Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva.

ANGEL RIVIÈRE

En: Marchesi Alvaro, César Coll y Jesús Palacios (compiladores), *Desarrollo psicológico y educación*, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar, Capítulo 9, Alianza, Madrid, 1990, pp. 155-182

1. Satisfacciones e insatisfacciones de la experiencia matemática.

Existe entre los matemáticos profesionales, la costumbre de insistir en que la <experiencia matemática> (por emplear un término de Davis y Hersh. 1982) constituye una fuente inagotable de satisfacciones relacionadas con impresiones de coherencia, rigor, elegancia formal, e incluso belleza que no se obtienen en el mismo grado con otras clases de conocimientos. Probablemente fue este tipo de vivencias el que llevó a los filósofos pitagóricos a dar un carácter divino a esa experiencia, entendiéndola como una visión directa de ciertas estructuras, objetos y relaciones que serían, al mismo tiempo, fundamento y negación del mundo aparente (Gorman,1983). Para ellos, los conocimientos matemáticos no debían ser comunicados a los no iniciados en los complejos rituales de la secta, de forma que a los niveles más elevados y, por así decirlo <místico> de la experiencia matemática sólo podía acceder un grupo selecto de <mathematikoi> y no los simples <acusmáticos> ni, menos aún, las personas ajenas a la sociedad pitagórica.

Esta anécdota real de la historia de las matemáticas tiene algún sentido en un capítulo sobre los problemas y dificultades que encuentran los niños para aprenderlas, porque nos sugiere la melancólica reflexión de que, desde su misma constitución como saber deductivo, la matemática se revistió de un cierto carácter elitista y selectivo que, desafortunadamente, aún no ha perdido del todo. Como dicen también Davis y Hersh (1986)---y todos sabemos-- las matemáticas constituyen actualmente el <filtro selectivo> básico de todos los sistemas educativos. Son muy pocos los que, en el período de escolaridad obligatoria, llegan al dominio de formas de pensamiento matemático que permitan ni siquiera intuir vagamente las satisfacciones que puede proporcionar la experiencia matemática. Muchos---la mayoría----se quedan, por decirlo metafóricamente, en el nivel de <acusmáticos> y son demasiados los que ni siquiera entran en la secta. Para estos últimos, la experiencia de las matemáticas escolares no es fuente de satisfacciones, sino de frustraciones y sentimientos autodepreciativos. Muchas personas desarrollan en su vida escolar, actitudes negativas hacia las matemáticas y ven condicionadas sus elecciones escolares y profesionales por sus dificultades para dominarlas (Cockcroft, 1985).

2.- Niveles de rendimiento y actitudes hacia las matemáticas

Para ilustrar de forma objetiva esas diferencias entre los matemáticos, los acusmáticos y los que quedan fuera de la secta al final de la escolaridad obligatoria, pueden servir lo datos obtenidos en una investigación reciente en que se comparaban los niveles de rendimientos de alumnos de trece años de varios países en una prueba objetiva de matemáticas (Lapointe, Mead y Phillips.1989). Los países que participaron en este estudio fueron Corea, España, Estados Unidos, Irlanda y el Reino Unido, además de cuatro provincias canadienses(que se analizaban por separado, dado el carácter muy descentralizado y diverso de sus sistemas educativos).

El rendimiento en matemáticas de los alumnos españoles de trece años no difería significativamente del de los estudiantes de Irlanda y el Reino Unido. Por otra parte, era superior al de los alumnos de Estados Unidos e inferior al de los coreanos. Se situaba aproximadamente en el centro de la distribución ordinal de las puntuaciones medias de las muestras estudiadas. Pero, más que las diferencias entre países, nos interesan los porcentajes de alumnos de la muestra española que alcanzaban los diversos niveles de rendimiento matemático definido en este estudio, que se presentan muy resumidos en el cuadro 1.

El nivel 500 de la <escala de habilidad matemática> que se estableció en ese estudio (definido en el cuadro 1 por el <empleo de habilidades matemáticas intermedias> puede tomarse como umbral mínimo de los conocimientos y habilidades matemáticas que deberían adquirirse al final de la escolaridad obligatoria. Marca el límite de la cultura matemática básica conveniente para valerse, sin muchas carencias y limitaciones, en los contextos socialmente complejos, tecnológicamente avanzados y llenos de informaciones elaboradas, que son características de las sociedades desarrolladas. En la investigación comentada, este nivel se definía por destrezas como las siguientes: comprender el concepto de orden, el resto de una división, las propiedades esenciales de los números pares e impares y del cero: aplicar conceptos elementales de razón y proporción: utilizar números decimales y negativos: hacer cálculos simples con fracciones decimales y porcentajes; calcular medias: representar cantidades desconocidas con signos de variables: medir longitudes y aplicar escalas; identificar figuras geométricas, calcular áreas de rectángulos y emplear informaciones obtenidas de gráficos y tablas.

En resumen: este nivel es el que establece la metafórica separación entre los que son admitidos en la secta pitagórica y los que se quedan fuera. Entre los que adquieren el nivel de<alfabetización funcional> en matemáticas que se requiere para una mediana comprensión de los aspectos matemáticos del mundo circundante más cotidiano y los que no llegan a adquirir ese nivel necesario de *numeracy*. Los porcentajes del cuadro 1 indican que, de cada 100 personas hay 43 que a los 13 años no han logrado <entrar en la secta> y 9 que están muy lejos de ella. En el extremo contrario, solo 14 merecerían el título honorario de <mathematikoi> de trece años.

Cuadro 1. Niveles de rendimiento matemático a los 13, y porcentajes de la muestra Española (adaptado y resumido por Lapionte, Mead y Phillips, 1989 "un mundo de diferencias" Madrid:CIDE, págs. 21-22).

Nivel	definición de habilidades	Ejemplos de problemas	%
300	ADICION Y SUSTRACCION SIMPLES	29= ( ) +16	99
400	EMPLEO DE OPERACIONES BASICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS SIMPLES	+-+-+-+-+-+-+-+- · 0 · · 12 · ¿qué número corresponde al punto señalado por? A.1,B.2,C.3,D.4	91
500	EMPLEO DE HABILIDADES MATEMÁTICAS INTERMEDIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE DOS PASOS	Estas son las edades de cinco chicos: 13, 8, 6, 4, 4. ¿Cuál es la edad media de estos chicos? A.4,B.6,C.4,D.8,E.9,F.13,G no sé	57
600	SOLUCION DE PROBLEMAS COMPLEJO Y COMPRENCION DE PROBLEMAS DE MEDIDA Y GEOMETRÍA	La longitud de lado de este cuadrado es 6 ¿qué longitud tiene el radio del circulo? A.2,B.3,C.4,D.6,E.3,F.9,G no sé	14
700	COMPRENCIÓN Y VALORACIÓN DEM CONCEPTOS MATEMÁTICOS MÁS AVANZADOS (P0OR EJEMPLO HACER USO DE LAS PROPIEDADES DE LA MEDIA, O DE DATOS DE UNA TABLA PARA RESOLVEWR PROBLEMAS, ETC.)	Calcular la cantidad total de proteínas de dos huevos fritos y medio vaso de leche a partir de una tabla en valor nutritivo de ciertos alimentos.	1

En realidad, estos datos no hacen más que confirmar las experiencias que tienen muchos profesores de matemáticas de enseñanza primaria y secundaria: son muchos---demasiados los estudiantes que encuentran grandes dificultades para alcanzar los objetivos educativos establecidos en los *currícula* y estas dificultades se extreman en un grupo más reducido de alumnos, para los que las matemáticas se convierten en una verdadera pesadilla.

Frecuentemente, la pesadilla se extiende a los propios profesores, que se ven enredados en una situación descrita, de forma muy expresiva por Davis y Hersh (1986):

-Hay en la vida y en la obra del profesor de matemáticas una extraña contradicción. Estudió matemáticas por decisión propia. Adora dejarse perder por ese mundo ideal de claridad y precisión. Nada le gustaría más que invitar a otros a reunirse allí con él. Para quienes aman las matemáticas, enseñarlas tendría que ser una fiesta.....triste es decirlo, pero las cosas no son del todo así. Muchos de los alumnos de las clases de matemáticas se encuentran por obligación en ellas. Es frecuente que les resulten insípidas, muchos de ellos tienen grandes *dificultades* para aprender siquiera un poquito. ¿Qué profesor de matemáticas podrá olvidar la primera vez que presentó en clase una cuestión particularmente elegante, que trascendía de los hechos y problemas básicos del libro de texto? Terminada la exposición se alza una mano: ¿Entrará esto en el examen final? (Op.cit.,pág.75 de la traducción castellana).

Frente al grupo reducido de estudiantes para los cuales las matemáticas fáciles y fascinantes, hay otro mayor de alumnos que las encuentran difíciles o aburridas. Ciertas frases desalentadoras (ves que yo no sirvo para las matemáticas ¿sabe?) o mortificantes (¡Vaya! otra vez tocan matemáticas) forman parte del cupo de experiencia inevitable del profesor de matemáticas. Las actitudes aversivas hacia éstas llegan a ser tan irracionales que en una investigación citada en el informe Cockroit (1985), en que se entrevistaba a sujetos adultos para conocer sus necesidades matemáticas y las estrategias que empleaban para enfrentarse a ellas, se encontró que la mitad de las personas de la muestra *se negaba a participar*, a pesar de los métodos de persuasión empleados y de las artimañas utilizadas para tranquilizarles (por ejemplo, sustituir la palabra <matemáticas> por <aritmética>. En esa investigación se comprobó que muchos adultos no poseían la competencia numérica funcional que antes definíamos como básica y <hasta qué punto la necesidad de emprender incluso> una aparentemente simple y trivial matemática, podía provocar sentimientos de ansiedad, impotencia, miedo e incluso culpabilidad en algunos de los entrevistados.(Cockcroft, op. cit, pág.9)

3. Las causas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Aunque exista un acuerdo general en aceptar, con escasas variantes, las impresiones descriptivas recogidas en el apartado anterior, la explicación de las actitudes negativas y bajos rendimientos en matemáticas es mucho más complicada y menos unánime. ¿Son objetivamente difíciles las matemáticas o más bien sucede que no se enseñan bien? ¿qué origen y significado tienen las enormes diferencias en la competencia matemática de los alumnos?..¿hay alumnos que sufren alguna clase de alteración o trastorno real----por ejemplo, la clásica "discalculia" qué les impide o dificulta el aprendizaje de las operaciones matemáticas más elementales?, ¿por qué son tan difíciles las matemáticas para tantos alumnos que no llegan a ese grado de supuesta alteración?.....y, sobre todo. ¿qué hacer con esta situación?, ¿cómo puede el profesor enfrentarse a ella? Los conocimientos actuales sobre dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (desde ahora, DAM) sólo dan respuestas parciales e incompletas a estas preguntas.

Si tenemos en cuenta: 1. la extensión y profundidad de la DAM, 2.- el enorme dispendio de esfuerzos educativos que suponen y 3. la preocupación que producen en alumnos, deberíamos esperar que la investigación de las DAM fuera un campo floreciente y en rápido desarrollo. Más aún cuando el estudio de los procesos cognitivos en matemáticas se ha convertido en los últimos veinte años en una de las áreas más desarrolladas de la psicología de la instrucción (vid...por ejemplo, Schoenfeld, 1985; Hiebert. 1986). Desafortunadamente, la situación real no corresponde a estas expectativas: los estudios específicos sobre la DAM son escasos y las investigaciones rigurosas lo son más aún. El análisis de las dificultades matemáticas se basan frecuentemente en conceptos muy discutidos y de dudosa consistencia.

Un buen ejemplo de lo que estamos diciendo se encuentra en los conceptos tradicionales de<discalculia>y dificultades específicas de aprendizaje- (Learning Disabilities, LD) que muchos médicos y psicólogos emplean para referirse a los niños que no alcanzan los objetivos educativos básicos en matemáticas. Allardice y Ginsburg (1983) critican el concepto general de LD y el más específico de discalcutia, cuestionando tanto su fundamentación científica como su utilidad práctica.

La carencia de una definición operativa, rigurosa y universalmente aceptada del concepto de <dificultades específicas de aprendizaje> es reconocida incluso por los que defienden la necesidad de emplearlo (Farmam-Diggory, 1980; Ceci, 1986). Generalmente, la definición se realiza en términos negativos: presentan LD aquellos alumnos que, a pesar de mostrar una inteligencia normal (por ejemplo, un CI superior a 80 ó 90) y *no* tener problemas emocionales graves *ni* deficiencias sensoriales (ceguera, sordera, etc.) tienen un rendimiento escolar pobre (pongamos dos años inferior al que corresponde a su edad) definido operacionalmente por bajas puntuaciones en pruebas de rendimiento y naturalmente por las calificaciones escolares.

4. Alteraciones neurológicas y dificultades matemáticas: ¿realidades o mitos?

Los problemas comienzan cuando de esa definición puramente descriptiva y <por vía de negación> ciertos clínicos e investigadores tratan de dar el salto a una definición positiva de las LD, concibiendo la dificultad específica de aprendizaje como una <entidad> como algo que el niño <tiene>(en el mismo sentido en que se puede decir que tiene una infección o una enfermedad) y que probablemente esté causado por alguna alteración neurológica, que suele etiquetarse como una -disfunción cerebral mínima-.

En el campo específico de las matemáticas, se han propuesto diversas causas neurológicas para explicar las dificultades severas de aprendizaje que presentan algunas personas. Por ejemplo, Cohn (1961,1971) formuló la hipótesis de que las DAM formarían parte de una disfunción lingüística más general, producida por una falta de coordinación de diversos sistemas neurológicos complejos. Otros investigadores han tratado de definir lo que podríamos llamar una "discalculia" especifica de evolución- independiente de las alteraciones del lenguaje o la lectura. Así, Slade y Russel (1971) y Money (1973) sugieren que la discalculia se relaciona con dificultades en funciones viso-espaciales dependientes de los lóbulos parietales.

Kose (1974), que llevó a cabo un estudio con un grupo de 68 niños con DAM. encontró que el 35% de ellos mostraban signos menores de transtorno neurológico(dificultades de orientación izquierda-derecha, agnosia digital, etc.) y sugirió que lo que él llamaba "discalculia evolutiva" se debería a una alteración genética o congénita de las zonas cerebrales que constituyen el substrato anatómico-fisiológico de la maduración de las capacidades matemáticas- (op. cit. pág. 165). Por su parte, Weinstein (1978), en un estudio de comparación entre sujetos con DAM y capacidades normales de inteligencia y lectura, y una muestra sin DAM emparejada con la primera en esas otras capacidades, concluía que los problemas en el aprendizaje de las matemáticas pueden relacionarse con ciertos desfases en el desarrollo de funciones dependientes del hemisferio cerebral izquierdo.

Sin embargo, los resultados y --sobre todo-- las interpretaciones de estos estudios han recibido fuertes criticas por parte de otros investigadores. Así, Allardice y Ginsburg (1983) señalan que se basan en concepciones superficiales de las actividades matemáticas y no en una teoría fundamentada sobre la competencia matemática, por lo que emplean tareas inadecuadas para la medida de ésta. Además conceden una importancia excesiva e inmerecida a los "signos neurológicos menores" cuya consistencia y significación es muy dudosa y, finalmente, carecen de controles experimentales suficientes para demostrar lo que pretenden. Por todo ello, concluyen que -por ahora no hay suficientes pruebas que demuestran que las dificultades matemáticas se deban necesariamente a una disfunción cerebral mínima- (op. cit..pág. 326).

Esta conclusión coincide con la obtenida por Coles (1978) que, después de revisar extensamente la literatura sobre las dificultades específicas de aprendizaje, señala que la relación entre éstas y los signos menores de trastornos neurológicos está sin demostrar. También Yule y Rutter (1985) han destacado la escasez y debilidad metodológica de los estudios sobre discalculia, así como el peligro de atribuir a los niños con DAM supuestos trastornos neurológicos sin una base suficiente:

Tenemos la esperanza--dicen--de que en la elaboración de estudios sobre este importante y descuidado problema, los investigadores puedan beneficiarse de las lecciones aprendidas a través del estudio de los trastornos de la lectura. En particular, es de esperar que se preste atención a las dificultades operacionales empleadas que se complementen los estudios clínicos a pequeña escala con investigaciones de población que se empleen los controles adecuados para hacer inferencias causales y que se preste la debida atención a los procesos cognitivos antes de crear neuromitologías prematuras- (op. cit...pág. 459).

Es importante subrayar que ninguno de estos investigadores niega que la presencia de ciertos trastornos neurológicos pueda acompañarse de dificultades en la realización de tareas matemáticas. Luria (1977), por ejemplo, ha demostrado de forma concluyentes que pueden producirse alteraciones y pérdidas de las capacidades de representación numérica y cálculo, asociadas a lesiones claras en determinadas zonas cerebrales (parietal inferior, parietooccipital, sectores frontales, etc.)Lo que niegan los críticos de la --discalculia evolutiva--y la --disfunción cerebral--es que estos conceptos sean explicativos y, sobre todo, que puedan aplicarse a ese alto porcentaje de niños que, a pesar de sus funciones intelectuales, emocionales y perceptivas normales, adquieren lentamente los conceptos, representaciones y operaciones matemáticas.

Desde luego, conviene guardar una prudente reserva antes de trasladar el modelo de lesión o disfunción a los niños que encuentran dfícil *adquirir* representaciones matemáticas o habilidades de cálculo en la escolaridad normal (a diferencia de los adultos con lesiones, que *pierden* las capacidades previamente adquiridas). Sin negar que pueda existir un grupo reducido de ellos con algún trastorno neurológico subyacente, no hay pruebas para aceptar la idea de que éste se produce en todos los niños con dificultades específicas para el aprendizaje de las matemáticas. ¡Y menos aún, en ese 43% de sujetos que a los 13 años no han adquirido una competencia funcional suficiente para comprender plenamente el mundo complejo que les rodea!.

5. El enfoque cognitivo de las DAM

Aunque las investigaciones sobre los niños con dificultades mayores en el aprendizaje de las matemáticas no han alcanzado un éxito claro en el intento de atribuir esas dificultades a una trastorno neurológico subyacente, si han permitido establecer descriptivamente ciertos subgrupos diferentes a los que pueden pertenecer, estos niños. Ya vimos, en el apartado anterior que algún investigador (Cohn, 1961.1971) ligaba estas dificultades a problemas de lenguaje --y, en concreto, de lectura-- mientras que otros (Slade y Rusell. 1971, Money, 1973; Kosch, 1974, Weinstein 1978) definían un grupo que a pesar de tener una competencia lectora normal y correspondiente a su edad, presentaba retrasos mayores en el aprendizaje de las matemáticas.

Algunos estudios posteriores a los citados han venido a dar la razón a unos y otros: los niños con DAM pueden presentar dos tipos diferentes de perfiles cognitivos. Ciertamente, hay en primer lugar un grupo de niños que presentan dificultades para el aprendizaje de las matemáticas en un contexto más general caracterizado por problemas de lectura. Por otra parte, están los niños con DAM, cuyas habilidades de lectura son normales (Rourke y Strang, 1983, Siegel y Heaven, 1986, Fernández Baroja et. al., 1979). Sin embargo, también estos últimos presentan una constelación de problemas--no sólo matemáticos--descritos en detalle por Kinsbourne y Warrington (1986) y por Kose (1974): sus bajos rendimientos en pruebas de aritmética suelen acompañarse de: 1. problemas de memoria a corto plazo, 2. dificultades de coordinación óculo-manual:, 3. lentitud en los trabajos escritos y, 4. puntuaciones bajas en el subtest de códigos de la prueba de Weschler.

Así, aunque no se hayan definido con claridad diferencias neurológicas entre los subgrupos indicados, si se han perfilado ciertas diferencias cognitivas que, como veremos en otro momento, han recibido recientemente una rigurosa confirmación experimental en un estudio sobre las competencias de memoria de los niños con DAM (Siegel y Ryan 1989).

En realidad, el enfoque cognitivo ha sido más eficaz que el neurobiológico para explicar las DAM y ayudar a resolverlas. La lógica de esta perspectiva es muy clara: si conocemos, por ejemplo, los procesos mentales que se emplean para efectuar una operación de suma, o las estructuras intelectuales que debe poseer el alumno para realizarla, podremos comprender mejor sus fallos y errores al sumar. Pero, por debajo de esa claridad se encuentra un mundo complejo. Bastará con que el lector efectúe mentalmente una operación simple de suma(por ejemplo, 58 + 67= ()?) para que caiga en la cuenta, con una breve introspección de que esa operación no es, en realidad tan simple como solemos suponer. Bastará esa introspección sencilla para que el lector descubra algunas cosas que pueden serle muy útiles para comprender por qué tienen tantos errores y fallos muchos niños en el aprendizaje de las matemáticas.

Por ejemplo: quizá descubra el lector que ha tenido que dedicar a esa operación de suma más recursos de atención de lo que haría suponer su engañosa simplicidad(tuvo que detener la lectura para sumar. Quizá haya niños con DAM que manejan mal sus recursos de atención. Esos recursos son necesarios para realizar procesos tales como recuperar información de la memoria a largo plazo, o bien mantenerla guardada en la memoria a corto plazo (como cuando hay que conservar el quince, en una especie de -almacén-después de sumar ocho y siete). ¿No habrá niños que tengan dificultades en matemáticas porque no realizan adecuadamente esas estrategias de almacenamiento o recuperación? Por otra parte la tarea de sumar se dividía en otras más simples: el lector tuvo, quizá que -contar- *incluso* estas tareas más simples implican el conocimiento previo y la automatización de ciertos procesos que el lector tuvo que aprender. ¿No será que ciertos niños no poseen los conocimientos y procesos previos?

Esta brevísima excursión introspectiva nos pone sobre la pista de términos que forman parte del lenguaje habitual de la Psicología Cognitiva: términos como *atención selectiva, memoria de trabajo, memoria a largo plazo, distribución de recursos cognitivos (atención), conocimientos previos, etc..y* que suponen un cambio de perspectiva con relación al enfoque tradicional de las discalculias y las disfunciones cerebrales mínimas, por las siguientes razones:

1.- El enfoque cognitivo no etiqueta al niño, sino más bien categoriza los procesos que realiza y los errores que comete. No dice lo que el niño *es o sufre (*es discalcúlico, *sufre* una disminución cerebral), sino que trata de comprender y explicar lo que *hace*: los procesos y estrategias que emplea cuando asimila conceptos matemáticos, efectúa operaciones de cálculo, resuelve problemas algebraicos, etc.

2.- El enfoque cognitivo es neutral con relación a la "etiología-última" de las DAM. puede ayudarnos a entender que Juan suele fallar cuando las tareas le exigen una atención selectiva y focalizada. Pedro cuando tiene que mantener una cierta cantidad de información en la memoria de trabajo y María cada vez que tiene necesidad de traducir de un código a otro (por ejemplo, del lenguaje verbal a las representaciones algebraicas). Pero no nos dice por qué tienen esas dificultades: quizá Juan provenga de un medio deprivado, cuyas pautas de socialización no favorecieron el desarrollo de la atención selectiva. Acaso Pedro tenga una disfunción cerebral y María sufra los efectos de una mala estrategia de enseñanza. El enfoque cognitivo puede ayudar a precisar la naturaleza fina de las funciones mentales que no van bien en los niños con DAM. favoreciendo así la búsqueda de las causas, pero no las establece por sí mismo.

El enfoque cognitivo requiere un análisis minucioso y paso a paso de los procesos que se ponen en juego al resolver tareas matemáticas. Precisamente las matemáticas son un terreno especialmente fértil para esta aproximación -puntillosa- a los mecanismos mentales, debido a varios factores: 1.- tratan con materiales formales que se prestan más que otros a poner de relieve la forma y la organización de los procesos mentales, 2.- facilitan la prestación de problemas con soluciones definidas y generalmente exactas (a diferencia de lo que sucedo con los problemas mucho más difusos que son característicos de otras áreas, como las ciencias sociales por ejemplo); 3.- tienen una estructura jerárquica más clara que la de otros campos de conocimiento; 4.- se organizan en algoritmos que acentúan la visibilidad de los -algoritmos de la mente-; 5.- los errores en matemáticas son más netos y fáciles de detectar que los de otros campos de conocimiento (esto es importante *porque* los errores son como "ventanas" para conocer el funcionamiento mental); y 6.- para algunos psicólogos (como Piaget) las matemáticas definen una especie de --axiomática del pensamiento-- y son un producto de una *abstracción reflexionante* (Piaget, 1977) realizada a partir de las propias operaciones intelectuales (y no de los hechos), por lo que las actividades matemáticas serían especialmente adecuadas para estudiar las estructuras de operaciones que dañen la inteligencia.

Las razones anteriores explican la preferencia que han tenido los psicólogos cognitivos por la investigación del pensamiento matemático y el hecho de que la psicología de la instrucción haya avanzado más en el estudio de su enseñanza y aprendizaje que en cualquier otro campo (ver, por ejemplo, Hiebert, 1986. Resnick y Ford, 1981; Schoenfeld, 1987, Baroody, 1988).

Para comprender más profundamente el tipo de planteamiento que los psicólogos del conocimiento y la instrucción desarrollan en relación a los errores y dificultades matemáticas, debemos volver a nuestra engañosamente simple operación de suma: 58+67=( ) ?. Si alguien nos preguntara qué fue lo que hizo nuestra mente para encontrar la solución, es probable que respondiéramos algo semejante a esto:

-Bueno......mmm....primero separe los dos dígitos de la derecha, ocho y siete y los sumé. Como el número resultante, quince, empezaba por uno y tenía dos cifras, me guardé un uno para sumarlo después a la suma de las otras dos cifras. De modo que mi segundo paso fue sumar cinco y seis y añadir un uno al once resultante, con lo que tenía un doce....luego tuve que acordarme de que la suma de los dos primeros dígitos terminaba en cinco. Puse ese cinco detrás del uno y el dos y “leí con el ojo de la mente” uno-dos-cinco:ciento veinticinco....mmm, yo creo que lo hice así.

Si el que nos pregunta es un psicólogo cognitivo, seguramente no se conformará con eso: --¿y cómo sumó usted ocho y siete?-- --Hombre----le contestaremos, ya un poco hartos de su persistente curiosidad----¡eso es muy fácil!....mmmm, lo que hice fue sumar ocho y siete....o sea, coger el ocho y añadir siete unidades-- --Es decir.... ¿usted realizó la operación de contar?., (nos diría el cognitivo, ya francamente pesado y hasta un pelín ofensivo). --Bueno....,¡contar! --diríamos, quizá avergonzados----- mmm.....bueno si....tuve que contar.-- --¿Y cómo contó usted?...-- Lo más probable es que esté fuera el final de la conversación.

En realidad ese final de nuestra conversación imaginaria es una pena, porque contar es una operación mucho más compleja e interesante para el cognitivo de lo que parece a primera vista (como demuestran los trabajos de Gelman y Gallistel, 1978; Gelman y Meck, 1983, 1986; Siegel y Shrager, 1984; Wilkinson, 1984, etc.). Pero con lo dicho la conversación sirve: 1.- como muestra de la insaciable curiosidad mentalista del psicólogo cognitivo (que puede ser enormemente valiosa también para el profesor de matemáticas); y 2.- como base para formalizar el algoritmo de suma sugerido, empleando por ejemplo un --diagrama de flujo--como los que usan los que se dedican a la programación para ordenadores.

El diagrama de flujo de la figura 1 suma aproximadamente como el lector imaginario. El sistema no es una teoría de la suma, y se ha elaborado exclusivamente con fines didácticos: define una estrategia que, empezando por la columna de la derecha, busca resultados en una memoria a largo plazo. --contando--si no están almacenados y codificando las unidades de los resultados de cada columna como cifras de resultado final y las decenas como sumandos de la columna siguiente, hasta llegar a la última columna cuyo resultado codifica completo como --cifras de resultado final-- Después --lee--la cadena de cifras conocidas como --resultado final--en la memoria de trabajo, e identifica esa cadena como número natural resultante de la suma global.

El ejemplo anterior pone de manifiesto hasta qué punto se basa el enfoque cognitivo en una serie de supuestos sobre la naturaleza de la mente: presupone, por ejemplo, la existencia de un --procesador central--que coordina los procesos que se van llevando a cabo. También una memoria de trabajo, que está a disposición de esa unidad central de procesamiento, así como una memoria más permanente que almacena cosas tales como listas de resultados de sumas (pre-aprendidas), esquemas y estrategias para sumar, restar, contar, etc. (qué complicada debe ser la organización de esa memoria). Además el sistema va realizando ordenadamente (con arreglo a una --estrategia--definida) ciertos procesos. En realidad es una especie de --máquina--(no material) que suma.

Este planteamiento puede caer en exageraciones y olvidar aspectos importantes del aprendizaje: al fin y al cabo los alumnos no son máquinas y no conviene extremar la --metáfora del ordenador--cuando estudiamos su conducta o su experiencia matemática. Por ejemplo, muchos de sus problemas se relacionan con factores de motivación o condiciones emocionales, que no son fáciles de encajar en la perspectiva cognitiva a la que nos estamos refiriendo. Afortunadamente, no son meros--aplicadores de algoritmos--sino seres capaces de emplear heurísticos inteligentes: inventar atajos, --intuir-- soluciones, crear sus propios programas de resolución de problemas, quizá menos rigurosos y formales que los de los ordenadores, pero también más flexibles. Además, no debemos olvidar *que* los *aprendizajes* matemáticos se producen normalmente en condiciones de interacción, en situaciones de relación comunicativa: el niño no es sólo un --sistema de procesamiento de la información--sino también (por no decir--más bien--) un ser social que se comunica con el profesor y los compañeros en *una* situación educativa.

Todo eso es verdad y no debe olvidarse. Menos aún cuando se estudian casos de DAM, que incluyen frecuentemente componentes emocionales de enorme importancia. Pero el enfoque cognitivo, cuando no cae en el peligro de extremar la metáfora del ordenador, tiene ventajas importantes: 1. se basa en un análisis sutil del funcionamiento mental de la persona que --hace matemáticas-- 2. establece una relación profunda entre los *errores* y los procesos normales de aprendizaje y adquisición del conocimiento; 3.- se aplica a todos los alumnos (a diferencia del concepto de discalculia o disfunción cerebral); 4.- a los que concibe como sistemas activos (y no receptores pasivos) de desarrollo del conocimiento.

El enfoque cognitivo nos ayuda a entender un principio fundamental: que *frecuentemente los errores no son ilógicos, sino que responden a la aplicación de ciertas reglas que, aunque no sean --correctas-- implican en sí mismas la posesión de una determinada competencia lógico-matemática.* Dejando aparte errores sistemáticos (por fallos de atención, confusiones perceptivas, etc.) el examen de muchos procesos cognitivos subyacentes a errores demuestra que, muchas veces, los errores son sistemas o puntas de iceberg de un determinado sistema: responden también a la *aplicación de algoritmos que producen errores (*Mayer, de forma breve, define un algoritmo como --un procedimiento exacto para llevar a cabo una tarea, como por ejemplo sumar números-- 1983, pág. 423).

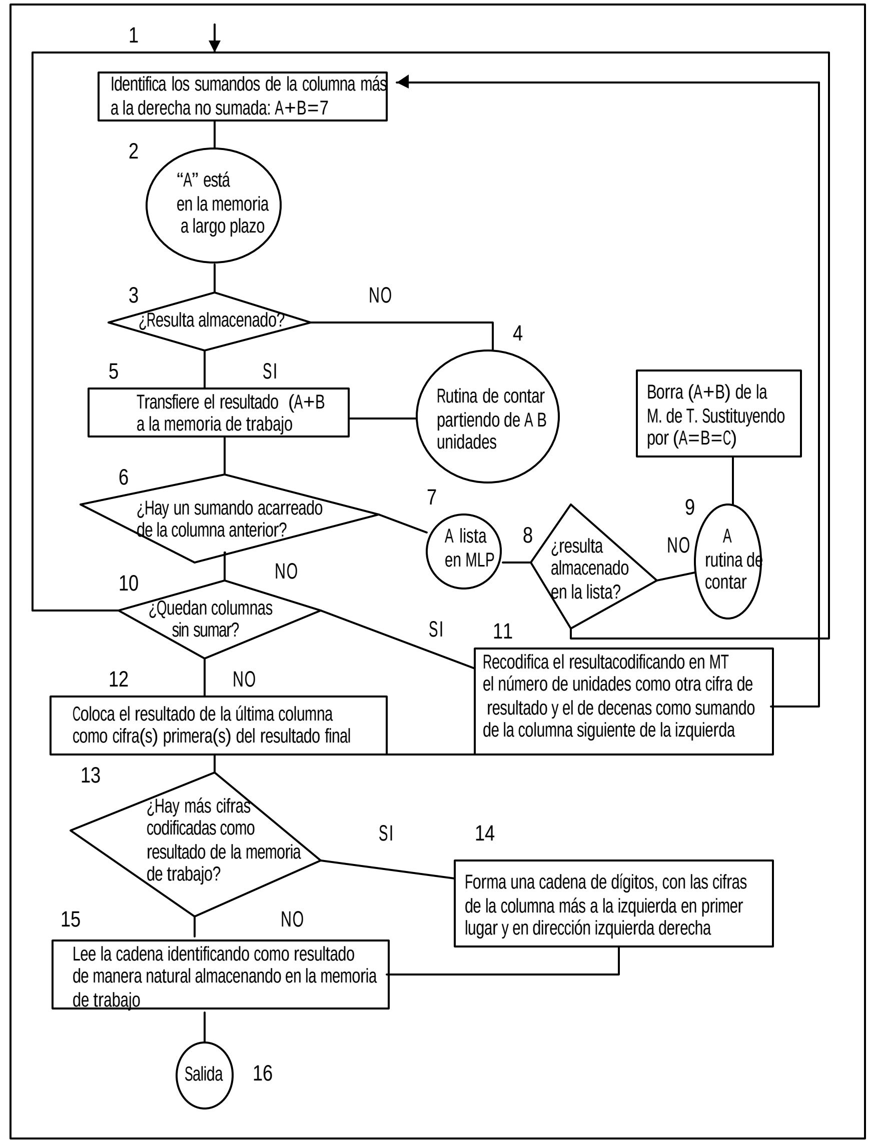
De forma que el enfoque cognitivo nos lleva, en primer término a formular una idea de gran importancia para el tema que nos ocupa:--¡Cuidado con los errores!. No deben provocarse pero tampoco dejarse de lado. Merecen más respeto del que parecen tener. Muchas veces son las únicas ventanas por las que podemos ver las mentes de los alumnos.

6. Los errores en el pensamiento matemático.

Los estudios sobre ciertos errores que cometen frecuentemente los niños en la substracción nos ofrecen una buena ilustración de la validez de los comentarios anteriores. Como sabe todo profesor de los primeros cursos de primaria, la resta es una operación que resulta difícil de aprender para muchos niños y se lleva a su dominio pasando por un camino en el que los errores son más normas que excepciones. Algunos investigadores han estudiado los algoritmos que emplean los niños cuando cometen errores sistemáticos (*bugs*) en las operaciones de substracción.

Esta línea de investigación fue iniciada por Brown y Burton (1978), que no sólo definieron algunos de estos--procedimientos sistemáticos de substracción errónea-- sino que desarrollaron un programa de ordenador-----llamado --Buggy--capaz de --diagnosticar-- los algoritmos empleados en operaciones de resta de tres dígitos en que se cometían errores sistemáticos. Aplicaron este programa al análisis de cada una de las respuestas producidas por 1,325 alumnos que resolvían 15 problemas de resta. En líneas generales, el programa hacia lo siguiente: cuando todas las respuestas de un alumno eran correctas. Buggy le atribuía la posesión de un algoritmo correcto de resta. Cuando había muchos errores, Buggy buscaba un algoritmo que diera cuenta de la mayor parte de ellos o de todos. En caso de no hallarlo, Buggy inventaba todas las combinaciones posibles de los procedimientos (algoritmos) productos de errores, hasta descubrir la combinación que mejor se ajustaba a los errores cometidos. El programa tenía un éxito moderado: fue capaz de diagnosticar los procedimientos (correctos o no) del 43% de los alumnos. Otros estudiantes producían errores más aleatorios o bien empleaban algoritmos muy inconsistentes (en algunos casos quizá no --conocidos--por Buggy).

Es importante destacar hasta que punto representa el enfoque de Brown y Burton (1978) un avance en relación a los métodos clásicos de evaluación del rendimiento en matemáticas: no se limita a señalar los errores cometidos sino que detecta--al menos



en parte---los procesos responsables de los errores. Este planteamiento de --diagnóstico cognitivo--ha sido desarrollado posteriormente por otros investigadores

(Brown y VanLehn, 1980, 1982; Resnick, 21982, Resnick y Omanson, 1987; VanLehn, 1983). Una idea fundamental en que se han basado estos trabajos es la que suele recogerse en el concepto de --teoría de la reparación-- los alumnos no suelen quedarse parados o --bloqueados--(como *haría* un ordenador) cuando llegan a una situación de --impasse-- en la resolución de un problema o la realización de otras tareas matemáticas. Lo que hace, frecuentemente, es tratar de aplicar ciertas operaciones (--reparaciones o remiendos--), basadas en su conocimiento acerca de los procesos de solución de problemas y de los procedimientos que se ponen en juego en tales procesos.

Esta última observación nos lleva a otro principio básico en el enfoque cognitivo: el *alumno no es un receptor pasivo, sino que se considera, en esta perspectiva, como un constructor activo del conocimiento*(de modo que incluso los errores pueden considerarse en gran parte como productos de una construcción activa, y frecuentemente de un intento de buscar significado y orden en las tareas). Muchos errores son resultados de *procedimientos o algoritmos incorrectos* que los niños inventan. La cuestión es cómo llegan a esa invención y que significado y coherencia tiene ésta en función de las *estructuras de conocimiento y los recursos cognitivos* que los niños poseen. Una clara indicación de que esa coherencia existe es el carácter sistemático que tienen muchos de los errores. En la resta, por ejemplo, se han identificado pautas sistemáticas de error como las que se indican el en cuadro 2.

Cuadro 2. Procedimientos que producen errores frecuentes en la substracción (adaptado de Mayer, 1983, pág. 426 en la edición castellana).

1. *Menor de mayor*: substraer el dígito menor del mayor en cada columna con independencia de que estén en minuendo o substraendo (253 - 118= 145).
2. *Pedir al cero*: si hay que "llevarse" de una columna cuyo número superior es 0, se realiza correctamente la substracción en esa columna, pero no se añade uno al substraendo de la de su izquierda (103-45=158).
3. *Cero menos un número: igual a ese número*: si el dígito superior de una columna es 0, el alumno responde con el inferior (140-21=121).
4. *Saltar sobre cero y pedir prestado*: si hay que llevarse hasta una columna cuyo dígito superior es 0, el alumno -se salta--es columna, de modo que no añade 1 a su substraendo y "conserva el 1"- para la columna siguiente (304 - 75 = 139).
5. *Cero menos un número igual al número*: si el dígito superior es 0, se responde con el inferior, que no se modifica aunque haya que --llevarse-- de la columna anterior, en cuyo caso se añade 1 al substraendo de la siguiente (304 - 75=179).

Aunque la delimitación de errores sistemáticos y su análisis en términos de procedimientos inductores a errores, supongan pasos importantes para la comprensión de las dificultades matemáticas, no debemos perder de vista el hecho de que con ello no explicamos el *porqué* de los errores. ¿Por qué restan algunos niños el número menor del mayor, aunque aquél sea uno de los dígitos del minuendo y no del substraendo?...¿por qué no aplican otros la estrategia de --cero menos un número igual a número?.

Las explicaciones de estos errores, desde una perspectiva cognitiva, se han centrado en dos factores. 1. los requisitos de la resta podrían ser excesivos en cuanto a la carga de memoria de trabajo que exigen. Muchas estrategias inductoras de errores serían intentos de emplear algoritmos gravosos (como son los de --menor de mayor y "0-x =x. 2. los algoritmos correctos de resta presuponen una base de conocimientos: no se montan en el vacío. Quizá los algoritmos incorrectos sean una indicación de que el alumno no posee tales conocimientos, por lo que en realidad no --comprende--la resta. Estas dos explicaciones no son, en absoluto, incompatibles sino complementarias.

El último tipo de explicación (base de conocimientos inadecuada) es el que han propuesto para los errores en la substracción algunos investigadores, como Nesher (1986) o Resnick y Omanson (1987): para ellos, el empleo de procedimientos incorrectos se debería, en muchos casos a una comprensión deficiente de principios básicos que definen la operación de restar. Por ejemplo, cuando el niño recurre a la estrategia de --menor de mayor-- demuestra que no ha asimilado ciertos principios fundamentales de la resta, como el de no-conmutatividad de sus términos y carácter global de la substracción. En suma, no comprende realmente lo que es restar. Su problema sería en un sentido profundo, un problema de conocimiento. ¿No se deberán muchos problemas específicos para el aprendizaje de las matemáticas a una deficiencia de conocimientos formales o informales, de los niños que los presentan?

7.Conceptos informales, conocimientos previos y errores matemáticos.

La pregunta anterior nos conduce a otro principio fundamental del enfoque cognitivo del aprendizaje matemático: *éste no consiste en un proceso de incorporación de datos, reglas, etc. a una mente en blanco, sino que implica un diálogo(implícito o explícito) entre los conocimientos previos del alumno y los nuevos, que trata de enseñarle el profesor*. Incluso cuando los niños se incorporan por vez primera al sistema educativo formal, poseen ya un amplio repertorio de conocimientos matemáticos informales. Baroody (1988), en su excelente libro sobre *El pensamiento matemático de los niños*, analiza a fondo las implicaciones pedagógicas de esta idea:

- Los niños --dice-- no llegan a la escuela como pizarras en blanco. La reciente investigación cognitiva demuestra que, antes de comenzar la escolarización formal, la mayoría de los niños adquieren unos conocimientos considerables sobre como contar, el número y la aritmética.

Además este conocimiento adquirido de manera informal actúa como fundamento para la comprensión y el dominio de las matemáticas impartidas en la escuela. En pocas palabras, las raíces de las aptitudes matemáticas llegan hasta la época preescolar y el éxito de la enseñanza escolar se funda en este conocimiento aprendido de manera informal -(op. cit. pág. 34).

Si aceptamos la idea de que el aprendizaje matemático implica un diálogo entre los conocimientos previos y los nuevos, así como la importancia de los conceptos y destrezas "informales" resulta tentadora la hipótesis de que, al menos en un cierto número de casos, las DAM podrían relacionarse con desarrollos pobres e inadecuados de los conocimientos y conceptos matemáticos informales.

Esta hipótesis fue sometida a prueba por Russell y Ginsburg (1984), que investigaron los conocimientos anatemáticos formales e informales de niños con dificultades específicas para el aprendizaje de las matemáticas. Compararon la realización de tareas matemáticas de niños con DAM, de cuarto grado de primaria y niños de tercer y cuarto grado sin DAM. Las tareas consistían en pruebas matemáticas de: 1. Conceptos básicos y procedimientos no algorítmicos. 2. conceptos sobre el sistema de base 10 y habilidades de enumeración. 3. aritmética escrita, 4. recuerdo de hechos "numéricos" y 5. resolución de problemas. Los resultados parecían demostrar que los niños con DAM *no* presentaban deficiencias importantes en las destrezas "informales", y poseían los conceptos básicos del sistema de base 10. Además sus errores de cálculo correspondían al empleo de algorítmicos ó estrategias comunes inductoras de error *(bugs)* y eran capaces de dar soluciones intuitivas inteligentes a problemas matemáticos planteados verbalmente.

¿En qué eran entonces inferiores los niños con DAM con relación a los otros?. Su deficiencia principal se mostraba en el "conocimiento de hechos numéricos? Es decir, parecía relacionarse con algún problema de memoria. La conclusión de Russell y Ginsburg (1984) era que los niños con dificultades específicas para el aprendizaje de las matemáticas son *fundamentalmente normales* en su funcionamiento cognitivo y "no suelen mostrar pautas insólitas de pensamiento" (pág. 243)... con una excepción: "La única excepción de la normalidad cognitiva esencial –dicen- parece referirse al pobre conocimiento de hechos numéricos. En este aspecto, los niños con DAM muestran una dificultad especialmente seria, que aún no se comprende adecuadamente"”*(ibidem)*, una dificultad que quizá pueda comprenderse mejor investigando la memoria de los niños con DAM.

8. El papel de la memoria y la atención en las destrezas y dificultades matemáticas.

La intuición de que ciertas dificultades para el aprendizaje de las matemáticas podrían estar condicionadas por factores de memoria se ha visto confirmada en una investigación reciente de Siegel y Ryan (1989), que tiene una gran importancia potencial por su rigor y daridad de resultados. Para comprender bien esta investigación debemos volver a uno de los componentes del "sistema cognitivo" que definíamos al comentar el diagrama de flujo capaz de sumar. Decíamos, en otro momento, que ese sistema se componía, cuando menos, de un procesador central y dos memorias: una, más permanente, que almacenaba reglas, listas de hechos, etc. y otra de corta duración, que servía de "memoria de trabajo" para el procesador central.

Es esta memoria de trabajo la que nos interesa ahora. Muchos psicólogos cognitivos piensan que el funcionamiento de tal memoria depende del tipo de materiales (por ejemplo, palabras, números, etc.) que debe almacenar temporalmente mientras el procesador hace otras tareas. Para definir esta característica, se dice que la memoria de trabajo es "específica de dominio" (Baddeley, 1986). Desde esta perspectiva es perfectamente posible que algunas personas sin problemas para conservar en su memoria materiales verbales, visuales, etc... si los tengan para mantener materiales numéricos ¿No podrían explicarse así las dificultades matemáticas de algunos niños sin otros problemas? Es atractiva la hipótesis de que estos niños podrían tener especiales dificultades para conservar información numérica en su memoria de trabajo.

Para someter a prueba esta hipótesis. Siegel y Ryan compararon a niños sin dificultades con tres grupos de niños con problemas de aprendizaje: 1. niños con problemas de lectura. 2. con un trastorno general de la atención y 3. con DAM específicas y no acompañadas de alteraciones de atención ó lectura (los dos primeros grupos también tenían dificultades para el aprendizaje de las matemáticas, pero no *específicas* como las del tercero). A todos ellos les planteaban dos tareas de memoria: a)una, de carácter *verbal*, que consistía en encontrar las palabras que faltaban en varias frases (por ejemplo, "en verano hace mucho...." "la gente va a ver animales al...") y luego recordar, en el mismo orden, las palabras dadas previamente como respuestas ("calor, zoo, etc") b) otra, de carácter numérico, consistente en contar los puntos amarillos distribuidos al azar en unas tarjetas que contenían puntos azules y amarillos, recordando después ordenadamente el número de puntos amarillos de cada tarjeta.

Los resultados eran muy interesantes: mientras que los niños con alteraciones de lectura obtenían puntuaciones bajas en las dos tareas, los niños con dificultad específica para las matemáticas obtenían puntuaciones normales en la tarea de recuerdo verbal y bajas en la de recuerdo numérico. Estos datos son favorables a la hipótesis de que los problemas de estos niños están relacionados con una dificultad específica para mantener información numérica en la memoria de trabajo. Ello explicaría la pobreza de su "conocimiento de hechos numéricos", descrita por Rusell y Ginsburg (1984), al dificultarse la trasferencia de materiales numéricos desde la memoria de trabajo a la memoria a largo plazo.

El estudio de Siegel y Ryan (1989) supone un avance en la definición de las posibles funciones deficitarias en personas con DAM y sin problemas en otros aprendizajes. Pero éstas forman sólo una pequeña parte de las personas con dificultades matemáticas. Una de las razones por las que las matemáticas pueden ser tan difíciles para tantos niños es que implican un alto grado de integración de destrezas cognitivas que no son específicas de las matemáticas, pero intervienen en su aprendizaje. Por ejemplo, existe una estrecha relación entre los problemas de lecto-escritura y las DAM, de forma que –como señalan Siegel y Heqven, 1986- "es casi imposible encontrar niños, excepto de las edades inferiores... que tengan dificultades de lectura y obtengan buenas puntuaciones en pruebas escritas de aritmética".

Del mismo modo, los problemas de atención selectiva se reflejan en dificultades de aprendizaje matemático (Fernández Baroja, *et al.*, 1979; Siegel y Heaven, 1986). Ello se debe al hecho de que la realización de tareas matemáticas exige una distribución cuidadosa de los recursos de procesamiento mental y memoria, así como el empleo de estrategias ordenadas y jerarquizadas, que implican un encaje progresivo de unos procedimientos en otros (por ejemplo, en el procedimiento para sumar representado en la figura 1 se incrustan otros procedimientos, como los de "contar", "recodificar en la memoria de trabajo", etc.). Los niños que presentan problemas de atención suelen encontrar dificultades para organizar estructuras jerárquicas de actividades ó procesos mentales, lo cual tiene consecuencia especialmente negativas en matemáticas.

9. ¿Por qué son tan fáciles las matemáticas para tantos niños?: la lógica cognitiva de la pregunta vuelta del revés.

En suma, los problemas de atención, dificultades de memoria, deficiencias en el manejo de sistemas simbólicos –que se expresan, por ejemplo, en las llamadas "dislexias"- se traducen frecuentemente en dificultades de aprendizaje de las matemáticas. ¿Por qué sucede esto?. ¿por qué son además difíciles las matemáticas para muchos alumnos que no tienen problemas en otras materias?

Los conceptos empleados hasta ahora no nos ayudan mucho a responder a estas preguntas. Del mismo modo que no sería sensato pensar que hay un 43% de niños con discalculia o disfunción cerebral mínima, tampoco los sería suponer que casi la mitad de los alumnos tienen dificultades específicas para mantener materiales numéricos en la memoria o trastornos de atención. El reto es explicar por qué son tan difíciles las matemáticas para tantos niños, y no sólo en definir las características de aquellos para los que son más difíciles. En otras palabras, el punto de partida de un análisis cero de las DAM es al aceptación, de entrada, de una afirmación tajante del informe Cockcroft (1985): -*Las matemáticas son una asignatura difícil de enseñar y de aprender*-(pág. 82 subrayado en el original).

¿Por qué es difícil de enseñar y aprender esta asignatura? Las razones que da el informe Cockcroft se relacionan claramente con las "demandas" cognitivas- su carácter fuertemente jerárquico que hace depender lo nuevo de lo previamente conocido, su exigencia de una práctica continuada, las dificultades de comprensión y memoria que plantean a muchas personas, etc. Quizá la perspectiva cognitiva, que estamos comentando en este capítulo, sirva también para comprender por qué son tan difíciles las matemáticas para tantas personas.

Una forma didáctica y útil de plantear esta cuestión consiste en volverla del revés: ¿Por qué tan fáciles las matemáticas para tantos niños? No: no se trata de una provocación, sino de una pregunta más seria que la otra.....más seria porque no se ayuda, quizá a comprender mejor las importantes exigencias o mandamientos cognitivos que plantean las matemáticas. Esta útil pregunta ya se había propuesto en un artículo anterior sobre el fracaso escolar (Riviere, 1983), en que las demandas cognitivas de la escuela para el alumno se planteaban en forma de diez mandamientos que resultan quizá más pertinentes en matemáticas que en ninguna otra materia. Son los que se establecen en el cuadro 3.

Cuando revisamos los <mandamientos> del cuadro 3 con la mente puesta en el aprendizaje de las matemáticas, se nos hace inmediatamente evidente que en ellas, más que en ninguna otra materia, este cuadro de la ley resulta especialmente difícil de cumplir. Veamos por qué:

1) Por ejemplo, si bien es cierto (mandamiento 1) que la escuela le exige desde muy pronto al niño que emplee un tipo de pensamiento al que Margaret Donaldson (1978) ha llamado <desvinculado> (es decir, ajeno a los intereses, significados e intenciones humanos que constituyen la matriz de origen del pensamiento infantil), no cabe duda de que esta exigencia es especialmente dura y temprana en el caso de las matemáticas. Es cierto que las primeras experiencias de matemáticas escolar deben basarse en la acción del niño, en su manejo de materiales concretos y que favorezcan el pensamiento intuitivo, y que esas primeras experiencias----también las posteriores---han de implicar ese diálogo, del que ya hemos hablado, entre los ricos conocimientos informales con que el niño acude a la escuela y los nuevos que debe adquirir en ella. Sin embargo, las matemáticas demandan pronto----muchas veces, demasiado pronto---un esfuerzo considerable de abstracción y formalización por parte del niño y, sobre todo, tratan con un tipo de contenidos que decididamente no hacen referencia a propósitos e intenciones humanas.

Cuadro 3. Los <diez mandamientos cognitivos> de la escuela (adaptado de Riviere, 1983. pág. 7).

I. Desvincularás gran parte de tu pensamiento de los propósitos e intenciones humanas.
II Tendrás que descontextualizar progresivamente muchos de sus conceptos, haciéndolos cada vez más abstractos.
III Deberás asimilar realmente los contenidos generalizando los esquemas y estrategias no solo a tareas enseñadas sino a otras nuevas.
IV Dominarás rápidamente nuevos modos y códigos de representación.
V Dedicarás selectivamente tu atención a las tareas escolares
VI Tratarás de controlar la selección y empleo de tus recursos intelectuales y de memoria.
VII Emplearás al máximo tus recuerdos de competencia lógica y memoria de trabajo, cuando lo exijan la tarea y el profesor.
VIII Deberás desarrollar y emplear estrategias y procedimientos especializados (algoritmos) para el tratamiento de la información.
IX Deberás tener una actitud intencional de aprender
X Y, para colmo, deberás parecer un niño interesado y competente.

En *Realidad mental y mundos posibles* (1986).Bruner realiza una interesante distinción entre dos modalidades de pensamiento: él las llama <modalidad paradigmática> ó lógico-científica y <modalidad narrativa>. La *primera* se acerca a un ideal formal de abstracción. La otra se basa en la intuición y el análisis de las intenciones y propósitos humanos. Su meta es la plausibilidad y comprensión de materiales que son inevitablemente concretos, particulares y biográficos. Pues bien, la matemática es el *sancta santorum* de la modalidad paradigmática de pensamiento: el lugar en que intenciones, propósitos y contenidos biográficos se eliminan por completo: un reino de relaciones permanentes entre objetos y operaciones abstractas y no de *interacciones* temporales entre personas.

El estudio del desarrollo del pensamiento del niño en su <modalidad narrativa> ha sido mucho más descuidado que el de la modalidad paradigmática (que se ha revestido de exclusividad, como si fuera el pensamiento por antonomasia), pero hay argumentos serios para defender la idea de que tanto en la evolución de la especie humana (Humphrey, 1989) como en el desarrollo de cada individuo (Astington, et al..,1988) el primero es prioritario con respecto al segundo. Según este punto de vista, las notables competencias de <cálculo> y <computación> de las personas---en el sentido más amplio de estos términos....pudieron originarse en la necesidad, motivación y ventaja adaptativa de <calcular> y predecir los estados mentales y las conductas de otros: es decir, en el contexto de relaciones interpersonales y no impersonales.

Probablemente, en la propia historia de la matemática, la conciencia de que las intenciones y propósitos son *irrelevantes* por completo en la definición de las estructuras y relaciones matemáticas (que permanecen invariantes a través de las volubles variaciones de los motivos humanos) fue relativamente tardía y quizá constituyó un mito fundamental en el paso de la larga prehistoria de la matemática a su historia propiamente dicha: el encantamiento de los pitagóricos----y de Platón--con los objetos matemáticos no debió ser del todo ajeno a este descubrimiento.

Las reflexiones anteriores pueden relacionarse con la evidencia de que al niño se le exige un considerable esfuerzo cuando se le pide que trabaje con materiales completamente impersonales: es cierto que, como dice Piaget (1977), esos objetos matemáticos pueden tener su raíz en la propia acción del niño y considerarse como estructuras abstraídas de la acción misma, pero también lo es que desdeñan de esa acción su naturaleza intencional, la cual no resulta relevante para su definición como tales objetos matemáticos: la noción de que el número <se conserva> con independencia de las intenciones humanas es quizá tan compleja para el niño como la de que se conserva en una *hilera* de objetos, aunque se alargue o se acorte la hilera sin añadir objetos o quitar de los que había antes.

En todo caso, parece intuitivamente claro que los niños suelen ser mucho más capaces de <calcular> --con comillas----los estados mentales de sus profesores de matemáticas que de calcular sin comillas lo que éstos quieren que calculen. Si podemos suponer que en la historia de la matemática la vinculación intuitiva entre la acción y la intención fue un <obstáculo epistemológico> (en el sentido en que emplea este término Bachelard, 1948) que hubo de ser superado por la construcción de una matemática científica, podemos aceptar que ese mismo obstáculo se le plantea a cada niño en particular en su proceso de aprendizaje de las matemáticas. Como dice Donaldson (1978), los niños son especialmente hábiles <siempre que se enfrenten con situaciones plenas de sentido y correspondientes a la vida real, con respecto a las cuales tengan propósitos e intenciones y puedan reconocer propósitos e intenciones similares en otros y responder a ellos> (pág. 43) Las matemáticas les exigen en seguida, *desvincular* su pensamiento de propósitos e intenciones. Sencillamente:: pensar en otros términos. Tienen que superar su tendencia a hacer depender las relaciones de las intenciones para comprender las relaciones matemáticas.

II) Además, tales relaciones son inevitablemente *abstractas* y demandan un cumplimiento riguroso del segundo mandamiento cognitivo del cuadro 3.- Tendrás que descontextualizar rápidamente muchos de tus conceptos, haciéndolos cada vez más abstractos>. Sin embargo, como ha señalado Nelson (1977), la capacidad de <independizar los conceptos de sus contextos de adquisición> es relativamente tardía. Los conceptos matemáticos del niño se van despojando lenta y penosamente de los conceptos perceptivos, prácticos y materiales en los que nacen. El proceso de aprendizaje de las matemáticas es, en buena parte, un proceso de abstracción progresiva y conduce a la larga a la construcción de conceptos cuyas referencias intuitivas son más y más lejanas.

Este vector de abstracción se produce en matemáticas, continuamente y abarca desde los conceptos más elementales a los más complejos. Por ejemplo, la operación de contar se basa en la generalización a cualquier clase de objetos de principios de correspondencia uno-a-uno, orden estable y cardinalidad (Gelman y Gallistel,1978).que presuponen ya un cierto grado de abstracción. Del mismo modo, la noción de número implica la conservación de una propiedad de un conjunto (el número mismo) a pesar de las apariencias engañosas a que puedan inducir los cambios perceptivos en los objetos de que se compone tal conjunto (Piaget y Szeminska, 1941; Piaget e Inhelder, 1941), es decir, supone la definición *de* una propiedad *abstracta* de un conjunto. La abstracción es aún más evidente cuando se hace necesario el paso de una geometría basada en la intuición y la analogía a una geometría analítica, o desde las operaciones aritméticas sobre números a las manipulaciones *algebraicas* de variables.

En términos generales, la historia de las matemáticas ha implicado el desarrollo de esquemas conceptuales cada vez más abstractos y abarcadores. Esto es también una parte sustancial de la exigencia que se plantea en la historia escolar de cada alumno: para acceder a un nivel indispensable de *numerancy* es parecido acceder a representaciones y relaciones abstractas. Aunque el sistema cognitivo sea, en si mismo, un mecanismo de realización de abstracciones y su evolución puede entenderse en términos de desarrollo de competencias de abstracción cada vez más poderosas, la exigencia de abstracción de las matemáticas puede resultar excesiva para muchos alumnos. Más aún en aquellos casos en que se emplean pautas de enseñanza inadecuadas, caracterizadas por métodos excesivamente verbalistas, saltos bruscos de unos conceptos a otros, ausencia de referentes materiales intuitivos, organización de contenidos curriculares en función únicamente de la estructura lógica de las matemáticas y no de las posibilidades evolutivas de los alumnos, etc. El fracaso relativo de la alternativa curricular basada en la propuesta de fundamentar el aprendizaje escolar de las matemáticas en la teoría de conjuntos enseñada desde edades preescolares (es decir, basada en el supuesto de que <lo que es lógicamente previo debe ser pedagógicamente anterior>desdeñando la sospechosa evidencia de que<lo lógicamente previo fue históricamente posterior>) ha implicado, para los profesores de matemáticas, un duro aprendizaje sobre las consecuencia de ignorar las verdaderas competencias de abstracción de los alumnos.

Naturalmente, el buen profesor de matemáticas trata de emplear procedimientos que faciliten la abstracción y lucha (especialmente en la enseñanza primaria) por anclar los conceptos matemáticos en la experiencia significativa de los alumnos. Pero también los buenos profesores sufren la experiencia de ver como hay un grupo de alumnos que <pierden pie> y acumulan <lagunas de conocimientos> debido a la influencia conjunta de las exigencias de abstracción de las matemáticas, su estructura fuertemente jerárquica y la necesidad de enseñar a grupos. Al profesor se le plantea, entonces, un difícil dilema: ¿debe volver atrás hasta anclarse en el nivel real de conocimientos de esos alumnos rezagados?....¿y qué hacer, mientras, con los otros alumnos?

Por otra parte, en matemáticas siempre tiene un límite el intento de fundamentar intuitivamente los conceptos. Hay un punto en que la abstracción se impone necesariamente. Las relaciones, algoritmos y conceptos matemáticos lo son en tanto que dejan de depender de contextos concretos de percepción, acción y experiencia: no posee la noción de número el niño que piensa que la cantidad de objetos de un conjunto aumenta al separarse los objetos unos de otros, ni sabe contar de verdad el que sólo es capaz de decir el número de elementos de conjuntos que contienen pocos, ni suma realmente el que sólo lo hace en problemas que se ofrecen los sumandos, y no cuando uno de éstos es la incógnita

III) En otras palabras, el verdadero índice de que se ha alcanzado el nivel de abstracción que acredita la comprensión de un concepto matemático es la *generalización adecuada* de dicho concepto. Esta afirmación nos lleva directamente al tercer mandamiento cognitivo de nuestra tabla: <Deberás asimilar realmente los contenidos, generalizando los esquemas y estrategias no sólo a las tareas enseñadas sino a otras nuevas>:

Todo profesor de matemáticas ha oído alguna vez preguntas como éstas:<¿Debo restar o dividir?> ó, más escuetamente. "¿qué tengo que hacer?" Un buen ejemplo de esta reacción se encuentra en la siguiente entrevista a una alumna de BUP, que aparece en un interesante informe sobre *El error en matemáticas* (Grupo Azarquuiel, 1986)

"Profesora: A ver, ese problema

Alumna: Un estudiante dedicó 22 horas de estudio a la preparación de sus exámenes de Lengua, Matemáticas e Historia. Si dedico el doble de tiempo a Lengua que a matemáticas, y 3 horas menos a Historia que a Lengua, ¿cuánto tiempo dedicó a cada asignatura?

(Aquí se produce un silencio muy prolongado)

Profesora: ¿No sabes por donde empezar?.... Si, yo creo que si ¿no?

Alumna: Es que no sé

Profesora: Ve diciendo en alto todo lo que estás pensando. Lo dices en alto y lo escribes en el papel... venga.

Alumna: Bueno, pues divido 22 entre las tres asignaturas que tiene. Las veintidós horas entre las tres asignaturas que tiene, que serían siete horas que empleaba en cada una, pero... como no las dedica el mismo tiempo, no sirve para nada".) *op. cit*. pág. 29)

Ciertamente, la alumna no sabe que hacer primero enmudece, después confiesa abiertamente su desconcierto y termina por recurrir a un algoritmo simple de división –despreciando decimales- para reconocer finalmente que "no sirve para nada". Aunque en su curso (1º. de BUP) ya ha debido tener una experiencia considerable en tareas algebraicas; sencillamente *no reconoce* la posible naturaleza algebraica del problema y trata de recurrir a una estrategia aritmética simplificada.

La generalización de categorías, reglas ó estrategias matemáticas exige reconocer sus condiciones pertinentes de aplicación. En términos cognitivos, lo que el alumno tiene que "almacenar" en su memoria a largo plazo no son reglas vacías ó procedimientos desnudos, sino también –lo que es mucho más difícil- una información estructurada de los contextos en que son relevantes y aplicables. Además tiene que ser capaz de reconocer que ciertos problemas constituyen ejemplos de tales contextos. Davidov (1982), por ejemplo, ha destacado las grandes dificultades que tienen muchos estudiantes para realizar esta generalización.

Existe una relación tan estrecha entre el rendimiento matemático y las competencias de generalización que éstas pueden considerarse, en gran parte, como indicadores de aquél. En una investigación citada por Davidov, Krutiezki (1968) identificó distintos subgrupos de alumnos en su función de su capacidad matemática y les prepuso series que variaban esencialmente en el grado de generalización que exigían. Por ejemplo, uno de los ejercicios de la serie quinta se componía de la siguiente secuencia de tareas:

1. $(a + b)^2 = ?$	2. $(l + 1/2a^3 b^2)^2 = ?$
3. $(-5x + 0.6xy^2)^2 = ?$	4 $(3x - 6y^2)^2 = ?$
5. $m + x / b)^2 = ?$	6. $4x + y^3 - a) = ?$
7. $5 l^2$	8. $C+D+E) (E+C+D)= ?$

El sistema de aplicación era este: a los alumnos se les enseñaba primero el procedimiento para realizar, por ejemplo, el cuadrado de una suma. Luego se les proponía la formula más distante de la original (en el caso anterior la 8)para comprobar si eran capaces de reconocer en esa expresión el cuadrado de la suma. Cuando no lo reconocían entraban en el juego sucesivamente de los ejercicios 2.3.4, etc., y después cada uno de ellos volvía a plantearse el 8. Así podría saberse detrás de qué ejercicio de la serie se encontraba la solución del más difícil. Este método permitía variar la cantidad de experiencia que requería cada alumno para llevar a cabo la generalización requerida.

El estudio reveló algunas características de los procesos de generalización de los alumnos más y menos capaces de matemáticas. Estos últimos necesitaban más ejercicios para llegar a generalizar, y tenían serias dificultades para traspasar las fronteras de expresiones numéricas y expresiones con letras, o entre figuras geométricas concretas y demostraciones geométricas generales. Por el contrario los alumnos más capaces mostraban una gran destreza para dar rápidamente el salto desde los ejemplares más cercanos a los más lejanos.

A partir de sus resultados, Krutiezki estableció cuatro tipos de alumnos que se diferenciaban de su capacidad de generalización: 1. Los que no generalizaban, a pesar de recibir mucha ayuda; 2. Otros que generalizaban sólo después de muchos ejercicios y con muchos errores; 3. Un tercer tipo de alumnos capaces de generalizar con errores menores y con escasa ayuda; y 4. Aquellos que eran más capaces, y generalizaban de forme repentina y sin errores.

Las dificultades de generalización se relacionan frecuentemente con problemas para *reconocer las reglas pertinentes* en situaciones de resolución de problemas planteados verbalmente . el aprendizaje matemático exige, en primer lugar, el dominio de códigos simbólicos especializados (por ejemplo, operadores, términos numéricos y reglas sintácticas de la aritmética o el código algebraico) y, en segundo lugar la capacidad de *traducir* desde otros códigos (imágenes, lenguaje, etc.), a los códigos matemáticos y viceversa. Todo ello nos conduce a nuestro cuarto mandamiento: "dominarás nuevos modos y códigos de representación".

El proceso de asimilación de los símbolos aritméticos, por ejemplo, es mucho más complejo de lo que parece a primera vista. Los estudios sobre la simbolización de la cantidad (Sastre y Moreno, 1976, 1977), las operaciones de suma y resta (Sastre y moreno, 1980: Sastre, Bassedas y7 Sellarés, 1981; Gómez, Moreno y garu,1984), la multiplicación (Gómez, 1982) y las fracciones (López, 1987) demuestran que, lejos de producirse un proceso simple de transposición desde la acción a la verbalización o el empleo de los símbolos aritméticos convencionales. Las construcciones aritméticas que se realizan en un determinado plano (el de la acción) han de reconstruirse en nuevos planos (por ejemplo el de la codificación convencional en la aritmética). Los estudios de estas investigadoras sobre la simbolización gráfica de los conceptos aritméticos demuestran que la traducción de la acción a la simbolización que se enseña en la escuela no es, en absoluto, ni directa ni inmediata.

Las dificultades de traducción, no se producen sólo en la acción y la simbolización matemática, sino también entre ésta y el lenguaje verbal. Un ejemplo claro de estos problemas de traducción lingüístico-matemática puede verse en la continuación de la entrevista que comentábamos antes, en que se pedía a una alumna que resolviera un problema de distribución de 22 horas entre tres asignaturas (lengua, matemáticas e historia), sabiendo que dedicó el doble a la primera que a la segunda, y "tres horas menos a historia que a lengua" (Grupo Azarquiel, op. cit.). es instructiva la estrategia de la alumna, después de darse cuenta de que dividir 22 entre 3 "no sirve para nada":

Alumna	Como no se sabe el tiempo que dedico a matemáticas, por ejemplo lo llamamos equis (x). Entonces dice que dedico el doble de tiempo a la lengua que a matemáticas; pues si en matemáticas estudió equis (x), en lengua estudio dos equis (2x).
Profesora:	Bien, ponlo ahí para que no se te olvide.
Alumna	No creo, vamos. Y luego, tres horas menos a historia que a lengua: si a historia dedicó dos equis (2x) pues a historia le dedico tres menos dos equis (3-2x)…sería tres menos dos equis…no…sería al revés: (3-2x)…tres horas menos que le dedicó a la lengua…claro, en matemáticas equis (x). ¿no?
Profesora	Si claro (op. cit. Págs. 29-30)

Cuando al fin reconoce la posibilidad de realizar una operación algebraica del problema, la alumna trata de recodificar término a término: el tiempo de matemáticas es x y el de lengua 2x. Por ahora todo va bien. El problema se presenta cuando hay que codificar algebraicamente la idea de que se dedicaron "tres horas menos a historia que a lengua". Siendo 2x el tiempo de lengua, esta frase se traduce en "3-2x". La traducción refleja un análisis superficial de la relación entre la expresión matemática y la verbal. La estrategia que parece estar empleando la alumna es muy simple, y podría explicarse así:

"Si el enunciado verbal aparece primero el tres, pon primero el tres en la expresión matemática. Si luego aparece un menos, escribe menos. Si al final aparece la historia, sustitúyela por su nombre matemático (2x). en suma: conserva término a término el orden de la expresión matemática".

Naturalmente la traducción no es correcta. La alumna lo intuye de algún modo y siente un cierto malestar difuso : duda, titubea y… ¡llega a la conclusión de que "sería al revés", es decir, tres menos dos equis (3-2x)! (obviamente lo mismo que antes). Veamos el mar de confusiones en que se ve sumergida la alumna después de hacer esta traducción:

Alumna	
Profesora:	A ver… lee, esto son tres horas menos del tiempo que dedico a la lengua ¿no?
Alumna:	Claro
Profesora:	¿Y el problema qué te dice?
Alumna:	Un estudiante dedicó veintidós horas a la preparación de sus exámenes de lengua, ¿Cuánto tiempo dedicó al estudio de cada asignatura?... pues tres equis (3x), el tiempo...

(La situación empeora de forma rápida y alarmante con la aparición de 3x y la profesora se ve obligada a intervenir urgentemente)

Profesora:	No te líes, no te líes... ve centrándote otra vez. En matemáticas...¿qué has dicho?
Alumna:	Equis (x) fue el tiempo que estudió matemáticas.
Profesora:	Bien.-.. ¿en lengua?
Alumna:	Dos equis.
Profesora:	El doble de matemáticas
Alumna:	Dos equis (2x) en lengua.
Profesora:	¿ Y en historia?
Alumna:	Tres menos que en lengua.
Profesora:	Tres menos que en lengua. ¿Cuántas dedicó a la lengua?

alumna: Dos equis (2x).
Profesora: Luego... ¿en historia?
Alumna: Dos equis menos tres (2x - 3)
Profesora: pero... ¿es lo mismo que tres menos dos equis (3 - 2x)?
alumna: No (Grupo Azarquiel, 1986. pags. 30-31)

Aquí el pequeño drama tiene un final feliz: gracias a la cuidadosa mayeútica lengua 2x, se expresa 2x - 3 y no 3 - 2x. pero, ¿cuántas veces el final es muy distinto?... en la investigación de la que se ha tomado el fragmento de entrevista anterior se observaba que uno de los errores sistemáticos de todos alumnos de BUP era lo que allí se denominaba "traducción literal de enunciados": la preservación término a término del orden superficial de la expresión verbal en la matemática. sin embargo, la traducción entre el lenguaje literal y el matemático, no es, en absoluto, de manera directa. exige una comprensión profunda de las relaciones establecidas en los problemas formulados con palabras. en álgebra, especialmente, los profesores deberían considerar la necesidad de enseñar a traducir correctamente los enunciados verbales en expresiones algebraicas, sin dar siempre por supuesta esa capacidad en los alumnos. una idea fundamental en la psicología cognitiva es *que la representación adecuada de un problema es un paso decisivo para su solución*.

dejando aparte los problemas de traducción, sucede que la naturaleza misma de las representaciones matemáticas es , para muchos alumnos, fuente de dificultades para el aprendizaje. la conciencia, de la importancia de estas representaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje es creciente (Janvier, 1987): aquí sólo podemos referirnos a las características de las representaciones que pueden ser causantes de problemas. esos rasgos productores de problemas se comprenden mejor cuando se co mparan los códigos de representación más naturales que emplean los niños a lo largo del desarrollo.

Los niños más pequeños emplean la acción misma (por ejemplo de sus conductas de imitación y juego) para representar la realidad, también desarrollan progresivamente la capacidad de formar imágenes mentales, que les permita efectuar representaciones internas de lo real o lo posible, al tiempo que depositan un grado mayor de movilidad y reversibilidad de las operaciones mentales que se realizan sobre estas representaciones. finalmente, los niños emplean el lenguaje natural, tanto para comunicarse sobre lo real como para representarlo.

Para algunos matemáticos (Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev, et al.. 1973) y psicólogos (Piaget e Inhelder, 1941), las matemáticas se originan en principio como abstracciones a partir de la propia estructura de la acción. el referente intuitivo a acciones reales sobre objetos concretos esta presente en los primeros conceptos matemáticos del niño: sumar es añadir, y restar quitar cosas de conjuntos de ellas. pero también desde muy pronto la notación matemática presupone un principio de abstracción que comienza a alejar a los conceptos de sus orígenes intuitivos.

En la historia de la matemática, el paso de representaciones analógicas e intuitivas a las representaciones analógicas (por ejemplo, en geometría) supuso un avance de extraordinaria importancia, que permitió liberar las nociones espaciales, figurales y transformacionales de ciertas adherencias intuitivas que constituían un obstáculo para realizar inferencias a partir de esas nociones. volviendo a un concepto empleado antes: las tendencias a pesar de términos intuitivos, imaginables y concretos fueron obstáculos epistemológicos que hubieron de ser superados para el desarrollo del pensamiento matemático. Y ese mismo obstáculo tiene que ser superado también en la historia escolar de cada niño.

El aprendizaje matemático exige, así, el dominio de códigos analíticos de representación más abstractos y menos intuitivos que los de las imágenes. en esta aspecto las, representaciones matemáticas son más semejantes a las del lenguaje natural. al fin y al cabo las palabras tampoco se parecen a las cosas. sin embargo, también hay diferencias importantes entre los códigos matemáticos y el lenguaje, cuyo análisis ayuda a explicar las dificultadas que pueden presentarse en el aprendizaje de esos códigos.

Todo profesor de matemáticas recordará en algún momento de desaliento ante ciertos alumnos " para los que es lo mismo ocho que ochenta" en el tratamiento de las expresiones matemáticas: ¿cómo hacerles entender la importancia de un paréntesis, del lugar preciso, de una cifra o un punto?... La forma de operar de estos alumnos evoca la imagen de los relojes blandos de Dalí: hacen matemáticas con una actitud aproximativa, reblandeciendo el ideal de precisión por el que se ha guiado, a lo largo de la historia, el pensamiento matemático. No es extraño que los profesores (sobre todo cuando son matemáticos profesionales) tiendan a impacientarse con esa actitud de más o menos.

Sin embargo, ese estilo de pensamiento también tiene su explicación. Una explicación que se relaciona, en parte, con hábitos lingüísticos: el lenguaje es redundante y sus significados tienen un margen inevitable de ambigüedad. el lenguaje perdería gran parte de su poder creativo en las condiciones normales (llenas de ruidos) de la interacción humana. todo ello tiene que ver con el hecho de que el lenguaje es primordialmente un sistema de comunicación, aun que secundariamente se convierta en un importante código de representación mental e inferencia.

Por el contrario, la función primordial de los códigos matemáticos es la inferencia. Y si la ambigüedad establece barreras insuperables en la inferencia matemática la redundancia la dificultaría seriamente. Por eso a lo largo de la historia de las matemáticas , se han ido construyendo códigos no ambiguos y no redundantes: Pero al mismo tiempo, el lenguaje natural constituye un marco previo sobre el cual se desarrolla y construye el lenguaje matemático. Así el alumno tiene que aprender a sustituir los procesos que emplea en un código comunicativo, redundante, ambiguo y destinado a transmitir sensaciones por otros diferentes, que sirven para un código de inferencia. Ese aprendizaje es tanto más difícil cuanto que el lenguaje matemático, no se ha desarrollado con fines didácticos sino con el objetivo de facilitar el razonamiento matemático. Para algunos es extremadamente difícil tratar con ese lenguaje que , además, no es semántico.

V a X) La necesidad de hacer inferencias, al tiempo que se tienen en cuenta escrupulosamente las reglas sintácticas de ese nuevo lenguaje que se adquiere en la escuela (esa segunda lengua que se caracteriza por su gran economía expresiva y falta de elementos redundantes) obliga a un esfuerzo de atención selectiva, más intenso que el que piden otras materias que se transmiten principalmente a través del lenguaje natural. Y con ello llegamos a nuestro quinto mandamiento (dedicarás selectivamente le atención a tus tareas escolares). Ya vivimos en otro momento que las alteraciones de la atención selectiva suelen traducirse en dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Siegel y Haeven 1986; Fernández Barojoa. et al.. 1979).

Si todo el aprendizaje escolar demanda (mandamiento 9) una actitud intencional de aprender, y una distribución cuidadosa de los recursos cognitivos y de memoria (6 y 7), esto es especialmente cierto en el caso de las matemáticas, debido a que éstas requieren el empleo de códigos especiales y muy económicos, a que implican el desarrollo de algoritmos (estrategias y procedimientos precisos) que se encajan unos en otros, manteniendo relaciones de interdependencia mutua y configurando la estructura fuertemente jerarquizada de esta área (mandamiento 8). Añádase a todo lo anterior la exigencia de parecer un niño interesado y competente (mandamiento 10) y se tendrá un cuadro realista de los factores generadores de problemas escolares en matemáticas.

10 Principios generales para una enseñanza de la satisfacción de la experiencia matemática .

¿Cómo puede facilitarse el aprendizaje de las matemáticas, contribuyendo a prevenir los problemas a que nos hemos referido?... ¿como hacer participes a los niños de las satisfacciones de la experiencia matemática. En este articulo sólo podemos ofrecer esquemáticamente algunas indicaciones generales sobre las respuestas a estas preguntas. En algunas publicaciones recientes sobre la enseñanza de las matemáticas podrán ampliarse las breves consideraciones, que por razones de espacio, se formulan aquí (vid., por ejemplo Baroody, 1988 y Biggs, 1985).

E cierto modo, los principios más generales en los que bebe basarse cualquier estrategia de facilitación del aprendizaje matemático son una especie de espejo inverso de los factores que dificultan el aprendizaje de las matemáticas a los que nos hemos referido. En el cuadro 4 (tomado de Rivière, 1983) se definen a lo que podríamos llamar los mandamientos cognitivos que debería seguir el profesor con arreglo al análisis que hemos hecho de los que las matemáticas exigen al alumno.

Evidentemente las prescripciones del cuadro 4 no son fáciles de cumplir. Sin embargo, el profesor de matemáticas puede tratar de acercarse a un modelo didáctico que convierta el aprendizaje en una tarea significativa y motivadora para sus alumnos. ello implica, en primer lugar, una actitud de respeto, incluso a los errores que éstos cometen. Naturalmente, aquí el término respeto no significa abandono del alumno en un mar de errores, sino la consideración de tales errores como los que son frecuentemente: intentos activos de dar significado, ventanas que dejan entrever los procesos activos sobre la información que los alumnos realizan. Los cursos de matemáticas deberían de acercarse a un cierto ideal socrático de dialogo entre las ideas previas de los alumnos y las nuevas nociones matemáticas.

I	Vincularás, en lo posible, los contenidos matemáticos a propósitos e intenciones humanas y situaciones significativas
II	Tratarás de contextualizar los esquemas matemáticos, subiendo los peldaños de la escala de abstracción al ritmo exigido por los alumnos
III	Te preocuparás de asegurar la asimilación de lo viejo antes de pasar a lo nuevo, y de adiestrar específicamente la generalización de los procedimientos y contenidos
IV	Asegurarás el dominio y enriquecimiento de los códigos de representación, asegurando que la traducción entre el lenguaje verbal y los códigos matemáticos puede realizarse con soltura, para lo que deberás ejercitarla.
V	Te servirás de la atención exploratoria del niño como recurso educativo, y asegurarás su atención selectiva sólo en periodos en que ésta puede ser mantenida
VI	Le enseñarás, paso a paso, a planear el uso y selección de sus recursos cognitivos
VII	Deberás asegurarte de que el niño puede recordar los aspectos relevantes de una tarea o problema, y procurarás comprobar que no exiges más de lo que permite la competencia lógica del alumno (que deberás ir comprobando siempre que sea posible)
VIII	Enseñarás paso a paso las estrategias y algoritmos específicos que exigen las tareas
IX	Procurarás al niño tareas de orientación adecuada, procedimientos de análisis profundo y ocasiones frecuentes de aprendizaje incidental
X	Y, para colmo, deberás valorar y motivar también a los niños que no parezcan interesados o competentes

Cuadro 4. *Los mandamientos del profesor (adaptado de Riviere, 1983, p. 12)*

La enseñanza de una matemática significativa implica, por otra parte, un esfuerzo sistemático por llenar efectivamente de significado las actividades matemáticas que se piden a los alumnos. Evidentemente, es muy diferente enseñar los conceptos de media o desviación típica a alumnos de primero de BCP a través de un conjunto de "números fríos" escritos en la pizarra que enseñárselos a partir de sus propias estaturas, previamente medidas. El segundo procedimiento es, sin duda, más lento, pero la prisa (provocada, en gran parte, por unos programas absurdamente sobrecargados) es, sin duda, uno de los obstáculos más dañinos en la enseñanza de las matemáticas. Como señala el informe Cockeroft, "si el programa que se enseña es demasiado extenso y exigente, contribuirá al bajo rendimiento... al proyectar un currículo adecuado para los alumnos de bajo rendimiento, el programa no deber se demasiado extenso, a fin de que haya tiempo de tratar los temas desde diversos ángulos y en variadas aplicaciones" (1985, pág. 164)

Actualmente, los profesores de matemáticas cuentan con una rica gama de recursos y actividades posibles para facilitar un aprendizaje eficaz y significativo de las matemáticas incluso a los alumnos que aprenden lentamente. Biggs (1985), que propone algunas de esas actividades, recomienda estimular la interacción y reflexión conjunta entre los niños con dificultades y los "buenos matemáticos", preocuparse de estimular la comprensión por parte de los niños de por qué aprenden matemáticas (haciéndoselas usar en vez de pedir continuamente cálculos sin comprender lo que hacen), evitar en lo posible comentarios negativos sustituyéndolos por ocasiones en que los propios niños puedan descubrir por sí mismos sus fallos y las soluciones posibles, emplear materiales atractivos y fomentar un aprendizaje más basado en la resolución de problemas que en cálculos escritos.

En lo que se refiere a los contenidos curriculares para los niños con DAM, las recomendaciones de Biggs (1985) son las siguientes: 1. dar más importancia a la adquisición de conceptos y la resolución de problemas que a cálculos abstractos, *pero sin descuidar el recuerdo de hechos numéricos* (que, como hemos visto en otro momento, es especialmente difícil para los niños con DAM), 2. planificar las actividades "dando a los niños la oportunidad de experimentar las matemáticas en acción", y aclarando previamente el propósito de cada actividad, 3. emplear periodos de práctica breves pero frecuentes cuando se enseñan conceptos complejos (operaciones, etc.) y 4. proporcionar una experiencia múltiple, mediante formas de representación diversas y materiales variados y motivadores.

En *El pensamiento matemático de los niños* de Barody (1988), se proporcionan también numerosas ilustraciones de cómo los niños con DAM también pueden llegar a descubrir el placer de la experiencia matemática, mediante una enseñanza con un ritmo adecuado, basada en un rico diálogo entre las ideas del niño y las del profesor, y respetuosa con las posibilidades y exigencias cognitivas de los niños. Para que la enseñanza de las matemáticas sea una actividad motivadora y significativa es preciso que su aprendizaje lo sea también. Cada niño puede llegar a vislumbrar las satisfacciones que puede proporcionar la experiencia matemática y que tanto impresionaron a los pitagóricos. Para conseguirlo, es necesario que cada profesor sepa descubrir también cómo es posible comunicar esa experiencia al niño, haciéndole entrar —por muy modestamente que sea— en la secta pitagórica.