

## RESISTENCIA DE MATERIALES

**Autor: Jorge Perelli Botello**

Este documento es una recopilación de la teoría aplicada a la resolución de problemas de Resistencia de Materiales.

No tiene, por tanto, el rigor teórico que se puede encontrar en cualquiera de los conocidos y numerosos libros que tratan de este asunto, ya que su objeto es constituir una guía de la teoría más importante e indispensable para poder resolver los problemas más habituales de la materia.

Se ha incluido un anejo con indicaciones de utilidad.

Espero que sea interesante para todos los que lo usen y ruego que sean generosos en perdonar los errores, que a buen seguro existen.

---

## ÍNDICE

### CAPÍTULO 1- CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

- 1.1- Tensión y deformación.
- 1.2- Vigas y estructuras planas.
- 1.3- Esfuerzos en barras.
- 1.4- Equilibrio en la rebanada.
- 1.5- Tipos de apoyos.
- 1.6- Rótulas.
- 1.7- Tipos de cargas.
- 1.8- Tipos de estructuras.

### CAPÍTULO 2- HIPÓTESIS BÁSICAS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES.

- 2.1- Homogeneidad e isotropía del material.
- 2.2- Ley de Hooke.
- 2.3- Equilibrio interno y externo.
- 2.4- Principio de superposición.
- 2.5- Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio.
- 2.6- Hipótesis de Navier-Bernouilli.

### CAPÍTULO 3- LEYES DE ESFUERZOS.

- 3.1- Momentos flectores.
- 3.2- Esfuerzos cortantes.
- 3.3- Axiles.

### CAPÍTULO 4- SECCIONES.

- 4.1- Momentos de inercia.
- 4.2- Tensiones normales.
- 4.3- Tensiones tangenciales.
- 4.4- Núcleo central.
- 4.5- Secciones compuestas.

---

**CAPÍTULO 5- DEFORMACIONES Y MOVIMIENTOS.**

- 5.1- Deformaciones por axil.
- 5.2- Deformación por momento flector.
- 5.3- Ecuación de la elástica.
- 5.4- Fórmulas de Bresse.
- 5.5- Teoremas de Mohr.
- 5.6- Efectos térmicos en las estructuras.
- 5.7- Rigidez y flexibilidad.
- 5.8- Hiperestatismo.
- 5.9- Teorema de la fuerza unidad.

**CAPÍTULO 6- LÍNEAS DE INFLUENCIA.**

- 6.1- Teorema de los trabajos virtuales.
- 6.2- Teorema de reciprocidad.
- 6.3- Líneas de influencia. Definición.
- 6.4- Métodos de obtención de líneas de influencia.

**CAPÍTULO 7- PÓRTICOS.**

- 7.1- Estructuras simétricas.
- 7.2- Cargas simétricas sobre estructuras simétricas.
- 7.3- Cargas antimétricas sobre estructuras simétricas.
- 7.4- Cargas simétricas en estructuras con centro de simetría.
- 7.5- Cargas antimétricas en estructuras con centro de simetría.

**CAPÍTULO 8- ARCOS.**

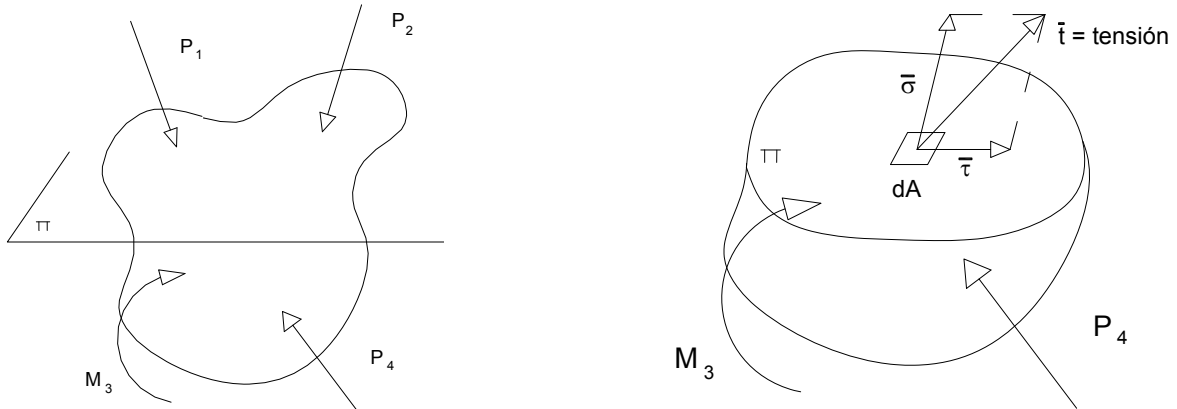
- 8.1- Sistema equivalente de cargas.
- 8.2- Curvas funiculares y antifuniculares.

## CAPÍTULO 1- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

### 1.1- TENSIÓN Y DEFORMACIÓN

#### Tensión:

Se considera un sólido en equilibrio bajo la acción de ciertas cargas. Cortando por un plano  $\pi$ , se tiene:



$\bar{\sigma}$ : Tensión normal (componente perpendicular a  $\pi$ )

$\bar{\tau}$ : Tensión tangencial (componente contenida en  $\pi$ )

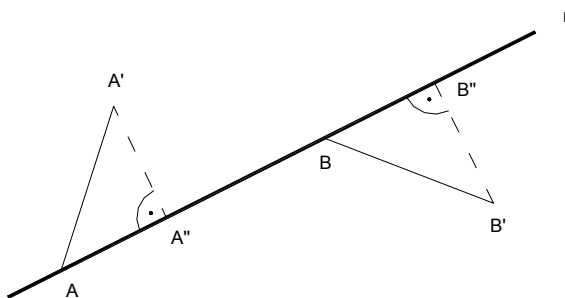
$$\bar{t} = \frac{dF}{dA} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Superficie}}$$

Las unidades de  $\bar{t}$  son MPa o kN/m<sup>2</sup>.

#### Deformación longitudinal:

Sean dos puntos A y B de un sólido elástico próximos entre sí y unidos por la recta r. Al aplicar un estado de carga, se desplazarán a A' y B' respectivamente.

La deformación longitudinal es el alargamiento relativo, en la dirección r, producido entre A y B. Es adimensional.



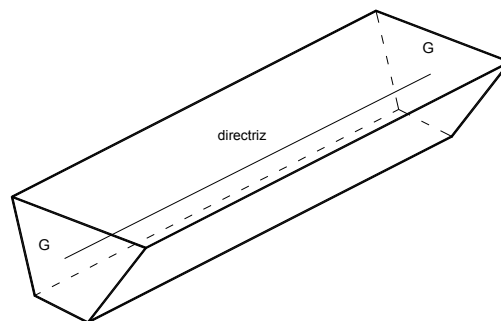
$$\varepsilon = \frac{BB'' - AA''}{AB} = \frac{\Delta L}{L}$$

## 1.2- VIGAS Y ESTRUCTURAS PLANAS

La Resistencia de Materiales estudia los esfuerzos, deformaciones, tensiones y movimientos en estructuras planas.

### Viga:

Es el sólido engendrado por una superficie plana que se desplaza de modo que su centro de gravedad recorre una línea que se denomina directriz, manteniéndose dicha superficie perpendicular a la directriz.



Las fuerzas exteriores actuantes en la viga se suelen aplicar en algún punto de la directriz. En caso contrario, se trasladan a ella por las reglas de la Mecánica.

Las vigas pueden ser rectas, curvas, de sección constante o variable, etc.

### Estructura plana:

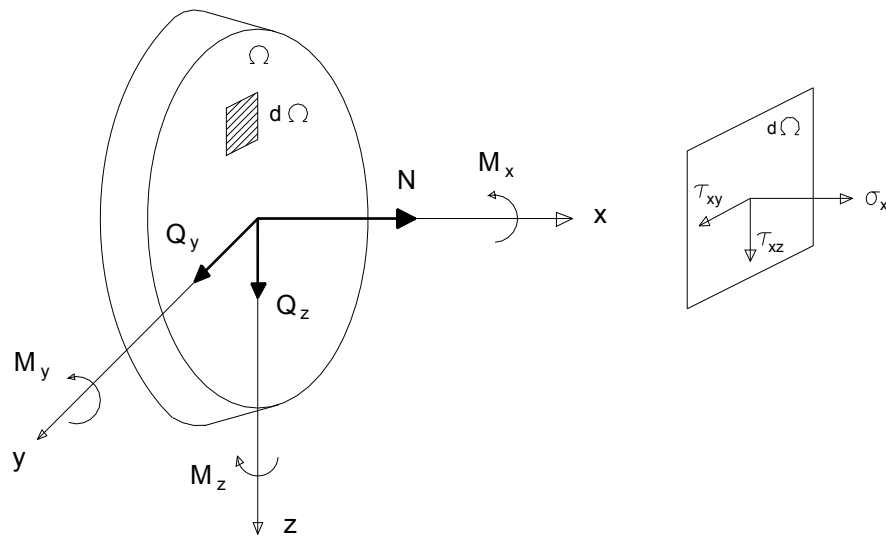
Es la formada por vigas enlazadas entre sí, y cuyas directrices están contenidas en el mismo plano.

Todas las fuerzas aplicadas están también contenidas en dicho plano.

### 1.3- ESFUERZOS EN BARRAS

Las tensiones actuantes en una sección pueden ser sustituidas por un sistema de fuerzas equivalentes denominadas esfuerzos.

En general, los esfuerzos consisten en una fuerza axil, dos cortantes, dos momentos flectores y un momento torsor.



Para obtener los esfuerzos, hay que integrar las tensiones.

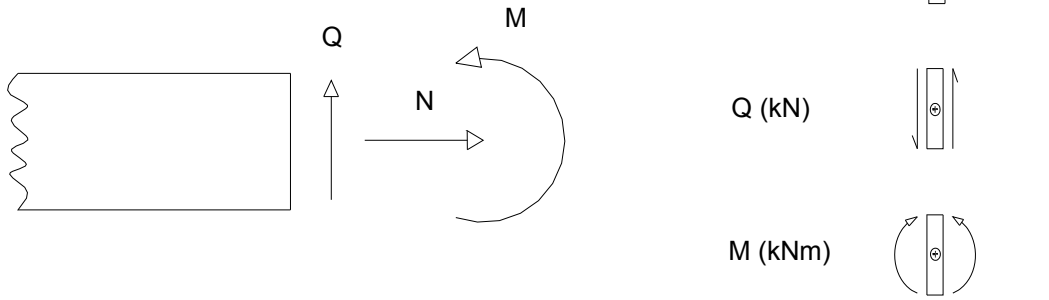
**AXIL:** 
$$N = \iint_{\Omega} \sigma_x \cdot d\Omega$$

**CORTANTES:** 
$$Q_y = \iint_{\Omega} \tau_{xy} \cdot d\Omega$$
 
$$Q_z = \iint_{\Omega} \tau_{xz} \cdot d\Omega$$

**MOMENTOS FLECTORES:** 
$$M_y = \iint_{\Omega} \sigma_x \cdot z \cdot d\Omega$$
 
$$M_z = -\iint_{\Omega} \sigma_x \cdot y \cdot d\Omega$$

**MOMENTO TORSOR:** 
$$M_x = \iint_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \cdot d\Omega$$

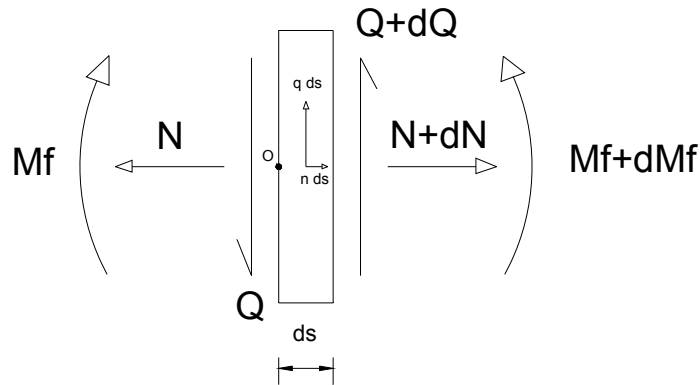
En Resistencia de Materiales, se suele trabajar sólo en dos dimensiones, por lo que los esfuerzos quedan reducidos a tres:





**1.4- EQUILIBRIO DE LA REBANADA**

Una rebanada es la parte de la viga entre dos secciones transversales infinitamente próximas. Si en dicha viga hay aplicadas ciertas cargas exteriores por unidad de longitud ( $q$ ,  $n$ ), aparecen los siguientes esfuerzos:



Estableciendo el equilibrio en la rebanada:

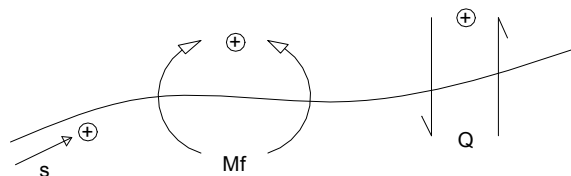
$$\sum F_H = 0 : \quad N + dN - N + n \cdot ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{-dN}{ds}}$$

$$\sum F_V = 0 : \quad Q + dQ - Q + q \cdot ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \frac{-dQ}{ds}}$$

$$\sum M_O = 0 : \quad M_f + dM_f + (Q + dQ) \cdot ds + q \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} - M_f = 0$$

Despreciando los infinitésimos de segundo orden:  $dM_f + Q \cdot ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{-dM_f}{ds}}$

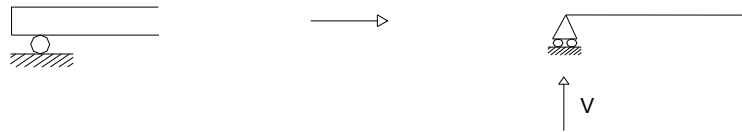
La ley de cortantes es siempre la  $-$ (pendiente de la ley de momentos flectores) con los siguientes signos:



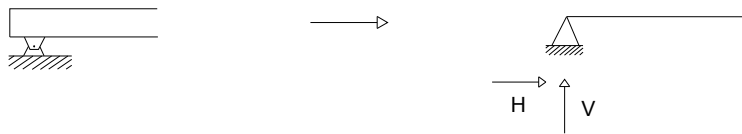
## 1.5- TIPOS DE APOYOS

Un apoyo supone una coacción a los movimientos, bien sean desplazamientos o giros. Por cada coacción a un movimiento existe una reacción, bien sea fuerza o momento. Pueden ser de varios tipos:

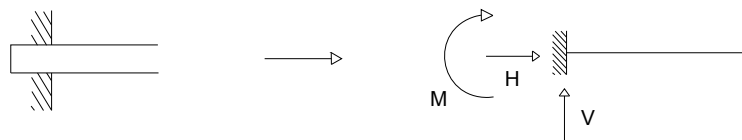
### Apoyo simple:

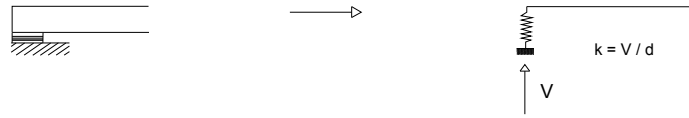
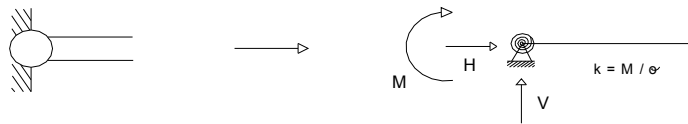


### Articulación:



### Empotramiento:

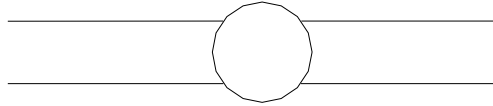


**Muelle:****Resorte:**

---

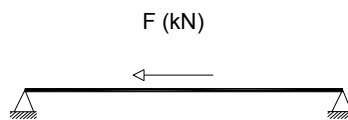
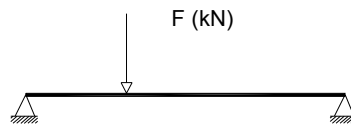
### 1.6- RÓTULAS

Son conexiones entre barras que permiten el giro. En ellas no existe momento flector, pero sí pueden transmitir axil y cortante.

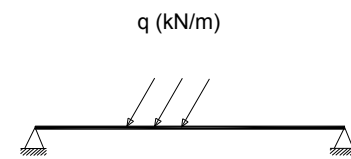
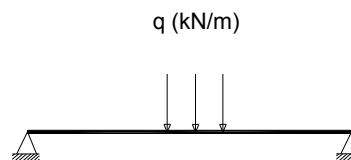


## 1.7- TIPOS DE CARGAS

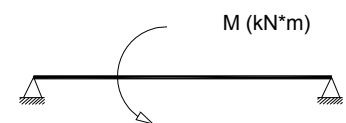
### Puntual:



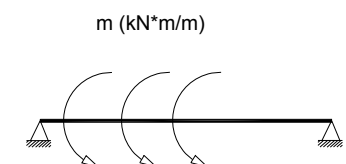
### Repartida:



### Momento:



### Momento repartido:



## 1.8- TIPOS DE ESTRUCTURAS

### Isostáticas:

Son aquellas en las que pueden obtenerse sus reacciones y las leyes de esfuerzos únicamente utilizando las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum H = 0$$

$$\sum V = 0$$

$$\sum M = 0$$

### Hiperestáticas:

Para obtener las reacciones y las leyes de esfuerzos son precisas, además de las condiciones de equilibrio, tantas condiciones de compatibilidad de movimientos como grados de hiperestatismo existan.

$$GH = N^{\circ} \text{ coacciones en apoyos} - N^{\circ} \text{ rótulas} - 3$$

Si  $GH = 0$ , la estructura es isostática.

### Mecanismos:

Se producen cuando la estructura colapsa ( $GH < 0$ ).

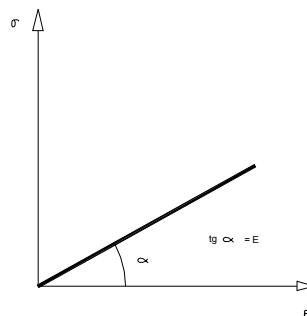
## CAPÍTULO 2- HIPÓTESIS BÁSICAS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

### 2.1- HOMOGENEIDAD E ISOTROPÍA DEL MATERIAL

El material se supone homogéneo e isótropo. La homogeneidad supone la igualdad de propiedades del material en todos los puntos del sólido. La isotropía supone la igualdad de las propiedades en todas las direcciones.

### 2.2- LEY DE HOOKE

Existe una proporcionalidad entre tensiones y deformaciones dada por la Ley de Hooke.



$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Donde: E: Módulo de elasticidad longitudinal de Young

$\sigma$ : Tensión

$\varepsilon$ : Deformación longitudinal

### 2.3- EQUILIBRIO INTERNO Y EXTERNO

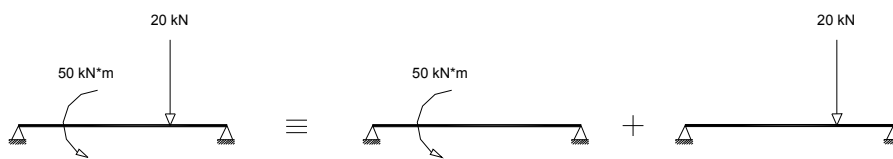
$$\sum F_H = 0$$

$$\sum F_V = 0$$

$$\sum M = 0$$

## 2.4- PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE CARGAS

Si se tiene una estructura cargada con un estado  $P_1$ , en cada punto existen unos esfuerzos, movimientos y tensiones. Si se carga con otro estado  $P_2$  existirán otros esfuerzos, movimientos y tensiones. El principio de superposición de cargas establece que, si la estructura se carga con un sistema suma de los anteriores ( $P_1+P_2$ ), los esfuerzos, movimientos y tensiones resultantes serán también suma de los provocados por los estados aisladamente.

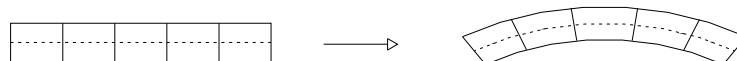


## 2.5- PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Las ecuaciones de equilibrio se plantean siempre en la estructura sin deformar.

## 2.6- HIPÓTESIS DE NAVIER-BERNOULLI

Las secciones rectas que son planas y perpendiculares a la directriz antes de la deformación, permanecen planas y perpendiculares a la directriz después de la deformación.





## CAPÍTULO 3- LEYES DE ESFUERZOS

Las principales reglas a seguir en la obtención de las leyes de esfuerzos en una estructura son las siguientes:

### 3.1- MOMENTOS FLECTORES

- En tramos no cargados, la ley de momentos flectores es lineal.
- En las rótulas, el momento flector es nulo.
- En puntos donde hay aplicada una carga puntual no paralela a la directriz, aparece un pico en la ley de momentos flectores.
- En las secciones donde existe un momento exterior aplicado, aparece un salto en la ley de momentos flectores de igual valor al del momento exterior aplicado.
- Cuando hay una carga uniformemente repartida no paralela a la directriz, la ley de momentos flectores es parabólica de segundo grado en el tramo donde actúa dicha carga.

### 3.2- ESFUERZOS CORTANTES

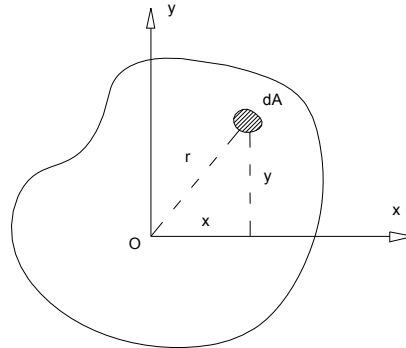
- Para obtener la ley de esfuerzos cortantes, se proyectan las cargas exteriores y las reacciones en sentido perpendicular a la directriz, en cada barra de la estructura.
- Ley de cortantes = - Pendiente de la ley de momentos flectores.  $Q = -\frac{dM_f}{ds}$
- En secciones donde hay aplicada una carga puntual perpendicular a la directriz, aparece un salto en la ley de cortantes de igual valor.
- En los tramos donde existe una carga uniformemente repartida en sentido perpendicular a la directriz, la ley de esfuerzos cortantes es lineal.
- En los apoyos, el valor de la ley de cortantes es igual a la proyección de la reacción en sentido perpendicular a la directriz.
- Si existe un momento exterior aplicado, la ley de cortantes no varía en dicho punto.
- Si hay un cambio de dirección en la estructura, se produce un salto en la ley de cortantes de valor igual al cambio de la proyectada en sentido perpendicular a la directriz.

### 3.3- AXILES

- Para obtener la ley de esfuerzos axiles, se proyectan las cargas exteriores y las reacciones sobre la directriz de cada barra.
- Cuando hay una carga puntual aplicada en una sección, se produce en dicha sección un salto en la ley de axiles de igual valor a la proyección de la carga sobre la directriz.
- Si hay una carga exterior uniformemente repartida en sentido de la directriz, la ley de axiles es lineal.
- Si hay un cambio de dirección en la estructura, se produce un salto en la ley de axiles de igual magnitud que el cambio de la proyectada sobre la directriz.

## CAPÍTULO 4- SECCIONES

### 4.1- MOMENTOS DE INERCIA



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \quad (\text{siempre } > 0)$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA \quad (\text{siempre } > 0)$$

$$I_{xy} = P_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA \quad (\text{puede ser } >, < \text{ ó } = 0)$$

#### Teorema de Steiner:

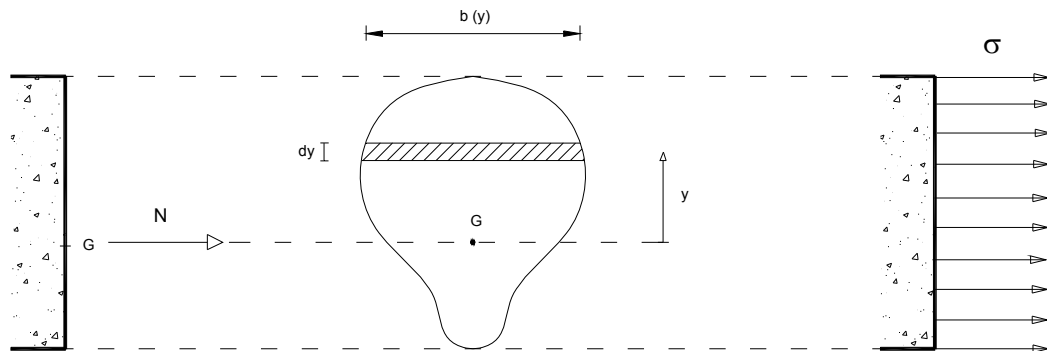
Sirve para obtener momentos de inercia de ejes paralelos a otros en que se conocen aquéllos:

“El momento de inercia de una superficie respecto a un eje, es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad, incrementado en el producto del área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes”.

$$I_X = I_{XG} + \Omega \cdot x_G^2$$

De igual manera:

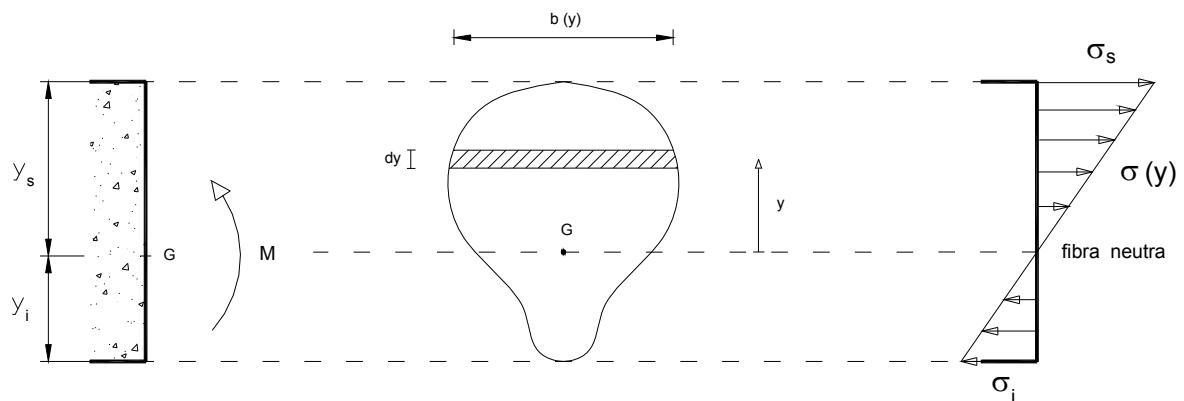
“El producto de inercia de una superficie respecto a dos ejes ortogonales, es igual al producto de inercia respecto a dos ejes paralelos a los anteriores, que pasan por el centro de gravedad, incrementado en el producto del área por las distancias entre ambos ejes”.

**4.2- TENSIONES NORMALES****Axil:**

$$N = \int_{\Omega} b(y) \cdot dy \cdot \sigma = \sigma \cdot \int_{\Omega} b(y) \cdot dy = \sigma \cdot \Omega$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} = cte.$$

$$M_f = 0$$

**Momento flector (Flexión pura):**

En flexión pura, en régimen elástico, la fibra neutra está situada en la sección del centro de gravedad.

$$M_f = \int_{\Omega} \sigma(y) \cdot b(y) \cdot dy \cdot y = \int_{\Omega} E \cdot \varepsilon(y) \cdot b(y) \cdot dy \cdot y = \{\varepsilon(y) = k \cdot y\} = \int_{\Omega} E \cdot k \cdot y^2 \cdot b(y) \cdot dy =$$

$$= E \cdot k \cdot \underbrace{\int_{\Omega} y^2 \cdot b(y) \cdot dy}_{I} = k \cdot E \cdot I$$

I respecto c.d.g.

$$k = \frac{M_f}{E \cdot I}$$

k: Curvatura

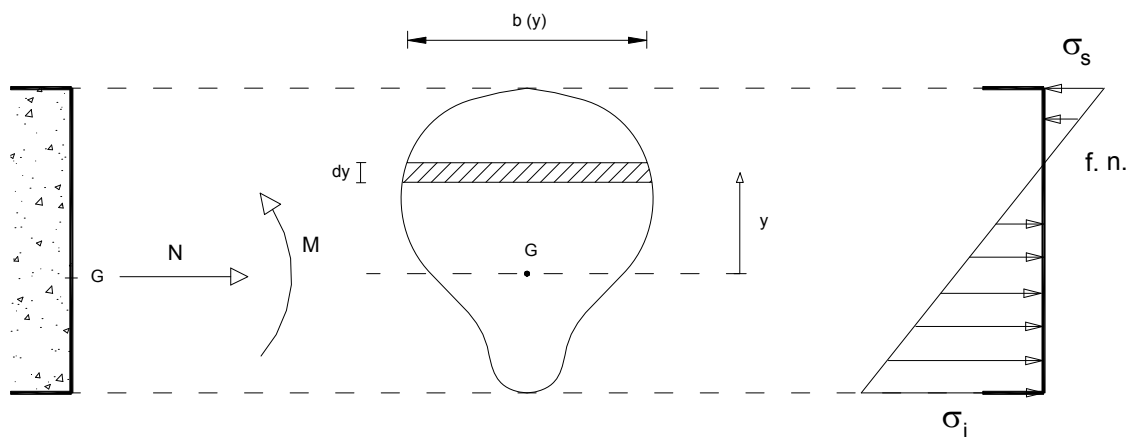
$$\sigma(y) = E \cdot \varepsilon(y) = E \cdot k \cdot y = E \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot y$$

$$\sigma(y) = \frac{M_f \cdot y}{I}$$

y: distancia al c.d.g.

$$N = 0$$

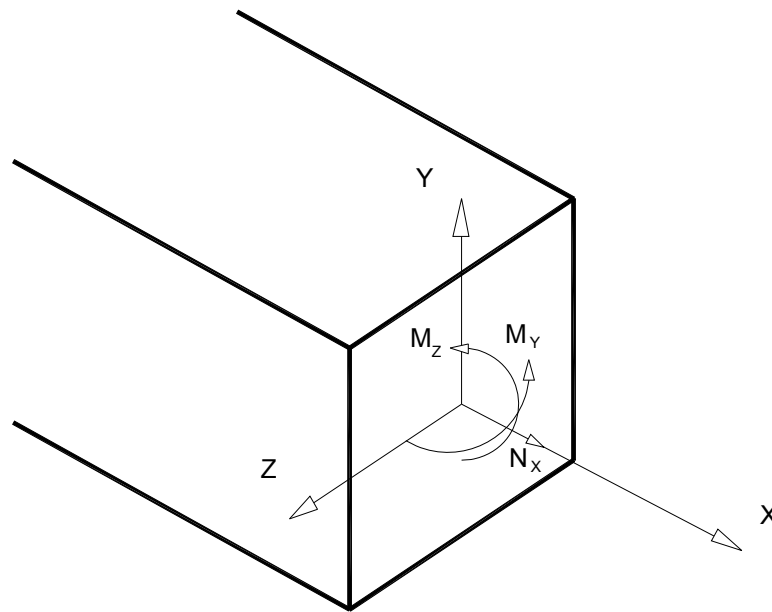
### Axil + Momento flector (Flexión compuesta):



En flexión compuesta, la fibra neutra no tiene por qué coincidir con el centro de gravedad.

$$\sigma(y) = \frac{N}{\Omega} \pm \frac{M_f \cdot y}{I}$$

Fórmula de Navier



La fórmula general de Navier para la obtención de tensiones normales en una sección es:

$$\sigma(x) = \frac{N_x}{\Omega} - \frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot P_{yz}}{I_y \cdot I_z - P_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y \cdot I_z + M_z \cdot P_{yz}}{I_y \cdot I_z - P_{yz}^2} \cdot z$$

Siendo compresiones (-) y tracciones (+) y el producto de inercia:

$$P_{yz} = \iint_{\Omega} z \cdot y \cdot d\Omega$$

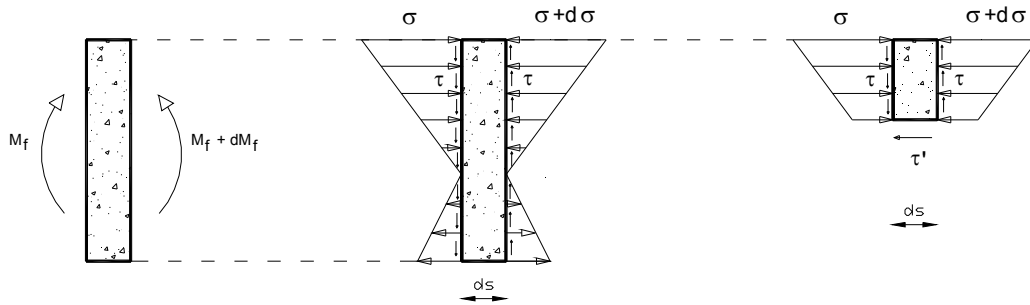
Si "z" e "y" son ejes principales de inercia, esta fórmula se puede simplificar, ya que  $P_{yz} = 0$ , resultando:

$$\sigma(x) = \frac{N_x}{\Omega} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

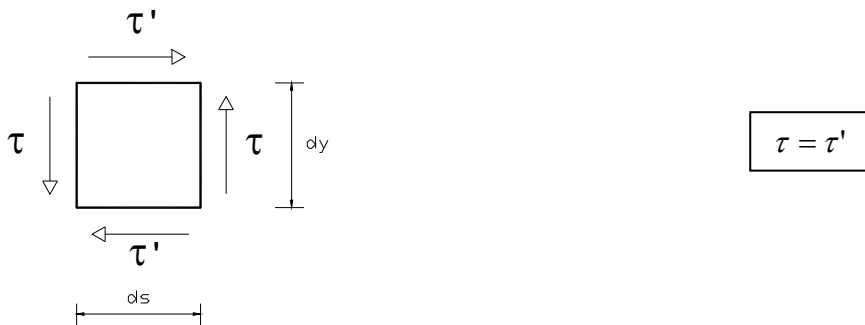
En general, todo eje de simetría y su perpendicular, ambos pasando por el centro de gravedad de la sección, son principales de inercia.

**4.3- TENSIONES TANGENCIALES**

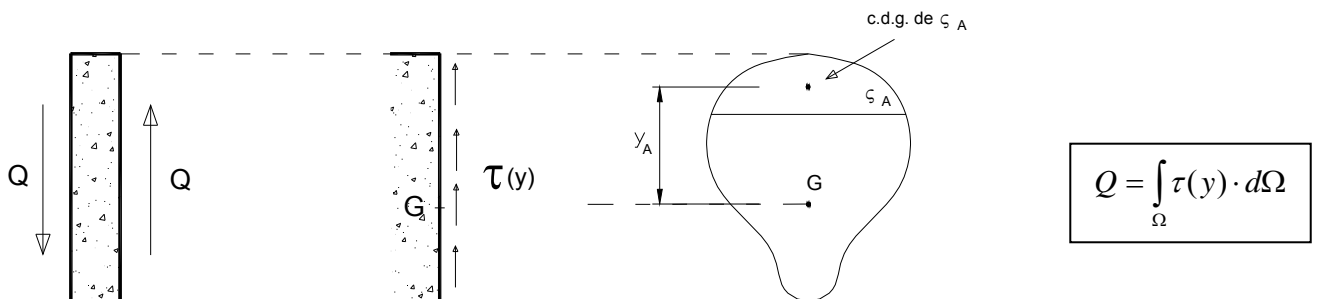
Son las debidas al esfuerzo cortante, que sólo existe cuando hay variación de momentos flectores. Las tensiones tangenciales aparecen para poder equilibrar las tensiones normales.



Si se plantea el equilibrio en un paralelogramo elemental, tiene que haber equilibrio de fuerzas horizontales, verticales y momentos. La tensión tangencial es igual en las cuatro caras.



Se tiene, por tanto:



$$Q = \int_{\Omega} \tau(y) \cdot d\Omega$$

Y las tensiones tangenciales son:

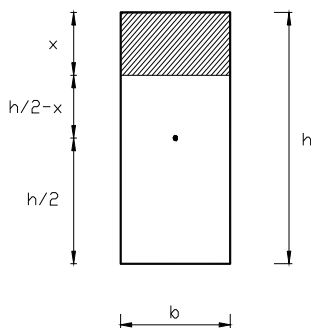
$$\tau(y) = \frac{Q \cdot M_e(y)}{I_G \cdot b(y)} \quad \text{Fórmula de Colignon}$$

Donde: Q : Esfuerzo cortante  
 $M_e(y)$ : Momento estático del área exterior a la fibra estudiada con respecto al c.d.g. de la pieza.  
 $I_G$ : Momento de inercia a flexión de la pieza respecto al eje que pasa por el c.d.g.  
 $b(y)$ : Ancho de la fibra estudiada.

### Distribución de tensiones tangenciales en secciones formadas por rectángulos (T, doble T, etc.):

- En las fibras extremas son nulas.
- La ley de tensiones tangenciales está formada por parábolas de segundo grado.
- En los cambios de ancho hay un salto en la ley de tensiones tangenciales.
- El máximo aparece en la fibra del centro de gravedad.

**Ejemplo:** Sección rectangular sometida a un cortante Q.



$$Q = Q$$

$$M_e = b \cdot x \cdot \left( \frac{x}{2} + \frac{h}{2} - x \right) = b \cdot x \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{2} \right) = \frac{b \cdot x}{2} \cdot (h - x)$$

$$I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

$$b = b$$

Sustituyendo:

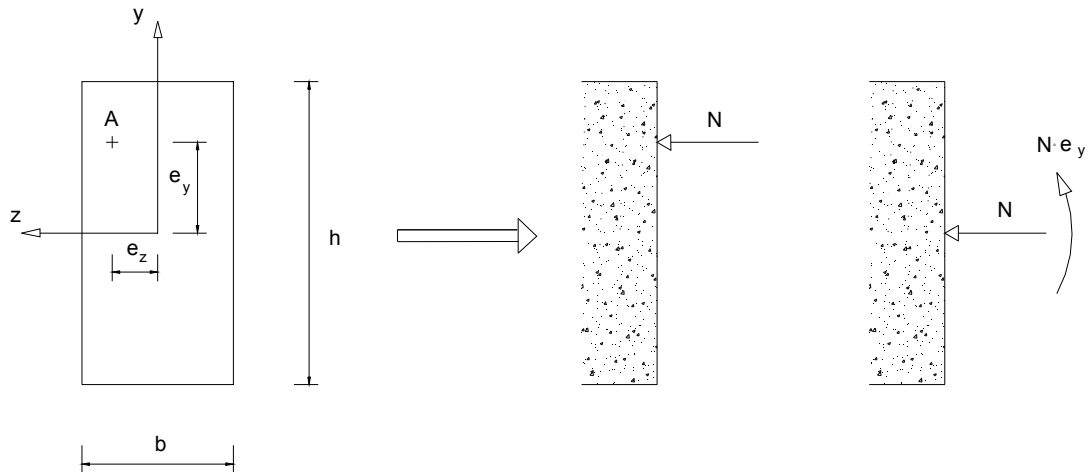
$$\tau = \frac{6 \cdot Q \cdot x \cdot (h - x)}{b \cdot h^3}$$

$$\tau \left( x = \frac{h}{2} \right) = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot b \cdot h}$$

#### 4.4- NÚCLEO CENTRAL

El núcleo central de una sección es el lugar geométrico de los puntos en los cuales, al aplicar una fuerza normal a la sección, todas las tensiones normales son del mismo signo que la fuerza aplicada.

##### Sección rectangular:

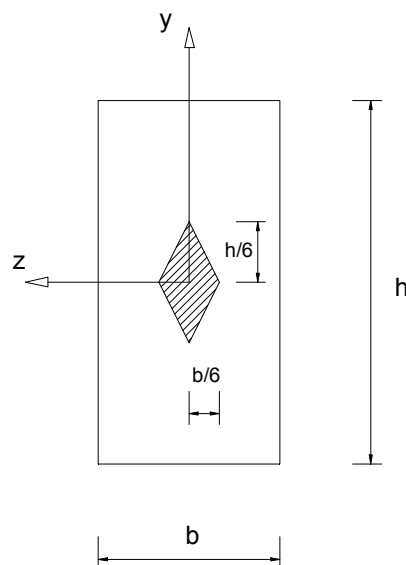


Si se aplica en el punto A un eje de compresión, las tensiones normales serán:

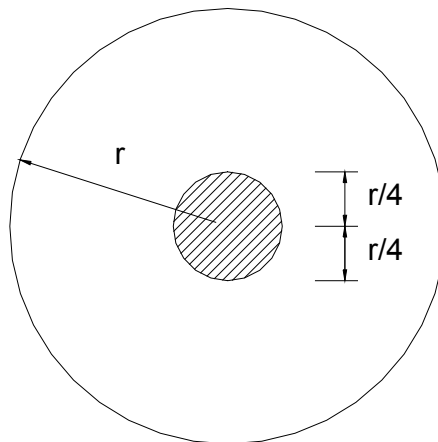
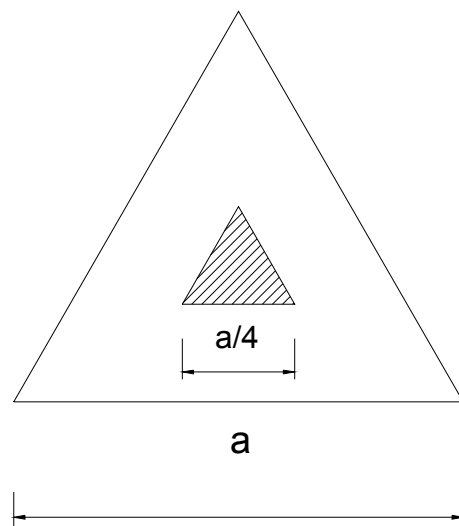
$$\sigma(x) = -\frac{N}{\Omega} - \frac{N \cdot e_y \cdot y}{I} \quad \text{con} \quad \Omega = b \cdot h; \quad I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3; \quad y = -\frac{h}{2}$$

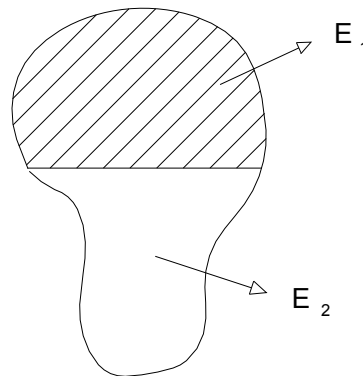
Sustituyendo y haciendo  $\sigma(x) = 0$ , se tiene:  $e_y = \frac{h}{6}$ ; análogamente:  $e_z = \frac{b}{6}$

Por tanto, el núcleo central queda:





**Sección circular:****Sección triángulo equilátero:**

**4.5- SECCIONES COMPUESTAS**

Son las formadas por materiales con diferentes módulos de elasticidad. Para que se cumpla la hipótesis de Navier, y el diagrama de deformaciones de la sección sea plano, el material más rígido (con mayor  $E$ ) necesita más tensión para deformarse lo mismo que el más flexible (con menor  $E$ ).

Para obtener las tensiones en cada fibra, se procede de la siguiente manera:

1. Se calcula el coeficiente de equivalencia:  $n = \frac{E_2}{E_1}$
2. Se multiplica el ancho de las fibras con material 2 por  $n$ , y las del material 1 se dejan con la misma anchura.
3. Se calculan las constantes estáticas de la sección homogeneizada y las tensiones provocadas por los esfuerzos ( $N$ ,  $M$ ,  $Q$ ) con las fórmulas habituales.
4. Por último, hay que hallar las tensiones existentes en la sección real mediante las siguientes relaciones de equivalencia:

$$\sigma_{REAL,1} = \sigma_{HOMOGENEIZADA,1}$$

$$\tau_{REAL,1} = \tau_{HOMOGENEIZADA,1}$$

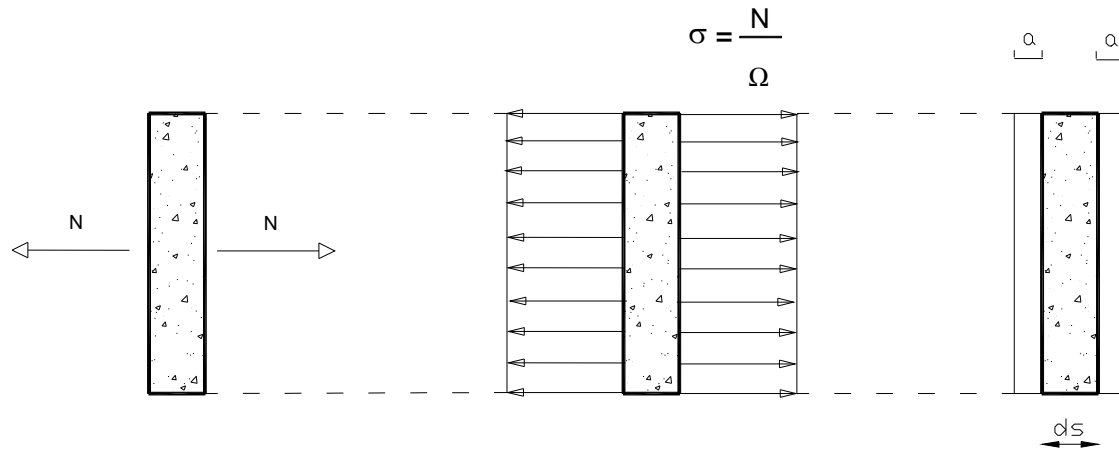
$$\sigma_{REAL,2} = n \cdot \sigma_{HOMOGENEIZADA,2}$$

$$\tau_{REAL,2} = n \cdot \tau_{HOMOGENEIZADA,2}$$

Hay que tener cuidado con el esfuerzo axial, ya que si está aplicado en el centro de gravedad de la sección real, será excéntrico en la homogeneizada, y viceversa.

## CAPÍTULO 5- DEFORMACIONES Y MOVIMIENTOS

### 5.1- DEFORMACIÓN POR AXIL

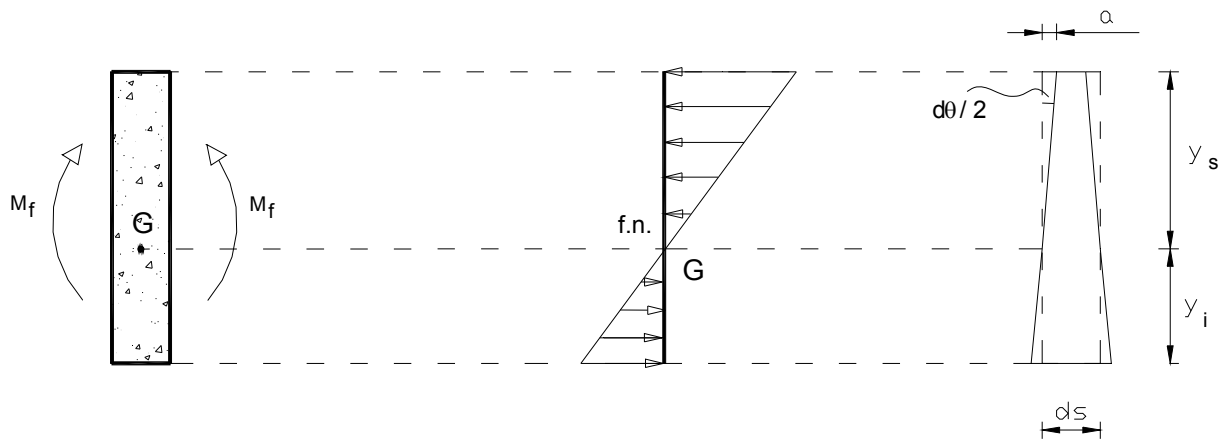


$$\Delta L = 2 \cdot a$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} \qquad \sigma = \frac{N}{\Omega}$$

De donde:

$$\Delta L = \frac{\sigma \cdot L}{E} = \frac{N \cdot L}{E \cdot \Omega} \quad (m) \qquad E \cdot \Omega = \text{Rigidez axial}$$

**5.2- DEFORMACIÓN POR MOMENTO FLECTOR**

El acortamiento de la fibra superior es  $\Delta L = 2 \cdot a$

El acortamiento unitario de la fibra superior se denomina  $\varepsilon_s$

$$\Delta L = 2 \cdot a = \varepsilon_s \cdot ds = \frac{\sigma_s}{E} \cdot ds = \frac{M_f \cdot y_s}{E \cdot I} \cdot ds = 2 \cdot a$$

El ángulo de giro es:

$$\frac{d\vartheta}{2} \cong \operatorname{tg}\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) = \frac{a}{y_s} \quad \longrightarrow \quad d\vartheta = \frac{2 \cdot a}{y_s}$$

Sustituyendo:

$$d\vartheta = \frac{M_f \cdot ds}{E \cdot I}$$

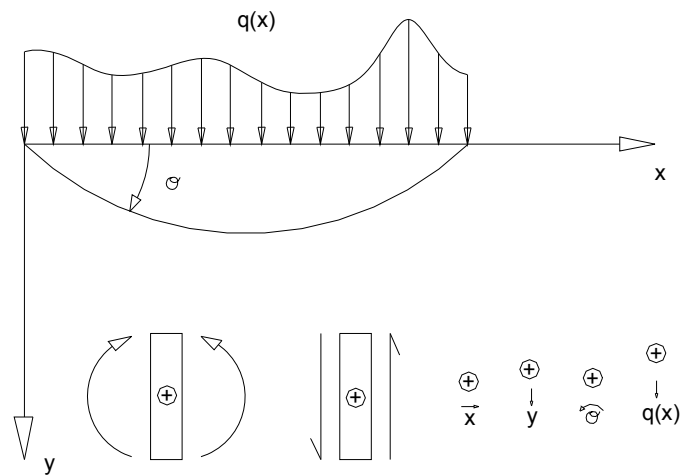
Giro elemental producido por el momento flector

La curvatura que aparece en la directriz es:

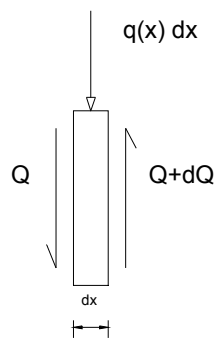
$$\chi = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{M_f}{E \cdot I}$$

(rad/m)

$E \cdot I$ : Rigidez a flexión

**5.3- ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA**

En una rebanada cualquiera, sometida a la carga repartida  $q(x)$ , se tiene:



$$\Sigma V = 0 \quad \rightarrow \quad -Q + Q + dQ - q(x)dx = 0 \quad \rightarrow$$

$$q(x) = \frac{dQ}{dx}$$

Sabemos también que  $d\vartheta = \frac{M_f \cdot dx}{E \cdot I} \quad \rightarrow \quad M_f = E \cdot I \cdot \frac{d\vartheta}{dx}$

Como  $\vartheta = \frac{-dy}{dx} = -y' \quad \rightarrow \quad M_f = -E \cdot I \cdot y''$

Y como  $Q = \frac{-dM_f}{dx} \quad \rightarrow \quad Q = E \cdot I \cdot y''' \quad \rightarrow \quad q(x) = E \cdot I \cdot y^{IV}$

**5.4- FÓRMULAS DE BRESSE**

Sirven para calcular los movimientos de un punto, conocidos los de otro, y las leyes de momentos flectores y axiales entre ellos.

$$\mathcal{G}_B = \mathcal{G}_A + \int_A^B K(s) \cdot ds$$

$$u_B = u_A - \mathcal{G}_A \cdot (y_B - y_A) + \int_A^B \varepsilon(s) \cdot \cos \beta \cdot ds - \int_A^B K(s) \cdot [y_B - y(s)] \cdot ds$$

$$v_B = v_A + \mathcal{G}_A \cdot (x_B - x_A) + \int_A^B \varepsilon(s) \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot ds + \int_A^B K(s) \cdot [x_B - x(s)] \cdot ds$$

Siendo:

s: directriz de la pieza.

$\beta$ : ángulo que forma la tangente a la directriz en cada punto con el eje x.

Deformación axial:  $\varepsilon(s) = \varepsilon^T(s) + \frac{N(s)}{E \cdot \Omega(s)}$

Curvatura:  $K(s) = K^T(s) + \frac{M_f(s)}{E \cdot I(s)}$

En caso de existir una rótula intermedia a los dos puntos, a las fórmulas de Bresse hay que añadirles:

$$\mathcal{G}_B^{\text{CONRÓTULA}} = \mathcal{G}_B^{\text{SINRÓTULA}} + \Delta \mathcal{G}_{\text{RÓTULA}}$$

$$u_B^{\text{CONRÓTULA}} = u_B^{\text{SINRÓTULA}} - \Delta \mathcal{G}_{\text{RÓTULA}} \cdot (y_B - y_{\text{RÓTULA}})$$

$$v_B^{\text{CONRÓTULA}} = v_B^{\text{SINRÓTULA}} + \Delta \mathcal{G}_{\text{RÓTULA}} \cdot (x_B - x_{\text{RÓTULA}})$$

---

## **5.5- TEOREMAS DE MOHR**

Son la aplicación de las fórmulas de Bresse para barras rectas de sección constante.

### **Primer Teorema de Mohr:**

El giro entre dos puntos es igual al área de la ley de curvaturas entre ellos.

### **Segundo Teorema de Mohr:**

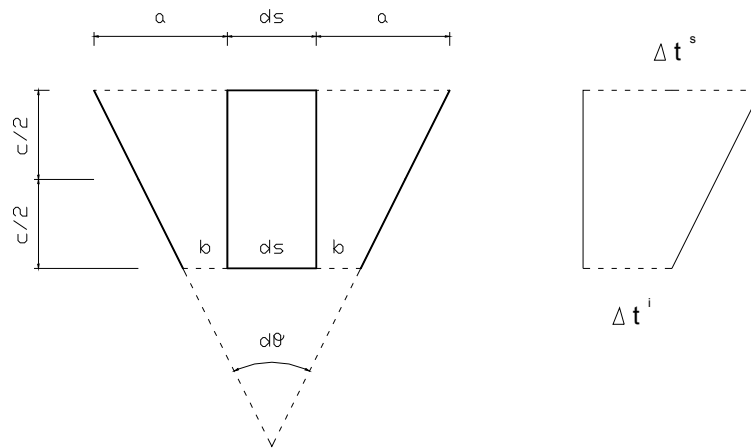
La deformación vertical entre dos puntos 1 y 2 es igual al momento estático de la ley de curvaturas entre los dos puntos respecto a la vertical de 2, más el giro en el punto inicial por el brazo horizontal, más la proyección en vertical de la elongación debida al esfuerzo axial.

Para la deformación horizontal será el equivalente.

La influencia de las rótulas es igual que la descrita en las Fórmulas de Bresse.

### 5.6- EFECTOS TÉRMICOS EN LAS ESTRUCTURAS

Se supone una pieza recta de sección simétrica con coeficiente de dilatación  $\alpha$ , que sufre una variación de temperatura  $\Delta t^s$  en la fibra superior y  $\Delta t^i$  en la fibra inferior. La variación térmica a lo largo del espesor es lineal. El alargamiento debido al incremento térmico es, por tanto, lineal en el canto de la rebanada.



La deformación de la rebanada cumple la hipótesis de Navier: las caras planas antes de la deformación permanecen planas después de la deformación.

$$\Delta l^s = 2 \cdot a = ds \cdot \alpha \cdot \Delta t^s \quad \rightarrow \quad a = \frac{\Delta t^s \cdot \alpha \cdot ds}{2}$$

$$\Delta l^i = 2 \cdot b = ds \cdot \alpha \cdot \Delta t^i \quad \rightarrow \quad b = \frac{\Delta t^i \cdot \alpha \cdot ds}{2}$$

Por tanto, en la directriz:

$$\Delta l = 2 \cdot \frac{a+b}{2} = a+b = \frac{\Delta t^s + \Delta t^i}{2} \cdot \alpha \cdot ds$$

Entonces, el alargamiento unitario será:

$$\boxed{\varepsilon^t = \frac{\Delta t^s + \Delta t^i}{2} \cdot \alpha}$$



Y el valor de la curvatura que aparece por el incremento térmico será:

$$\frac{d\vartheta}{2} \cong \operatorname{tg} \frac{d\vartheta}{2} = \frac{a-b}{c}$$

$$d\vartheta = \frac{2 \cdot (a-b)}{c} = 2 \cdot \alpha \cdot ds \cdot \frac{(\Delta t^s - \Delta t^i)}{2 \cdot c}$$

Por lo tanto:

$$d\vartheta = \frac{\Delta t^s - \Delta t^i}{c} \cdot \alpha \cdot ds$$

Y la curvatura:

$$K^t = \frac{\Delta t^s - \Delta t^i}{c} \cdot \alpha$$

Hay que tener en cuenta que, en las estructuras isostáticas, no aparecen esfuerzos debidos a temperaturas.

La aplicación de lo anterior a los teoremas de Mohr es:

**GIROS = ÁREA DE LA LEY DE CURVATURAS ( $K^t$ )**  
**MOVIMIENTOS = MOMENTOS ESTÁTICOS DE LA LEY DE CURVATURAS ( $K^t$ )**  
**ALARGAMIENTOS = ÁREA DE LA LEY DE DEFORMACIONES ( $\epsilon^t$ )**

**5.7- RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD****Rigidez:**

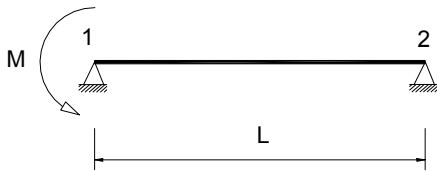
La rigidez de una barra es el esfuerzo que hay que introducir para lograr un movimiento unidad.

Rigidez axial: El alargamiento producido por una fuerza axial  $P$  es  $\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot \Omega}$ . Por tanto, la rigidez será:

$$K_N = \frac{E \cdot \Omega}{L}$$

Aunque se suele denominar rigidez axial al producto  $E \cdot \Omega$ .

Rigidez a flexión: Como la curvatura es  $\rho = \frac{M}{E \cdot I}$ , la rigidez a flexión es  $E \cdot I$ . En el caso de una barra biapoyada de sección constante:



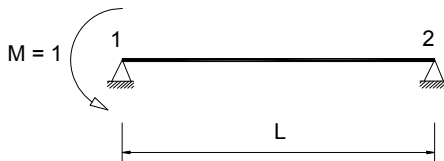
$$g = \frac{M \cdot L}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$K_F = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L}$$

**Flexibilidad:** La flexibilidad  $f_{ij}$  es el desplazamiento del grado de libertad  $j$  cuando se aplica una carga unidad en el grado de libertad  $i$ .

Flexibilidad axial:  $f_N = \frac{L}{E \cdot \Omega}$

Flexibilidad a flexión: En el caso de una barra recta de sección constante, con un momento aplicado en un extremo, se tiene:



$$f_{11} = \frac{L}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$f_{12} = \frac{-L}{6 \cdot E \cdot I}$$

### 5.8- HIPERESTATISMO

En las estructuras hiperestáticas, para deducir las reacciones y las leyes de esfuerzos no basta con las ecuaciones de equilibrio, y es preciso buscar tantas condiciones adicionales de compatibilidad de movimientos como grados de hiperestatismo existan.

$$GH = N^{\circ} \text{ reacciones} - N^{\circ} \text{ ecs. equilibrio} - N^{\circ} \text{ rótulas intermedias}$$

#### Vigas continuas

En las vigas continuas, si no existen cargas horizontales o inclinadas ni diferencias térmicas, no hay reacciones horizontales en los apoyos, por lo que se pueden poner deslizaderas.

La forma general de resolverlas es plantear las condiciones de equilibrio, y como condiciones de compatibilidad de deformaciones igualar los giros en apoyos a ambos lados.

### 5.9- TEOREMA DE LA FUERZA UNIDAD

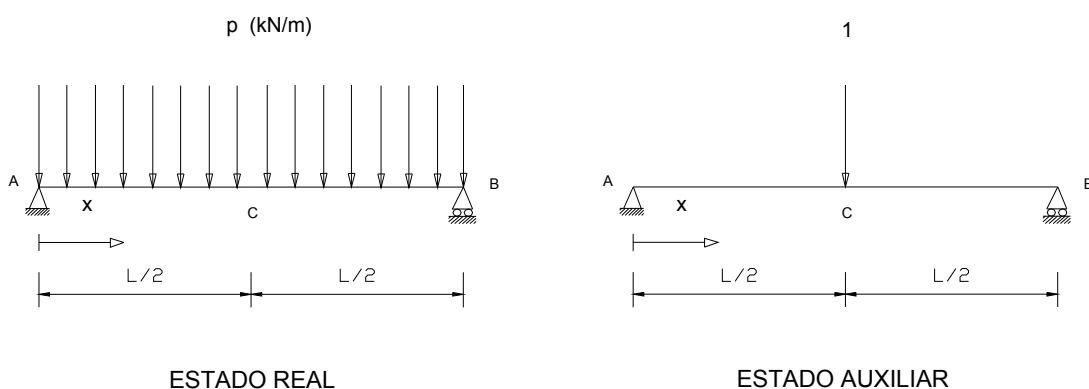
Sirve para calcular movimientos. El procedimiento de aplicación es el siguiente:

- Se crea un estado auxiliar, en el que se coloca una fuerza (o momento) unidad eficaz con el movimiento que se desea calcular.
- Se calcula la ley de curvaturas del estado real ( $\chi^{REAL}$ ) y la de momentos del estado auxiliar ( $Mf^{AUX}$ ).
- El movimiento buscado está dado por la siguiente expresión:

$$\Delta = \oint \chi^{REAL} \cdot Mf^{AUX} \cdot ds$$

Donde se consideran despreciables las deformaciones por axil, cortante y torsor.

Ejemplo: Se desea determinar la flecha en la sección central de una viga simplemente apoyada, sometida a una carga repartida  $p$  (kN/m), y que tiene una rigidez a flexión  $E \cdot I$ .



Se obtienen las expresiones de las leyes de curvaturas en el estado real y de momentos flectores en el estado auxiliar, para la mitad izquierda de la viga. En la parte derecha serán simétricas.

$$Mf^{REAL} = \frac{p \cdot L}{2} \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\chi^{REAL} = \frac{Mf^{REAL}}{E \cdot I} = \frac{p \cdot x \cdot (L - x)}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$Mf^{AUX} = \frac{x}{2}$$

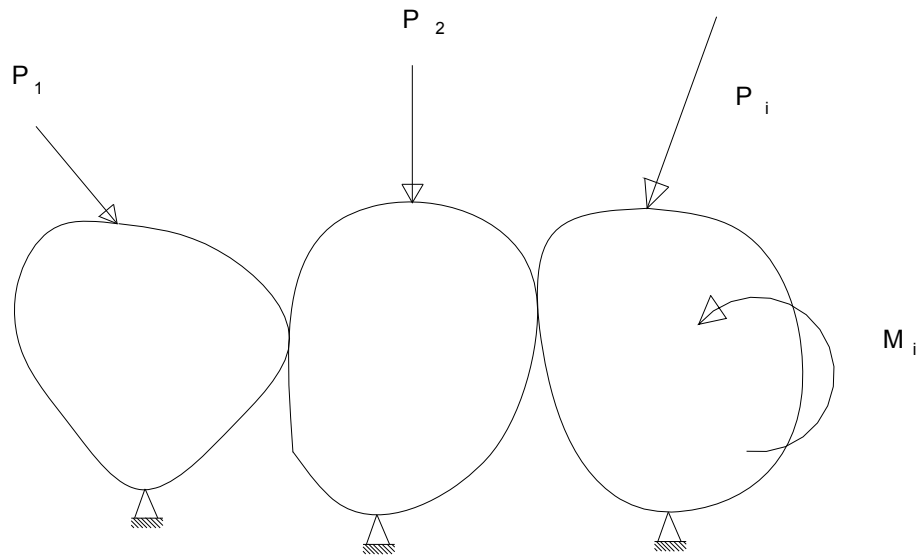
Por tanto, la flecha hacia abajo será:

$$v = \oint \chi^{REAL} \cdot Mf^{AUX} \cdot ds = 2 \cdot \int_0^{L/2} \frac{p \cdot x \cdot (L - x)}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{x}{2} \cdot dx = \frac{5 \cdot p \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

Si resulta positivo, el movimiento llevará el sentido de la fuerza introducida en el estado auxiliar.

## CAPÍTULO 6- LÍNEAS DE INFLUENCIA

### 6.1- TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES



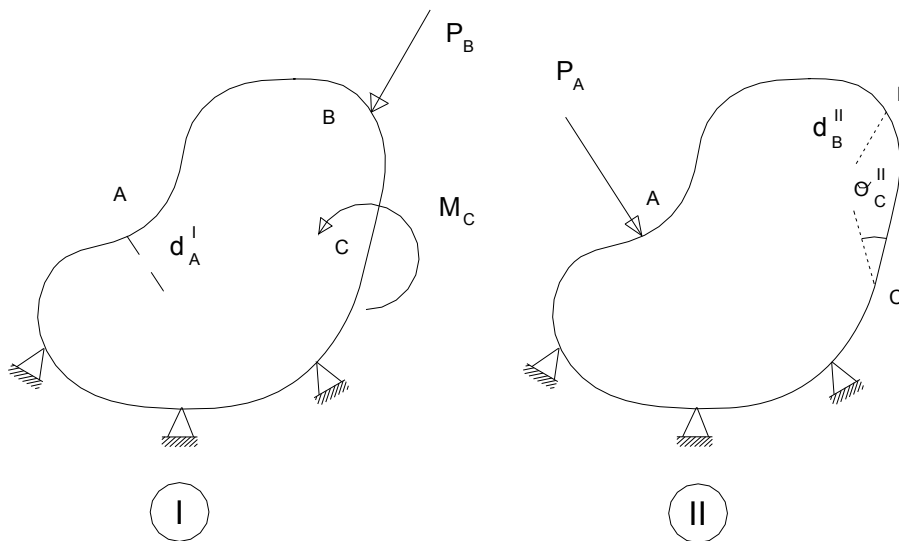
Supuesto un sistema de cuerpos rígidos en equilibrio, sobre el que actúa un sistema de cargas directamente aplicadas, se producen unos desplazamientos infinitesimales denominados desplazamientos virtuales, durante los cuales no se modifican las cargas aplicadas. Los trabajos elementales que realizan las cargas en estos desplazamientos se denominan trabajos virtuales.

El teorema de los trabajos virtuales establece que, supuesto inexistente el rozamiento, la condición necesaria y suficiente para que un sistema de cuerpos rígidos esté en equilibrio, es que la suma de los trabajos virtuales de las cargas sea nula, para cualquier desplazamiento virtual de los cuerpos compatible con los enlaces.

$$\delta W = P_i \cdot \delta_i + M_i \cdot \mathcal{G}_i = 0$$

**6.2- TEOREMA DE RECIPROCIDAD O DE MAXWELL**

Se considera un cuerpo elástico sobre el que actúan dos sistemas de cargas. Al suponerse comportamiento lineal, se admite el principio de superposición. Se denominan movimientos eficaces de las cargas a aquéllos que producen trabajo de éstas.



El teorema de reciprocidad establece que el trabajo producido por un sistema de cargas  $F_I$  aplicadas en una estructura, al aparecer en ésta unos movimientos eficaces debidos a otro sistema de cargas  $F_{II}$ , es igual al trabajo de las fuerzas  $F_{II}$  debido a los movimientos eficaces causados por el sistema de cargas  $F_I$ .

$$F_I \cdot d^{II} = F_{II} \cdot d^I$$

### 6.3- LÍNEAS DE INFLUENCIA. DEFINICIÓN

Línea de influencia de un esfuerzo, reacción o movimiento en una sección específica para una carga dada, es una curva cuyo valor en cada punto indica la magnitud del esfuerzo, reacción o movimiento en la sección a estudiar cuando la carga exterior ocupa cada punto.

### 6.4- MÉTODOS DE OBTENCIÓN DE LÍNEAS DE INFLUENCIA

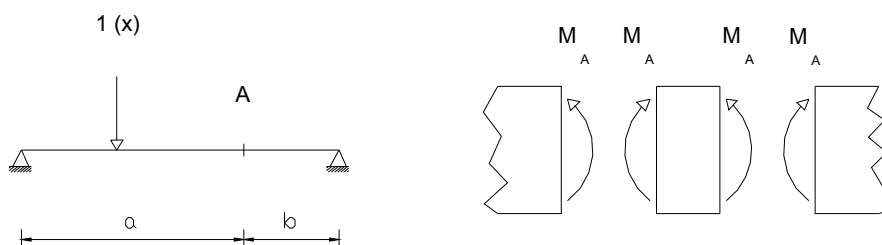
#### Método directo

Se calcula la línea de influencia directamente, en función de la distancia de la carga a la sección de estudio. Suele ser muy laborioso.

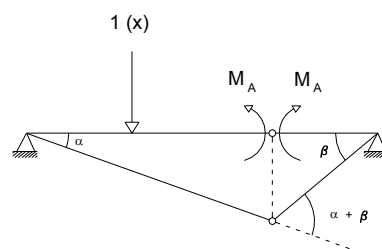
#### Método de los trabajos virtuales

Se utiliza para calcular líneas de influencia de esfuerzos y reacciones de determinación isostática.

Momentos flectores: Línea de influencia del momento flector en A.



Para que aparezca  $M_A$  como acción externa, se coloca una rótula.





Al ser un mecanismo en equilibrio, el trabajo de todas las fuerzas exteriores será nulo. Aplicando el principio de los trabajos virtuales:

$$\delta W = 1(x) \cdot v(x) - M_A \cdot \alpha - M_A \cdot \beta = 0 \quad \longrightarrow \quad v(x) = M_A \cdot (\alpha + \beta)$$

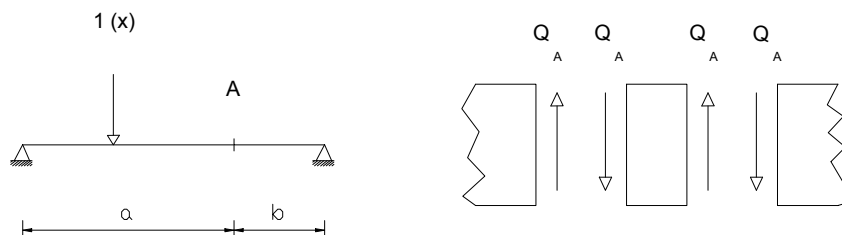
$$M_A = \frac{v(x)}{\alpha + \beta}$$

Si se hace  $\alpha + \beta = 1$  se tiene

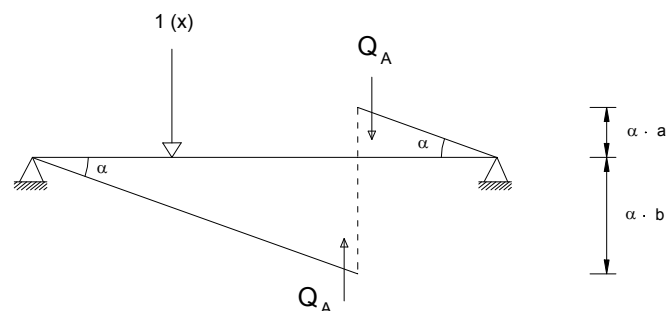
$$M_A = v(x)$$

Así, la línea de influencia del momento flector en A cuando una carga vertical descendente de valor unidad recorre la estructura, será la ley de corrimientos verticales de la pieza cuando en la sección A se pone una rótula con un giro relativo de valor unidad.

Esfuerzos cortantes: Línea de influencia del esfuerzo cortante en A.



Para que aparezca  $Q_A$  como acción externa, se coloca en A un artificio que permita el desplazamiento vertical, pero no el horizontal ni el giro.



Aplicando trabajos virtuales:

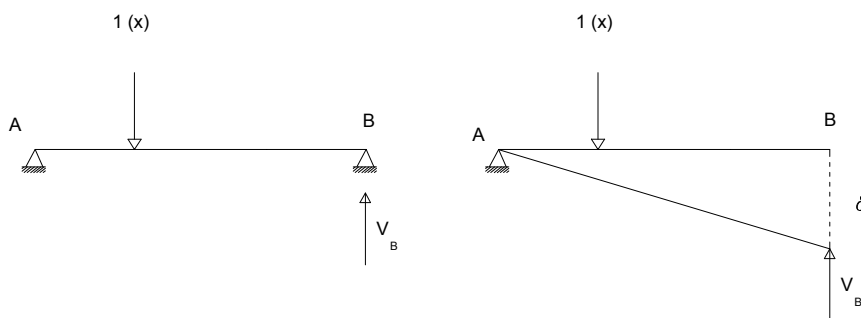
$$\delta W = 1(x) \cdot v(x) - Q_A \cdot \alpha \cdot a - Q_A \cdot \alpha \cdot b = 0 \quad \longrightarrow \quad v(x) = Q_A \cdot \alpha \cdot (a+b)$$

$$Q_A = \frac{v(x)}{\alpha \cdot (a+b)}$$

Si se hace  $\alpha \cdot (a+b) = 1$  se tiene

$$Q_A = v(x)$$

Reacciones: Línea de influencia de la reacción vertical en B.



Aplicando trabajos virtuales:

$$\delta W = 1(x) \cdot v(x) - V_B \cdot \delta = 0 \quad \longrightarrow \quad v(x) = V_B \cdot \delta$$

$$V_B = \frac{v(x)}{\delta}$$

Si se hace  $\delta = 1$  se tiene

$$V_B = v(x)$$

### Aplicación del teorema de la reciprocidad

Sirve para obtener líneas de influencia de esfuerzos y reacciones de determinación hiperestática, y de movimientos de determinación isostática o hiperestática.

Se consideran en la estructura dos estados de carga. El primero corresponde exactamente al que nos dan, habiendo explicitado el resultado de la línea de influencia (R).

El segundo estado consiste en la misma estructura, en la que se aplica el resultado complementario unidad (R\*) eficaz con el que se busca. Por tanto:

Si R = fuerza	→	R* = desplazamiento
Si R = desplazamiento	→	R* = fuerza
Si R = momento	→	R* = giro
Si R = giro	→	R* = momento

Se trata así de tener un estado donde R produzca un trabajo exterior positivo. Posteriormente se utiliza la aplicación del teorema de reciprocidad entre los dos estados para obtener la línea de influencia buscada.

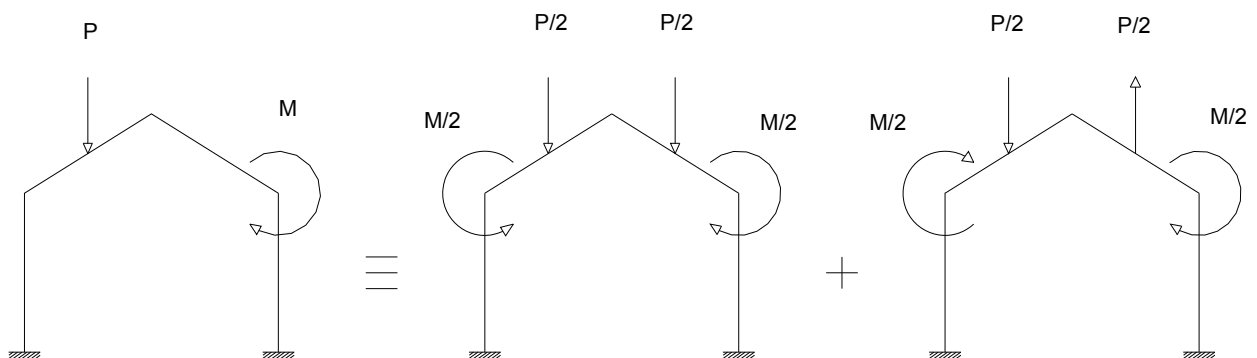
## CAPÍTULO 7- PÓRTICOS

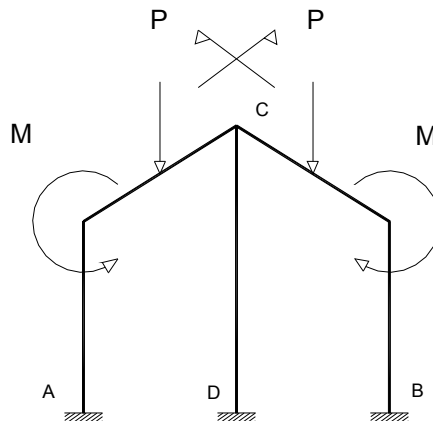
### 7.1- ESTRUCTURAS SIMÉTRICAS

Se supone que una estructura tiene un eje o plano de simetría cuando su geometría y sus condiciones de contorno (apoyos) son simétricos con respecto a dicho plano.

Una estructura simétrica sometida a un sistema de cargas arbitrario puede calcularse como la suma de los dos estados de carga siguientes:

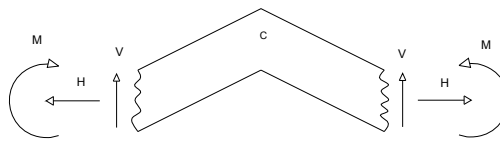
- Estado simétrico: Con cargas dispuestas simétricamente respecto al plano de simetría.
- Estado antisimétrico: Con cargas dispuestas antisimétricamente respecto al plano de simetría.



**7.2- CARGAS SIMÉTRICAS EN ESTRUCTURAS SIMÉTRICAS**

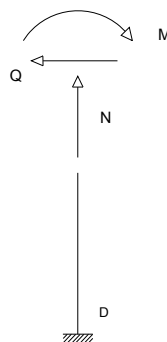
Los movimientos deben ser compatibles con la simetría:  $u_{CD} = 0$        $\vartheta_{CD} = 0$

Los esfuerzos en las secciones coincidentes con el eje de simetría, pertenecientes a barras no coincidentes con dicho eje, serán las indicadas en la figura siguiente:



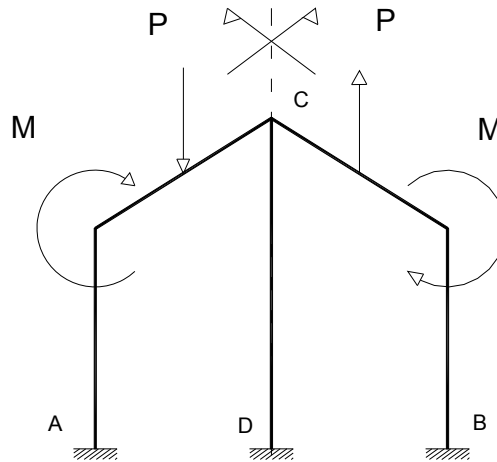
La componente vertical V debe ser nula, para que puedan existir equilibrio y simetría.

En barras coincidentes con el eje de simetría:



Donde:  $M_{CD} = Q_{CD} = 0$

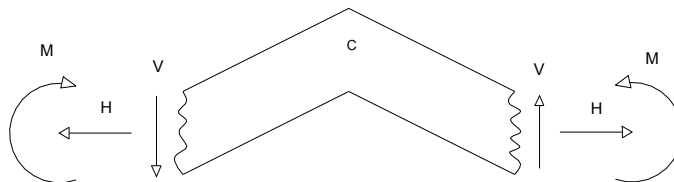
### 7.3- CARGAS ANTIMÉTRICAS EN ESTRUCTURAS SIMÉTRICAS



Los movimientos y esfuerzos compatibles con la antimetría son los opuestos a la simetría.

$$\uparrow v_{CD} = 0$$

Los esfuerzos en las secciones coincidentes con el eje de simetría, pertenecientes a barras no coincidentes con dicho eje de simetría, serán:

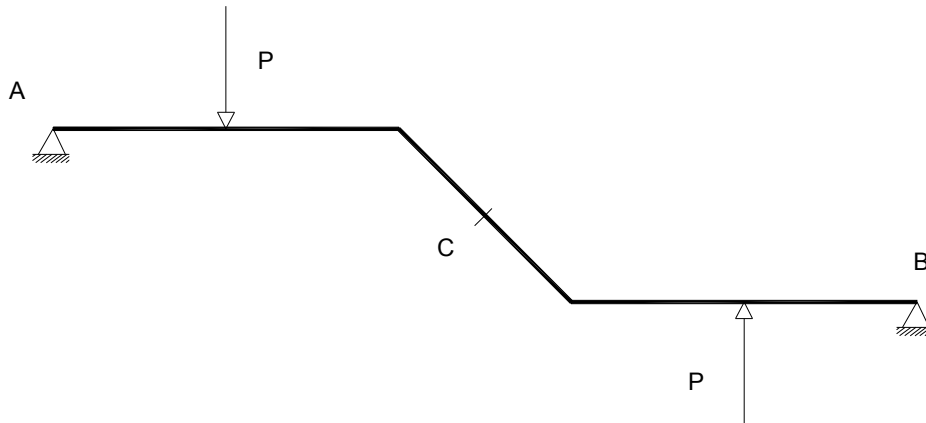


$$H_C = 0$$

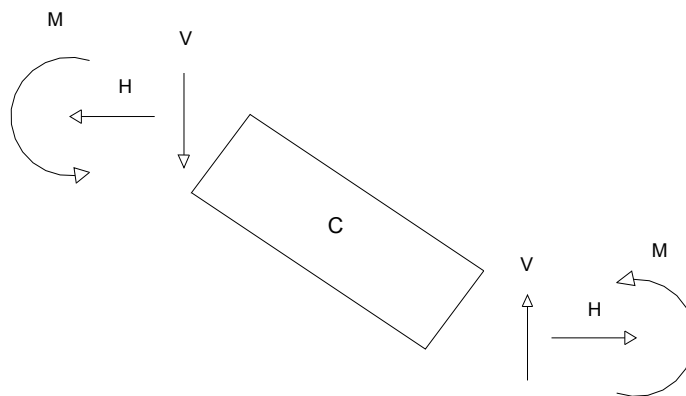
$$M_C = 0$$

En las barras coincidentes con el eje de simetría:

$$N_{CD} = 0$$

**7.4- CARGAS SIMÉTRICAS EN ESTRUCTURAS CON CENTRO DE SIMETRÍA**

Analizando los esfuerzos en el nudo C:



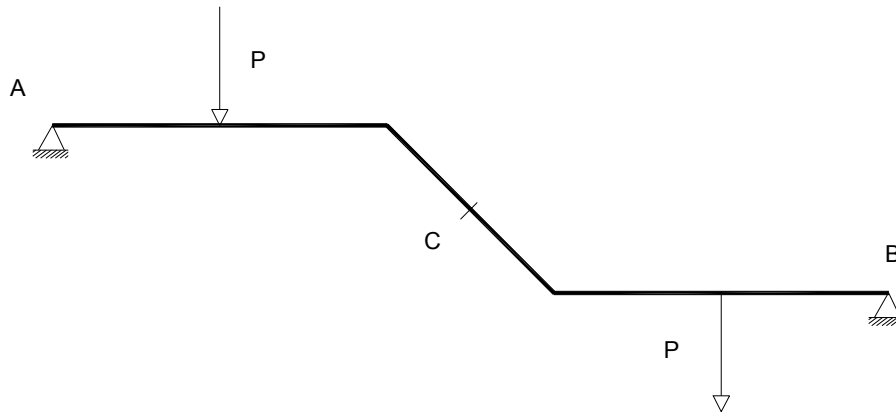
Para que exista equilibrio:

$$M_C = 0$$

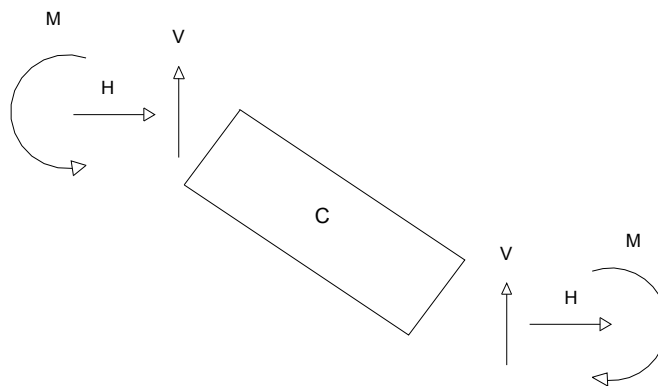
Y por simetría:

$$\vec{u}_C = 0$$

$$\vec{v}_C = 0$$

**7.5- CARGAS ANTIMÉTRICAS EN ESTRUCTURAS CON CENTRO DE SIMETRÍA**

Analizando los esfuerzos en el nudo C:



Para que exista equilibrio:

$$H_C = 0$$

$$V_C = 0$$

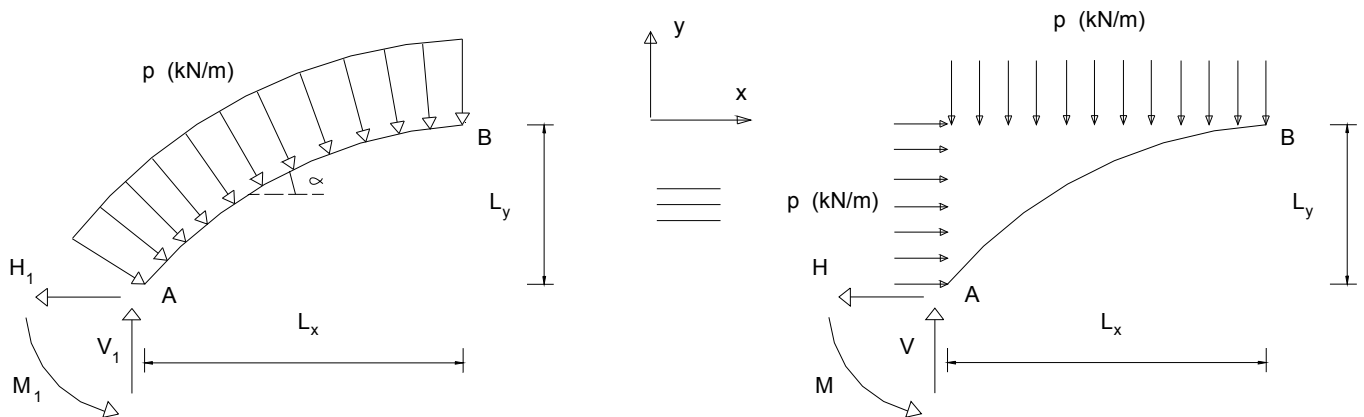
Y por antimetría:

$$g_C = 0$$



## CAPÍTULO 8- ARCOS

### 8.1- SISTEMA EQUIVALENTE DE CARGAS



Si se tiene una carga constante por unidad de longitud de directriz en cada punto, se puede sustituir por un sistema de cargas equivalente. Para demostrar que los sistemas de cargas de la figura son equivalentes, se calculan los esfuerzos en una sección cualquiera.

$$H_1 = \int_A^B p \cdot ds \cdot \text{sen} \alpha = p \cdot \int_A^B dy = p \cdot L_y = H$$

$$V_1 = \int_A^B p \cdot ds \cdot \text{cos} \alpha = p \cdot \int_A^B dx = p \cdot L_x = V$$

$$M_1 = \int_A^B p \cdot ds \cdot \text{sen} \alpha \cdot y + \int_A^B p \cdot ds \cdot \text{cos} \alpha \cdot x = p \cdot \int_A^B y \cdot dy + p \cdot \int_A^B x \cdot dx = \frac{p \cdot L_y^2}{2} + \frac{p \cdot L_x^2}{2} = M$$

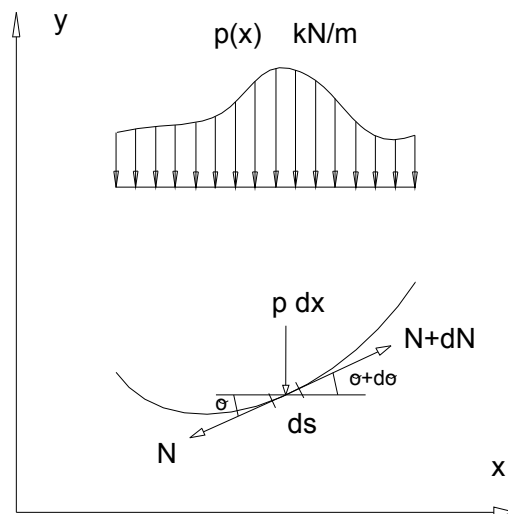
Por lo tanto, ambos sistemas de cargas son equivalentes.

## 8.2- CURVAS FUNICULARES Y ANTIFUNICULARES

Para un sistema de cargas dado, la curva funicular es la directriz de la pieza prismática que, estando sometida a dicho sistema de cargas, el único esfuerzo que existe en todas sus secciones es un axil de tracción. La curva antifunicular es la equivalente en compresión.

Así, el funicular será la posición de equilibrio de un cable, y el antifunicular el simétrico.

### Carga paralela a una dirección en estructuras planas:



Planteando el equilibrio en el elemento diferencial  $ds$ , y despreciando los infinitésimos de segundo orden:

$$\Sigma H = 0 \quad \Rightarrow \quad N \cdot \cos \vartheta = H = cte.$$

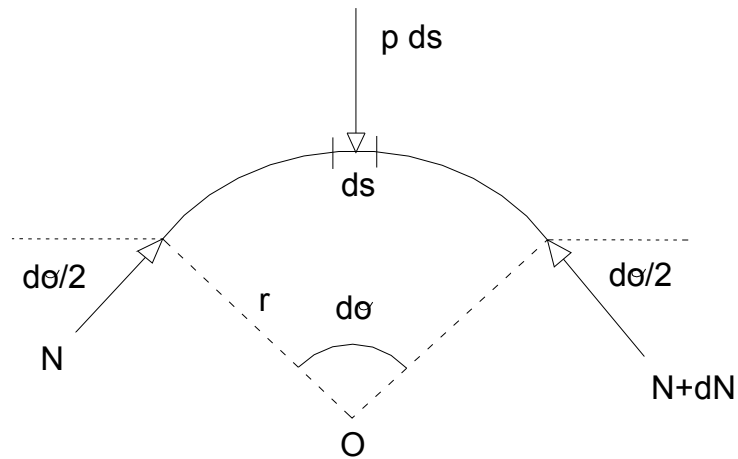
Es decir, la proyección horizontal del esfuerzo axil es constante en todas las secciones.

$$\Sigma V = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H \cdot y'' = p(x)}$$

Que es la ecuación diferencial de la curva funicular, en estructuras planas sometidas a cargas paralelas a una dirección.

**Carga perpendicular a la directriz de un arco en cada punto:**

La carga es constante por unidad de longitud de arco.



Planteando el equilibrio:

$$\Sigma H = 0 \quad \Rightarrow \quad dN = 0 \quad \Rightarrow \quad N = cte.$$

$$\Sigma V = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{N}{p} = cte.}$$

Por lo tanto, el antifunicular es una circunferencia de radio  $r$ , siendo el axil de compresión  $N = r \cdot p = cte.$

## ANEJO

---

## UNIDADES

### Longitud:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} = 0.1 \text{ cm}$$

### Fuerza:

$$1 \text{ kN} = 1000 \text{ N} = 100 \text{ kp} = 0.1 \text{ t}$$

$$1 \text{ N} = 10^{-3} \text{ kN} = 0.1 \text{ kp} = 10^{-4} \text{ t}$$

$$1 \text{ kp} = 0.01 \text{ kN} = 10 \text{ N} = 10^{-3} \text{ t}$$

$$1 \text{ t} = 10000 \text{ N} = 1000 \text{ kp} = 10 \text{ kN}$$

### Tensión:

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 100 \text{ t/m}^2 = 10 \text{ kp/cm}^2 = 10 \text{ bar} = 1 \text{ N/mm}^2 = 1000 \text{ kN/m}^2$$

$$1 \text{ kN/m}^2 = 0.1 \text{ t/m}^2 = 0.01 \text{ kp/cm}^2 = 0.01 \text{ bar} = 10^{-3} \text{ N/mm}^2 = 10^{-3} \text{ MPa}$$

$$1 \text{ t/m}^2 = 10 \text{ kN/m}^2 = 0.1 \text{ kp/cm}^2 = 0.1 \text{ bar} = 0.01 \text{ MPa}$$

$$1 \text{ kp/cm}^2 = 1 \text{ bar} = 100 \text{ kN/m}^2 = 10 \text{ t/m}^2 = 0.1 \text{ MPa}$$

## FÓRMULAS DE INTERÉS

### Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$$

$$\operatorname{sen}(2 \cdot \vartheta) = 2 \cdot \operatorname{sen} \vartheta \cdot \cos \vartheta$$

$$\cos(2 \cdot \vartheta) = 2 \cdot \cos^2 \vartheta - 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \vartheta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \vartheta)$$

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \vartheta)$$

### Derivadas

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y = \operatorname{arctg} \vartheta \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$y = \operatorname{sen} \vartheta \Rightarrow y' = \cos \vartheta$$

$$y = \cos \vartheta \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} \vartheta$$

$$y = \operatorname{tg} \vartheta \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}$$

$$y = \operatorname{cot} g \vartheta \Rightarrow y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

$$y = \operatorname{sen}(k \cdot \vartheta) \Rightarrow y' = k \cdot \cos(k \cdot \vartheta)$$

$$y = \cos(k \cdot \vartheta) \Rightarrow y' = -k \cdot \operatorname{sen}(k \cdot \vartheta)$$

### Integrales

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \vartheta \cdot \operatorname{sen} \vartheta \cdot d\vartheta = -\vartheta \cdot \cos \vartheta + \operatorname{sen} \vartheta$$

$$\int \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta = \vartheta \cdot \operatorname{sen} \vartheta + \cos \vartheta$$

$$\int \vartheta \cdot \operatorname{sen} \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot \vartheta) - 2 \cdot \vartheta \cdot \cos(2 \cdot \vartheta)}{8}$$

$$\int \operatorname{sen} \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{-\cos(2 \cdot \vartheta)}{4}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{2 \cdot \vartheta - \operatorname{sen}(2 \cdot \vartheta)}{4}$$

$$\int \cos^2 \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{2 \cdot \vartheta + \operatorname{sen}(2 \cdot \vartheta)}{4}$$

## ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Son del siguiente tipo:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = 0 \quad \text{con } y(x)$$

El procedimiento para resolverlas es el siguiente:

1) Se forma la ecuación característica:

$$k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

2) Se hallan las raíces de la ecuación característica:

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

3) Según el carácter de las raíces, se escriben las soluciones particulares, linealmente independientes, partiendo de lo siguiente:

a) A toda raíz simple "k", corresponde una solución particular:

$$e^{k \cdot x}$$

b) A todo par de raíces complejas conjugadas [ $k^{(1)} = \alpha + i \cdot \beta$ ] y [ $k^{(2)} = \alpha - i \cdot \beta$ ] le corresponden dos soluciones particulares:

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \quad \text{y} \quad e^{\alpha \cdot x} \cdot \text{sen}(\beta \cdot x)$$

c) A toda raíz real "k" de orden de multiplicidad "r", corresponden r soluciones particulares linealmente independientes:

$$e^{k \cdot x}, x \cdot e^{k \cdot x}, \dots, x^{r-1} \cdot e^{k \cdot x}$$

d) A todo par de raíces complejas conjugadas de orden de multiplicidad "r" ( $\alpha + i \cdot \beta$ ,  $\alpha - i \cdot \beta$ ), corresponden  $2 \cdot r$  soluciones particulares:

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x), x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x), \dots, x^{r-1} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

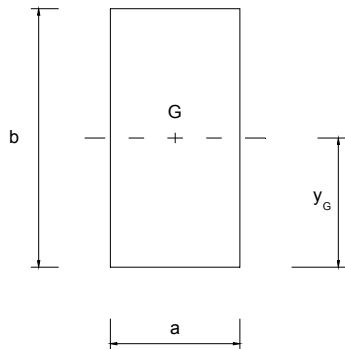
$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \text{sen}(\beta \cdot x), x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \text{sen}(\beta \cdot x), \dots, x^{r-1} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \text{sen}(\beta \cdot x)$$

El número de estas soluciones particulares es igual al grado de la ecuación característica o, lo que es lo mismo, al orden de la ecuación diferencial dada.

4) Una vez encontradas "n" soluciones linealmente independientes ( $y_1, y_2, \dots, y_n$ ), la solución general es:

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n \cdot y_n$$

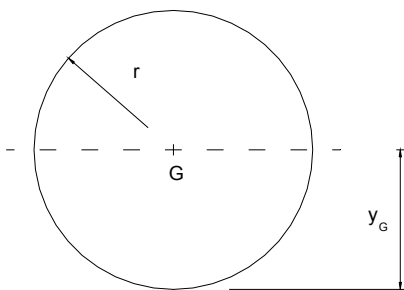
Donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias.

**CARACTERÍSTICAS DE SECCIONES**

$$y_G = \frac{b}{2}$$

$$\Omega = a \cdot b$$

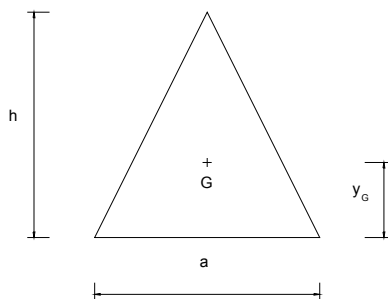
$$I_{GX} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot b^3$$



$$y_G = r$$

$$\Omega = \pi \cdot r^2$$

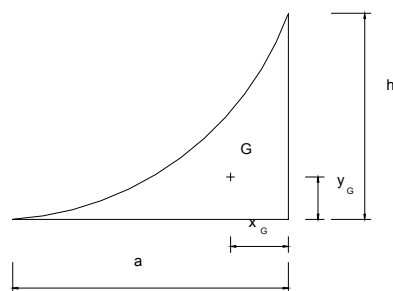
$$I = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4$$



$$y_G = \frac{1}{3} \cdot h$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$I_{GX} = \frac{1}{36} \cdot a \cdot h^3$$

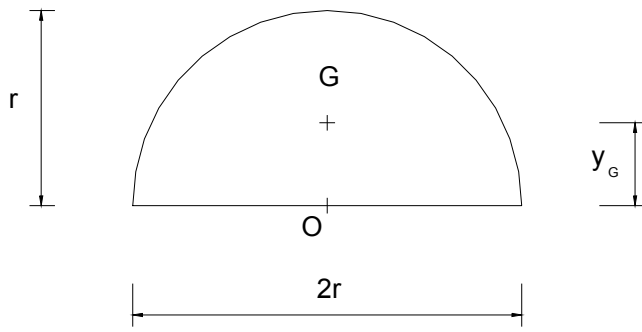


$$x_G = \frac{1}{4} \cdot a$$

$$y_g = \frac{3}{10} \cdot h$$

$$\Omega = \frac{1}{3} \cdot a \cdot h$$



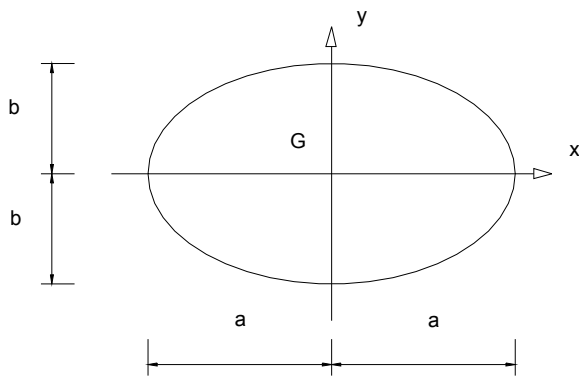


$$y_G = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$I_{XO} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^4$$

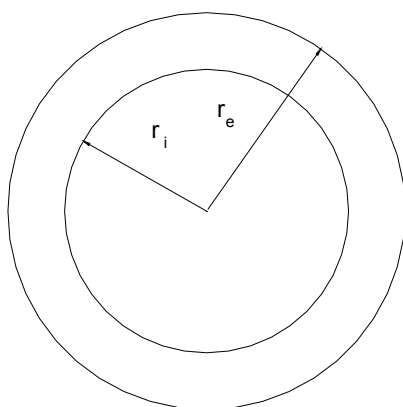
$$I_{XG} = \frac{(9 \cdot \pi^2 - 64)}{72 \cdot \pi} \cdot r^4$$



$$\Omega = \pi \cdot a \cdot b$$

$$I_{XG} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a \cdot b^3$$

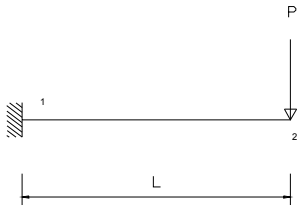
$$I_{YG} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^3 \cdot b$$



$$\Omega = \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2)$$

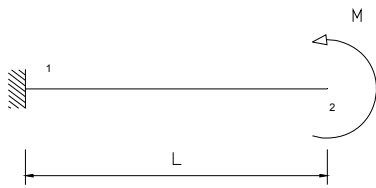
$$I = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (r_e^4 - r_i^4)$$

### FÓRMULAS EN VIGAS SIMPLES



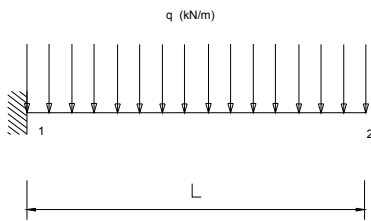
$$\vartheta_2 = \frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$v_2 = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$



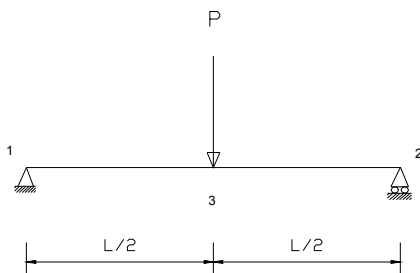
$$\vartheta_2 = \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$

$$v_2 = \frac{M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$



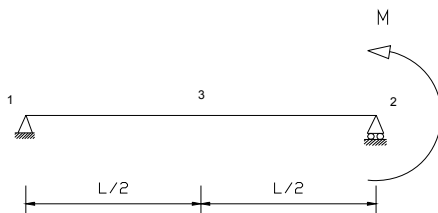
$$\vartheta_2 = \frac{q \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I}$$

$$v_2 = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}$$



$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{P \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I}$$

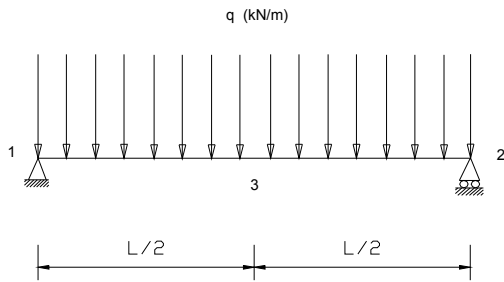
$$v_3 = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$



$$\vartheta_1 = \frac{M \cdot L}{6 \cdot E \cdot I}$$

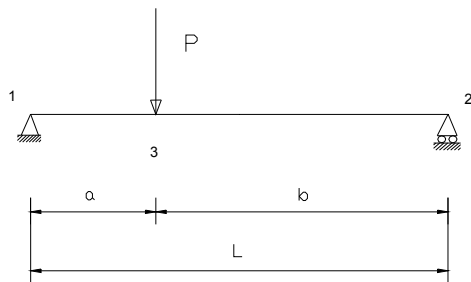
$$\vartheta_2 = \frac{M \cdot L}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$v_3 = \frac{M \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I}$$



$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

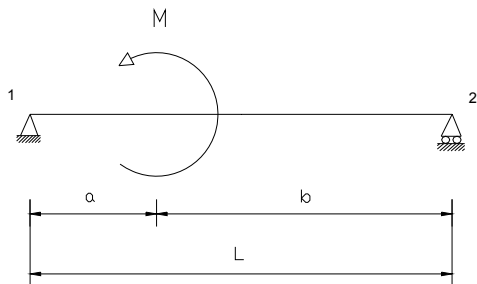
$$v_3 = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$



$$\mathcal{G}_1 = \frac{P \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L + b)$$

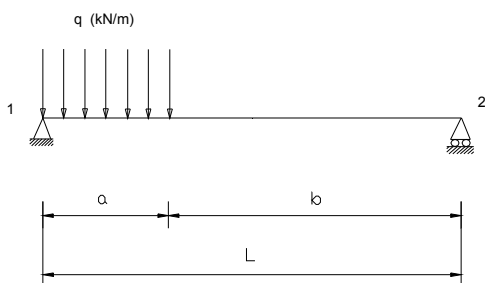
$$\mathcal{G}_2 = \frac{P \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L + a)$$

$$v_3 = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot L}$$



$$\mathcal{G}_1 = \frac{M}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L^2 - 3 \cdot b^2)$$

$$\mathcal{G}_2 = \frac{M}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L^2 - 3 \cdot a^2)$$



$$\mathcal{G}_1 = \frac{q \cdot a^2}{24 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (4 \cdot a \cdot L - a^2 - 4 \cdot L^2)$$

$$\mathcal{G}_2 = \frac{q \cdot a^2}{24 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (2 \cdot L^2 - a^2)$$