UNIVERSIDAD VERACRUZANA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA

# *“PROBLEMAS SELECTOS ESTÁTICA: SISTEMAS EQUIVALENTES Y EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS”*

**MONOGRAFIA**

**Que para obtener el título de:**
**INGENIERO MECÁNICO ELÉCTRICISTA**

**PRESENTA:**
**PAULA GISHE ILLESCAS GARCIA**

**DIRECTOR DE MONOGRAFIA:**
**ING. RODOLFO SOLORZANO HERNANDEZ**

**XALAPA, VER.** **AGOSTO 2011**

**UNIVERSIDAD VERACRUZANA**
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA**

**PROGRAMA ACREDITADO POR EL**
**CONSEJO DE ACREDITACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA, A.C.**

**AL C.**
**PAULA GISHE ILLESCAS GARCIA**
**PASANTE DE LA CARRERA DE**
**INGENIERIA MECANICA ELECTRICA**
**P R E S E N T E.**

EN RELACION A SU SOLICITUD RELATIVA, ME ES GRATO TRANSCRIBIR A USTED A CONTINUACIÓN EL TEMA QUE APROBADO POR EL H. CONSEJO TÉCNICO Y LA DIRECCIÓN DE ESTA FACULTAD QUE PROPUESTO POR ING. RODOLFO SOLORZANO HERNANDEZ PARA QUE LO DESARROLLE CON MODAIDAD DE MONOGRAFIA EN SU EXAMEN PROFESIONAL DE INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA.

**"PROBLEMAS SELECTOS ESTATICA: SISTEMAS EQUIVALENTES Y EQUILIBRIO DE CUERPOS RIGIDOS"**

| | |
|---|---|
| | INTRODUCCION |
| **CAPITULO I** | MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO |
| **CAPÍTULO II** | MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE |
| **CAPITULO III** | PARES |
| **CAPITULO IV** | SISTEMAS EQUIVALENTES |
| **CAPITULO V** | EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES |
| **CAPITULO VI** | EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES |
| | COMENTARIOS FINALES |
| | BIBLIOGRAFIA |

RUEGO A USTEDES TOMAR DEBIDA NOTA QUE DE ACUERDO A LO ESPECIFICADO POR LA LEY DE PROFESIONES EN VIGOR, DEBERAN PRESTAR SERVICIO SOCIAL DURANTE UN TIEMPO MINIMO DE UN AÑO COMO REQUISITO INDIPENSABLE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL.

ATENTAMENTE.

XALAPA, VER A 17 DE AGOSTO DEL 2011.

**ING. MIGUEL A. VELEZ CASTILEJOS**
**SECRETARIO.**

- jcc.

# Índice

# Introducción

En el desarrollo del presente trabajo recepcional se abordan algunos de los temas que se incluyen en el contenido temático de la experiencia educativa estática del plan de estudios 2004 del programa educativo de Ingeniería Mecánica Eléctrica de la Universidad Veracruzana. Dicha experiencia educativa es el primer curso del área de la mecánica y como tal, su objetivo principal debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución unos cuantos principios básicos perfectamente comprendidos.

La mecánica es, esencialmente, una ciencia deductiva que se basa en algunos principios fundamentales; es la base de la mayoría de las ciencias de la ingeniería y es un requisito indispensable para estudiarlas; es una ciencia aplicada. La mecánica puede ser definida como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide tres partes: mecánica de cuerpos rígidos, mecánica de cuerpos deformables y mecánica de fluidos. La mecánica de cuerpos rígidos se subdivide en estática y dinámica; la primera estudia cuerpos en reposo y la segunda en movimiento.

En base a lo anterior, los temas que se desarrollan en este documento corresponden a la estática de cuerpos rígidos y es fundamental para todo estudiante de ingeniería comprenderlos para poder aplicarlos correctamente.

El objetivo del presente trabajo es apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de los cursos de estática, fundamentos de mecánica de materiales, mecánica de materiales y diseño mecánico, en lo que respecta a los conceptos teóricos básicos y aplicaciones correspondientes a sistemas equivalentes y equilibrio de cuerpos rígidos. En el documento se incluye la resolución de 20 problemas.

Capítulo 1

# Momento de una fuerza respecto a un punto

En este capítulo abordaremos el concepto de *momento de una fuerza respecto a un punto,* el cual es más fácil de entender si tomamos como referencia al producto vectorial, o producto cruz, de dos vectores $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$. A partir de dicho producto podemos definir un vector $\boldsymbol{V}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. La línea de acción de $\boldsymbol{V}$ es perpendicular al plano que contiene a los vectores $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.
2. La magnitud de $\boldsymbol{V}$ es $V = PQsen\theta$.
3. La dirección de $\boldsymbol{V}$ se obtiene a partir de la regla de la mano derecha.

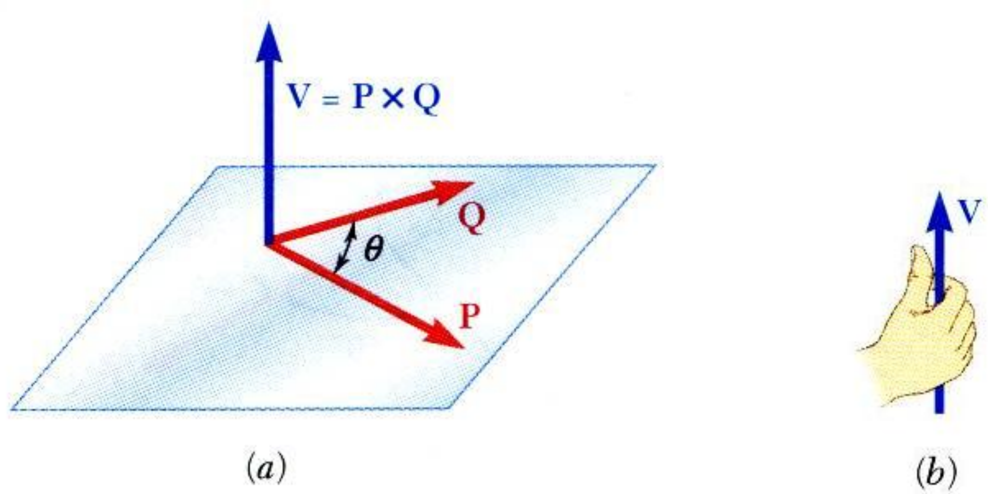



*Figura 1.1*(a) Producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$. (b) Regla de la mano derecha

A continuación en la *figura 1.2* se presenta una breve descripción del producto vectorial de los vectores unitarios cartesianos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = 0$$
$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$$
$$\vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$$
$$\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$$
$$\vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = 0$$
$$\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$$
$$\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$
$$\vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$$
$$\vec{k} \times \vec{k} = 0$$

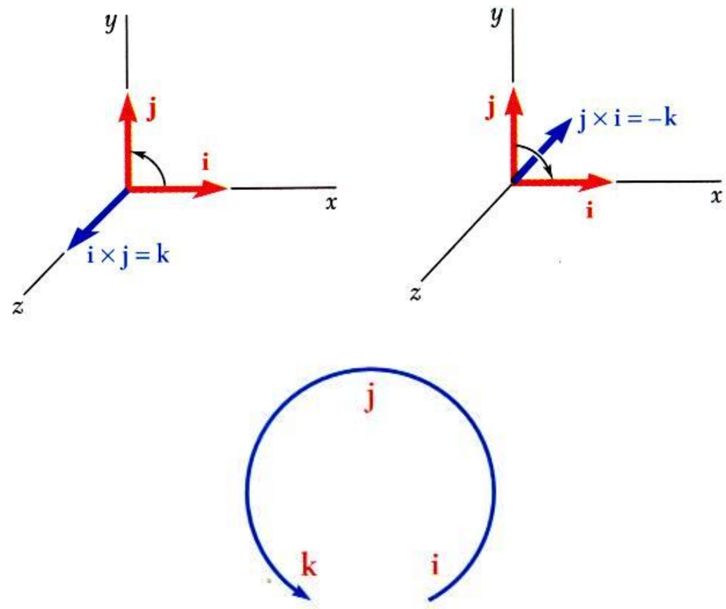


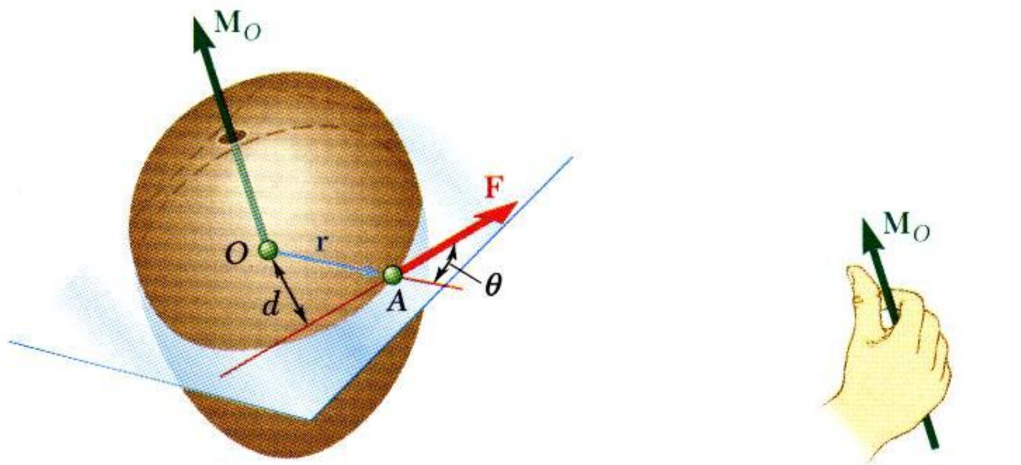

*Figura 1.2* Producto vectorial de los vectores unitarios cartesianos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.

En lo que respecta al producto vectorial $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}$ términos de coordenadas rectangulares, tenemos lo siguiente:

$$\boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \left(P_y Q_z - P_z Q_y\right)\boldsymbol{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z)\boldsymbol{j} + \left(P_x Q_y - P_y Q_x\right)\boldsymbol{k}$$

Un vector fuerza es definido por su magnitud y su dirección. Los efectos que produce sobre un cuerpo rígido también dependen de su punto de aplicación.




(a) (b)

*Figura 1.3* (a) Momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $O$ (b) Regla de la mano derecha

El Momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $O$ es definido como:

$$\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

El vector momento $\boldsymbol{M_O}$ es perpendicular al plano que contiene al punto $O$ y a la fuerza $\boldsymbol{F}$. La magnitud $M_O$ mide la tendencia de la fuerza para provocar la rotación del cuerpo alrededor de un eje a lo largo de $\boldsymbol{M_O}$.

$$M_O = rFsen\theta$$

El sentido del momento puede ser determinado por la regla de la derecha.

Cualquier fuerza $\boldsymbol{F}'$ que tiene la misma magnitud y dirección de $\boldsymbol{F}$, es equivalente si, y sólo si, son iguales (es decir, que tienen la misma magnitud y dirección) y, además, tienen momentos iguales con respecto a un punto $O$.

Muchas aplicaciones tratan con estructuras bidimensionales, es decir, estructuras cuyo espesor es despreciable en comparación con su longitud y su anchura. Observemos la *figura 1.4*, el plano de la estructura contiene al punto $O$ y a la fuerza $\boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{M_O}$, el momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $O$, es perpendicular a dicho plano.

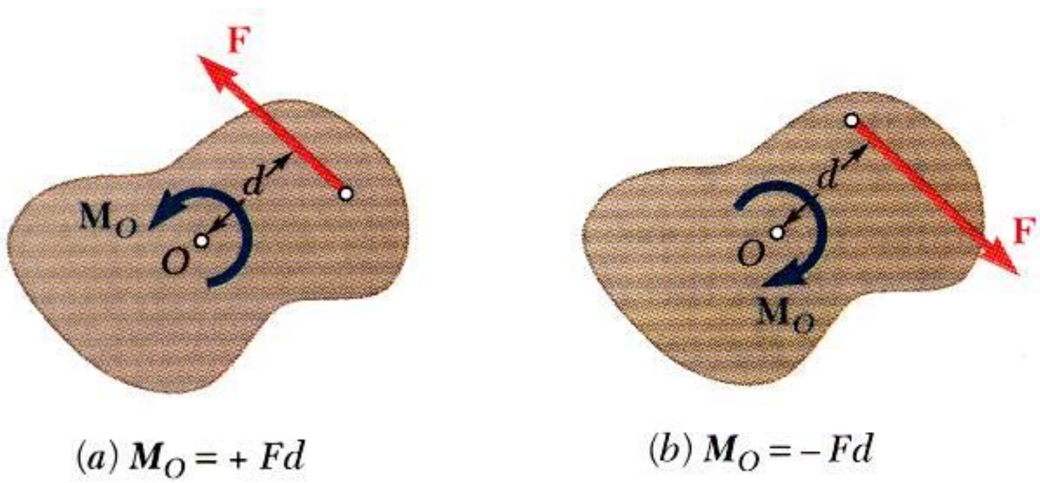



*Figura 1.4* Placa rígida sobre la que actúa una fuerza $\boldsymbol{F}$ (a) $\boldsymbol{M_O}$ en sentido antihorario, el vector momento apunta hacia afuera del plano de la figura. (b) $\boldsymbol{M_O}$ en sentido horario, el vector momento apunta hacia adentro del plano de la figura.

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede emplear para determinar el momento de la resultante de varias *fuerzas concurrentes*. El Teorema de Varignon establece que: "*el momento con respecto a un punto dado $O$ de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto $O$*", véase figura 1.5.

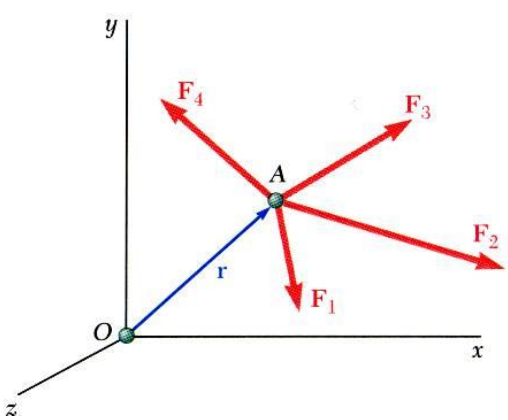
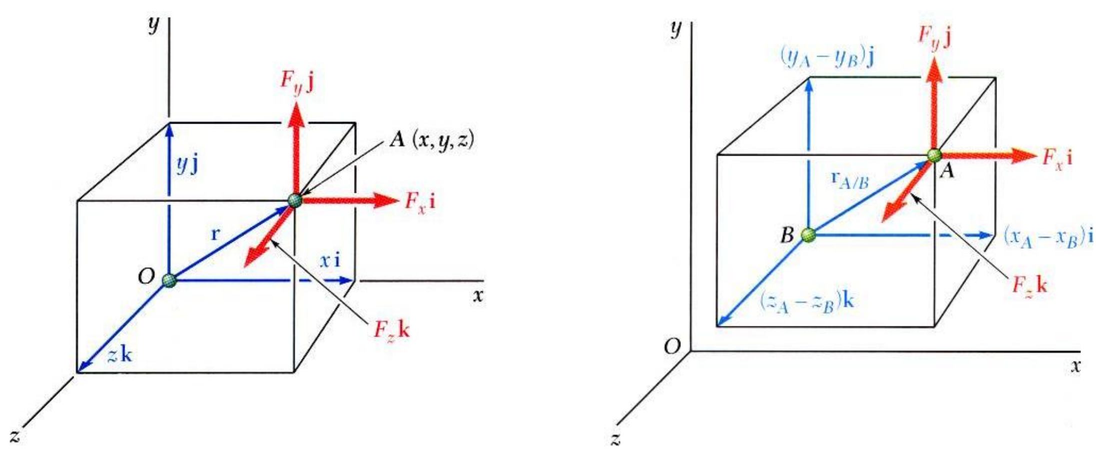



*Figura 1.5* Sistema de fuerzas concurrentes en $A$.

En lo que respecta a las componentes rectangulares del momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $O$, véase *figura 1.6* (a), tenemos lo siguiente:

$$\boldsymbol{M_O} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_O} = \left(yF_z - zF_y\right)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\boldsymbol{k}$$




*(a)* *(b)*

*Figura 1.6 Componentes rectangulares del (a) m*omento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $O$ (b) *m*omento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $B$

De manera similar, las componentes rectangulares del momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $B$, véase *figura 1.6* (b), tenemos:

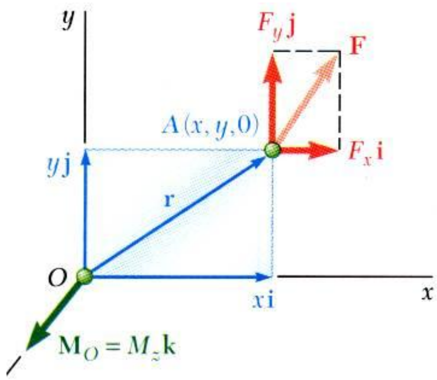
$$\boldsymbol{M_B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix};$$

Tome en cuenta que:

$$r_x = x_A - x_B\,;\; r_y = y_A - y_B \;\text{ y }\; r_z = z_A - z_B$$

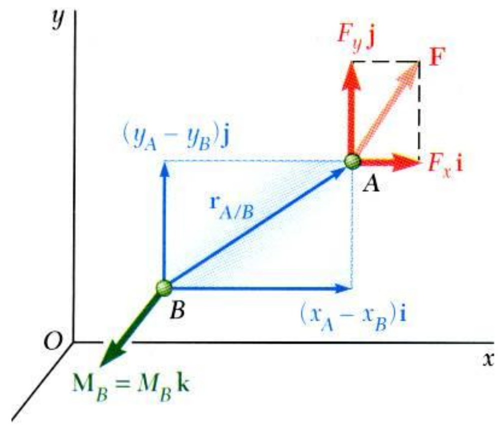
$$\boldsymbol{M_B} = \left(r_yF_z - r_zF_y\right)\boldsymbol{i} + (r_zF_x - r_xF_z)\boldsymbol{j} + \left(r_xF_y - r_yF_x\right)\boldsymbol{k}$$

En general, para estructuras en dos dimensiones, véase *figura 1.7*:




(a)

$$M_O = (xF_y - yF_x)k$$

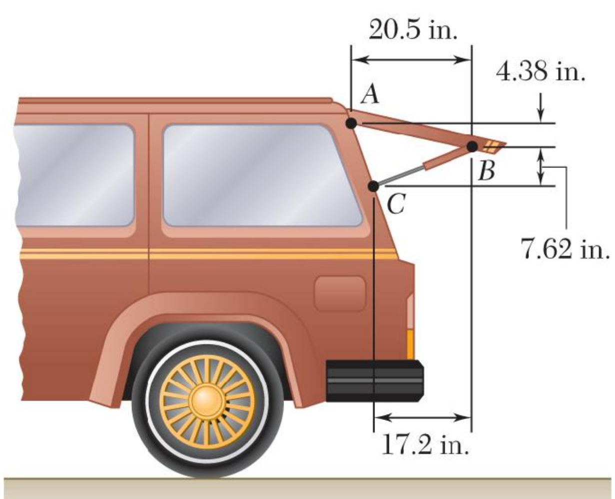



(b)

$$M_B = (r_xF_y - r_yF_x)k$$

*Figura 1.7 Componentes rectangulares del (a) m*omento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $O$ (b) *m*omento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto $B$

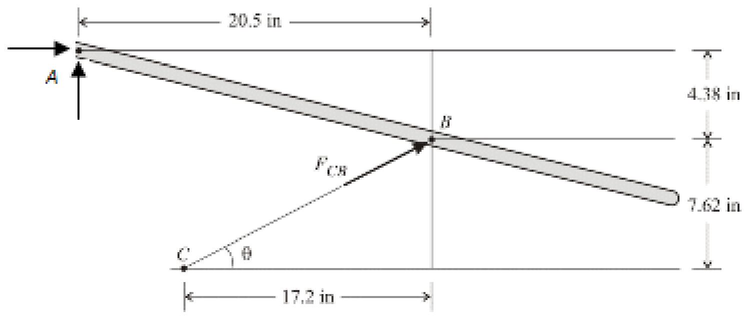
## Problema 1.1




La ventanilla trasera de un automóvil se sostiene mediante el amortiguador *BC* que se muestra en la figura. Si para levantar la ventanilla se ejerce una fuerza de 125 lb cuya línea de acción pasa por el soporte de rótula en *B*, determine el momento de la fuerza alrededor de *A*.

Solución:

Iniciamos con el trazo del diagrama de cuerpo libre de la ventanilla:




A continuación, representaremos a la fuerza que actúa en *B* en forma rectangular, por lo cual previamente tendremos que definir la dirección de dicha fuerza a partir de la geometría de la figura:

$$d_{\boldsymbol{CB}} = \sqrt{(17.2\ in)^2 + (7.62\ in)^2} = 18.81\ in$$

$$cos\theta = \frac{17.2\ in}{18.81\ in}\ ;\ sen\theta = \frac{7.62\ in}{18.81\ in}$$

$$\boldsymbol{F_{CB}} = F_{CB}cos\theta\boldsymbol{i} + F_{CB}sen\theta\boldsymbol{j},\ \ F_{CB} = 125\ lb$$

$$\boldsymbol{F_{CB}} = \frac{125\ lb}{18.81\ in}[(17.2\ in)\boldsymbol{i} + (7.62\ in)\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{F_{CB}} = (114.3\ lb)\boldsymbol{i} + (50.64\ lb)\boldsymbol{j}$$

El *radio vector* o *vector de posición* es que va desde el punto *A* al punto *B*, en el cual actúa la fuerza $\boldsymbol{F_{CB}}$:

$$\boldsymbol{r_{AB}} = (20.5\ in)\boldsymbol{i} - (4.38\ in)\boldsymbol{j}$$

El momento de la fuerza $\boldsymbol{F_{CB}}$ con respecto al punto *A*, queda expresado como:

$$\boldsymbol{M_A} = \left(r_xF_y - r_yF_x\right)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M_A} = [(20.5\ in)(50.64\ lb) - (-4.38\ in)(114.3\ lb)]\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M_A} = [1{,}038.12\ lb \cdot in + 500.634\ lb \cdot in]\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M_A} = [1{,}538.754\ lb \cdot in]\boldsymbol{k}$$

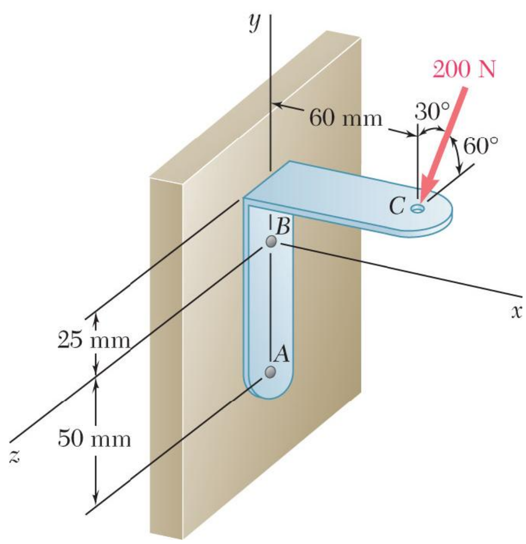
Sabiendo que $1\ ft = 12\ in$, podemos expresar el momento calculado en $lb \cdot ft$:

$$\boldsymbol{M_A} = \left[(1{,}538.754\ lb \cdot in)\left(\frac{1\ ft}{12\ in}\right)\right]\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M_A} = (128.23\ lb \cdot ft)\boldsymbol{k}$$

La magnitud del momento de la fuerza alrededor del punto *A* es $M_A = 128.23\ lb \cdot ft$; el signo positivo indica, según la regla de la mano derecha, que la tendencia de rotación del momento es en el sentido antihorario (*CCW*).

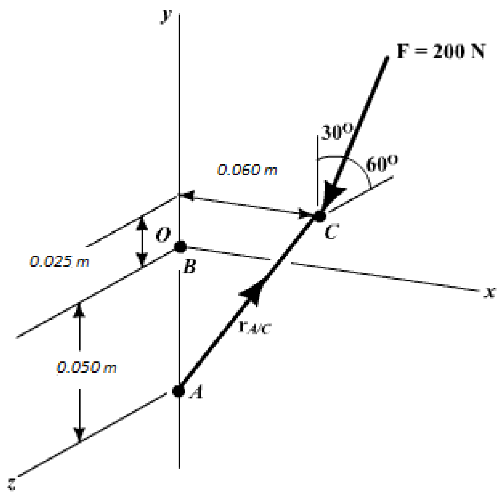
## Problema 1.2




Se aplica una fuerza de 200 N sobre la ménsula *ABC*, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza alrededor de *A*.

Solución:

En relación a la fuerza que actúa en C, se nos indican los valores de la magnitud de la fuerza y los ángulos, $F = 200\ N$, $\theta_y = 30°$ y $\theta_z = 60°$.




Ahora, en el diagrama se muestra la acción de la fuerza sobre la ménsula. Las componentes rectangulares de la fuerza pueden expresarse como:

$$F_y = -F cos\theta_y \qquad F_z = F cos\theta_z$$

$$F_y = -(200\ N)cos30° \qquad F_z = (200\ N)\cos 60°$$

$$F_y = -173.21\ N \qquad F_z = 100\ N$$

Ahora, representamos la fuerza en forma rectangular:

$$\boldsymbol{F} = (-173.21\ N)\boldsymbol{j} + (100\ N)\boldsymbol{k}$$

El radio vector de que va desde el punto *A* hasta *C*, lo definimos al restar a las coordenadas de *C* las coordenadas de *A*.

$A(0, -0.50, 0)$ $\qquad \boldsymbol{r_{AC}} = [(0.060 - 0)\boldsymbol{i} + (0.025 - (0 - (-0.050)))\boldsymbol{j} + (0 - 0)\mathbf{k}]\ m$

$C(0.60, 0.25, 0)$ $\qquad \boldsymbol{r_{AC}} = [0.060\boldsymbol{i} + 0.075\boldsymbol{j}]\ m$

Y por último, calculamos el momento de la fuerza alrededor de A, mediante la aplicación del producto vectorial:

$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{r_{AC}} \times \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{M_A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0.060 & 0.075 & 0 \\ 0 & -173.21 & 100 \end{vmatrix} =$$

$$\boldsymbol{M_A} = \big[\big((0.075)(100) - (0)(-173.21)\big)\boldsymbol{i} + \big((0)(0) - (0.060)(100)\big)\boldsymbol{j} + \big((0.060)(-173.21) - (0.075)(0)\big)\boldsymbol{k}\big] =$$

$$\boldsymbol{M_A} = [7.5\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 10.39\boldsymbol{k}]N \cdot m$$

Capítulo 2

# Momento de una fuerza respecto a un eje

Antes de entrar formalmente con el *concepto de momento de una fuerza con respecto a un eje*, será necesario describir un par de productos de vectores, el *producto escalar* (de dos vectores) y el *producto triple mixto (de tres vectores)*, que vamos a aplicar en esta sección.

El *producto escalar* o *producto punto* de dos vectores $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ se define como:

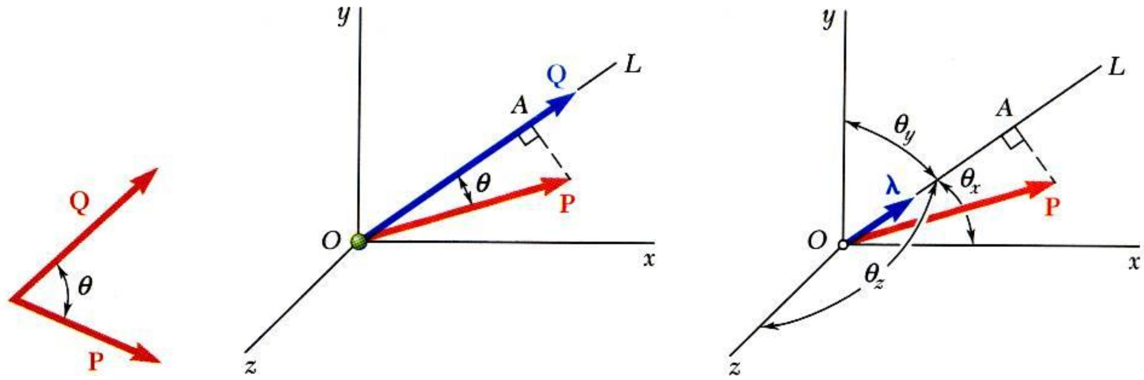
$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = PQcos\theta$$ , el resultado es un escalar.

A partir de las componentes rectangulares, se define como:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = (P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z)$$

El *producto escalar* puede aplicarse para calcular el ángulo entre dos vectores, *figura 2.1(a)*, definiendo el coseno del ángulo $\theta$ que forman como:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q}}{PQ} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$




*(a)* *(b)* *(c)*

*Figura 2.1* Aplicaciones del producto escalar

Aplicando el producto escalar, podemos obtener la proyección de un vector a lo largo de un eje $OL$ dado, *figura 2.1(b)*, a partir de lo siguiente:

Sea $P_{OL} = Pcos\theta$, la proyección del vector $\boldsymbol{P}$ a lo largo del eje $OL$, entonces:

$$P_{OL} = \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q}}{Q}$$

En el caso particular, cuando el vector seleccionado a lo largo de $OL$ es el *vector unitario* $\boldsymbol{\lambda}$ (*figura 2.1(c)*), se escribe:

$$P_{OL} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

Al descomponer a $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ en sus componentes rectangulares y tomando en cuenta que las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de $OL$, la proyección $P_{OL}$ se expresa como:

$$P_{OL} = P_x cos\theta_x + P_y cos\theta_y + P_z cos\theta_z$$

En donde $\theta_x$, $\theta_y$ y $\theta_z$ representan los ángulos que el eje $OL$ forma con los ejes coordenados.

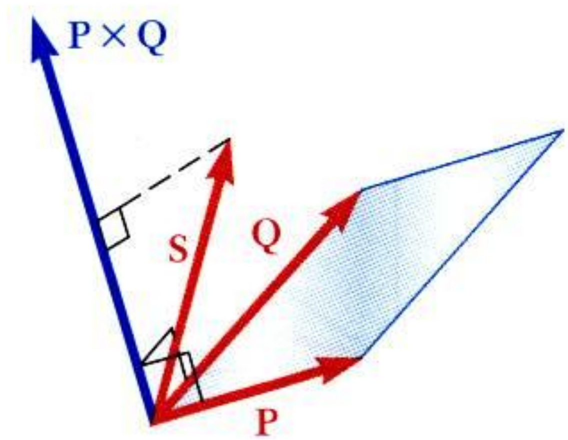



*Figura 2.2* Producto triple escalar o producto triple mixto de tres vectores

El *producto triple escalar* o *producto tiple mixto* de tres vectores $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ se define como la expresión escalar:

$$\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

El *producto triple escalar* es igual en valor absoluto al volumen de un paralelepípedo (*figura 2.3*) que tiene por lados los vectores $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.

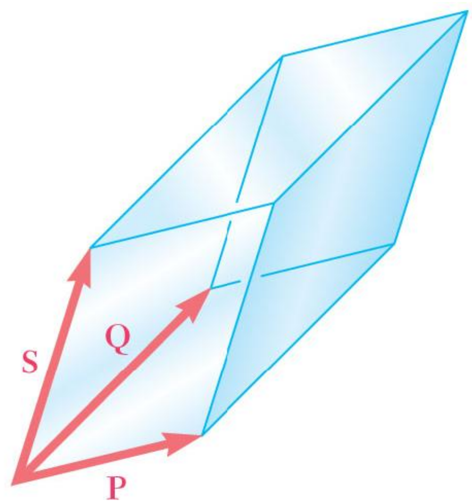



*Figura 2.3* Paralelepípedo que tiene por lados los vectores $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.

Una vez descritos los productos de vectores, *escalar* y t*riple escalar,* podemos abordar el concepto *momento de una fuerza con respecto a un eje*, el cual puede definirse como una medida de la tendencia de una fuerza de impartirle al cuerpo rígido sobre el cual actúa un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo.

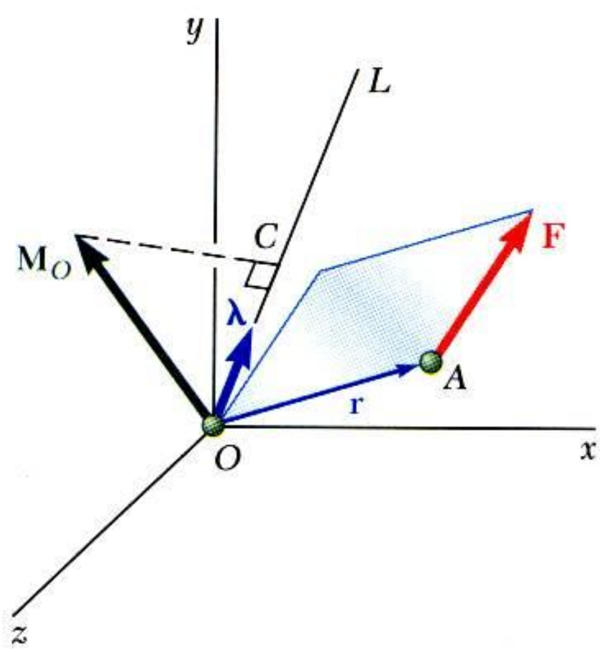



*Figura 2.4*

Consideremos la *figura 2.4*, el momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ que actúa en $A$ con respecto a $O$ está dado por:

$$\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Sea $OL$ un eje a través de $O$; el momento $M_{OL}$ de con respecto a $OL$ se define como la proyección $OC$ del momento $\boldsymbol{M_O}$ sobre el eje $OL$. Representando al vector unitario a lo largo de $OL$ como $\boldsymbol{\lambda}$, tenemos**:**

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$$

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

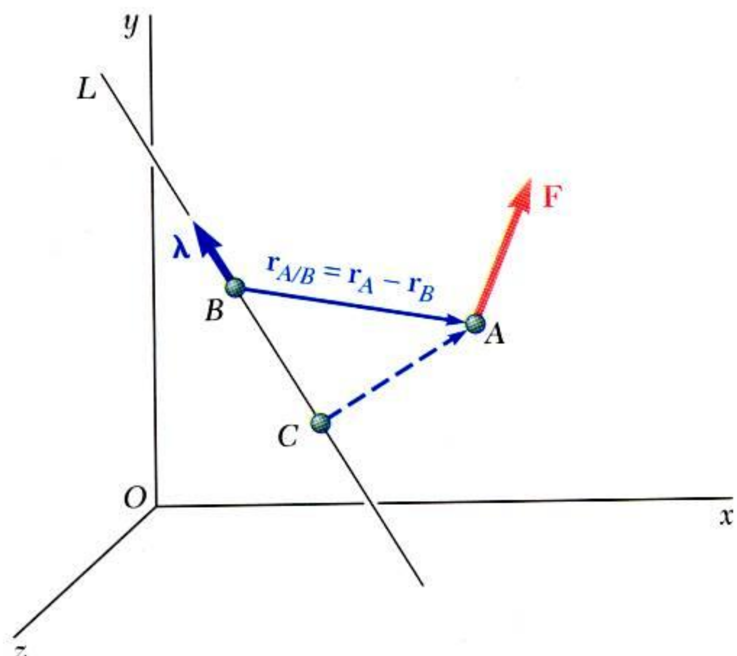



*Figura 2.5*

En general, el momento de una fuerza $\boldsymbol{F}$ aplicada en $A$ con respecto a un eje que no pasa por el origen, se obtiene seleccionando un punto arbitrario $B$ sobre dicho eje (*figura 2.5)* y determinando la proyección sobre el eje $BL$ del momento $\boldsymbol{M_B}$ de $\boldsymbol{F}$ con respecto a $B$, es decir:

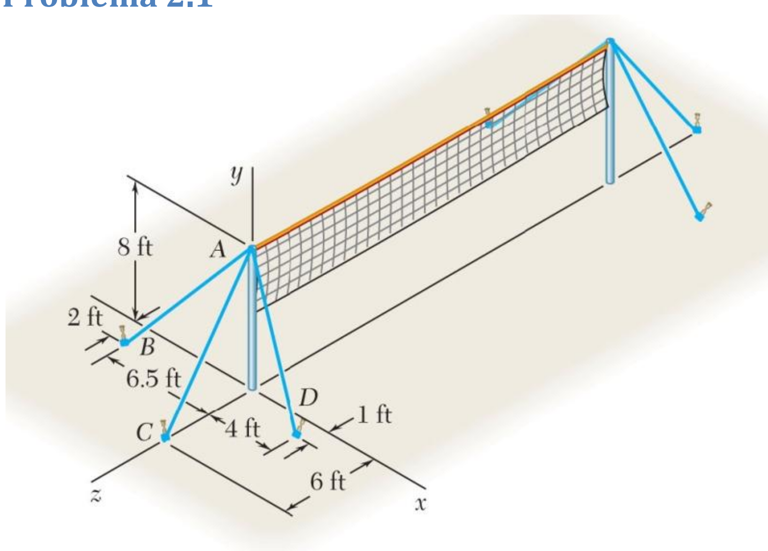
$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{r_{BA}} \times \boldsymbol{F})$$

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

En donde:

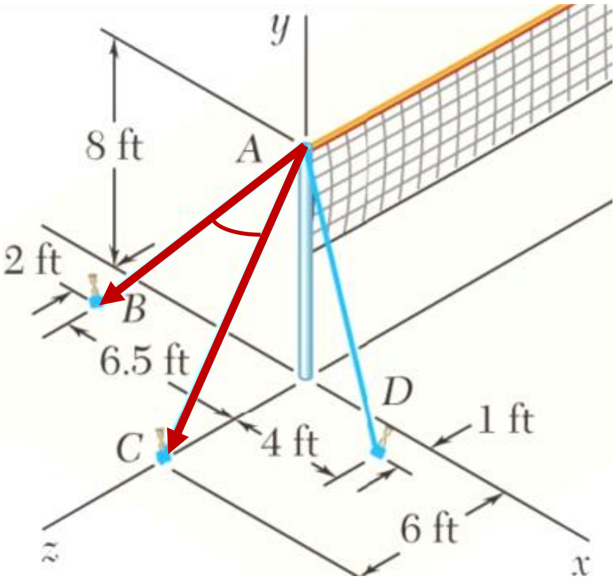
$$r_x = x_A - x_B \,;\; r_y = y_A - y_B \text{ y } r_z = z_A - z_B$$

## Problema 2.1




Determine el ángulo formado por los tirantes *AB* y *AC* de la red de voleibol que se muestra en la figura.

Solución:




En la figura se indican los vectores $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$; a partir de las coordenadas de los puntos $A$, $B$ y $C$ podemos determinar sus componentes rectangulares y sus respectivas magnitudes:

$$A(0,8,0)$$

$$B(6.5,0,2)$$

$$C(0,0,6)$$

$$\boldsymbol{AB} = (6.5\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})ft$$

$$AB = \sqrt{6.5^2 + (-8)^2 + 2^2}ft = 10.5\ ft$$

$$\boldsymbol{AC} = (-8\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k})ft$$

$$AC = \sqrt{((-8)^2 + 6^2}ft = 10\ ft$$

El ángulo formado por los dos vectores puede ser calculado usando la expresión:

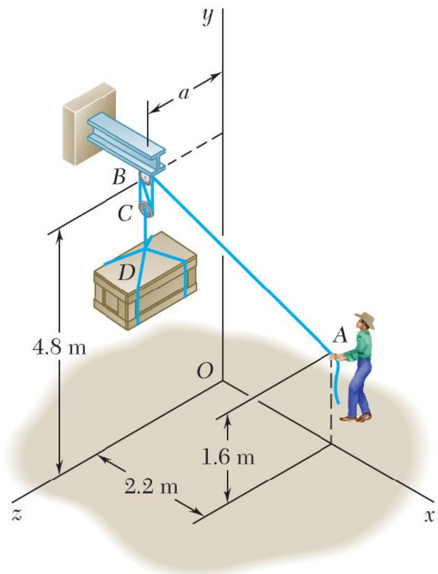
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{AC}}{(AB)(AC)} = \frac{(6.5)(0) + (-8)(-8) + (2)(6)}{(10.5)(10)}$$

$$\cos\theta = 0.7238$$

$$\theta = arc\cos(0.7238) = 43.63°$$

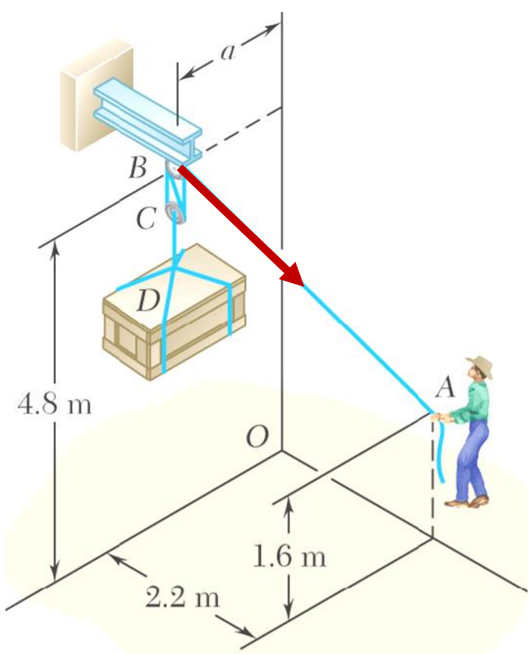
$$\theta = 43.63°$$

## Problema 2.2




Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto y los sujeta a la parte inferior de la viga I mediante el gancho *B*. Si se sabe que los momentos, de los ejes *y* y *z*, de la fuerza ejercida en B por el tramo *AB* de la cuerda son, respectivamente, de 120 N•m y -460 N•m, determine la distancia *a*.

Solución:




A partir de la figura, obtenemos las coordenadas de los puntos $A$ y $B$:

$$A(2.2, 1.6, 0)$$

$$B(0, 4.8, a)$$

En la figura se muestra el vector fuerza que ejerce el hombre, e cual podemos definir de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{F_{BA}} = F_{BA}\boldsymbol{\lambda_{BA}}$$

$$\boldsymbol{F_{BA}} = F_{BA}\frac{2.2\boldsymbol{i} - 3.2\boldsymbol{j} - a\boldsymbol{k}}{\sqrt{2.2^2 + (-3.2)^2 + (-a)^2}}$$

$$\boldsymbol{F_{BA}} = F_{BA}\frac{2.2\boldsymbol{i} - 3.2\boldsymbol{j} - a\boldsymbol{k}}{\sqrt{15.08 + a^2}}$$

El momento de la fuerza respecto al *eje y* se define como:

$$M_{eje\ y} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4.8 & a \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 4.8 \\ F_x & F_y \end{matrix}$$

$$M_{eje\ y} = aF_x$$

$$120 = \left[\frac{2.2F_{BA}}{\sqrt{15.08 + a^2}}\right] a$$

Sustituyendo, calculamos la distancia $a$:

$$120 = (95.833)a$$

$$a = 1.252\ m$$

El momento de la fuerza respecto al *eje z* se define como:

$$M_{eje\ z} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4.8 & a \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 4.8 \\ F_x & F_y \end{matrix}$$

$$M_{eje\ z} = -4.8F_x$$

$$-460 = \frac{(-4.8)2.2F_{BA}}{\sqrt{15.08 + a^2}}$$

$$\frac{2.2F_{BA}}{\sqrt{15.08 + a^2}} = 95.833$$

## Capítulo 3

# Pares

Dos fuerzas $\boldsymbol{F}$ y $-\boldsymbol{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un *par* (*figura 3.1*). Note que la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Las dos fuerzas no producirán traslación del cuerpo sobre el cual estén actuando pero si tenderán a hacerlo rotar.

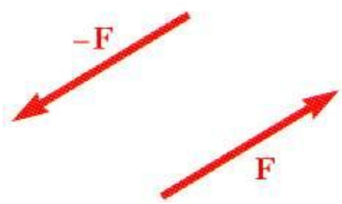



*Figura 3.1* Par de fuerzas

Observemos la *figura 3.2(a),* en la cual se muestran los puntos de aplicación de las fuerzas $\boldsymbol{F}$ y $-\boldsymbol{F}$, definidos por los vectores de posición $\boldsymbol{r_A}$ y $\boldsymbol{r_B}$ , respectivamente. La suma de los momentos de estas dos fuerzas con respecto a $O$ es:

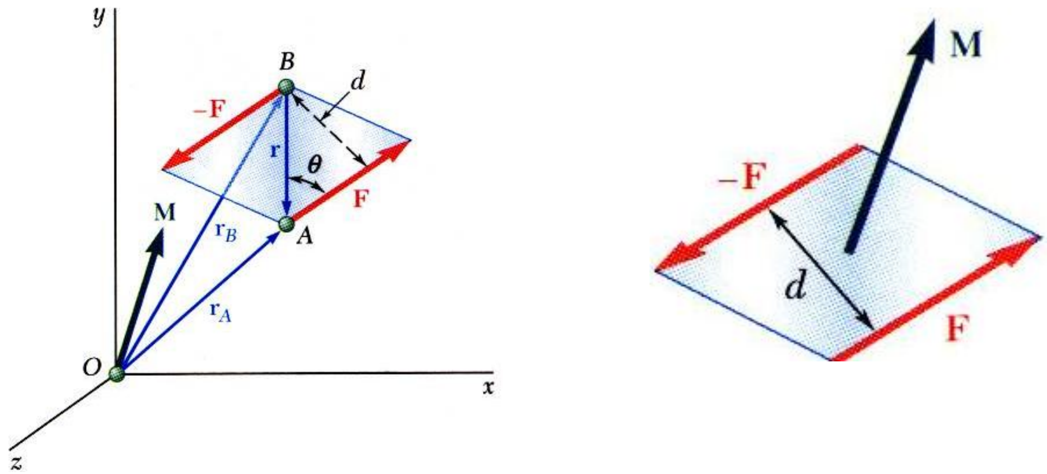
$$[\boldsymbol{r_A} \times \boldsymbol{F}] + [\boldsymbol{r_B} \times (-\boldsymbol{F})] = (\boldsymbol{r_A} - \boldsymbol{r_B}) \times \boldsymbol{F}$$

En la ecuación anterior, $\boldsymbol{r_A} - \boldsymbol{r_B}$ define al vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, es decir:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_A} - \boldsymbol{r_B}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que la suma de los momentos de $\boldsymbol{F}$ y $-\boldsymbol{F}$, con respecto a $O$ está representado por el vector:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$




*(a)* *(b)*

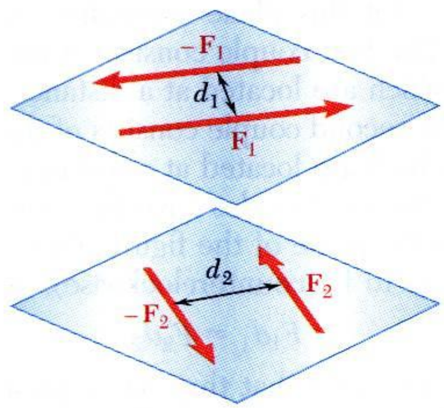
*Figura 3.2* Momento de un par

Al vector $\boldsymbol{M}$, figura 3.2(b), se le conoce como el *momento del par*, el cual es un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas; su magnitud está dada por:

$$M = rFsen\theta = Fd$$

En donde, la distancia $d$ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de $\boldsymbol{F}$ y $-\boldsymbol{F}$. El sentido de $\boldsymbol{M}$ está definido por la regla de la mano derecha.

Debido a que el vector $\boldsymbol{r}$, véase *figura 3.2(a)*, es independiente al punto de referencia u origen $O$ de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de las fuerzas $\boldsymbol{F}$ y $-\boldsymbol{F}$ se hubieran calculado con respecto a otro punto cualquiera. Por lo anterior, podemos establecer que el *momento de un par* es un *vector libre* que puede ser aplicado en cualquier punto y el efecto es el mismo.




$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

*Figura 3.3* Pares iguales

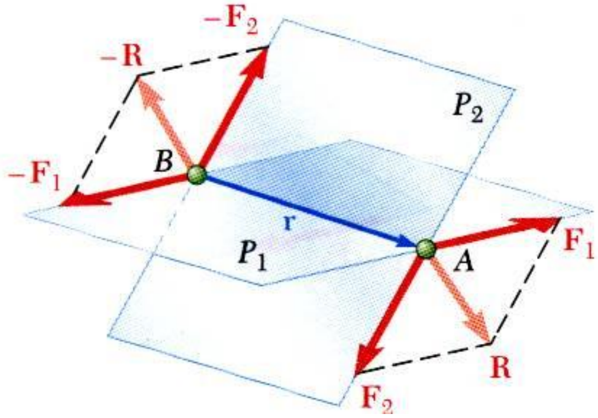
Dos pares (*figura 3.3*), uno constituido por las fuerzas $\boldsymbol{F_1}$ y $-\boldsymbol{F_1}$, y el otro por las fuerzas $\boldsymbol{F_2}$ y $-\boldsymbol{F_2}$, tendrán momentos iguales si y solo si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano), tienen el mismo sentido y, obviamente, la misma magnitud.

Dos pares que tienen el mismo momento $\boldsymbol{M}$ son equivalentes.

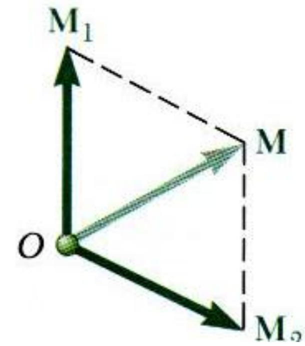
A continuación, consideremos la intersección de dos planos $P_1$ y $P_2$, cada uno en con un par, como se indican en la *figura 3.4(a).*

$$\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_1} \text{ en el plano } P_1$$

$$\boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_2} \text{ en el plano } P_2$$




(a)




(b)

*Figura 3.4* Adición o suma de pares

Sean $\boldsymbol{R}$ la resultante de $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$, y $-\boldsymbol{R}$ la resultante de $-\boldsymbol{F_1}$ y $-\boldsymbol{F_2}$.Observe que $\boldsymbol{R}$ y $-\boldsymbol{R}$ forman un par que queda puede expresarse como:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2})$$

Por el teorema de Varignon, podemos concluir que la suma de dos pares es un par igual a la suma vectorial de éstos, *figura 3.4(b)*, es decir:

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_1}) + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_2}) = \boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2}$$

Un par puede ser representado por un vector con magnitud y dirección igual al momento del par (*figura 3.5*).

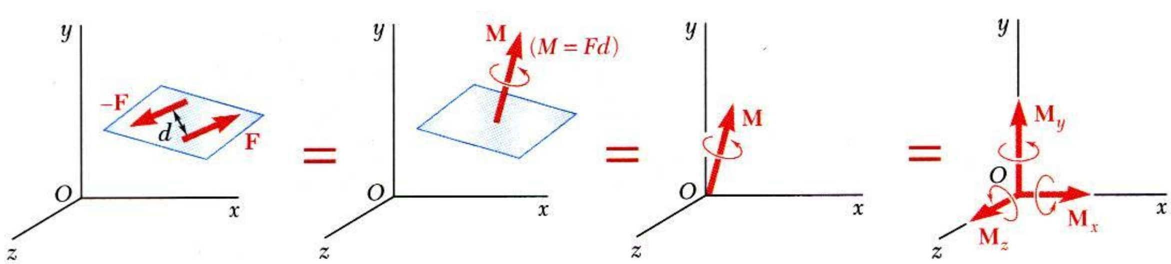



*Figura 3.5*

Los pares obedecen la ley del paralelogramo para la adición de vectores. El vector que representa a un par recibe el nombre de *vector de par* y éste como el *vector de un par*, es un *vector libre.*

Un vector fuerza $\boldsymbol{F}$ no puede ser trasladado simplemente de su punto de aplicación a otro que no esté sobre su línea de acción sin modificar su efecto sobre el cuerpo rígido. Observemos la *figura 3.6*.

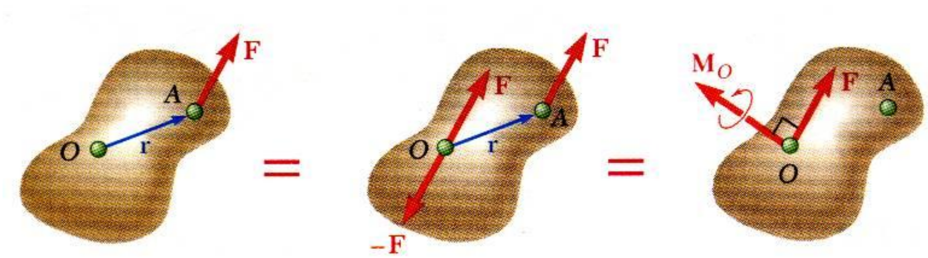



*Figura 3.6* Sistema fuerza-par equivalente en $O$

Podemos colocar en el punto $O$ dos fuerzas $\boldsymbol{F}$ y $-\boldsymbol{F}$, sin modificar el efecto de la fuerza original sobre el cuerpo rígido. En consecuencia, las fuerzas $\boldsymbol{F}$**,** que actúa en el punto $A$, y $-\boldsymbol{F}$ que se coloco en el punto $O$ forman un par con un momento $\boldsymbol{M_O}$.

$$\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

En base a lo anterior, podemos establecer que en la *figura 3.6*, el diagrama de la derecha es el *sistema equivalente fuerza-par* en $O$ de la fuerza que actúa en el punto $A$ de la imagen a la izquierda.

Si fuera necesario trasladar a la fuerza de su punto de aplicación $A$ a un punto $O'$ diferente a $O$ (*figura 3.7*), se tendría que calcular el momento $\boldsymbol{M_{O'}}$ de $\boldsymbol{F}$ con respecto a $O'$.

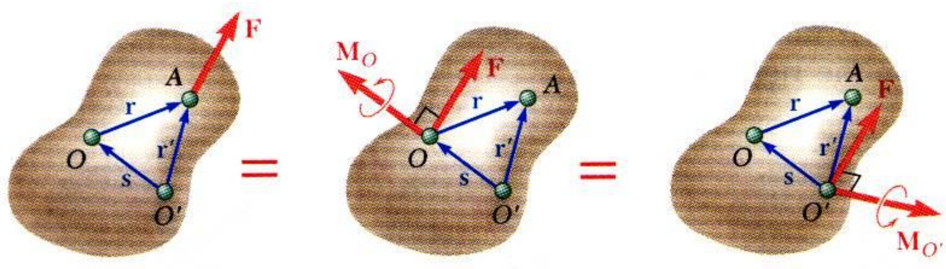
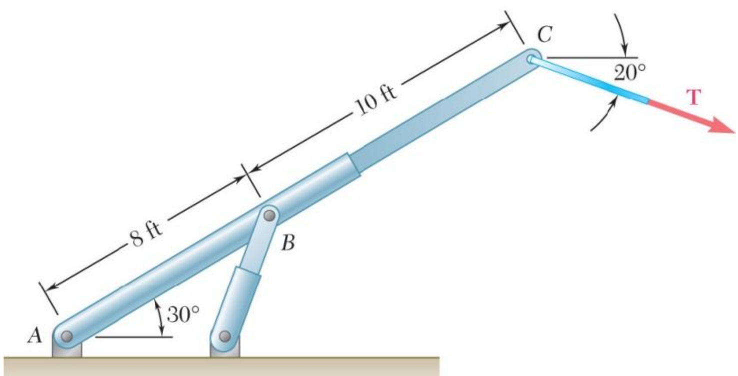



*Figura 3.7* Sistema fuerza-par equivalente en $O'$

$$\boldsymbol{M_{O'}} = \boldsymbol{r'} \times \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) \times \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{M_{O'}} = \boldsymbol{M_O} + (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{F})$$

## Problema 3.1




La tensión en el cable unido al extremo *C* de un aguilón ajustable *ABC* es de 560 lb. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en *C* por un sistema equivalente fuerza-par en a) en *A* y b) en *B*.

Solución:

Se sabe que la tensión en el cable tiene una magnitud $T = 560\ lb$ y su dirección está dada por $\theta = 20°$ por debajo del eje horizontal. Podemos determinar sus componentes horizontal y vertical de la manera:

$$T_x = T cos\theta$$

$$T_x = (560\ lb) cos 20°$$

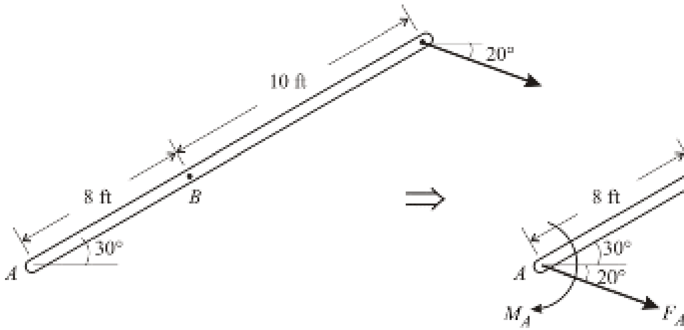
$$T_x = 526.228\ lb\ \rightarrow$$

$$T_y = T sen\theta$$

$$T_y = (560\ lb) sen 20°$$

$$T_y = 191.531\ lb\ \downarrow$$

a) Sistema equivalente fuerza par en $A$:




El momento $M_A$ puede calcularse a partir de la suma del momento de las componentes con respecto al punto $A$; ambas componentes producen un par en sentido horario (CW):

$$M_A = T_x d_{AC} sen30° + T_y d_{AC} cos30°$$

$$M_A = (526.228\ lb)(18\ ft)sen30° + (191.531\ lb)(18\ ft)cos30°$$

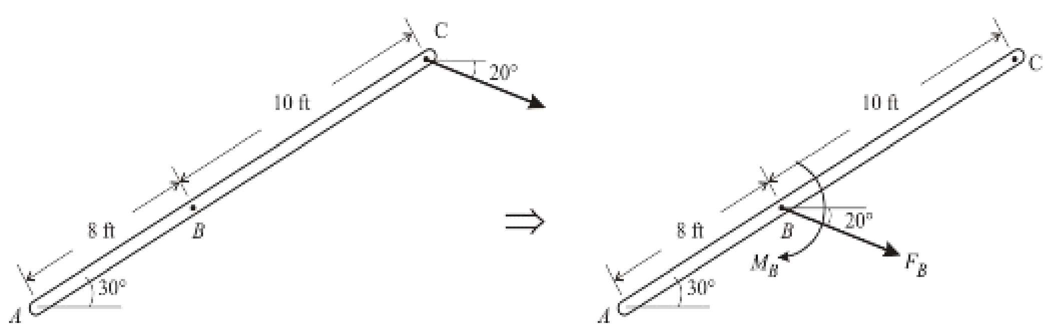
$$M_A = 7{,}721.725\ lb \cdot ft$$

Podemos concluir este inciso indicando que el sistema equivalente fuerza-par en $A$ está formado por:

$$F_A = 560\ lb\ \measuredangle -20°$$

$$M_A = 7{,}721.725\ lb \cdot ft\ \circlearrowright$$

b) Sistema equivalente fuerza par en $B$:



De manera similar al inciso anterior, el momento $M_B$ puede calcularse a partir de la suma del momento de las componentes con respecto al punto $B$; ambas componentes producen un par en sentido horario (CW):

$$M_B = T_x d_{BC} sen30° + T_y d_{BC} cos30°$$

$$M_B = (526.228\ lb)(10\ ft)sen30° + (191.531\ lb)(10\ ft)cos30°$$

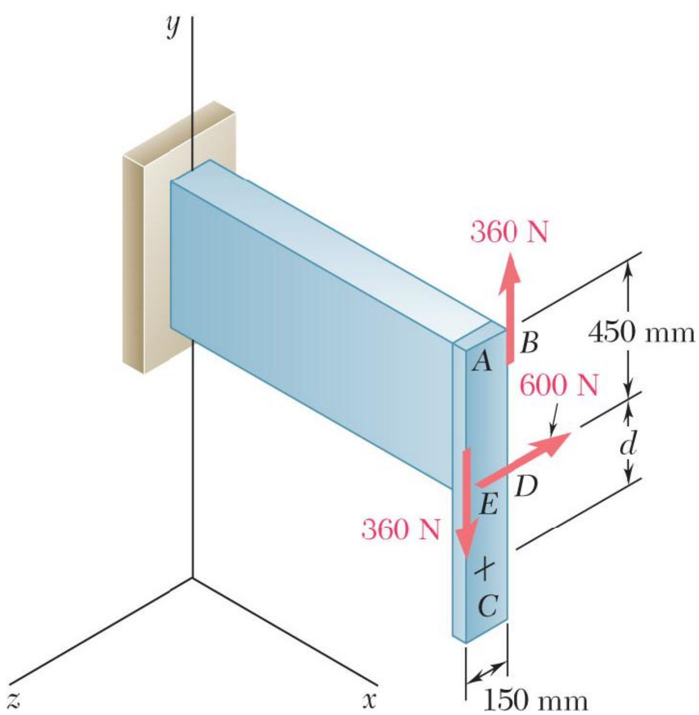
$$M_B = 4{,}289.847\ lb \cdot ft$$

Podemos concluir este inciso indicando que el sistema equivalente fuerza-par en $B$ está formado por:

$$F_B = 560\ lb\ \ \measuredangle -20°$$

$$M_B = 4{,}289.847\ lb \cdot ft\ \ \circlearrowright$$

## Problema 3.2




Una fuerza y un par se aplican al extremo de una viga en voladizo como se muestra en la figura. a) Reemplace este sistema por una sola fuerza ***F*** aplicada en el punto *C*, y determine la distancia *d* desde *C* hasta una línea que pasa por los puntos *D* y *E*. b) Resuelva el inciso a) suponiendo que se intercambian las direcciones de las dos fuerzas de 360 N.

Solución:

a) La fuerza $\boldsymbol{F}$ aplicada en $C$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{F} = (360\boldsymbol{j} - 360\boldsymbol{j} - 600\boldsymbol{k})N$$

$$\boldsymbol{F} = (-600\ N)\boldsymbol{k}$$

Para reemplazar el sistema de fuerzas por una sola fuerza $\boldsymbol{F} = (-600\ N)\boldsymbol{k}$ actuando en $C$, *par* $M_C$ debe igual a cero, es decir:

$$M_C = 0$$

Por lo tanto:

$$(360\ N)(0.15\ m) - (600\ N)d = 0$$

$$54\ N \cdot m = (600\ N)d$$

$$d = \frac{54\ N \cdot m}{600\ N}$$

$d = 0.09\ m = 90\ mm$, distancia por debajo de la línea $ED$

b) Ahora, la dirección de las fuerzas de $360\ N$ se intercambian, por lo cual el par que producen invierte su sentido. La fuerza actuando en $C$ es la misma, es decir, $\boldsymbol{F} = (-600\ N)\boldsymbol{k}$, y de la misma forma el *par* $M_C$ debe igual a cero.

Por lo tanto:

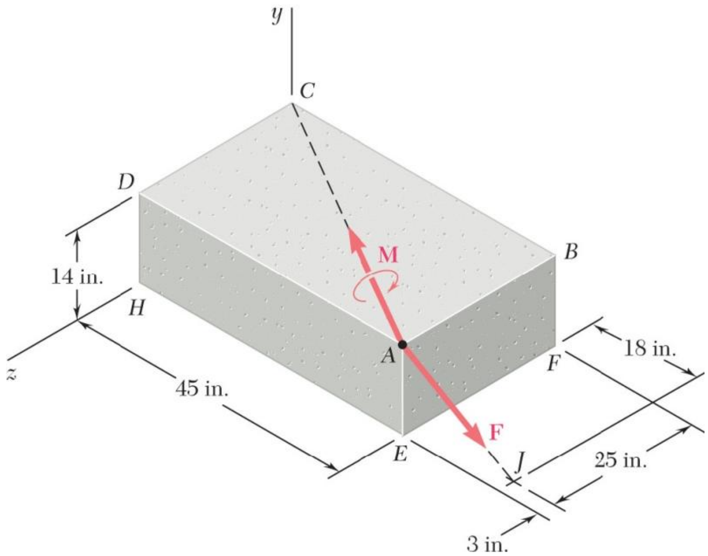
$$-(360\ N)(0.15\ m) - (600\ N)d = 0$$

$$-54\ N \cdot m = (600\ N)d$$

$$d = \frac{-54\ N \cdot m}{600\ N} = -0.09\ m = -90\ mm$$

$d = 0.09\ m = 90\ mm$, distancia por arriba de la línea $ED$

## Problema 3.3




Una fuerza ***F*** de 46 lb y una par ***M*** de 2,120 lb•in, se aplican a la esquina *A* del bloque mostrado en la figura. Reemplace el sistema fuerza-par dado por un sistema equivalente fuerza-par en la esquina *H*.

Solución:

De la figura del problema podemos obtener las coordenadas de los puntos que utilizaremos para definir la dirección de los vectores fuerza $\boldsymbol{F}$ y par $\boldsymbol{M}$, además del vector de posición $\boldsymbol{r_{HA}}$:

Coordenadas (en $in$):

$A(45,14,28)$

$C(0,14,0)$

$H(0,0,28)$

$J(63,0,25)$

Vectores unitarios $\boldsymbol{\lambda_{AJ}}$ y $\boldsymbol{\lambda_{AC}}$:

$$\boldsymbol{\lambda_{AJ}} = \frac{18\boldsymbol{i} - 14\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{18^2 + (-14)^2 + (-3)^2}} = \frac{18\boldsymbol{i} - 14\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}}{23}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{AC}} = \frac{-45\boldsymbol{i} - 28\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-45)^2 + (-28)^2}} = \frac{-45\boldsymbol{i} - 28\boldsymbol{k}}{53}$$

Vector de posición $\boldsymbol{r_{HA}}$:

$$\boldsymbol{r_{HA}} = (45\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j})in$$

Conociendo la magnitud de los vectores fuerza $\boldsymbol{F}$ y par $\boldsymbol{M}$, además de los vectores unitarios que definen sus direcciones, tenemos que:

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{\lambda_{AJ}} = (46\ lb)\frac{18\boldsymbol{i} - 14\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}}{23} = (36\boldsymbol{i} - 28\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k})lb$$

$$\boldsymbol{M} = F\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{AC}} = (2{,}120\ lb \cdot in)\frac{-45\boldsymbol{i} - 28\boldsymbol{k}}{53} = (-1{,}800\boldsymbol{i} - 1{,}120\boldsymbol{k})lb \cdot in$$

El sistema equivalente fuerza-par en $H$ se conformará por los siguientes vectores:

$$\boldsymbol{F_H} = \boldsymbol{F} = (36\boldsymbol{i} - 28\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k})lb$$

$$\boldsymbol{M_H} = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{r_{HA}} \times \boldsymbol{F}) = (-1{,}800\boldsymbol{i} - 1{,}120\boldsymbol{k})lb \cdot in + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 45 & 14 & 0 \\ 36 & -28 & -6 \end{vmatrix} lb \cdot in$$

$$\boldsymbol{M_H} = (-1{,}800\boldsymbol{i} - 1{,}120\boldsymbol{k} - 84\boldsymbol{i} - 1{,}260\boldsymbol{k} - 504\boldsymbol{k} + 270\boldsymbol{j})lb \cdot in$$

$$\boldsymbol{M_H} = (-1{,}884\boldsymbol{i} + 270\boldsymbol{j} - 2{,}884\boldsymbol{k})lb \cdot in = (-157\boldsymbol{i} + 22.5\boldsymbol{j} - 240.333\boldsymbol{k})lb \cdot ft$$

## Capítulo 4

# Sistemas equivalentes de fuerza

Cualquier *sistema de fuerzas*, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un *sistema equivalente fuerza-par* que actúa en un punto dado $O$ (figura 4.1).

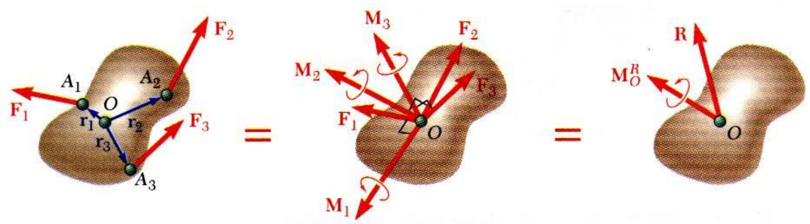



*Figura 4.1*

El sistema equivalente fuerza-par está definido por las ecuaciones:

$$\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F} \qquad \boldsymbol{M}_O^R = \Sigma \boldsymbol{M}_O = \Sigma(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$$

Una vez que un *sistema de fuerzas* dado se ha reducido a una fuerza y un par que actúa en el punto $O$, dicho sistema puede reducirse a una fuerza y un par actuando en cualquier otro punto $O'$ (*figura 4.2*).

$$\boldsymbol{M}_{O'}^R = \boldsymbol{M}_O^R + (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R})$$

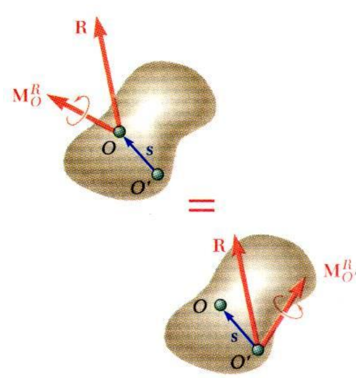
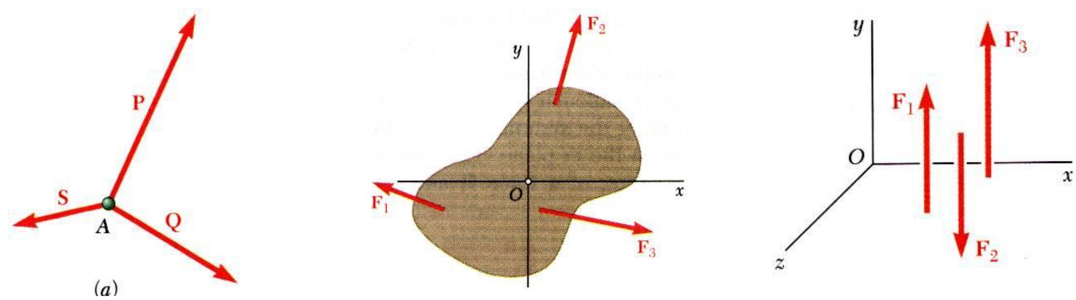



*Figura 4.2*

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado $O$.

En el caso de que la fuerza resultante $\boldsymbol{R}$ y el par $\boldsymbol{M}_O^R$ en $O$ sean perpendiculares entre sí, pueden ser sustituidos por una sola fuerza actuando a lo largo de una nueva línea de acción. La fuerza resultante $\boldsymbol{R}$ y el par $\boldsymbol{M}_O^R$ en $O$ serán perpendiculares para sistemas constituidos por:

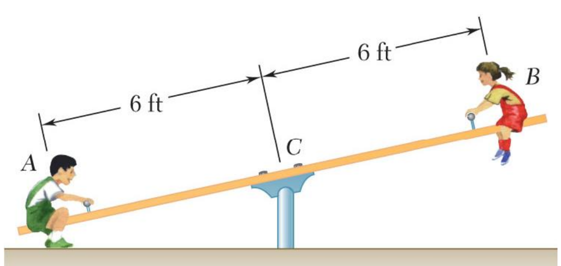
*i.* Fuerzas concurrentes
*ii.* Fuerzas coplanares
*iii.* Fuerzas paralelas




Fuerzas concurrentes  Fuerzas coplanares  Fuerzas paralelas

*Figura 4.3*

## Problema 4.1

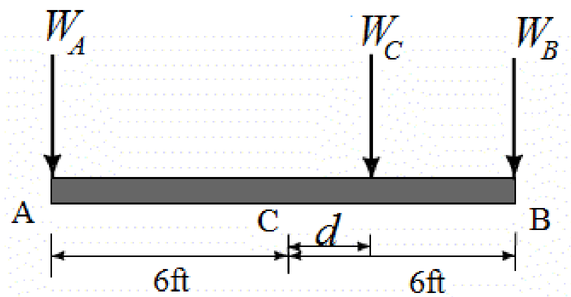



Los pesos de dos niños sentados en los extremos *A* y *B* de un balancín son 84 lb y 64 lb, respectivamente. Determine dónde debe sentarse un tercer niño si la resultante de las fuerzas de los pesos de los tres niños debe pasar por *C*, y si se sabe que el peso del tercer niño es a) 60 lb, b) 52 lb.

Solución:

Tenemos que los pesos de los niños sentados en $A$ y $B$ son $W_A = 84\ lb$ y $W_B = 64\ lb$, respectivamente.

Consideremos el siguiente diagrama de cuerpo libre en el cual $W_A, W_B$ y $W_C$ son los pesos de los niños y la distancia $d$, medida a la derecha de $C$, indica la posición en la cual habrá de sentarse el tercer niño.




a) El peso del tercer niño es $W_C = 60\ lb$

Aplicando $\Sigma \boldsymbol{M}_C = 0$:

$$6W_A - 6W_B - W_C d = 0$$

$$6(84) - 6(64) - 60d = 0$$

$$60d = 120$$

$$d = 2\ ft$$

b) El peso del tercer niño es $W_C = 52\ lb$

Aplicando $\Sigma \boldsymbol{M}_C = 0$:

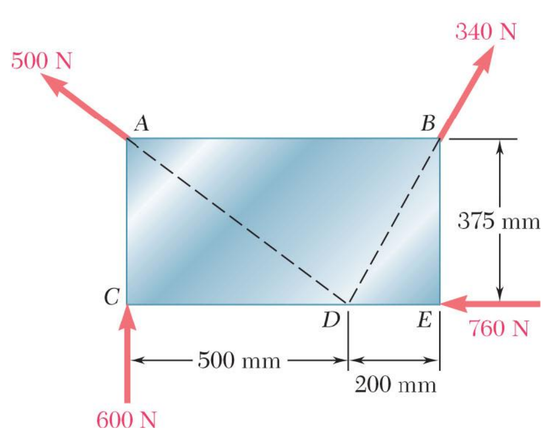
$$6W_A - 6W_B - W_C d = 0$$

$$6(84) - 6(64) - 52d = 0$$

$$52d = 120$$

$$d = 2.308\ ft$$

## Problema 4.2




Cuatro fuerzas actúan sobre la placa de 700 X 375 mm como se muestra en la figura. a) Encuentre la resultante de estas fuerzas. b) Localice los dos puntos en los que la línea de acción de la resultante interseca con el borde de la placa.

Solución:

a) Resultante de estas fuerzas: $\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F}$

Para definir correctamente las componentes de las fuerzas que actúan en $A$ y $B$ calcularemos la longitud de los segmentos $AD$ y $BD$, dichos segmentos son las hipotenusas de los triángulos $ACD$ y $ACD$, por lo cual aplicaremos simplemente el teorema de Pitágoras.

$$AD = \sqrt{500^2 + 375^2} mm = 625\ mm$$

$$AD = \sqrt{200^2 + 375^2} mm = 425\ mm$$

Definamos la forma rectangular de cada una de las fuerzas que actúan en las esquina $A$, $B$, $C$ y $E$:

$$\boldsymbol{F}_A = (500N) \frac{-500\boldsymbol{i} + 375\boldsymbol{j}}{625} = (-400\boldsymbol{i} + 300\boldsymbol{j})N$$

$$\boldsymbol{F}_B = (340N) \frac{200\boldsymbol{i} + 375\boldsymbol{j}}{425} = (160\boldsymbol{i} + 300\boldsymbol{j})N$$

$$\boldsymbol{F}_C = (600\boldsymbol{j})N$$

$$\boldsymbol{F}_C = (-760\boldsymbol{i})N$$

Tenemos que $\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{R} = (-400\boldsymbol{i} + 300\boldsymbol{j} + 160\boldsymbol{i} + 300\boldsymbol{j} + 600\boldsymbol{j} - 760\boldsymbol{i})N$$

$$\boldsymbol{R} = (-1{,}000\boldsymbol{i} + 1{,}200\boldsymbol{j})N$$

La magnitud de $\boldsymbol{R}$ se define como:

$$R = \sqrt{((-1{,}000)^2 + 1{,}200^2} N$$

$$R = 1{,}562.050\ N$$

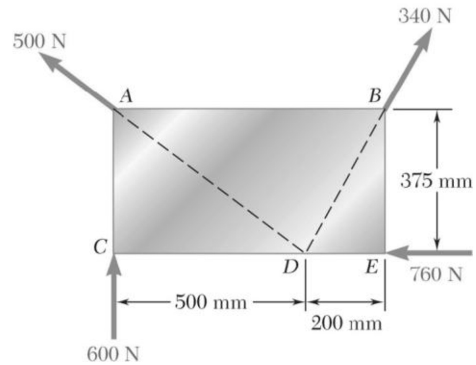
Y su dirección:

$$\theta = 180° - arctan \frac{1{,}200}{1{,}000}$$

$$\theta = 180° - 50.194°$$

$$\theta = 129.806°$$

b) Localice los dos puntos en los que la línea de acción de la resultante interseca con el borde de la placa.




Tomaremos sumatoria de momentos con respecto al punto $C$; note que las fuerzas que actúan en $C$ y $E$ no producen momento con respecto a dicho punto, ya que su línea de acción pasa por éste.

$$\boldsymbol{M}_C = (\boldsymbol{r}_{CA} \times \boldsymbol{F}_A) + (\boldsymbol{r}_{CB} \times \boldsymbol{F}_B)$$

$$\boldsymbol{M}_C = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0.375 & 0 \\ -400 & 300 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0.700 & 0.375 & 0 \\ 160 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_C = (150\boldsymbol{k} + 210\boldsymbol{k} - 60\boldsymbol{k})N \cdot m$$

$$\boldsymbol{M}_C = (300\boldsymbol{k})N \cdot m$$

Podemos considerar las siguientes opciones para calcular los punto de intersección:

1. $\boldsymbol{M}_C = x\boldsymbol{i} \times R_y\boldsymbol{j}$

$300 = 1{,}200x$

$x = \dfrac{300}{1{,}200}$

$x = 0.25\ m$

2. $\boldsymbol{M}_C = y\boldsymbol{j} \times R_x\boldsymbol{i}$

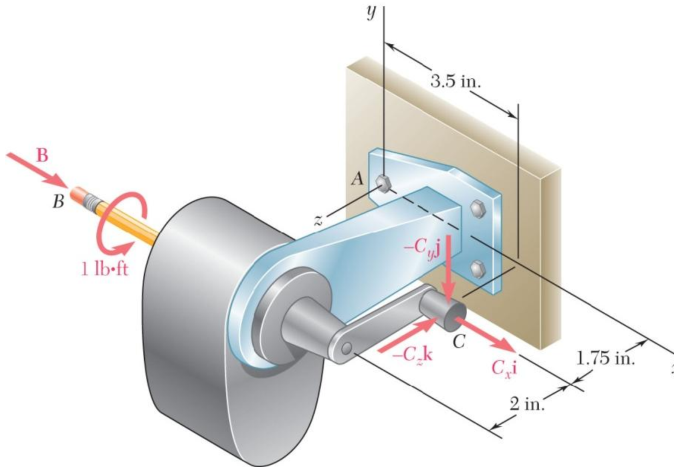
$300 = 1{,}000y$

$y = \dfrac{300}{1{,}000}$

$y = 0.30\ m$

Por lo tanto, la resultante interseca en $x = 250\ mm$ a la derecha de $C$ y en $y = 300\ mm$ arriba de $C$.

## Problema 4.3




Al usar un sacapuntas manual, un estudiante ejerce sobre éste las fuerzas y el par que se muestran en la figura. a) Determine las fuerzas ejercidas en *B* y en *C* si se sabe que las fuerzas y el par son equivalentes a un *sistema fuerza-par en A* que consta de la fuerza $\boldsymbol{R} = (2.6\ lb)\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} - (0.7\ lb)\boldsymbol{k}$ y el par $\boldsymbol{M}_A^R = M_x\boldsymbol{i} + (1.0\ lb \cdot ft)\boldsymbol{j} - (0.72\ lb \cdot ft)\boldsymbol{k}$ b) Encuentre los valores correspondientes de $R_y$ y $M_x$.

Solución:

El sistema fuerza-par en $A$ está constituido por:

$$\boldsymbol{R} = (2.6\ lb)\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} - (0.7\ lb)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}_A^R = M_x\boldsymbol{i} + (1.0\ lb \cdot ft)\boldsymbol{j} - (0.72\ lb \cdot ft)\boldsymbol{k} = M_x\boldsymbol{i} + (12\ lb \cdot in)\boldsymbol{j} - (8.64\ lb \cdot in)\boldsymbol{k}$$

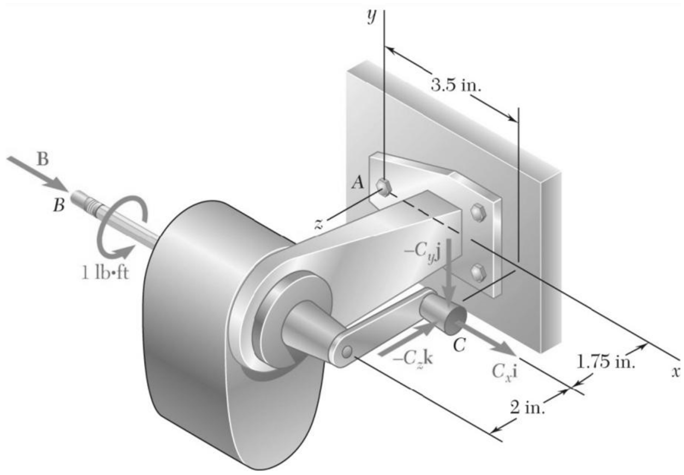
Sabemos que:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$$

$$2.6\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} - 0.7\boldsymbol{k} = B\boldsymbol{i} + C_x\boldsymbol{i} - C_y\boldsymbol{j} - C_z\boldsymbol{k}$$

$$\begin{cases} B + C_x = 2.6\ lb \\ Cy = -R_y \\ C_z = 0.7\ lb \end{cases}$$

A continuación, se plantea una sumatoria de momentos respecto al punto $A$, en $lb \cdot in$:




$$\boldsymbol{M}_A = 12\boldsymbol{i} + 3.75\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3.5 & 0 & 1.75 \\ C_x & -C_y & -C_z \end{vmatrix} = 12\boldsymbol{i} + 3.75B\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3.5 & 0 & 1.75 \\ C_x & -C_y & -0.7 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_A = 12\boldsymbol{i} + 3.75B\boldsymbol{j} + 1.75C_x\boldsymbol{j} - 3.5C_y\boldsymbol{k} + 1.75C_y\boldsymbol{i} + 2.45\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{M}_A = \left(12 + 1.75C_y\right)\boldsymbol{i} + (2.45 + 3.75B + 1.75C_{x)}\boldsymbol{j} - 3.5C_y\boldsymbol{k}$$

Igualando $\boldsymbol{M}_A^R = \boldsymbol{M}_A$:

$$M_x\boldsymbol{i} + (12\ lb \cdot in)\boldsymbol{j} - (8.64\ lb \cdot in)\boldsymbol{k}$$
$$= \left(12 + 1.75C_y\right)\boldsymbol{i} + (2.45 + 3.75B + 1.75C_x)\boldsymbol{j} - 3.5C_y\boldsymbol{k}$$

$$\begin{cases} M_x = 12 + 1.75C_y \\ 9.55 = 3.75B + 1.75C_x \\ 8.64 = 3.5C_y \end{cases}$$

Tenemos que:

$$3.5C_y = 8.64$$

$$C_y = \frac{8.64}{3.5} = 2.469\ lb$$

$$C_y = 2.469\ lb\ \downarrow$$

$$C_y = -2.469\ lb$$

$$Ry = -C_y = 2.469\ lb$$

$$M_x = 12 + 1.75C_y = 12 + 1.75(2.469)$$

$$M_x = 16.32\ lb \cdot in = 1.36\ lb \cdot ft$$

$$\begin{cases} B + C_x = 2.6 \\ 3.75B + 1.75C_x = 9.55 \end{cases}$$

Multiplicando por $-1.75$ a la primera ecuación:

$$\begin{cases} -1.75B - 1.75C_x = -4.55 \\ 3.75B + 1.75C_x = 9.55 \end{cases}$$

$$2B = 5$$

$$B = \frac{5}{2}$$

$$B = 2.5\ lb$$

$$C_x = 2.6 - B = 2.6 - 2.5$$

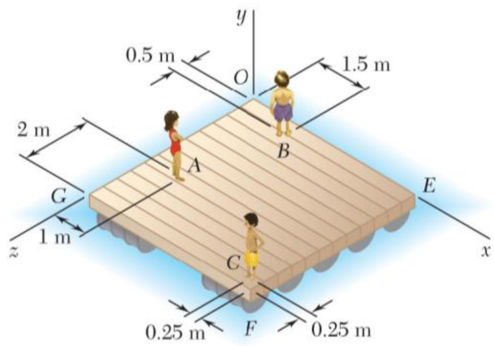
$$C_x = 0.1\ lb$$

Finalmente, los valores solicitados por el enunciado son:

a) $\boldsymbol{B} = 2.5\boldsymbol{i}\ lb$ y $\boldsymbol{C} = (0.1\boldsymbol{i} - 2.469\boldsymbol{j} - 0.7\boldsymbol{k})lb$

b) $Ry = 2.469\ lb$ y $M_x = 16.32\ lb \cdot in = 1.36\ lb \cdot ft$.

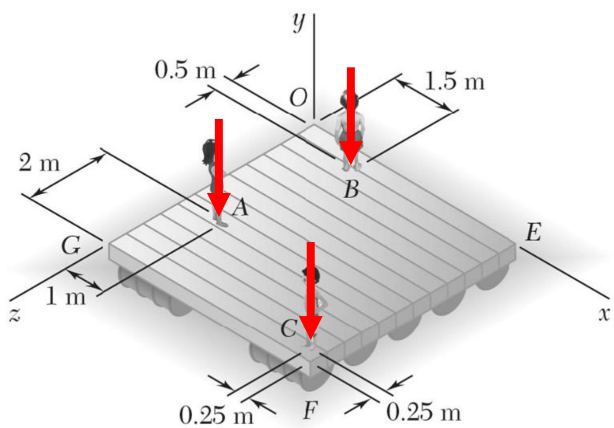
## Problema 4.4




Tres niños se encuentran parados en la balsa de 5 X 5 m. Los pesos de los niños que están parados en *A, B* y *C* son de 375 N, 260 N y 400 N, respectivamente, determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de los tres pesos.

Solución:

A partir de la figura del problema podemos establecer las coordenadas de la posición de cada niño y por lo tanto definir el punto de aplicación de sus respectivos pesos.




$A(1, 0, 3)$ $\qquad$ $\boldsymbol{F_A} = (-375\ N)\boldsymbol{j}$

$B(1.5, 0, 0.5)$ $\qquad$ $\boldsymbol{F_B} = (-260\ N)\boldsymbol{j}$

$C(4.75, 0, 4.75)$ $\qquad$ $\boldsymbol{F_C} = (-400\ N)\boldsymbol{j}$

La resultante de los pesos de los tres niños se calcula a continuación:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F_A} + \boldsymbol{F_B} + \boldsymbol{F_C} = -(375 + 260 + 400)\boldsymbol{j}\ N$$

$$\boldsymbol{R} = (-1035\ N)\boldsymbol{j}$$

El punto de aplicación de la resultante estará dado por un punto de coordenadas $D(x, 0, z)$; tome en cuenta que tenemos un sistema de fuerzas paralelas y que éste puede ser reducido a una sola fuerza, la resultante $\boldsymbol{R}$.

Plantearemos una sumatoria de momentos con respecto al *eje x*, tal que:

$$\boldsymbol{M}_{eje\,x}^{R} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -375 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & .5 \\ 0 & -260 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4.75 & 0 & 4.75 \\ 0 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & -1035 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -375 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & .5 \\ 0 & -260 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4.75 & 0 & 4.75 \\ 0 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1{,}035z = 1{,}125 + 130 + 1{,}900$$

$$z = \frac{3{,}155}{1{,}035}$$

$$z = 3.048\ m$$

Ahora, realizaremos una sumatoria de momentos con respecto al *eje z*, tal que:

$$\boldsymbol{M}_{eje\,z}^{R} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -375 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & .5 \\ 0 & -260 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4.75 & 0 & 4.75 \\ 0 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & z \\ 0 & -1035 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -375 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & .5 \\ 0 & -260 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4.75 & 0 & 4.75 \\ 0 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-1{,}035x = -375 - 390 - 1{,}900$$

$$x = \frac{2{,}665}{1{,}035}$$

$$x = 2.575\ m$$

Podemos concluir con que la magnitud de la resultante es $R = 1{,}035\ N$ y que su punto de aplicación tiene las siguientes coordenadas $D(2.575, 0, 3.048)$, en metros desde el origen.

Capítulo 5

# Equilibrio en dos dimensiones

Un *cuerpo rígido* en *equilibrio estático*, es aquel en el que las fuerzas externas y momentos están equilibrados y no provocan movimiento de traslación o rotación del cuerpo. Se dice que un *cuerpo rígido está en equilibrio* si las fuerzas externas que actúan sobre él forman un *sistema equivalente a cero*, es decir:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = 0$$

$$\Sigma \boldsymbol{M}_O = 0$$

A continuación abordaremos el estudio del *equilibrio de estructuras bidimensionales* sujetas a fuerzas contenidas en sus planos.

Cuando se resuelve un problema que involucra el *equilibrio de un cuerpo rígido*, como ya se mencionó anteriormente, es esencial considerar todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, incluyendo las reacciones en los apoyos o soportes. Por lo tanto, el primer paso en la solución del problema deberá ser dibujar el *diagrama de cuerpo libre* mostrando al cuerpo en estudio y las fuerzas, conocidas o no, que actúan sobre él.

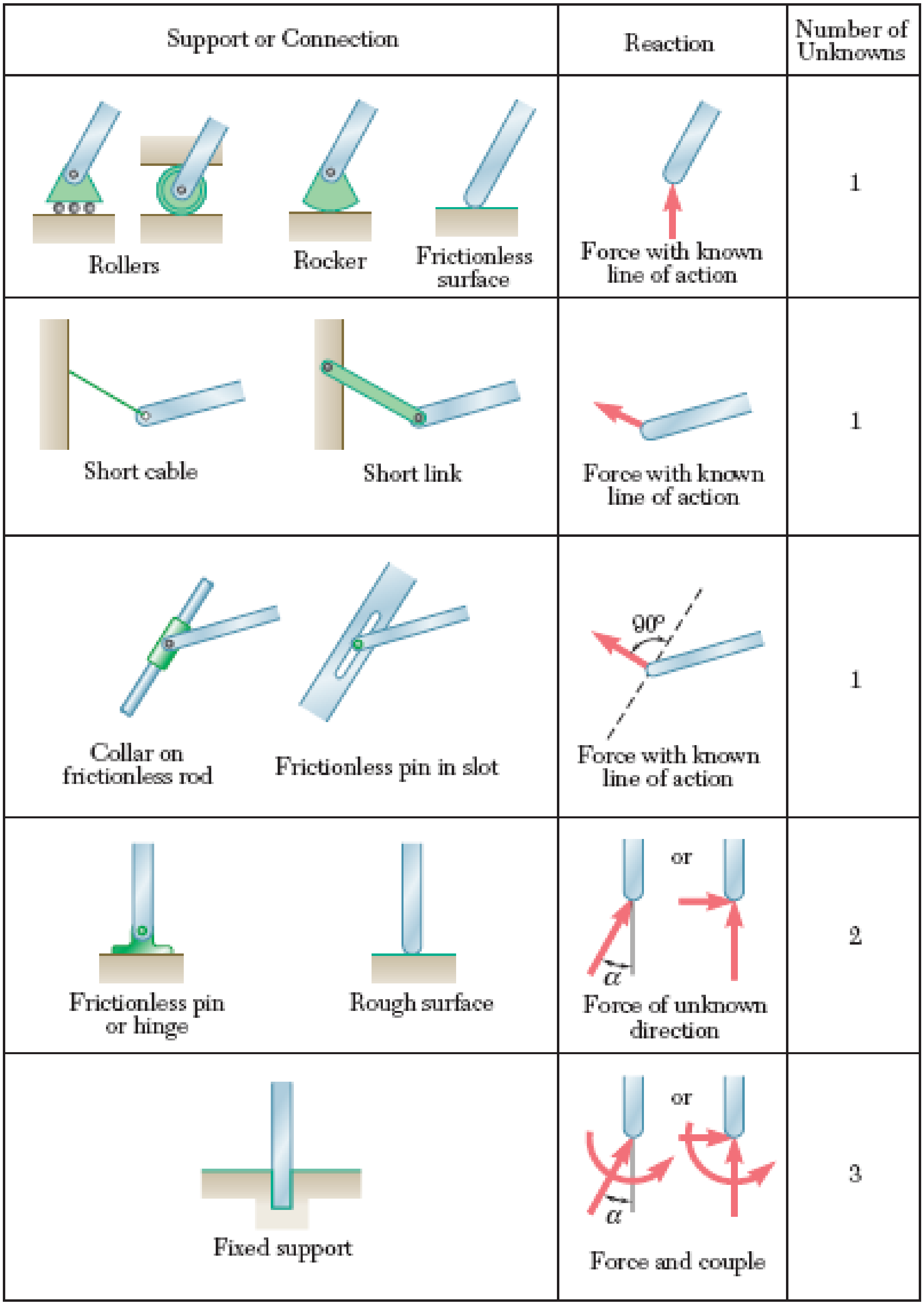



*Figura 5.1* Reacciones en apoyos y conexiones

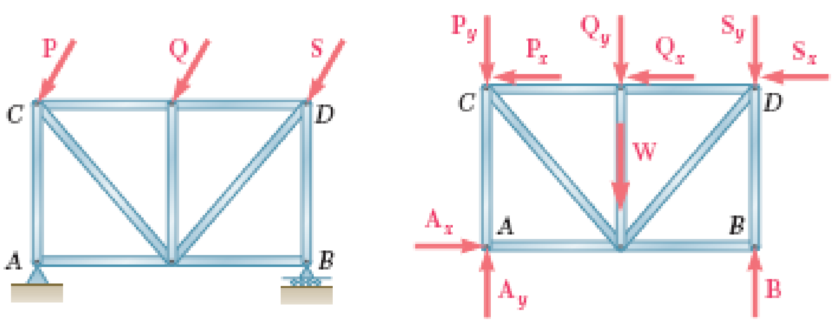
En el caso del *equilibrio de estructuras bidimensionales* las reacciones ejercidas sobre la estructura por sus soportes podrían involucrar una, dos o tres incógnitas, dependiendo del tipo o condiciones de soporte; tres ecuaciones de equilibrio son utilizadas:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

Estas ecuaciones pueden ser utilizadas para resolver *tres incógnitas*. A pesar de que a las tres ecuaciones de equilibrio no se les pueden añadir *ecuaciones adicionales*, cualquiera de ellas puede ser reemplazada por otra, para ejemplificarlo consideremos la *figura 5.2*.




(a) (b)

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0$$

(c)

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$$

(d)

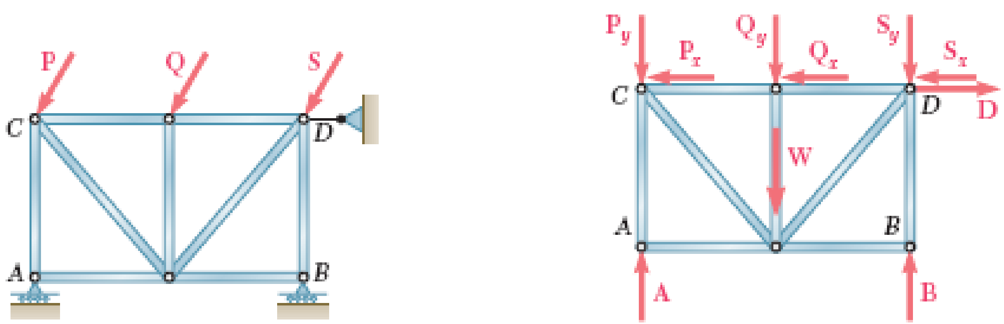
$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_c = 0$$

(e)

*Figura 5.2*

En la *figura 5.2: (a)* muestra una estructura bidimensional sujeta a una carga constituida por las fuerzas externas $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{S}$; *(b)* diagrama de cuerpo libre correspondiente en el que se incluyen tanto las componentes rectangulares de la carga como las reacciones en sus soportes o apoyos; (c) ecuaciones de equilibrio bidimensional; (d) se sustituye la sumatoria de fuerzas verticales por una sumatoria de momentos con respeto al punto $B$, de manera que la línea $AB$ no sea paralela al eje $y$; por último, en (e) se reemplaza también la sumatoria de fuerzas horizontales por una sumatoria de momentos con respecto al punto $C$, teniendo la precaución de que los puntos $A$, $B$ y $C$ no sean colineales.

En la práctica, será deseable elegir ecuaciones de equilibrio que contengan una sola incógnita, puesto que así se elimina la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas.




(a) (b)

*Figura 5.3*

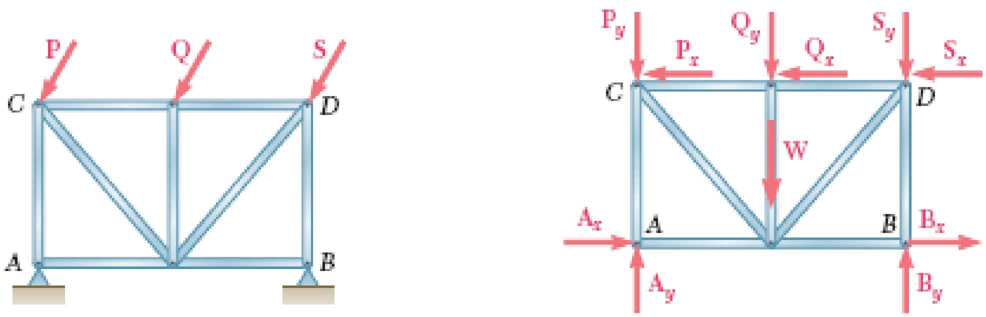
En la armadura mostrada en la *figura 5.3*, las ecuaciones que pueden obtenerse con una sola incógnita son:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$\Sigma M_D = 0$$

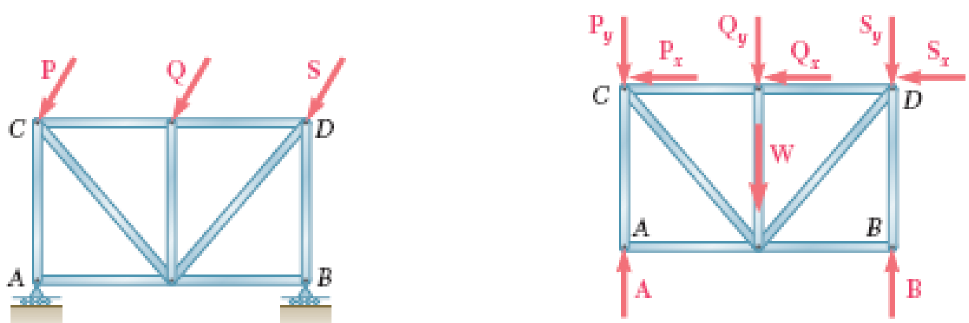
Como cualquier conjunto de ecuaciones de equilibrio se puede resolver para un *máximo de tres incógnitas*, no se pueden determinar por completo las reacciones en los apoyos de una estructura rígida bidimensional si éstas involucran *más de tres incógnitas,* como en la *figura 5.4*; entonces se dice que dichas reacciones son *estáticamente indeterminadas*.




*(a)* *(b)*

*Figura 5.4*

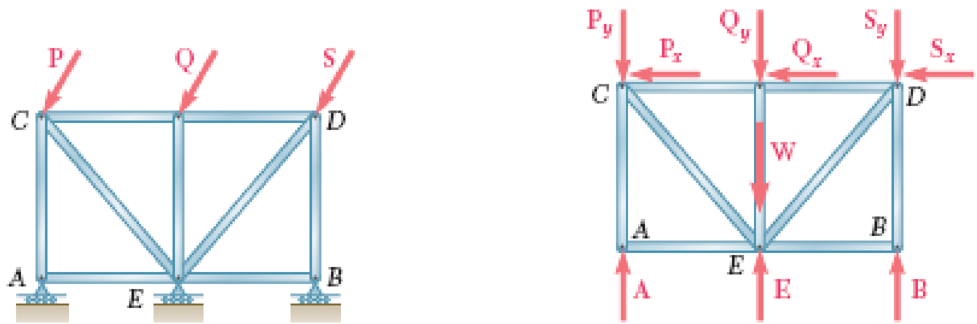
Si las reacciones involucran *menos de tres incógnitas*, *figura 5.5,* no se mantendrá el equilibrio bajo condiciones generales de carga, entonces se dice que la estructura tiene *restricción parcial*.




*(a)* *(b)*

*Figura 5.5*

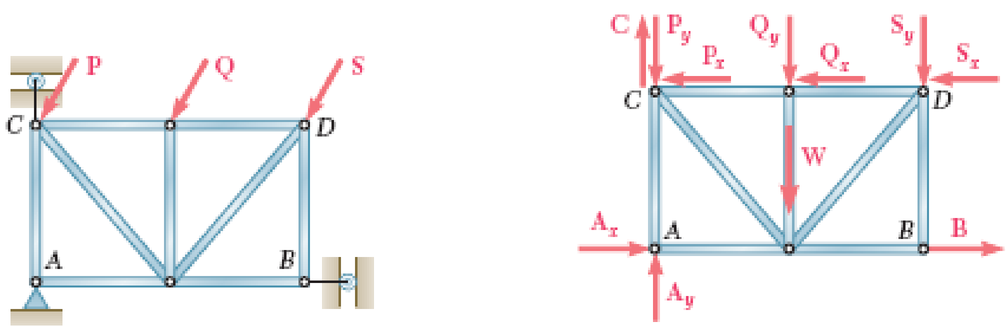
El hecho de que las reacciones involucren *exactamente a tres incógnitas*, no garantiza que las ecuaciones de equilibrio puedan resolverse para todas las incógnitas. Si los apoyos están ubicados de manera que las reacciones son *concurrentes o paralelas*, como en *la figura 5.6,* las reacciones son *estáticamente indeterminadas* y se dice que la estructura tiene *restricciones impropias*.




*(a)* *(b)*

*Figura 5.6*

La estructura de la *figura 5.7* también tiene *restricciones impropias*.




*(a)* *(b)*

*Figura 5.7*

*Un cuerpo rígido está impropiamente restringido siempre que los apoyos estén ubicados de tal forma que las reacciones sean concurrentes o paralelas.*

Por otra parte, consideremos a continuación un par de casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido, sujeto a dos y tres fuerzas.

Un cuerpo sujeto a dos fuerzas que actúan únicamente en dos puntos, *figura 5.8*, está en equilibrio si las resultantes $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ de dichas fuerzas, tienen la misma *magnitud*, la misma *línea de acción* y *sentidos opuestos*.

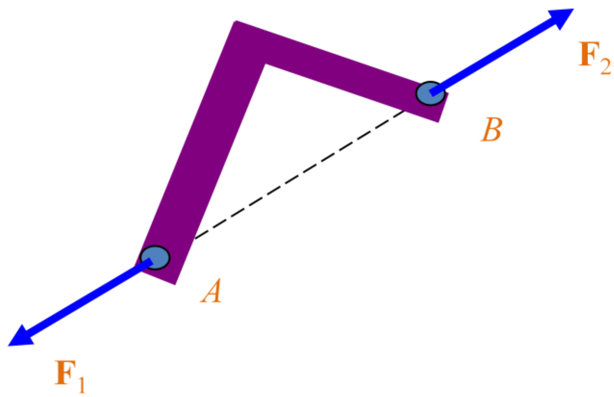



*Figura 5.8*

Un cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas que actúan sólo en tres puntos, está en equilibrio si las resultantes $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ y $\boldsymbol{F}_3$ de dichas fuerzas son concurrentes o paralelas.

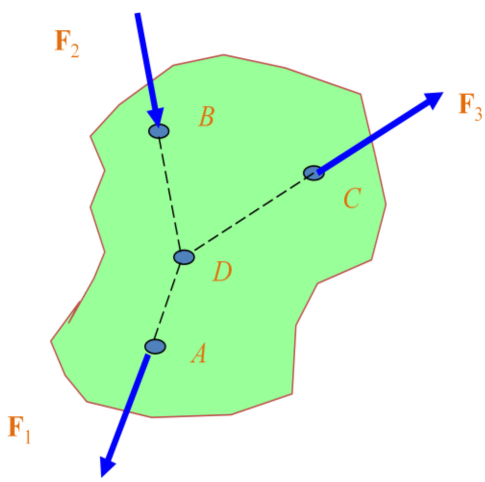
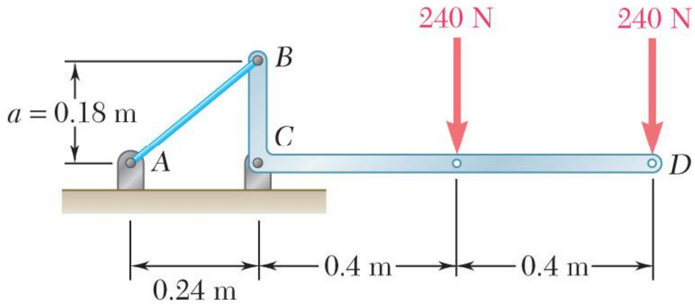



*Figura 5.9*

La propiedad que se acaba de establecer puede utilizarse *para resolver problemas en forma gráfica o matemática a partir de relaciones trigonométricas o geométricas simples*.

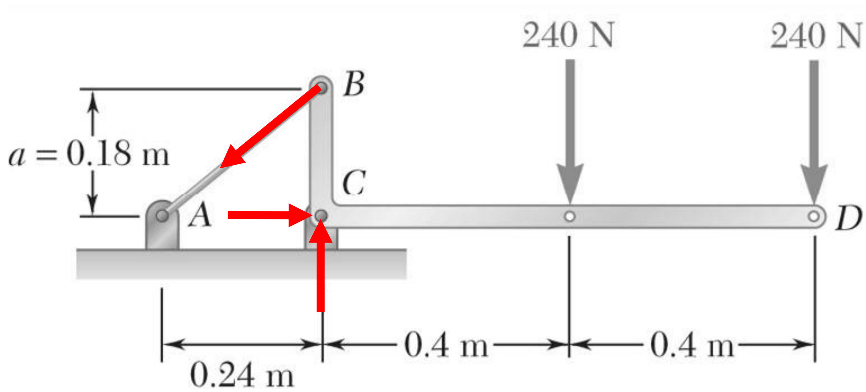
## Problema 5.1




La ménsula *BCD* está articulada en *C* y se une a una barra de control en *B*. Para la carga mostrada, determine a) la tensión en el cable y b) la reacción en *C*.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre de la ménsula $BCD$




En el diagrama de cuerpo libre podemos identificar la fuerza de tensión $\boldsymbol{T}_{BA}$ actuando en $B$ y las componentes de la reacción en $C$.

Del triángulo $ABC$, la longitud del segmento $AB$ podemos obtenerla a partir del teorema de Pitágoras:

$$AB = \sqrt{0.24^2 + 0.18^2}\,m; \;\; AB = 0.30\,m$$

Y por lo tanto:

$$T_{BA_x} = T_{BA}\cos\theta = T_{BA}\frac{AC}{AB} = \frac{0.24}{0.30}T_{BA} \qquad T_{BA_y} = T_{BA}\,\mathrm{sen}\,\theta = T_{BA}\frac{AC}{AB} = \frac{0.18}{0.30}T_{BA}$$

$$T_{BA_x} = 0.8\,T_{BA} \qquad T_{BA_y} = 0.6\,T_{BA}$$

a) Tensión en el cable $AB$

Aplicando la segunda condición de equilibrio en $C$:

$$\Sigma M_C = 0$$

Únicamente las fuerzas de $240\,N$ y la componente horizontal de $\boldsymbol{T}_{BA}$ producen momento con respecto a $C$.

$$0.18T_{BA_x} - (240)(0.4) - (240)(0.8) = 0$$

$$0.18(0.8\,T_{BA}) = (240)(1.2)$$

$$0.144T_{BA} = 288$$

La magnitud de la tensión en el cable $AB$ es por lo tanto:

$$T_{BA} = 2{,}000\,N$$

Y las componentes de la tensión son:

$$T_{BA_x} = 0.8\,T_{BA} = 0.8\,(2{,}000N)$$

$$T_{BA_x} = 1{,}600\,N$$

$$T_{BA_y} = 0.6\,T_{BA} = 0.6\,(2{,}000\,N)$$

$$T_{BA_y} = 1{,}200\,N$$

b) Reacción en $C$.

Por primera condición de equilibrio, tenemos:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$C_x - T_{BA_x} = 0$$

$$C_x = T_{BA_x}$$

$$C_x = 1{,}600\,N$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$C_y - T_{BA_y} - 240 - 240 = 0$$

$$C_y = T_{BA_y} + 480$$

$$C_y = 1{,}200 + 480$$

$$C_y = 1{,}680\,N$$

La magnitud de la reacción en $C$:

$$C = \sqrt{1{,}600^2 + 1{,}680^2}\ N$$

$$C = 2{,}320\ N$$

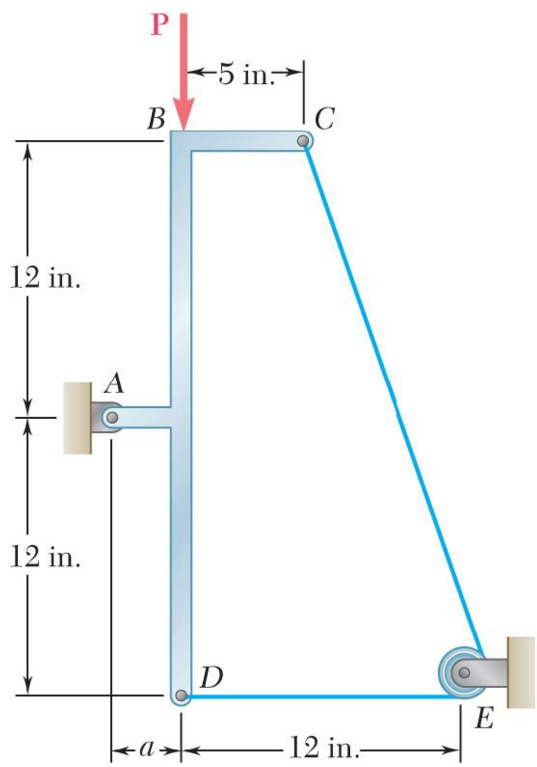
y su dirección:

$$\theta = \arctan\frac{1{,}680}{1{,}600} = \arctan 1.05$$

$$\theta = 46.397°$$

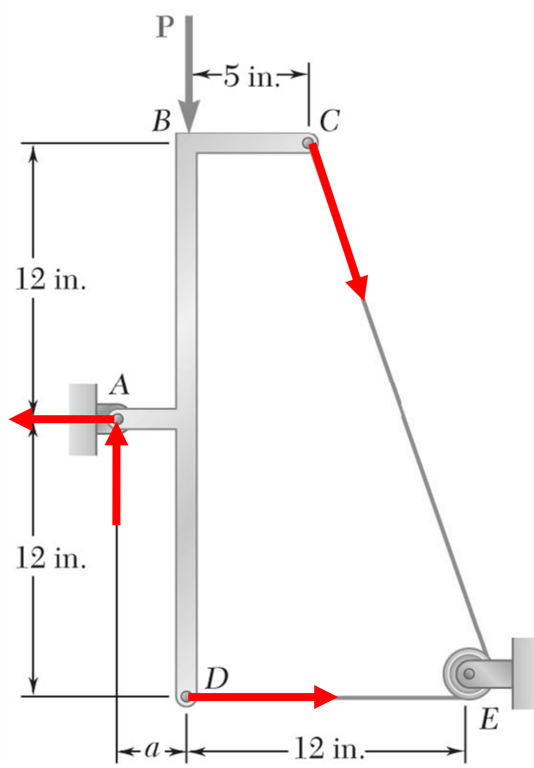
## Problema 5.2

Se aplica una fuerza ***P*** con magnitud de 280 lb al elemento *ABCD*, el cual se sostiene mediante un pasador sin fricción en *A* y por medio del cable *CED*. Como el cable pasa sobre una pequeña polea *E*, se puede suponer que la tensión es la misma en los tramos *CE* y *ED* del cable. Para el caso en que *a* = 3 in, determine a) la tensión en el cable, b) la reacción en *A*.



Solución:

Diagrama de cuerpo libre elemento $ABCD$




De manera similar a la solución del problema anterior:

$$CE = \sqrt{7^2 + 24^2}\ in;\ \ CE = 25\ in$$

a) Tensión en el cable

Aplicando la segunda condición de equilibrio en $A$:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$12T - 12T\left(\frac{7}{25}\right) - 8T\left(\frac{24}{25}\right) - 3P = 0;\ \ \ P = 280\ lb$$

$$\frac{24}{25}T = 3(280)$$

$$T = 875\ lb$$

b) Reacción en $A$

Por primera condición de equilibrio, tenemos:

$$\Sigma F_x = 0$$
$$-A_x + T + \left(\frac{7}{25}\right)T = 0$$
$$A_x = \frac{32}{25}T = \frac{32}{25}(875\ lb)$$
$$A_x = 1{,}120\ lb$$

$$\Sigma F_y = 0$$
$$A_y - P - \left(\frac{24}{25}\right)T = 0$$
$$A_y = (280\ lb) + \left(\frac{24}{25}\right)(875\ lb)$$
$$A_y = 1{,}120\ lb$$

La magnitud de la reacción en $A$:

$$A = \sqrt{2 * 1{,}120^2}\ N$$

$$A = 1{,}583.919\ lb$$

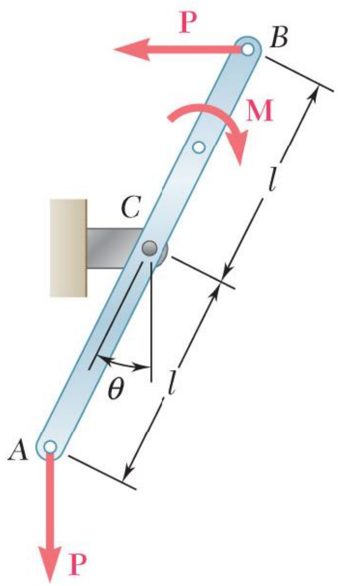
y su dirección:

$$\theta = 180° - \arctan\frac{1{,}120}{1{,}120} = 180° - 45°$$

$$\theta = 135°$$

Tome en cuenta al observar el diagrama de cuerpo libre que en virtud a la dirección de las componentes de la reacción $\boldsymbol{A}$, el vector fuerza de la reacción se ubica en el segundo cuadrante.

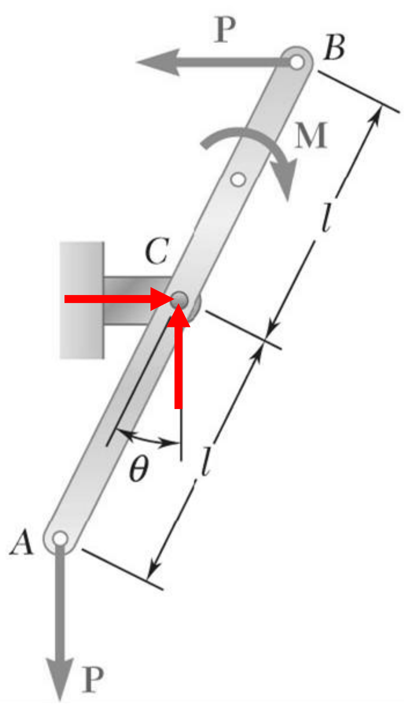
## Problema 5.3




La barra *AB* se somete a la acción de un par ***M*** y a dos fuerzas, cada una de las cuales tiene una magnitud *P*. a) Obtenga una ecuación en función de *θ, P, M* y *l* que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio. b) Determine el valor de *θ* correspondiente a la posición de equilibrio cuando *M* = 150 N•m, *P* = 200 N y *l* = 600 mm.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre



a) Obtenga una ecuación en función de $\theta$, $P$, $M$ y $l$ que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio.

Aplicando la segunda condición de equilibrio en $C$:

$$\Sigma M_C = 0$$

$$P(l cos\theta) + P(l sen\theta) - M = 0$$

$$Pl(cos\theta + sen\theta) = M$$

$$sen\theta + cos\theta = \frac{M}{Pl}$$

b) Determine el valor de $\theta$ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $M = 150\ N \cdot m$, $P = 200\ N$ y $l = 600\ mm$.

Tenemos que:

$$sen\theta + cos\theta = \frac{M}{Pl}$$

Aplicando la siguiente identidad trigonométrica:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$

$$cos\theta = \sqrt{1 - sen^2\theta}$$

Sustituyendo:

$$sen\theta + \sqrt{1 - sen^2\theta} = \frac{M}{Pl}$$

$$sen\theta + \sqrt{1 - sen^2\theta} = \frac{150}{(200)(0.6)}$$

$$sen\theta + \sqrt{1 - sen^2\theta} = 1.25$$

$$\sqrt{1 - sen^2\theta} = 1.25 - sen\theta$$

$$\left[\sqrt{1 - sen^2\theta}\right]^2 = (1.25 - sen\theta)^2$$

$$1 - sen^2\theta = 1.5625 - 2.5sen\theta + sen^2\theta$$

$$2sen^2\theta - 2.5sen\theta + 0.5625 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$sen\theta = \frac{-(-2.5) \pm \sqrt{(-2.5)^2 - 4(2)(0.5625)}}{2(2)}$$

$$sen\theta = \frac{2.5 + \sqrt{1.75}}{4} = 0.956$$

$$\theta = arcsen(0.956)$$

$$\theta = 72.940°$$

$$sen\theta = \frac{2.5 - \sqrt{1.75}}{4} = 0.294$$

$$\theta = arcsen(0.294)$$

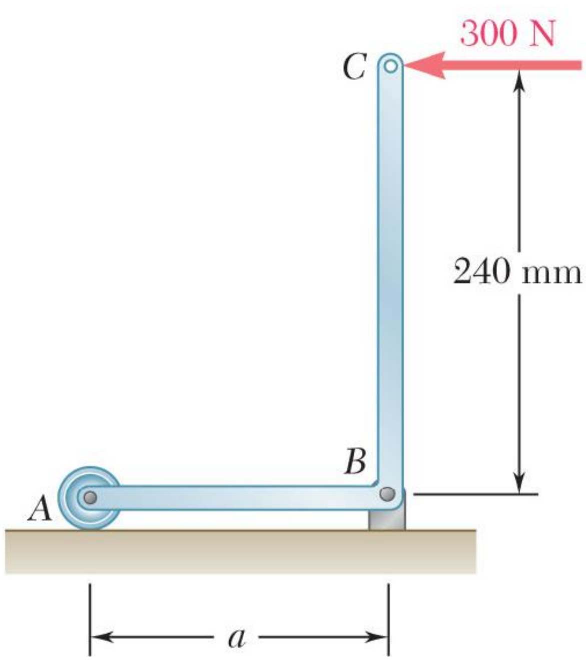
$$\theta = 17.096°$$

Por lo tanto, los ángulos son:

$\theta$=17.096°

$\theta = 72.940°$

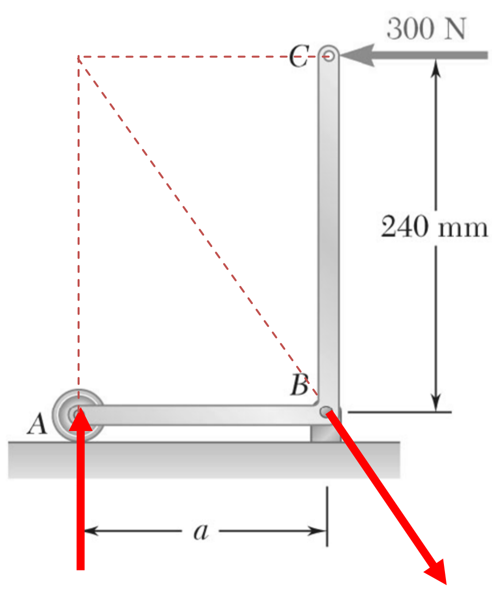
## Problema 5.4

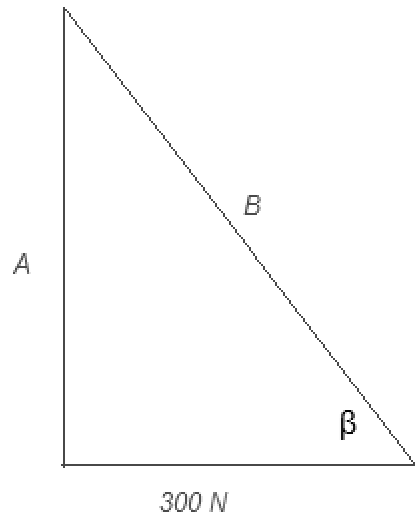



Determine las reacciones en *A* y *B* cuando a = 180 mm.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre, como puede observarse se trata del equilibrio de un cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas.






$$\beta = arctan\frac{240}{180} = 53.13°$$

Aplicando la ley de senos para calcular las reacciones:

$$\frac{A}{\text{sen}\,53.13°} = \frac{B}{sen\ 90°} = \frac{300\ N}{sen\ (90° - 53.13°)}$$

$$\frac{A}{\text{sen}\,53.13°} = \frac{B}{sen\ 90°} = \frac{300\ N}{sen\ 36.87°}$$

$$A = (300\ N)\frac{\text{sen}\,53.13°}{sen\ 36.87°}$$

$$A = 400\ N$$

$$B = (300\ N)\frac{\text{sen}\,90°}{sen\ 36.87°} = (300\ N)\frac{1}{sen\ 36.87°}$$

$$B = 500\ N$$

Capítulo 6

# Equilibrio en tres dimensiones

Al considerar el equilibrio de un cuerpo tridimensional, cada una de las reacciones ejercidas sobre el cuerpo por sus apoyos puede involucrar entre una y seis incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo.

En general, las *seis ecuaciones escalares de equilibrio* deben utilizarse y resolverse para seis incógnitas.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

En la mayoría de los problemas, las ecuaciones escalares anteriores, se obtendrán de manera más conveniente si primero se expresan las fuerzas $\boldsymbol{F}$ y los vectores de posición $\boldsymbol{r}$ en términos de *componentes escalares* y *vectores unitarios, es decir,* como ecuaciones *vectoriales*:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = 0 \qquad \Sigma \boldsymbol{M}_O = \Sigma(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) = 0$$

El producto vectorial se puede calcular, ya sea en forma directa o por medio de determinantes, con el fin de obtener las ecuaciones escalares deseadas igualando a cero los coeficientes de los vectores unitarios.

Se pueden eliminar hasta tres componentes de reacción desconocidas del cálculo de $\Sigma \boldsymbol{M}_O$ en la segunda de las relaciones anteriores, por medio de la selección cuidadosa del punto $O$.

Además, se pueden eliminar de la solución de algunos problemas las reacciones en dos puntos $A$ y $B$ escribiendo la ecuación que involucra el cálculo de los *momentos de las fuerzas con respecto a un eje* $AB$ que une los puntos $A$ y $B$

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{AB} = 0$$

Por otra parte, si las reacciones involucran más de seis incógnitas, hay más incógnitas que ecuaciones y algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*; si estas involucran menos de seis incógnitas, el cuerpo rígido tiene *restricción parcial*. Aunque existan seis incógnitas o más incógnitas, el cuerpo rígido estará *impropiamente restringido* si las reacciones asociadas con los apoyos dados son paralelas o intersecan la misma línea.

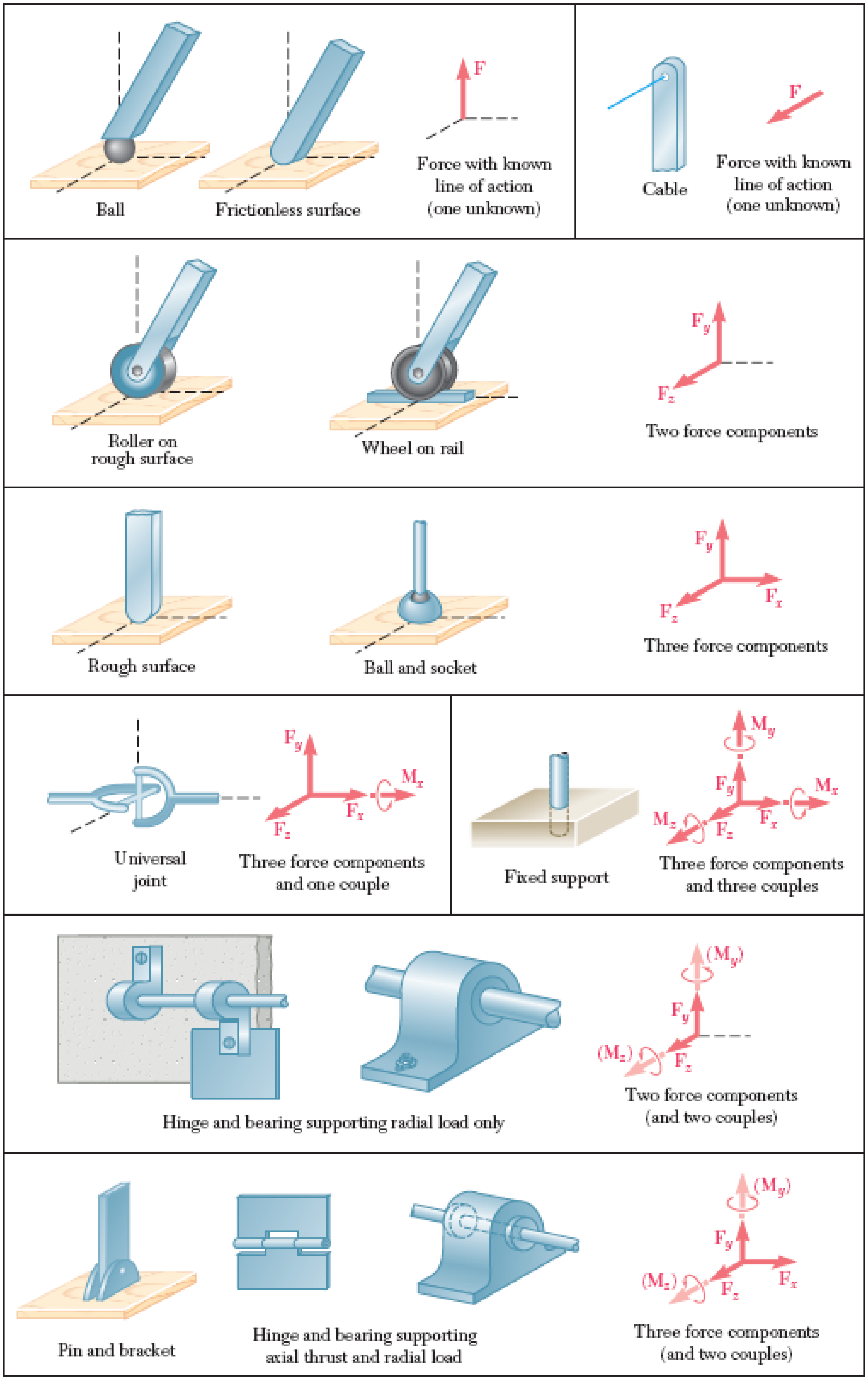
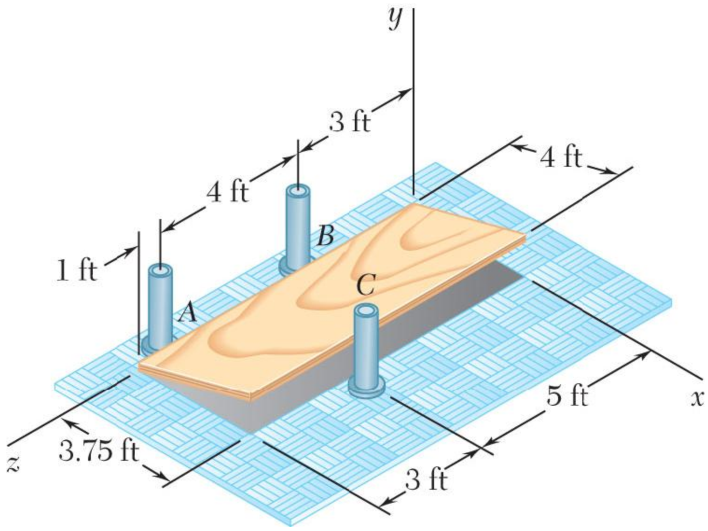



*Figura 6.1* Reacciones en apoyos y conexiones

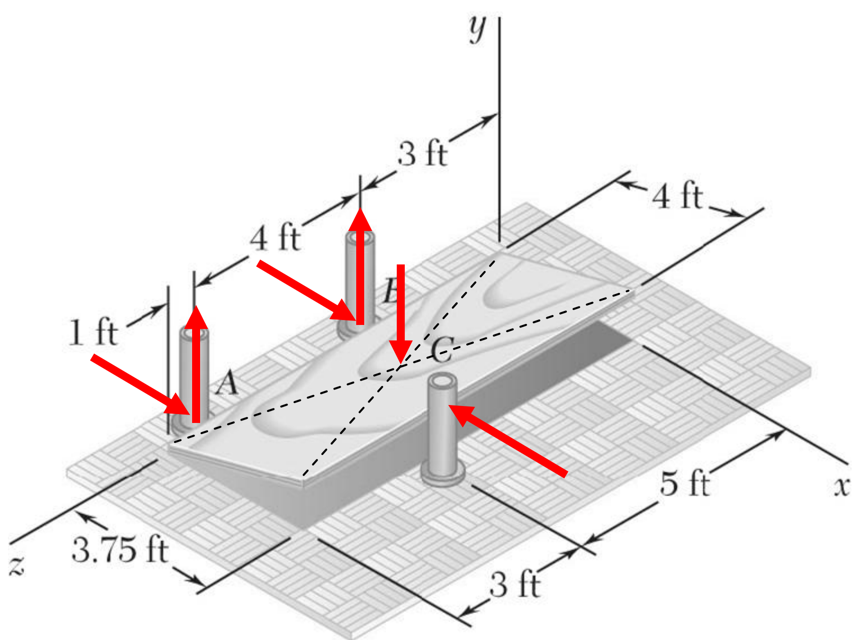
## Problema 6.1




Una hoja de madera de 4 x 8 ft que tiene un peso de *34 lb* ha sido colocada temporalmente en tres apoyos tubulares. El costado inferior de la hoja se apoya sobre pequeños collarines en *A* y *B* y el costado superior se apoya en el tubo *C*. Sin tomar en cuenta la fricción entre todas las superficies en contacto, determine las reacciones en *A, B* y *C*.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre:




Sea $h$ la cota vertical del punto $C$: $$h = \sqrt{4^2 - 3.75^2}\, ft = 1.392\, ft$$

Si realizamos una sumatoria de momentos con respecto al eje $z$, podemos calcular la reacción en $C$.

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{eje\,z} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.875 & 0.696 & 4 \\ 0 & -34 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3.75 & 1.392 & 5 \\ -C & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-63.75 + 1.392C = 0$$

$$C = \frac{63.75}{1.392}$$

$$C = 45.797\ lb$$

Por lo tanto, la reacción en $C$ es igual a: $\boldsymbol{C} = -(45.797\boldsymbol{i})lb$

Ahora, plantearemos una sumatoria de momentos respecto al punto $B$.

$$\Sigma \boldsymbol{M}_B = 0$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1.875 & 0.696 & 1 \\ 0 & -34 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3.75 & 1.392 & 2 \\ -45.797 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-63.75\boldsymbol{k} + 34\boldsymbol{i} - 91.594\boldsymbol{j} + 63.75\boldsymbol{k} + 4A_x\boldsymbol{j} - 4A_y\boldsymbol{i} = 0$$

$$34\boldsymbol{i} - 91.594\boldsymbol{j} + 4A_x\boldsymbol{j} - 4A_y\boldsymbol{i} = 0$$

$$4A_y = 34$$

$$A_y = 8.5\ lb$$

$$4A_x = 91.594$$

$$A_x = 22.899\ lb$$

La reacción en $A$ es igual a: $\boldsymbol{A} = (22.899\boldsymbol{i} + 8.5\boldsymbol{j})lb$

Finalmente, para calcular las componentes de la reacción en $B$, aplicaremos la primera condición de equilibrio, es decir:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = 0$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{W} = 0$$

$$22.899\boldsymbol{i} + 8.5\boldsymbol{j} + B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} - 45.797\boldsymbol{i} - 34\boldsymbol{j} = 0$$

$$B_x = 45.797 - 22.899$$

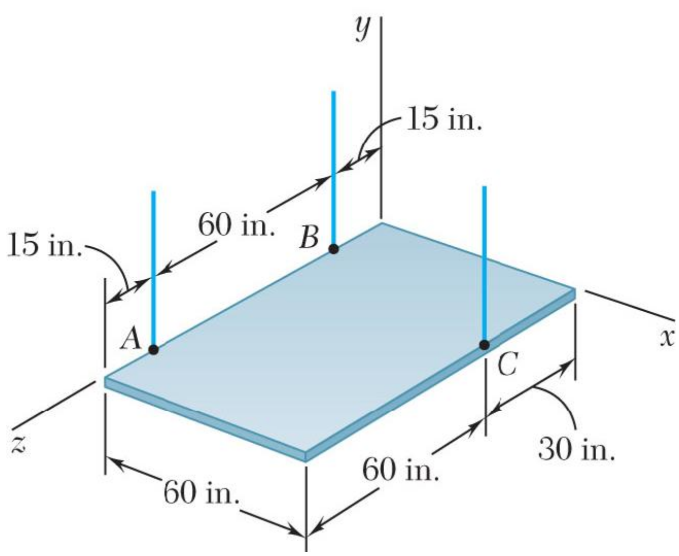
$$B_x = 22.898\ lb$$

$$B_y = 34 - 8.5$$

$$B_y = 25.5\ lb$$

Y, la reacción en $B$ es igual a: $\boldsymbol{B} = (22.898\boldsymbol{i} + 25.5\boldsymbol{j})lb$

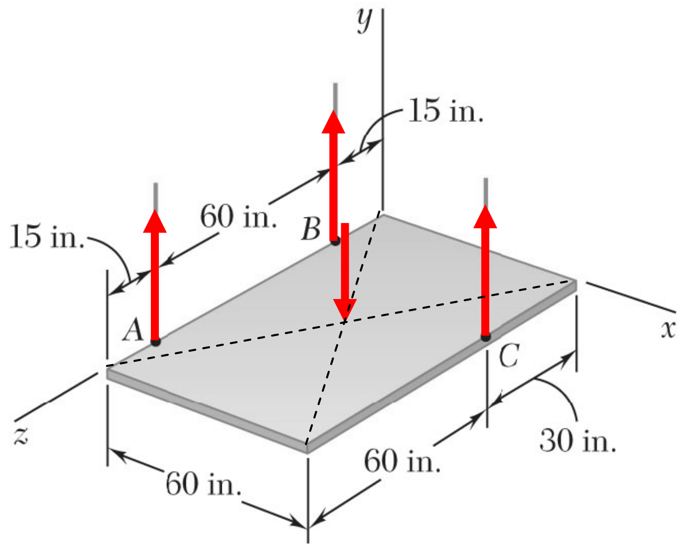
## Problema 6.2




La placa rectangular que se muestra en la figura pesa 80 lb y se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine la tensión en cada alambre.

Solución:

A partir del diagrama de cuerpo libre que se muestra en la siguiente página iniciaremos con el análisis de ejercicio. Tome en cuenta que el peso de la placa se representará como una fuerza vertical, de magnitud $W = 80\ lb$, dirigida hacia abajo y que actúa en un punto definido como $D(30, 0, 45)in$.




Sean $T_A$, $T_B$ y $T_C$ las tensiones en cada unos de los alambres que sostienen la placa en los puntos $A$, $B$ y $C$, respectivamente. Aplicando la segunda condición de equilibrio en el punto $B$:

$$\Sigma \boldsymbol{M}_B = 0$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 60 \\ 0 & T_A & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 60 & 0 & 15 \\ 0 & T_C & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 30 & 0 & 30 \\ 0 & -W & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 60 \\ 0 & T_A & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 60 & 0 & 15 \\ 0 & T_C & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 30 & 0 & 30 \\ 0 & -80 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-60T_A\boldsymbol{i} + 60T_C\boldsymbol{k} - 15T_C\boldsymbol{i} - 2{,}400\boldsymbol{k} + 2{,}400\boldsymbol{i} = 0$$

$$\begin{cases} 60T_A + 15T_C = 2{,}400 \\ 60T_C = 2{,}400 \end{cases}$$

Resolviendo simultáneamente:

$$T_A = 30\ lb \quad \text{y} \quad T_c = 40\ lb$$

Ahora, por primera condición de equilibrio:

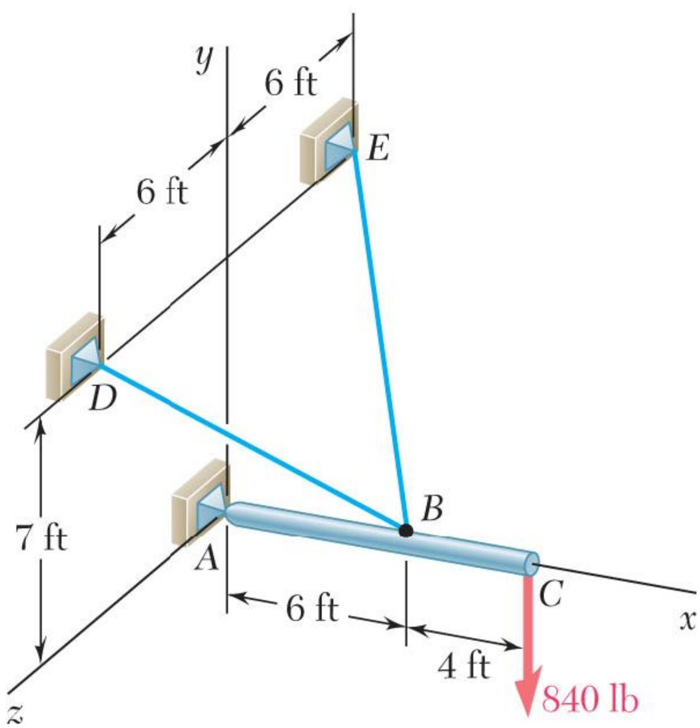
$$\Sigma\boldsymbol{F} = 0$$

$$\boldsymbol{T}_A + \boldsymbol{T}_B + T_C + \boldsymbol{W} = 0$$

$$30\boldsymbol{j} + T_B\boldsymbol{j} + 40\boldsymbol{j} - 80\boldsymbol{j} = 0$$

$$T_B = 10lb$$

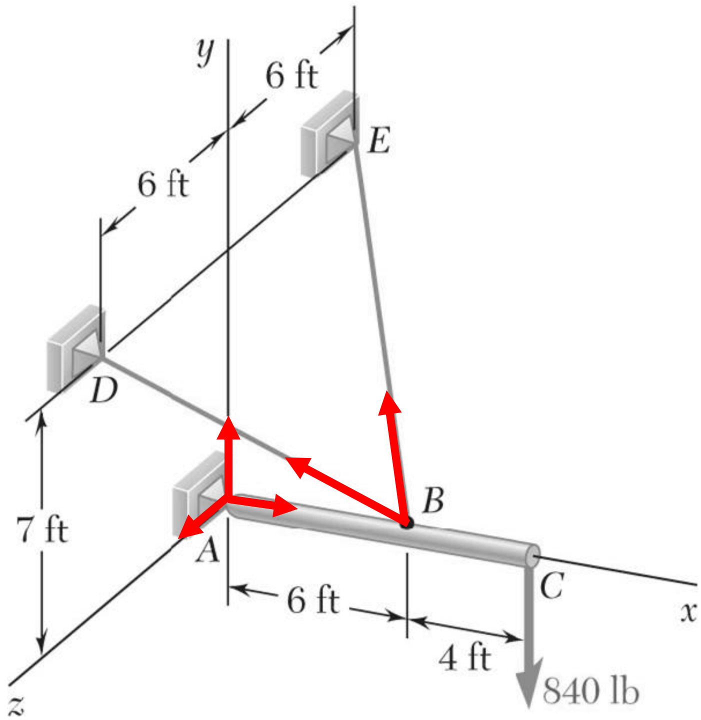
## Problema 6.3




Un brazo de 10 ft está sometido a una fuerza de 840 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable y la reacción en el apoyo de rótula en *A*.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre de la barra $ABC$:




A partir del diagrama de cuerpo libre de la barra $ABC$ podemos determinar los vectores fuerza y radio vectores:

$$\boldsymbol{F} = -(840lb)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{T}_{BD} = T_{BD}\boldsymbol{\lambda}_{BD} = \frac{-6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-6)^2 + 7^2 + 6^2}}T_{BD} = \frac{T_{BD}}{11}(-6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{T}_{BE} = T_{BE}\boldsymbol{\lambda}_{BE} = \frac{-6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-6)^2 + 7^2 + 6^2}}T_{BE} = \frac{T_{BE}}{11}(-6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{r}_{AB} = (6\ ft)\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{r}_{AC} = (10\ ft)\boldsymbol{i}$$

Por sumatoria de momentos respecto al punto $A$:

$$\Sigma \boldsymbol{M}_A = 0$$

$$\frac{T_{BD}}{11}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 6 \end{vmatrix} + \frac{T_{BE}}{11}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & -840 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{42}{11}T_{BD}\boldsymbol{k} - \frac{36}{11}T_{BD}\boldsymbol{j} + \frac{42}{11}T_{BE}\boldsymbol{k} + \frac{36}{11}T_{BE}\boldsymbol{j} - 8{,}400\boldsymbol{k} = 0$$

$$-\frac{36}{11}T_{BD} + \frac{36}{11}T_{BE} = 0$$

$$T_{BD} = T_{BE}$$

$$\frac{42}{11}T_{BD} + \frac{42}{11}T_{BE} = 8{,}400$$

$$\frac{84}{11}T_{BD} = 8{,}400$$

$$T_{BD} = T_{BE} = 1{,}100\ lb$$

Finalmente:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = 0$$

$$\boldsymbol{T}_{BD} + \boldsymbol{T}_{BE} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{A} = 0$$

$$\frac{1{,}100}{11}(-6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})+\frac{1{,}100}{11}(-6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})-840\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}=0$$

$$\frac{1{,}100}{11}(-6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}-6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k})-840\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}=0$$

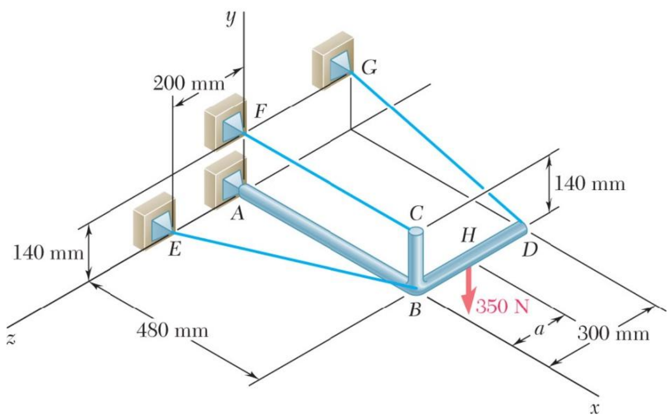
$$\frac{1{,}100}{11}(-12\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j})-840\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}=0$$

$$-1{,}200\boldsymbol{i}+1400\boldsymbol{j}-840\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}=0$$

$$\boldsymbol{A}=(1{,}200\boldsymbol{i}-560\boldsymbol{j})lb$$

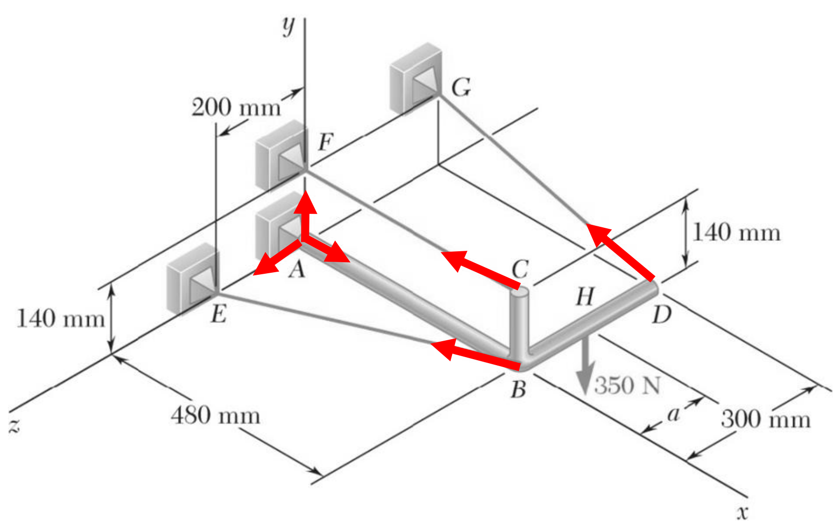
## Problema 6.4

El bastidor *ABCD* se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en *A*. Para *a* = 150 mm, determine la tensión en cada cable y la reacción en *A*.




Solución:

Diagrama de cuerpo libre



Coordenadas de los puntos de la estructura:

$A(0,0,0)$ $B(480,0,0)$ $C(480,140,0)$ $D(480,0,-300)$

$E(0,0,200)$ $F(0,140,0)$ $G(0,140,-300)$

$H(480,0,-150)$

*Nota: Todas las coordenadas están en $mm$.*

Ahora, podemos determinar los vectores fuerza y radio vectores:

$$\boldsymbol{F} = -(350\ N)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{T}_{BE} = T_{BE}\boldsymbol{\lambda}_{BE} = \frac{-480\boldsymbol{i} + 200\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-480)^2 + 200^2}}T_{BE} = \frac{T_{BE}}{520}(-480\boldsymbol{i} + 200\boldsymbol{k}) = \frac{T_{BE}}{13}(-12\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{T}_{CF} = T_{CF}\boldsymbol{\lambda}_{CF} = \frac{-480\boldsymbol{i}}{480}T_{CF} = -T_{CF}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{T}_{DG} = T_{DG}\boldsymbol{\lambda}_{DG} = \frac{-480\boldsymbol{i} + 140\boldsymbol{j}}{\sqrt{(-480)^2 + 140^2}}T_{DG} = \frac{T_{DG}}{500}(-480\boldsymbol{i} + 140\boldsymbol{j}) = \frac{T_{DG}}{25}(-24\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{r}_{AB} = (480\boldsymbol{i})\ mm$$

$$\boldsymbol{r}_{AC} = (480\boldsymbol{i} + 140\boldsymbol{j})\ mm$$

$$\boldsymbol{r}_{AD} = (480\boldsymbol{i} - 300\boldsymbol{k})\ mm$$

$$\boldsymbol{r}_{AH} = (480\boldsymbol{i} - 150\boldsymbol{k})\ mm$$

Por sumatoria de momentos respecto al punto $A$:

$$\Sigma\boldsymbol{M}_A = 0$$

$$\frac{T_{BE}}{13}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 480 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 5 \end{vmatrix} + T_{CF}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 480 & 140 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{T_{DG}}{25}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 480 & 0 & -300 \\ -24 & 7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 480 & 0 & -150 \\ 0 & -350 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\frac{2400}{13}T_{BE}\boldsymbol{j}+140T_{CF}\boldsymbol{k}+288T_{DG}\boldsymbol{j}+\frac{672}{5}T_{DG}\boldsymbol{k}+84T_{DG}\boldsymbol{i}-168{,}000\boldsymbol{k}-52{,}500\boldsymbol{i}=0$$

$$\begin{cases} 84T_{DG}=52{,}500 \\ -\frac{2400}{13}T_{BE}+288T_{DG}=0 \\ 140T_{CF}+\frac{672}{5}T_{DG}=168{,}000 \end{cases}$$

Resolviendo simultáneamente:

$T_{BE}=975\ N$ , $T_{CF}=600\ N$ y $T_{DG}=625\ N$

Por último:

$$\Sigma\boldsymbol{F}=0$$

$$\boldsymbol{T}_{BE}+\boldsymbol{T}_{CF}+\boldsymbol{T}_{DG}+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{A}=0$$

$$\frac{T_{BE}}{13}(-12\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k})-T_{CF}\boldsymbol{i}+\frac{T_{DG}}{25}(-24\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j})-350\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}=0$$

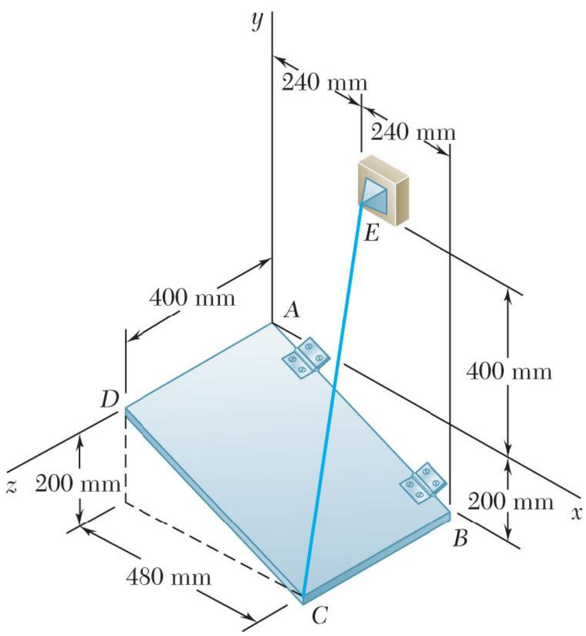
$$\frac{975}{13}(-12\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k})-600\boldsymbol{i}+\frac{625}{25}(-24\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j})-350\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}=0$$

$$75(-12\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k})-600\boldsymbol{i}+25(-24\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j})-350\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}=0$$

$$-900\boldsymbol{i}+375\boldsymbol{k}-600\boldsymbol{i}-600\boldsymbol{i}+175\boldsymbol{j}-350\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}=0$$

$$\boldsymbol{A}=(2{,}100\boldsymbol{i}+175\boldsymbol{j}-375\boldsymbol{k})\ N$$

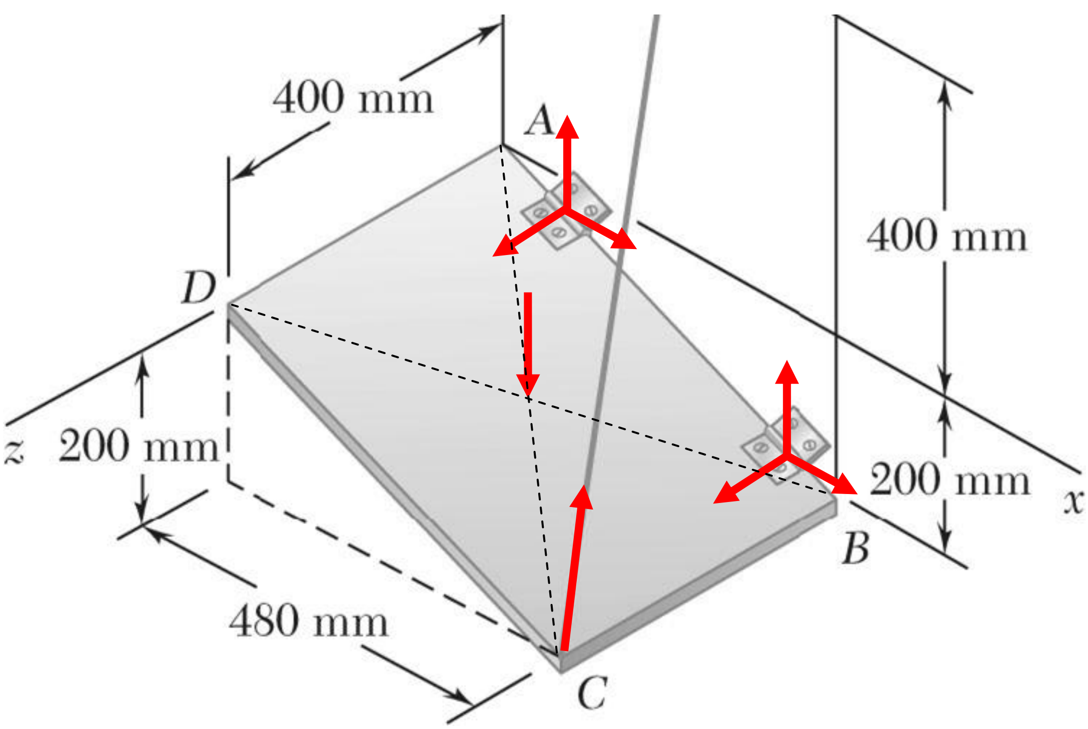
## Problema 6.5




La placa *ABCD* de 50 kg se sostiene por medio de bisagras a lo largo del borde *AB* y mediante el alambre *CE*. Si se sabe que la placa es uniforme, determine la tensión en el alambre.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre



Como puede apreciarse en el diagrama de cuerpo libre podemos realizar una sumatoria de momentos con respecto al eje que pasa por el lado $AB$ de la placa y así nos quedaría únicamente una ecuación con una incógnita; previamente definiremos al vector unitario en la dirección del eje $AB$, los radio vectores que van del punto $A$ al punto de aplicación $E$ del peso $\boldsymbol{W}$ de la placa y de la tensión $\boldsymbol{T}$ en $C$ y, los vectores fuerza $\boldsymbol{W}$ y $\boldsymbol{T}$.

$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{480\boldsymbol{i} - 200\boldsymbol{j}}{\sqrt{480^2 + (-200)^2}} = \frac{480\boldsymbol{i} - 200\boldsymbol{j}}{520} = \frac{12}{13}\boldsymbol{i} - \frac{5}{13}\boldsymbol{j} = \frac{1}{13}(12\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{r}_{AC} = (480\boldsymbol{i} - 200\boldsymbol{j} + 400\boldsymbol{k})\, mm$$

$$\boldsymbol{r}_{AE} = (240\boldsymbol{i} - 100\boldsymbol{j} + 200\boldsymbol{k})\, mm$$

$$\boldsymbol{W} = -(50\ kg)\left(9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}\right)\boldsymbol{j} = (-490\ \boldsymbol{j})N$$

$$\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{\lambda}_{CE} = T\frac{-240\boldsymbol{i} + 600\boldsymbol{j} - 400\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-240)^2 + 600^2 + (-400)^2}} = \frac{T}{19}(-6\boldsymbol{i} + 15\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k})$$

Ahora, la sumatoria de momentos con respecto al eje $AB$:

$$\frac{T}{(19)(13)}\begin{vmatrix} 12 & -5 & 0 \\ 480 & -200 & 400 \\ -6 & 15 & -10 \end{vmatrix} + \frac{1}{13}\begin{vmatrix} 12 & -5 & 0 \\ 240 & -100 & 200 \\ 0 & -490 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{T}{19}\begin{vmatrix} 12 & -5 & 0 \\ 480 & -200 & 400 \\ -6 & 15 & -10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & -5 & 0 \\ 240 & -100 & 200 \\ 0 & -490 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{-60{,}000}{19}T + 1{,}176{,}000 = 0$$

$$T = \frac{1{,}176{,}000}{\frac{-60{,}000}{19}} = \frac{1{,}862}{5}\ N$$

$$T = 372.4\ N$$

# Comentarios finales

Es importante tomar en cuenta que en todos los cursos de *mecánica,* la solución de problemas es parte importante del *proceso de aprendizaje*. Por tanto, el alumno deberá estar conciente de que sus estudios se dividirán en forma natural en dos partes: primero, comprender el desarrollo lógico de los conceptos, y segundo, aplicar esos conceptos a situaciones prácticas. Lo primero se logra estudiando las deducciones, explicaciones y ejemplos, y la segunda parte se logra resolviendo los problemas propuestos. Los problemas que se trabajan en el curso pueden ser de carácter *numérico* o de carácter *simbólico* (*algebraico*).

En los *problemas numéricos* las magnitudes de todas las cantidades son evidentes en cada etapa de los cálculos y se requiere trabajar con unidades específicas de medida (sistemas de unidades). Por su parte, los *problemas simbólicos* tienen la ventaja de que conducen a expresiones matemáticas de aplicación general; una solución algebraica muestra la forma en la que cada variable afecta los resultados.

# Bibliografía


- Beer, Johnston, Mazurek, Eisenberg "*MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS" Estática* 9ª Edición McGraw-Hill, México 2010
- http://www.mhhe.com/beerjohnston
- http://highered.mcgraw-ill.com/sites/0073529400/information_center_view0/