Con la regla de sumas y diferencias de la derivación, obsérvese que una de las expresiones generales de los beneficios marginales es la siguiente:

$$M_{7T} = \frac{d7T}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ}$$

Dado que *dTR/dQ* es, por definición, la expresión de los ingresos marginales. *MR,* y que *dTC/dQ* representan los costos marginales, *MC,* se tiene:

$$M7T = MR - MC.$$

Ahora bien, puesto que la maximización de cualquier función requiere que la primera derivada se haga igual a cero, se producirá una maximización de los beneficios cuando:

$$M7T = MR - MC = 0,$$

o bien, donde:

$$MR = MC.$$

Prosiguiendo con nuestro ejemplo numérico, se determinan los ingresos y los costos marginales mediante la derivación de las funciones de ingresos y costos totales:

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 41.5 - 2.2Q.$$

$$MC = dJ\sim = 10 - Q + 0.06Q2.$$

En el nivel de producción de máximos beneficios, $MR = Me$; por ende:

$$MR = 41.5 - 2.2Q = 10 - Q + 0.06Q2 = MC.$$

Mediante la combinación de los términos, se obtiene:

$$-31.5 + 1,2Q + 0.06Q2 = 0,$$

que es idéntico a la expresión obtenida al hacer que la primera derivada de la función de beneficios sea cero. Al resolver para las raíces de esta ecuación (utilizando nuevamente la ecuación de segundo grado) se obtiene como resultados $Ql = -35$ Y $Q2 = 15$, que son los mismos valores determinados antes. Esto confirma el hecho de que los ingresos marginales son en realidad iguales a los costos marginales para la producción en la que los beneficios son máximos.

Para concluir el ejemplo, en la figura 2-12 se presentan gráficas en las funciones de ingresos y costos; para 15 unidades de producción, los gradientes de las dos curvas son iguales, $MR = Me$. La sección inferior de la figura muestra la

función de beneficios, y la producción de beneficios máximos es también de 15 unidades, donde la producción $dn/dQ = 0$ Y $d''n/dQ2 < 0$.

DERIVADAS PARCIALES

Puesto que la mayor parte de las relaciones económicas implican más de dos, variables, es necesario extender el concepto de derivación a ecuaciones con tres o más variables. Veamos la función de la demanda para un producto en que la cantidad demandada, Q, se determina por el precio establecido, P, y el nivel de las erogaciones en publicidad, A. Esa función se escribirá como sigue:

$$Q = f(P, A). \qquad (2\text{-}10)$$

Al analizar relaciones de variables múltiples, como la de la ecuación 2-10, es preciso conocer los efectos marginales de cada variable independiente sobre la

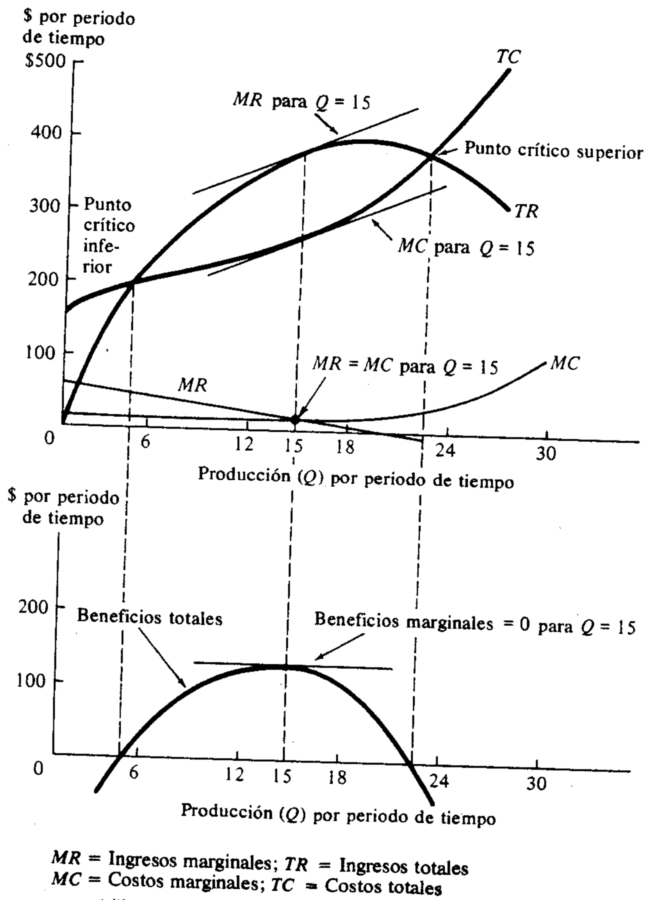

FIG. 2-12. Condiciones de producción de maximización de los beneficios.

Dependiente. En otras palabras, en este caso, la optimización requiere un análisis del modo en que un cambio en cada variable independiente afecta a la dependiente, *manteniendo constante el efecto de todas las demás variables independientes*. La derivada parcial es el concepto de cálculo que se utiliza para este tipo de análisis marginal.

Mediante la función de la demanda de la ecuación 2-10, se pueden examinar dos derivadas parciales: 13

1. La parcial de Q con respecto al precio = aQ/a?
2. La parcial de Q con respecto a las erogaciones de publicidad aQ/iJA.

Las reglas para determinar derivadas parciales son esencialmente las mismas que se vieron anteriormente. Puesto que el concepto de derivada parcial implica la suposición de que todas las variables distintas a aquélla con respecto a la cual se están tomando la derivada permanecen invariables, se considera que esas variables son constantes en el proceso de derivación. Sea la ecuación *Y* = 10 _ *LX* + *3XZ* - *Z2*. En esta función hay dos variables independientes, *X* y Z, de modo que se pueden evaluar dos derivadas parciales. Para determinar la parcial; con respecto a *X*, obsérvese que la función se puede volver a escribir como *Y* = : 0 _ *4X* + *(3Z) X* - *Z2*. Puesto que *Z* se trata como si fuera constante, la derivada parcial de *Y* con respecto a *X* es:

$$\frac{aY}{ax} = 0 \cdot 4 + 3Z - 0 = -4 + 3Z.$$

Al determinar la derivada parcial de *Y* con respecto a *Z*, se trata *X* como constante, de modo que se puede escribir:

y = 10 - 4X + *(3X)* Z - Z2,

y la parcial con respecto a *Z* es:

~~ = O - O + 3X - *n* = 3X - 2Z.

Otro ejemplo servirá para aclarar la técnica de la diferenciación parcial Sea *y* = *2X* + *4X2Z* - *3XZ2* - *2Z*³• Entonces, la parcial con respecto a)(es:

$$\frac{aY}{ax} = 2 + 8XZ - 3Z^2 - 0,$$

y la parcial con respecto a Z es:

~~. = 0 + *4X2* - *6XZ* - 6Z².

13El símbolo éJ denominado delta, se utiliza para indicar una derivada parcial. En las exposiciones orales y escritas de este concepto, se omite con frecuencia la palabra derivada. O sea, se habla de manera típica de la *parcial* de Q en lugar de la *derivada parcial* de Q.

MAXIMIZACION
DE FUNCIONES DE VARIABLES MULTIPLES

La necesidad de maximización (o minimización) de una función de variables múltiples es una extensión directa de la de las funciones de variables simples. Todas las derivadas parciales de primer orden tienen que ser iguales a cero. Por ende, la Rlaximización de la función *Y* = *f(X, Z)* requiere:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 0,$$

y

$$\frac{\partial Y}{\partial Z} = 0.$$

Como ilustración de este procedimiento, véase la función:

$$y = 4X + Z - X^2 + XZ - Z^2, \qquad (2\text{-}11)$$

cuyas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 4 - 2X + Z \, ,$$

y

$$\frac{\partial Y}{\partial Z} = 1 + X - 2Z$$

Para maximizar la ecuación 2-11, se hacen las parciales iguales a cero:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 4 - 2X + Z = 0$$

,

y

$$\frac{\partial Y}{\partial Z} = 1 + X - 2Z = 0.$$

Tenemos aquí dos ecuaciones con dos incógnitas. Al resolverlas simultáneamente, descubrimos que los valores $X = 3$ Y $Z = 2$ maximizan la función.> La inserción de estos valores para X y Z en la ecuación 2-11, permite determinar el valor de Y que es de 7; por consiguiente, el valor máximo de Y es 7.[15]

14Puesto que $4 - 2X + Z = 0$, $Z = 2X - 4$. Al substituir Z con este valor en $1 + X - 2Z = 0$ se obtiene $1 + X - 2(2X - 4) = 1 + X - 4X + 8 = -3X + 9 = 0$ o sea $X = 3$. Al reemplazar este valor de X en $Z = 2X - 4$, se obtiene $Z = 2(3) - 4 = 2$.

El método implícito se puede aclarar quizá al consultar la figura 2-13 que es una gráfica tridimensional de la ecuación 2-11. En este caso, vemos que para los valores positivos de X y Z, la ecuación 2-11 traza una superficie con un pico en el punto A. En el pico, la superficie de la figura es plana. Dicho de otro modo, un plano tangente a la superficie en el punto A será paralelo al plano XZ, lo que quiere decir que el gradiente de la figura con respecto a X o Z, debe ser cero; este es el requisito para localizar un punto máximo.

OPTIMIZACION RESTRINGIDA

En muchos de los problemas de toma de decisiones a que se enfrentan los administradores de empresas hay restricciones impuestas que limitan las opciones

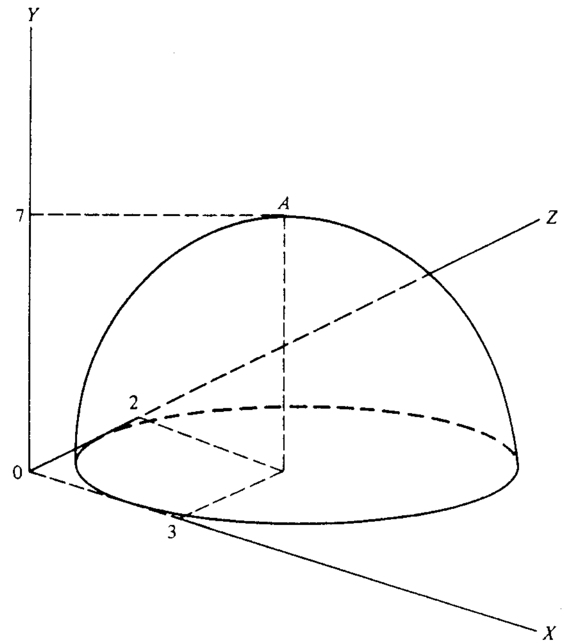

FIG. 2-13. Determinación del máximo de una función de dos variables— $Y = 4X + Z - X^2 + XZ - Z^2$.

15En realidad, para demostrar que $Y = 7$ en $X = 3$ Y $Z = 2$ es un punto de maximización y no de minimización, será preciso examinar las condiciones de segundo grao do. Puesto que las necesidades de segundo grado para determinar puntos máximos y mínimos son relativamente complejas y no necesarias para los temas que siguen en este texto, no las presentaremos aquí. Se puede encontrar una exposición completa de esos requisitos en cualquier texto de cálculo elemental.

En relación a nuestro ejemplo, podemos indicar que $Y = 7$ es un punto máximo y no mínimo, modificando los valores de X y Z de manera ligera a partir de 3 y 2 Y observando que Y disminuye ya sea que X y Z aumenten o disminuyan que tienen a su disposición los encargados de la toma de decisiones. Por ejemplo, se le puede encargar a un gerente de producción que minimice el costo total, bajo el requisito de que se fabriquen cantidades específicas de cada uno de los productos de 1a empresa. En otros momentos, el gerente de producción puede preocuparse de elevar al máximo la producción de un departamento dado, bajo las limitaciones que pesan sobre las cantidades de los diversos materiales y las instalaciones disponibles.

Otros campos funcionales de la empresa se enfrentan también a problemas de optimización restringida. Con frecuencia, a los gerentes de mercadotecnia se les encarga la tarea de maximizar las ventas, bajo la restricción de que no sobrepasen un presupuesto fijo de la publicidad. Los funcionarios financieros, en los esfuerzos que hacen para minimizar el costo de adquisición de capital, deben trabajar a menudo dentro de restricciones impuestas por los acreedores.

Los problemas de optimización restringida se pueden resolver de diversas maneras distintas. En algunos casos, cuando la ecuación de restricción no es demasiado compleja, se puede resolver una de las variables de decisión y, a continuación, substituirla en la función objetiva -la función que la empresa desea maximizar o minimizar!" Este procedimiento hace que el problema sea el de rnaximización o minimización no restringida, que se pueda resolver mediante los métodos subrayados antes.

Este procedimiento se puede aclarar, examinando su utilización en un problema de minimización restringida. Supóngase que una empresa fabrica su producto en dos líneas de ensamblaje y actúa con la siguiente función de costos totales:

$$Te = 3X2 + 6Y2 - XY,$$

en donde X representa la producción total de una línea de montaje e Y la de la segunda. La administración trata de determinar la combinación de menor costo de X e Y, bajo la restricción de que la producción total del artículo tiene que ser de 20 unidades. El problema de optimización restringida se puede enunciar como sigue:

Minimizar

$$TC = 3X^2 + 6P - XY,$$

bajo la restricción de que

$$X+Y=20.$$

Resolviendo la restricción para X y substituyendo este valor en la función objetiva, se obtiene:

$$X=20- Y,$$

----."" -----------

En .esta sección, examinamos técnicas para resolver problemas de optimización restringida' en los casos en los que las limitaciones se pueden expresar en la forma de ecuaciones. Con frecuencia, las restricciones imponen s610 límites superiores o inferiores para la toma de decisiones y, por ende, pueden no "restringir" o afectar la solución óptima. Las limitaciones de este segundo tipo, más general, se expresan adecuadamente como relaciones de desigualdad y, en esos casos, se debe utilizar otra técnica de optimización. la programación matemática, para el análisis del problema. La programación matemática se verá en el capítulo 7.

y

$$\begin{aligned} TC &= 3(20 - Y)\ 2. + 6Y2 - (20 - Y)\ Y \\ &= 3(400 - 40Y + P) + 6Y2 - (20Y - \\ Y2) &= 1\ 200 - 120Y + 3Y2 + 6P - 20Y + P \\ &= 1200 - 140Y + 10P. \end{aligned} \tag{2-12}$$

A continuación, podemos tratar la ecuación 2-12 como un problema de murmura sación no restringida. Su resolución requiere tomar la derivada, hacerla igual a cero y resolver para determinar el valor de Y:

$$\frac{dTC}{dY} - -140+ 20Y = O$$

$$20Y = 140$$

$$Y = 7.$$

La verificación del signo de la segunda derivada evaluada en ese punto, asegurará que se haya obtenido un mínimo:

$$dTC = -140 + 20Y\ dY$$

$$d^2TC = +20.\ dY2$$

Puesto que la segunda derivada es positiva, $Y = 7$ tiene que ser un mínimo Substituyendo Y con su valor 7 en la ecuación de restricción, podemos determinar la cantidad óptima de X que debe producirse:

$X + 7 = 20$ $X = 13$.

En esta forma, la producción de 13 unidades en la línea de montaje de X y 7 unidades en la Y, es la combinación de menor costo para la fabricación de un total de 20 unidades del producto de la empresa. El costo total de producción de esa combinación será:

$$TC = 3(13)2 + 6(7)2 - (13\cdot 7) = 507 + 294 - 91$$
$$= \$710.$$

Multiplicadores de Lagrange!'

Lamentablemente, la técnica de substitución empleada antes no siempre resulta factible; con frecuencia, las condiciones de restricción son demasiado numerosas o complejas para que sea adecuado utilizar el reemplazamiento. En esos casos, se debe usar la técnica de los *multiplicadores de Lagrange*.

17Esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad.

La técnica de Lagrange para resolver problemas de optimización restringida es un procedimiento que exige la optimización de una función que combina la función objetiva original y las condiciones limitadoras. Esta ecuación combinada, denominada de -Lagrange, se constituye de un modo que asegure: 1) que cuando se maximice (o minimice), la función objetiva original se maximice (o minimice) al mismo tiempo y 2) que todos los requisitos limitadores se satisfagan.

El preexamen del problema de minimización restringida que ilustramos antes aclarará el empleo de esta técnica. Recuérdese que la empresa deseaba minimizar la función $Te = 3X2 + 6\ Y2 - XY$, bajo la limitación de que $X + y = 20$.

. Al; reordenar, la \ ecuación de ' restricción ıpara | que | todos 'términos que quedan a la izquierda del signo igual, se obtiene:

$$x + y - 20 = O.$$

Al multiplicar esta forma de la ecuación de restricción por el factor desconocido A ıs Y restar el resultado de la función objetiva original, se tiene:

$$L_{TC} = 3X2 + 6Y2 - XY - JI.\ (X + y - 20). \qquad (2\text{-}13)$$

L_{TC} se define como la función de Lagrange para el problema de optimización restringida que se está tomando en consideración.

Puesto que incluye las limitaciones en la función objetiva, la función de Lagrange se puede tratar como un problema de optimización no restringida y la solución para ese problema será *siempre* idéntica a la solución del problema de optimización restringida original. Para ilustrar esto, sea el problema de minimizar la función de Lagrange construida antes en la ecuación 2-13. En un punto mínimo de una función de variables múltiples, todas las derivadas parciales tienen que ser iguales a cero. Se pueden tomar las parciales de la ecuación 2-13 con respecto a tres variables incógnitas, X, Y y λ, como sigue:

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial X} = 6X - Y - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial Y} = 12Y - X - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial \lambda} = -X - Y + 20$$

Al hacer que esas tres parciales sean igual a cero se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$6X - Y - \lambda = 0 \qquad (2\text{-}14)$$

$$-X + 12Y - \lambda = 0 \qquad (2\text{-}15)$$

$$-X - Y + 20 = 0. \qquad (2\text{-}16)$$

[18] λ es la letra griega lambda, que se utiliza siempre al formular expresiones de Lagrange.

Obsérvese que la ecuación 2·16, la parcial de la función de Lagrange con respecto a A, es la condición de restricción impuesta en el problema original de optimización. Este resultado no es una coincidencia. La función de Lagrange se construye específicamente para que la derivada de la función tomada con respecto al multiplicador de Lagrange, A, dé siempre la limitación original. En tanto esta derivada. sea cero, como debe serlo en un extremo local (máximo o mínimo), las condiciones limitadoras impuestas sobre el problema original se satisfarán adecuadamente. Además, puesto que en esas condiciones, el último término de la expresión de Lagrange debe ser igual a cero, o sea, $(X + y - 20 = O)$, la función de Lagrange se reduce a la función objetiva original y, en esa forma, la solución para el problema no restringido de Lagrange será siempre la solución del problema original de optimización restringida.

Estas relaciones se aclararán, al completar ¡ el análisis de nuestro ejemplo. Para comenzar, se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener los valores óptimos de X e Y. Al restar la ecuación 2-15 de la 2-14, se tiene:

$$7X - 13Y = O. .! \qquad (2\cdot 17)$$

A continuación, al multiplicar la ecuación 2- 16 por 7 y restar la ecuación 2-17 del producto, se puede resolver para Y:

$$7X + 7Y - 140 = O\ \underline{7X} \qquad 7\cdot \quad (2\text{-}16)$$

$$\underline{- 13Y = O} \qquad (2\cdot 17)$$

$$20Y - 140 = O\ 20Y$$

$$= 140\ Y=7.$$

Substituyendo Y por su valor 7 en la ecuación 2-16. se obtiene X = ¡:1. (1 \ :den de X en el punto donde se minimiza la expresión de Lagrange.

Puesto que la solución de la ecuación de Lagrange es también la del problema de optimización restringida de la empresa, 13 unidades de la línea de montaje X y 7 unidades de la Y serán la combinación de producción de menor costo que se puede realizar bajo la restricción de que la producción total tiene que ser de 20 unidades. Es la misma solución que se obtuvo anteriormente, resolviendo la limitación para una de las variables de decisión y substituyéndola en la función objetiva.

Además de ser una técnica más poderosa para resolver problemas de optimización restringida que el método de substitución -es más fácil aplicar la técnica de Lagrange a un problema con limitaciones múltiples. el método de Lagrange proporciona también al encargado de la toma de decisiones información suplementaria muy valiosa. Esto se debe al hecho de que el multiplicador de Lagrange, λ. tiene una interpretación económica importante. Al substituir los valores de X e y en la ecuación 2-14, se puede determinar el valor de λ en nuestro ejemplo:

$$6 \cdot 13 - 7 - \lambda = 0$$
$$\lambda = +71.$$

En este caso. se puede interpretar λ como el costo marginal de producción de 20 un edades. Nos indica que si la empresa tuviera que fabricar sólo 19 en lugar de 20 unidades de producción. los costos totales descenderían en aproximada.

Mente 71 dólares. De manera similar, si el requisito de producción fuera de 21 en lugar de 20 unidades, los costos se incrementarían en esa cantidad." De manera más general, cualquier multiplicador de Lagrange, λ, indica el efecto marginal sobre la función objetiva original del aumento del requisito de restricción en 1 unidad.

RESUMEN

La optimización es el método de determinar la mejor solución posible para un problema dado. En este capítulo presentamos primeramente cierto número de métodos utilizados para expresar relaciones económicas y, a continuación, examinamos varios instrumentos relacionados de análisis que se utilizan en la optimización.

Las relaciones económicas se pueden expresar como cuadros, gráficas o ecuaciones, Las variables clave incluyen totales, promedios y marginales yesos valores se relacionan entre sí de una manera única. Dado cualquier conjunto de variables, los otros dos se pueden desarrollar sobre la base de las relaciones fundamentales entre las diferentes variables.

Con frecuencia, el análisis de optimización implica la localización del valor máximo o mínimo de una función. Los valores para la función se pueden calcular e incluirse en un cuadro, o bien, trazarse en una gráfica, para observar directamente el punto en que se maximiza (o minimiza) la función. Sin embargo, a menudo resulta más conveniente utilizar el cálculo para localizar el punto óptimo, calculando simplemente la derivada de la función total y haciéndola igual a cero; o sea, $dY [d X$ = O. En la misma forma, se explicó de manera detallada el proceso de tomar «enviadas.

Una función puede tener varios valores en los que la derivada es cero, y algunos de esos puntos representan máximos o mínimos. Para determinar si se ha encontrado un máximo o un mínimo, se calcula la segunda derivada. Si $d2Y /dX2$ es negativa, se habrá encontrado un máximo; si es positiva, un mínimo.

Si uña función contiene más de dos variables, se utiliza la derivación parcial y, en esa forma, se examinó el método para determinar parciales, $ay / a x$. Para maximizar una función de dos o más variables, es preciso calcular la parcial con respecto a la variable y esas parciales se igualan simultáneamente a cero.

El tema final que se examinó fue el de la optimización restringida, que consiste en maximizar o minimizar una función bajo un conjunto de limitaciones. En este caso, explicamos cómo se puede utilizar el concepto de multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización restringida.

Los instrumentos desarrollados en este capítulo se utilizan en todos los tipos de análisis 'económicos, sobre todo de economía administrativa. Por ende, los utilizamos en todo el resto del texto.

PREGUNTAS

2-1 ¿Cuál es la relación clave entre totales y marginales que hace que resulte tan importante en el análisis de optimización la comprensión del concepto marginal?

Técnicamente, A indica el costo marginal asociado a un cambio infinitesimal del requisito limitador. Así, proporciona sólo una estimación aproximada del cambio en los costos totales que se produciría si se exigiera una unidad más (o menos) de la producción. La interpretación de A, el multiplicador de Lagrange, se examina de manera más completa en el capítulo 7, donde se presentan las técnicas de programación lineal.