# MICROECONOMÍA I

## NOTAS DE CLASE

**UNIDAD 2: La teoría del consumidor**

**2.1.- Función de utilidad y restricción presupuestaria**

**2.1.1.- Las preferencias y sus axiomas**

Por lo general, todos los individuos consumen bienes y/o servicios con la finalidad de satisfacer determinadas necesidades. Naturalmente, cada uno lo hace en función a sus gustos propios o preferencias. De hecho, serán estas preferencias las que guiarán su elección entre diversas combinaciones alternativas de bienes que existen en toda economía.

Formalizando lo anterior, se va a denominar al conjunto de bienes que el consumidor elije como *cestas de consumo*.

Una cesta de consumo es aquella lista de bienes y servicios que pueden ser consumidor en determinado momento del tiempo, en ciertas circunstancias y en algún lugar. Dado que en la economía existen un número infinito de bienes, se puede hacer un supuesto práctico y asumir que existen únicamente dos cestas de consumo: $(x_1, x_2)$ y $(y_1, y_2)$, donde $x$ e $y$ toman valores no negativos. Ambas cestas, pueden ser ordenadas por el individuo según su atractivo.

Tal como se puede apreciar en la diapositiva correspondiente, utilizando operadores lógicos (xxx) es posible establecer que los individuos pueden decidir que una de las cestas es estrictamente mejor que la otra o que le son indiferentes.

En ese sentido, con la finalidad de que exista compatibilidad y no haya incoherencias en las decisiones que puedan mostrar los individuos, los economistas desarrollaron axiomas de las preferencias:

(i) Completitud: el consumidor puede expresar indiferencia o preferencia entre cualquier par de cestas de bienes por muy semejantes o diferentes que sean.

(ii) Reflexividad: se supone que cualquier cesta es al menos tan buena como ella misma. Es decir, cualquier cesta de bienes es preferida o indiferente a sí misma. “Asegura” que cada cesta de bienes pertenece al conjunto de indiferencia formado por, al menos, ella misma.

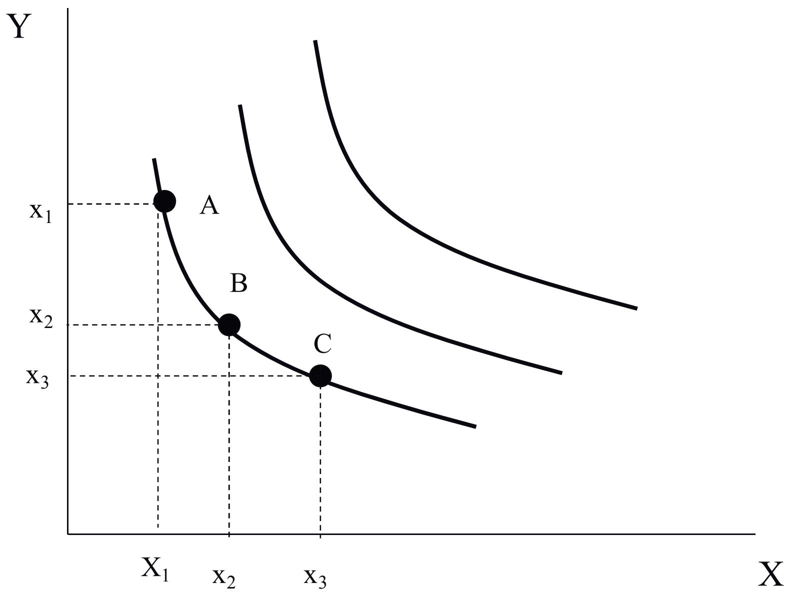
(iii) Transitividad: si $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ y $(y_1, y_2) \succsim (z_1, z_2)$, suponemos que $(x_1, x_2) \succsim (z_1, z_2)$. Es decir, si el consumidor piensa que la cesta *X* es al menos tan buena como la cesta *Y* y que la cesta *Y* es al menos tan buena como la *Z*, piensa que la *X* es al menos tan buena como la *Z*.

**2.1.2.- Las curvas de indiferencia**

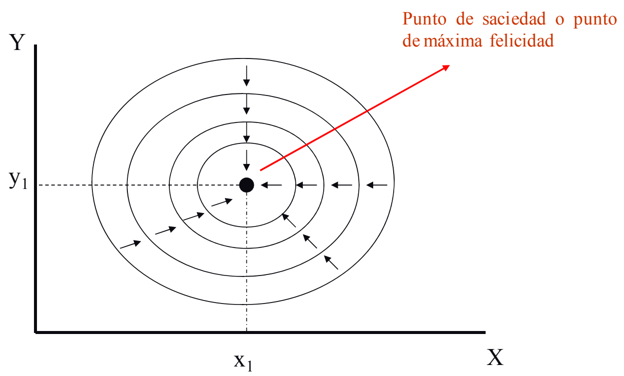
Teoría de la elección del consumidor puede formularse en función de preferencias que satisfagan los tres axiomas descritos antes, además de algunos supuestos más técnicos. Sin embargo, resulta útil describirlas mediante "curvas de indiferencia".

El concepto de curva de indiferencia supone la existencia de una persona (el consumidor) que se enfrenta a infinitas combinaciones de bienes *x* e *y*, y que expresa su preferencia ante estas combinaciones.
En ese sentido, una curva de indiferencia reflejará únicamente aquellas combinaciones de bienes *x* e *y* que le dan el mismo grado de satisfacción o utilidad. Para ello, se hacen los siguientes supuestos: (i) información completa y que bienes son perfectamente divisibles; (ii) se trata de un análisis estático; (iii) la función de utilidad del consumidor (utilidad que obtiene de cualquier combinación de *x* e *y*) es independiente de las funciones de utilidad de otros consumidores.

Tal como se muestra en el gráfico siguiente, las curvas de indiferencia son: (i) asintóticas (es decir, no tocan los ejes, asumiéndose con ello, dispensabilidad de los bienes); (ii) son de pendiente negativa, lo que permite reflejar escasez; (iii) son convexas respecto del origen; y, (iii) no se cruzan (satisfacen el axioma de transitividad).




Adicionalmente, como se verán en las diapositivas respectivas, se tendrán curvas de indiferencia típicas y atípicas. Pero en general, A veces interesa considerar una situación de ***saciedad***, en la que hay una cesta global mejor para el consumidor y cuanto "más cerca" se encuentre de ésta, mejor será su bienestar, en función de sus preferencias; y que cuanto "más lejos" esté de ella, menor su bienestar.

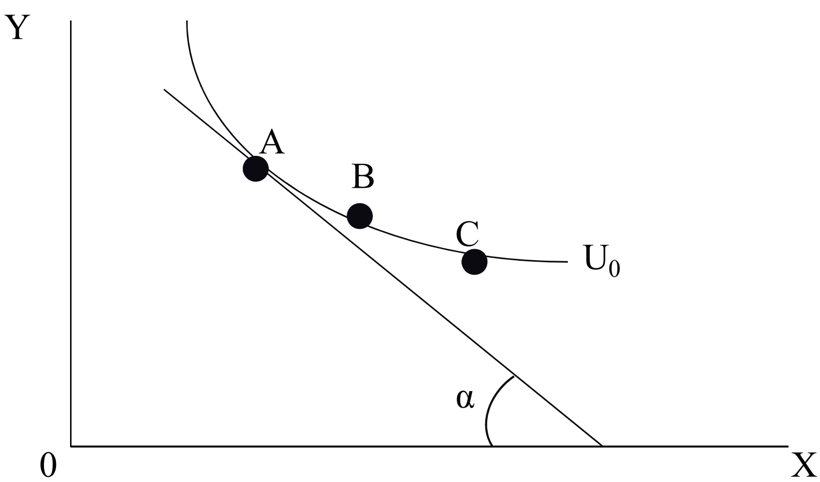



### 2.1.3.- La utilidad marginal y la tasa marginal de sustitución

Las preferencias del consumidor son la descripción fundamental para analizar la elección, y la ***utilidad*** no es más que una forma de describirlas. Así, una función de utilidad se entiende como un instrumento para asignar un número a todas las cestas posibles tal que las que se prefieren tengan un número más alto que las que no se prefieren.

La utilidad puede ser ordinal (permite determinar el "puesto" relativo que ocupan las diferentes cestas de consumo; la magnitud de la diferencia de utilidad entre dos cestas de consumo cualesquiera no importa) y cardinal (considera importante la magnitud de la utilidad. Se supone que la magnitud de la diferencia de utilidades entre dos cestas tiene algún significado. Sin embargo, la utilidad cardinal no es necesaria para describir las elecciones de los consumidores -además de no existir método alguno que permita asignar utilidades cardinales). Entonces, nos quedamos con modelo de utilidad puramente ordinal.

Por su parte, la Tasa Marginal de Sustitución (TMS) viene representada por la tangente del ángulo α en el punto A (ver siguiente gráfico). Si se intercambia *y* para recibir más *x*, entonces se avanza imaginariamente de A a B, al hacerlo, el ángulo se hace cada vez menor: TMS B < TMS A. Es decir, la tasa es aún menor. La TMS mide la relación en que el consumidor está dispuesto a sustituir un bien por el otro. Asimismo, la TMS es decreciente, lo que explica la convexidad de la curva de indiferencia.



Dado que sólo importa la ordenación de las cestas de bienes, no puede haber una sola manera de asignarles utilidades.

Si $u(x_1, x_2)$ representa una forma de asignar cifras de utilidades a las cestas $(x_1, x_2)$, multiplicar $u(x_1, x_2)$ por 2 (o por cualquier número positivo) es una forma igualmente buena de asignarlas. Transformación monótona: transformar una serie de números tal que se mantenga el orden de éstos.

Normalmente, las transformaciones monótonas se representan mediante una función $f(u)$ que cambia "*u*" por algún otro $f(u)$, de tal manera que se mantiene el orden de los números en el sentido de que $u_1>u_2$ implica $f(u_1)>f(u_2)$. Por lo tanto, una transformación monótona y una función monótona son esencialmente lo mismo.

Matemáticamente, para derivar la TMS, sea la función de utilidad: $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las cantidades de los "n" bienes consumidos, la utilidad marginal del bien $x_1$ viene dada por la función: $Umg_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ . Luego, se puede escribir la derivada total de $U$ como:

$$= Umg_{x_1} \cdot dx_1 + Umg_{x_2} \cdot dx_2 + \cdots + Umg_{xn} \cdot dx_n$$

$$dU = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

es decir, la sumatoria de la "utilidad adicional aportada" por cada uno de los "incrementos". Luego:

$$dU = 0$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot dx_n = Umg_{x_1} \cdot dx_1 + Umg_{x2} \cdot dx_2 = 0$$

$$-\left.\frac{dY}{dX}\right|_{U=constante} = \frac{Umg_{x_1}}{Umg_{x_2}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

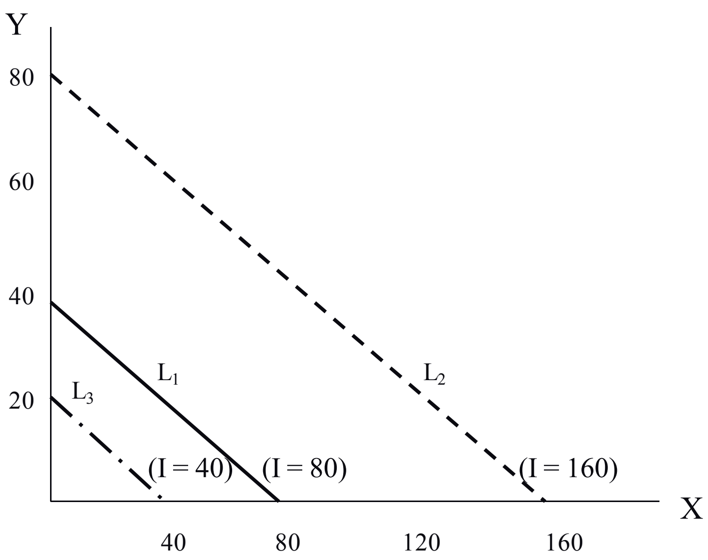
Dado lo anterior, se tendrá que: (i) la TMS de bienes sustitutos perfectos: -1; (ii) la TMS de bienes neutrales: infinita en todos los puntos; (iii) la TMS de bienes complementarios: 0 – infinito; (iv) la convexidad de las curvas de indiferencia típicas no depende de la utilidad marginal decreciente, pues es más bien la tasa marginal de sustitución la que determina su forma y esta tasa depende de la relación entre las utilidades marginales de cada bien; (v) se puede ver que el concepto de utilidad marginal es cardinal (está definido en términos de útiles), mientras que la TMS es ordinal (refleja una relación); y, (vi) existe la "ley de utilidad marginal decreciente": mayores unidades adicionales de X o de Y, si se mantiene constante la cantidad del otro bien, lleva a un aumento cada vez menor de la utilidad.

### 2.1.4.- La restricción presupuestaria

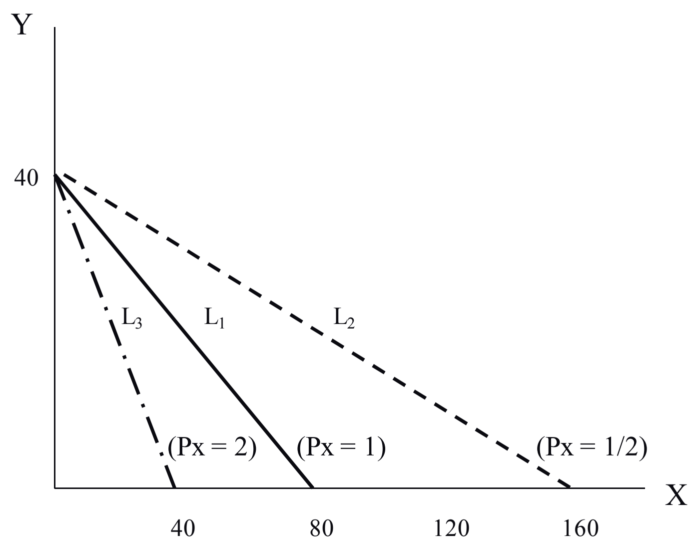
Economistas suponen que consumidores eligen la mejor cesta de bienes que pueden adquirir. Para esto tenemos que describir con mayor precisión qué entendemos por "mejor" y por "poder adquirir".

Supongamos que consumidor puede consumir sólo 2 bienes: una cesta de consumo ($x_1$, $x_2$). Supongamos además que conocemos sus precios ($p_1$, $p_2$). Suponemos también que gasto del consumidor es efectivamente su ingreso. Entonces, la restricción presupuestaria quedará definida como: $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ .

Ante aumentos o disminuciones de la renta nominal, manteniendo constante los niveles de los precios, la recta presupuestaria, se expande o contrae, manteniendo su pendiente.




Por su parte, de mantenerse constante el ingreso nominal, y si cambian los precios relativos de los bienes, se producen cambios en la pendiente de la recta presupuestaria.



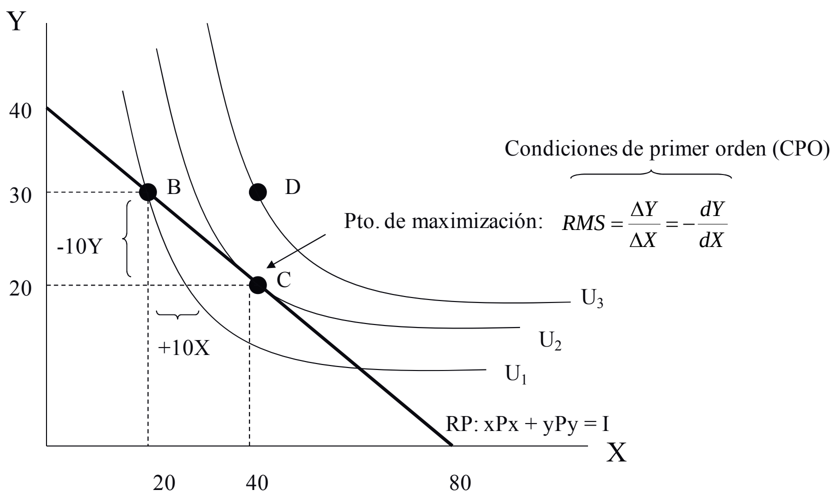

Algunas aplicaciones: (i) ¿Cómo afecta un impuesto sobre la cantidad a la recta presupuestaria del consumidor?: Desde el punto de vista del consumidor, el impuesto supone lo mismo que un precio más alto. Entonces: impuesto de *t* soles por unidad del bien 1 altera el precio de dicho bien, $p_1$, que ahora es $p_1 + t$, es decir implica que recta presupuestaria debe ser más inclinada; (ii) ¿Cómo afecta un impuesto sobre el valor (ad valorem)?: se trata de impuesto sobre el precio del bien y no sobre la cantidad que se compra de él. Suele expresarse en términos porcentuales (IGV). Si el bien 1 tiene un precio de $p_1$, pero está sujeto a un impuesto *ad valorem* $t$, el consumidor tiene que pagar: $(1+t)p_1$, $p_1$ al oferente y $tp_1$ al Estado; y, (ii) ¿si el impuesto es de cuantía fija?: el Estado se lleva una cantidad fija de dinero, independientemente de la conducta del individuo. Una tasa fija desplaza la recta presupuestaria hacia adentro debido a que disminuye la recta presupuestaria.

Alternativamente, (i) ¿Cómo afecta una subvención (subsidio) a la cantidad a la recta presupuestaria?: el Estado da una cantidad de dinero al consumidor que dependerá de la cantidad que compre del bien. Entonces: si subvención fuera de *s* soles por unidad de consumo del bien 1, desde el punto de vista del consumidor, el precio de dicho bien sería $p_1 - s$, es decir, la recta presupuestaria será más horizontal; (ii) ¿Cómo afecta una subvención sobre el valor *(ad valorem)*?: se trata de una subvención basada en el precio del bien subvencionado. Si el bien 1 tiene un precio de $p_1$, y está sujeto a una subvención *ad valorem s*, el consumidor tiene que pagar: $(1-s)p_1$; y, (iii) ¿si la la subvención es el de cuantía fija?: se desplaza la recta presupuestaria hacia afuera.

## 2.2.- Maximización de utilidad

### 2.2.1.- La maximización de utilidad – Primal

El siguiente gráfico muestra describe el proceso de maximización de utilidad del consumidor. Como se puede ver, en el punto C, de tangencia de la recta presupuestaria y la curva de indiferencia, se constituye el punto de maximización, punto en el que se dan las condiciones de primer orden. En dicho punto, la TMS (es decir, la tasa a la que está dispuesto a intercambiar un bien por otro el consumidor) se iguala con la pendiente de la recta presupuestaria o el ratio de precios (es decir, con la relación de intercambio que le ofrece al consumidor el mercado).




Matemáticamente, y generalizando para n bienes, el proceso de maximización consiste en:

$$Maximizar \quad Utilidad = U(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$sujeta\ a\ la\ restricción\ presupuestaria:$$

$$I = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$
$$o$$
$$I - p_1x_1 - p_2x_2 - ... - p_nx_n = 0$$

Se expresa el lagrangiano y las condiciones de primer orden:

$$L = U(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - ... - p_nx_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$
$$\circ$$
$$\circ$$
$$\circ$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 - ... - p_nx_n = 0$$

Dichas ecuaciones son necesarias pero no suficientes para alcanzar un máximo. Supuesto de RMS decreciente es suficiente para garantizar que cualquier punto que cumplan las ecuaciones es un máximo. Las CPO se pueden generalizar para dos bienes cualquiera: $x_i$ y $x_j$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j}$$

Pero sabemos que: RMS ($x_i$ por $x_j$) = $\frac{p_i}{p_j}$

Luego, la interpretación de multiplicador lagrangiano: se puede considerar como la utilidad adicional de gasto en consumo (la utilidad marginal de la renta).

$$\lambda = \frac{\partial u / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial u / \partial x_2}{p_2} = \cdots = \frac{\partial u / \partial x_n}{p_n}$$
$$\lambda = \frac{Umg_{x_1}}{p_1} = \frac{Umg_{x_2}}{p_2} = \cdots = \frac{Umg_{x_n}}{p_n}$$

Lo anterior puede reescribirse como: $p_i = \frac{Umg_{x_i}}{\lambda}$ para cada bien *i* que compra.

Sin embargo, pueden haber casos en los que se tienen funciones de utilidad atípicas que generan soluciones de esquina, lo que genera que las condiciones de primer orden tengan que alterarse:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i \leq 0 \qquad (i = 1,2,...n)$$

$$y \ si: \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0$$

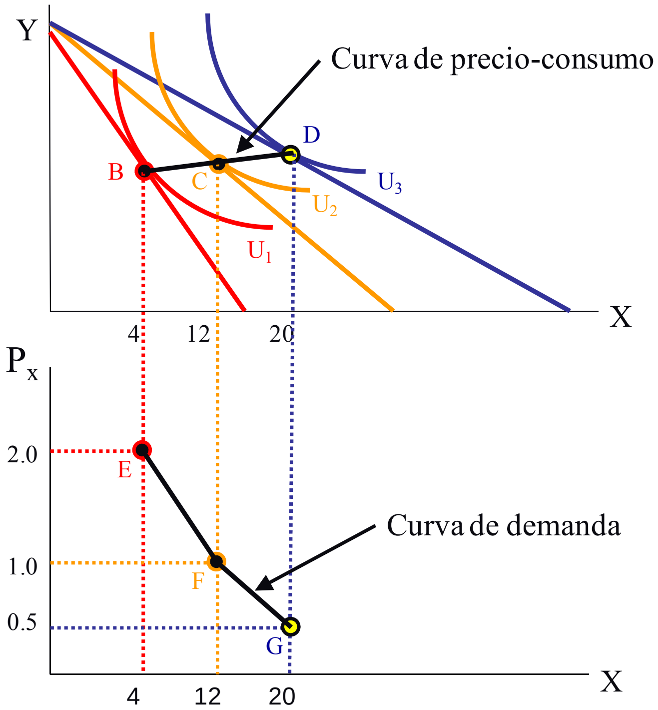
$$lo \ cual \ \ puede \ \ reescribirse \ \ como:$$

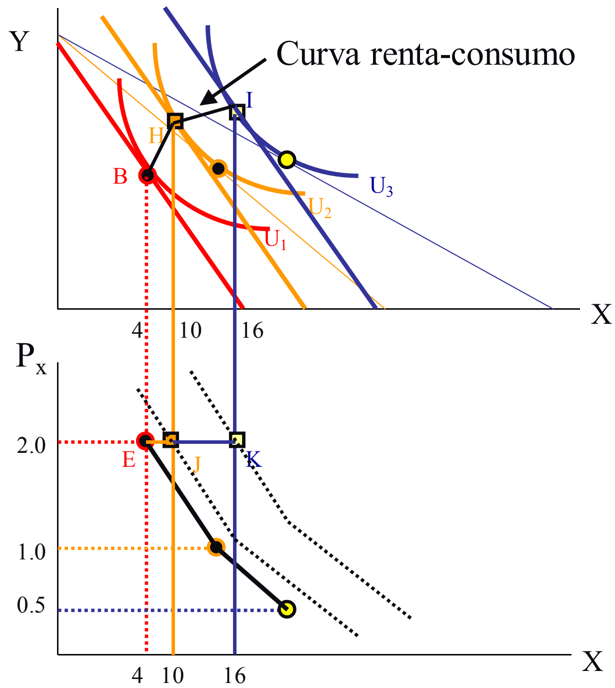
$$p_i > \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\lambda} = \frac{Umg_{x_i}}{\lambda}$$

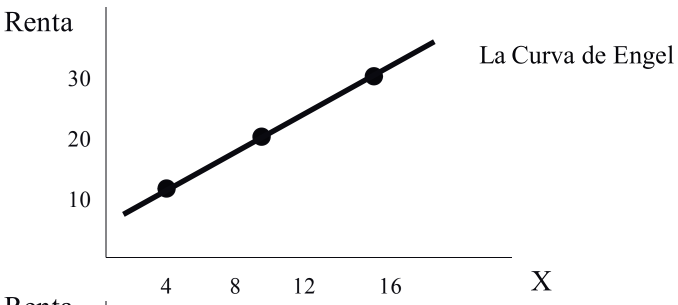
Por lo tanto, las condiciones para el óptimo son similares que antes, excepto que, para cualquier bien cuyo $p_i$ sea mayor que su valor marginal para el consumidor, este no será adquirido. Es decir, consumidores no compran aquellos bienes que consideran que no valen su precio.

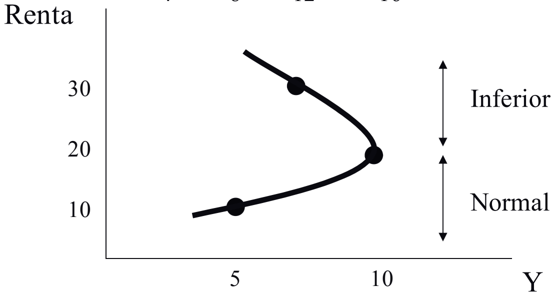
### 2.2.2.- Curva de Engel y curva consumo precio

La curva consumo precio se forma al unir los puntos de maximización ante cambios únicamente en el precio de uno de los bienes. Por su parte, la curva de Engel o curva consumo – renta se forma al unir los puntos de maximización ante cambios únicamente en la renta. Esta última curva puede ser de pendiente positiva, lo que describe una relación directa entre consumo e ingreso (bienes normales) o de pendiente negativa, lo que describe una relación inversa entre consumo e ingreso (bienes inferiores), tal como se muestra en los siguientes gráficos.


Y
Curva de precio-consumo
D
B
C
$U_3$
$U_2$
$U_1$
X
4
12
20
$P_x$
2.0
E
Curva de demanda
1.0
F
0.5
G
X
4
12
20


Y
Curva renta-consumo
I
H
B
$U_3$
$U_2$
$U_1$
X
4
10
16
$P_x$
2.0
E
J
K
1.0
0.5
X
4
10
16




## 2.3.- Funciones de demanda

### 2.3.1.- Función de demanda ordinaria (o Walrasiana)

**LA FUNCIÓN DE DEMANDA WALRASIANA**

Dado un consumidor con una función de utilidad $U = U(x_1, x_2, ..., x_l)$ Un ingreso monetario R y un vector de precios $p = [p_1, p_2, ..., p_l]$ Una función de demanda ordinaria $X^D(p,R)$ es una función que le asigna una canasta específica $X^D = [x_1^D, x_2^D, ... x_l^D]$ a cada par precio – ingreso (p,R), de tal manera que el consumidor está maximizando su utilidad en cada momento.

Dos propiedades de la función de demanda ordinaria o Walrasiana:

Primero: La función de demanda $X^D(p,R)$ es homogéna de grado cero, es decir: $X^D(\alpha p, \alpha R) = X^D(p,R)$, para cualquier p, R y α > 0.

Segundo: La función de demanda $X^D(p,R)$ satisface la ley de Walras, es decir, $pX^D = R$. Ya que $pX^D$ representa el gasto que realiza el consumidor con la canasta óptima: $pX^D = p_1 x_1^D + p_2 x_2^D + ... + p_l x_l^D$

En consecuencia, esta propiedad dice que cuando el consumidor elige la canasta óptima, está gastando todo su ingreso.

**LA FUNCIÓN DE DEMANDA INVERSA**

Si, a partir de la ecuación de la curva de demanda Marshalliana $x_h^D = D_h(p_h, \alpha)$ se despeja el precio en función de la cantidad consumida, se obtiene:

$$p_h = D_h^{-1}(x_h, \alpha) = p_h(x_h)$$

Esta función de demanda inversa del bien “h” dice cuál es el máximo precio que el consumidor está dispuesto a pagar para que acepte adquirir una cierta cantidad del bien “h”

**CÁLCULO DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA ORDINARIA A PARTIR DE LAS FUNCIONES DE UTILIDAD**

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

$$TMS_{1,2} = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$Umg_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha}$$

$$Umg_2 = (1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\alpha}$$

$$TMS_{1,2} = \frac{\alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \frac{p_2 x_2}{p_1 x_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \qquad \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 x_1} = \frac{R}{p_1 x_1} = \frac{\alpha + 1 - \alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\alpha R}{p_1} = D_1(p_1, p_2, R)$$

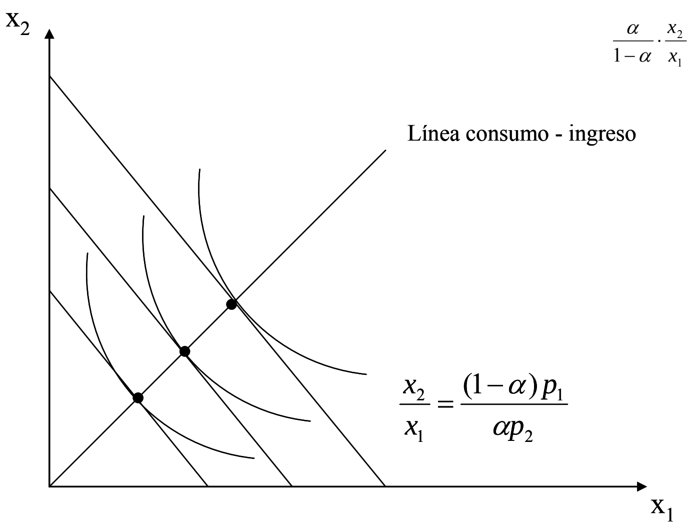
$$\Rightarrow x_2 = \frac{(1-\alpha)R}{p_2} = D_2(p_1, p_2, R)$$

Curva de demanda ordinaria depende exclusivamente del ingreso y del precio del bien en cuestión. El precio del bien 2 no afecta la demanda del bien 1 y viceversa.

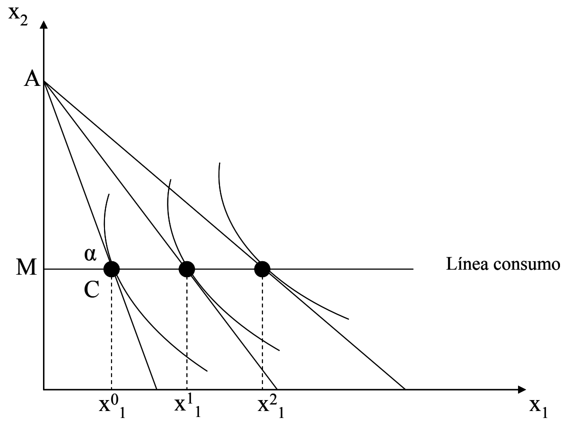
La forma funcional de las funciones de demanda es exponencial, pero con exponentes unitarios. Puesto que el precio aparece con exponente -1, c/u de las curvas de demanda tiene la forma de una hipérbola equilátera.

**PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA ORDINARIAS**

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}$$



$$G_1 = p_1 x_1 = p_1 D_1(p_1, p_2, R) = p_1 \cdot \frac{\alpha R}{p_1} = \alpha R \qquad G_2 = p_2 x_2 = p_2 D_2(p_1, p_2, R) = p_2 \cdot \frac{(1-\alpha)R}{p_2} = (1-\alpha)R$$




Sea el ángulo ACM, cuya tangente:

$$Tg\alpha = \frac{p_1^0}{p_2^0} = \frac{AM}{x_1^0} \Rightarrow AM = \frac{p_1^0 x_1^0}{p_2^0}$$

El segmento AM representa el gasto que el consumidor realiza en el bien 1, expresado en unidades del bien 2. Si el gasto que el consumidor realiza en el bien 1 es siempre una fracción α del ingreso R, entonces:

$$AM = \frac{\alpha R}{p_2^0}$$

Por lo tanto, mientras ingreso y precio del bien 2 se mantengan constantes, la longitud del segmento AM se va a mantener constante.

### 2.3.2.- Función de demanda compensada (o Hicksiana)

En la curva de demanda ordinaria, ante cambios en precio de un bien, *ceteris paribus*, actúan 2 efectos: (i) el efecto precio o efecto sustitución: bien en análisis se encarece o abarata relativamente respecto de los demás bienes, y su demanda se ve afectada por la presencia de bienes sustitutos o complementarios; y, (ii) efecto ingreso: ingreso real cambia en sentido inverso a variación del precio.

Por lo tanto, la curva de demanda compensada o hicksiana es aquella curva que únicamente considera el efecto precio, eliminando el efecto ingreso a través de un proceso de compensación. Por lo tanto, se tiene: $\Delta x_k = \Delta^P x_k + \Delta^R x_k$, Donde $\Delta^P$ y $\Delta^R$ representan las variaciones producidas por los efectos precio e ingreso, respectivamente. La primera variación requiere que el ingreso real del consumidor se mantenga constante, para que el cambio en su decisión de consumir el bien k sea únicamente el resultado de una variación en el precio relativo de este bien. Mantener constante el ingreso del consumidor implica darle una compensación monetaria en sentido contrario al cambio que ha experimentado su ingreso real.

## 2.4.- Dualidad

### 2.4.1.- Función de utilidad indirecta

Los ejercicios anteriores ilustran el principio que es posible manipular las CPO de un problema de maximización de utilidad con restricciones para calcular los valores óptimos de $x_1, x_2,\ldots,x_n$. Estos dependerán, por lo general, de los precios de todos los bienes y de la renta del individuo:

$$x_1^* = x_1(p_1, p_2, p_n, I)$$
$$x_2^* = x_2(p_1, p_2, p_n, I)$$
$$\circ$$
$$\circ$$
$$\circ$$
$$x_n^* = x_n(p_1, p_2, p_n, I)$$

Ahora bien, dichos valores óptimos pueden ser reemplazados en la función de utilidad inicial:

$$\begin{aligned} Utilidad &= U(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \\ &= U(x_1^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I), x_2^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I), \ldots, x_n^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) \\ &= V(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) \end{aligned}$$

Entonces, el nivel de utilidad óptimo alcanzable dependerá indirectamente de los precios de los bienes que se compran y de la renta del individuo.

Formalizando: dado un consumidor con una función de utilidad U=U(X), donde X es el vector de consumos [$x_1$, $x_2$, …, $x_l$], la función de utilidad indirecta de este consumidor es una función V(p,R), que le asigna un nivel específico de utilidad a cada par precio-ingreso, de tal manera que el consumidor siempre está alcanzando el máximo de utilidad que le permite su restricción presupuestaria.

Básicamente, 3 propiedades: (i) Homogénea de grado cero; (ii) Estríctamente creciente con respecto a R y no creciente con respecto a $p_h$, para cualquier h; y, (iii) Identidad de Roy: $x_h(p,R) = -\dfrac{\frac{\partial V(p,R)}{\partial p_h}}{\frac{\partial V(p,R)}{\partial R}} \quad \forall h = 1,\ldots,l$

A medida que disminuye $p_x$, se da una descompensación de la renta, de forma que se evita que aumente la utilidad. En otras palabras, los efectos de la variación del precio sobre el poder adquisitivo se “compensan” para obligar a que el individuo permanezca en U.

Las reacciones a la variación del precio incluyen únicamente efectos sustitución.

A medida que aumente el $p_x$, la compensación de la renta sería positiva: habría que elevar la renta de este individuo para permitirle permanecer sobre la curva de indiferencia U en respuesta al incremento del precio.

Una curva de demanda compensada (o Hicksiana) muestra la relación entre el precio de un bien y la cantidad adquirida partiendo del supuesto de que los demás precios y la utilidad se mantienen constantes. Por tanto, la curva únicamente muestra los efectos sustitución:

### 2.4.2.- Minimización del gasto

Los problemas de maximización con restricciones tienen un problema "dual" asociado de maximización con restricciones. Para el caso de la maximización de utilidad, el problema dual asociado de minimización trata de asignar la renta de tal forma que se alcance un determinado nivel de utilidad con el gasto mínimo. El problema es análogo al problema "primal" de maximización de utilidad, pero los objetivos y las restricciones se revierten. Primal y dual ofrecen la misma dotación (X*, Y*). Entonces, el planteamiento de minimización de gasto es más útil porque los gastos son observables.

Formulación matemática será:

$$\begin{aligned}&Minimizar\;\; gasto\ total = E = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n\\ &s.a.\\ &\qquad\qquad utilidad = u_2 = u(x_1, x_2 ... x_n)\end{aligned}$$

Por lo tanto, cantidades óptimas: $x_1^*$, $x_2^*$,…, $x_n^*$ dependerá de los precios de los diversos bienes ($p_1$, $p_2$,…, $p_n$) y del nivel de utilidad requerido $u_2$. Entonces, ¿qué ocurre si cualquiera de los precios cambiara, o si el individuo tuviera un "objetivo" de utilidad distinto?: la combinación óptima de bienes sería otra distinta. Esta dependencia se puede resumir en una "función de gasto".

Función de gasto: muestra el ***gasto mínimo*** o necesario para alcanzar un determinado nivel de utilidad para un determinado conjunto de precios.

$$Gasto\ mínimo = E(p_1, p_2, ..., p_n, U)$$

donde, la función de gasto mínimo $E(p_1, p_2, ..., p_n, U)$ es la inversa de la función inversa de utilidad indirecta $V(p_1, p_2, ..., p_n, I)$

Formalizando la **Función de Gasto**: definida como una función e(p,U) que le asigna un nivel determinado de gasto a cada par precio-utilidad (p,U), de tal manera que el consumidor siempre está maximizando el gasto necesario para alcanzar un nivel dado de utilidad con un vector dado de precios.
Básicamente, 3 propiedades:

(i) Homogénea de grado uno con respecto a "p".

(ii) Estrictamente creciente con respecto a U y no decreciente con respecto a p*h*, para cualquier *h*.

(iii) Si $x_h^{DC}$ : demanda compensada o Hicksiana forma parte de la canasta que minimiza el gasto necesario para alcanzar el nivel de utilidad U con el vector de precios p, entonces: Lema de Shepard: $x_h^{DC} = \dfrac{\partial e(p,U)}{\partial p_h} \quad \forall h = 1,...,l$

Entonces:

| **Primal** | | **Dual** |
|---|---|---|
| $Max\ U(x,y)$<br>$s.a.:\ I = p_x x + p_y y$ | | $Min\ E(x,y)$<br>$s.a.: \overline{U} = u(x,y)$ |
| ↓ | **Inversa** | ↓ |
| *Función de utilidad indirecta*<br>$U^* = V(p_x, p_y, I)$ | $\Longleftrightarrow$ | *Función de gasto*<br>$E^* = E(p_x, p_y, U)$ |
| ↓ | | ↓ |
| **Identidad de Roy** | | **Lema de Shepard** |
| $x = d_x(p_x, p_y, I) = -\dfrac{\frac{\partial V}{\partial p_x}}{\frac{\partial V}{\partial I}}$ | | $x = h_x(p_x, p_y, U) = \dfrac{\partial E}{\partial p_x}$ |
| Demanda Marshalliana | | Demanda Compensada |

### 2.4.4.- La ecuación de Slutsky

$$\frac{\partial dx}{\partial p_x} = ES + EI$$

$$= \underbrace{\left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|_{U=cons\tan te}} - \underbrace{x \cdot \frac{\partial x}{\partial I}}$$

ES: siempre negativo en tanto RMS sea decreciente.

El signo del efecto renta $(-x\frac{\partial x}{\partial I})$ depende del signo de $\frac{\partial x}{\partial I}$. Si $x$ es un bien normal, $\frac{\partial x}{\partial I}$ es positivo y todo el efecto Renta, como el efecto sustitución, es negativo. Entonces, para bienes normales, precio y cantidad siempre se mueven en dirección opuesta.

En el caso de un bien inferior, $\frac{\partial x}{\partial I} < 0$ y ES y EI tendrán signos distintos.

Nota: es posible que EI domine ES, lo que genera laparadoja del bien Giffen: $\frac{\partial d_x}{\partial p_x} > 0$

### 2.4.5.- Relaciones de demanda entre bienes

Dos bienes, $x_i$ y $x_j$ son sustitutos si: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$

y complementarios si: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0$

## 2.5.- Elasticidad de demanda

### 2.5.1.- Definición

La elasticidad muestra como reacciona una variable B, *ceteris paribus*, ante un cambio de un 1% de otra variable A.

Matemáticamente, la elasticidad es igual a: $e_{B,A} = \frac{\Delta\% B}{\Delta\% A} = \frac{\partial B}{\partial A} \cdot \frac{A}{B}$

En la elasticidad, la multiplicación de $\frac{\partial B}{\partial A}$ por $\frac{A}{B}$ hace que las unidades desaparezcan y la expresión restante esté totalmente expresada como una proporción.

### 2.5.2.- Elasticidad precio de la demanda

$$e_{q,p} = \frac{\Delta\% Q}{\Delta\% p} = \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{p}{Q}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert e_{q,p} \rvert > 1$ | $e_{Q,p} < -1$ | Elástica |
| $\lvert e_{q,p} \rvert = 1$ | $e_{Q,p} = -1$ | Elásticidad unitaria |
| $\lvert e_{q,p} \rvert < 1$ | $e_{Q,p} > -1$ | Inelástica |

### 2.5.3.- Elasticidad ingreso de la demanda

$$e_{Q,I} = \frac{\Delta\%Q}{\Delta\%I} = \frac{\partial Q}{\partial I} \cdot \frac{I}{Q}$$

Para un bien normal: $e_{Q,I} > 0$ ya que $\frac{\partial Q}{\partial I} > 0$

Para un bien inferior: $e_{Q,I} < 0$ ya que $\frac{\partial Q}{\partial I} < 0$

Si $e_{Q,I} > 1$ pueden llamarse bienes de lujo

Por ejemplo:

Si la $e_{Q,I} = 2$, un incremento de 10% en la renta provocará un incremento del 20% en las compras de automóviles.

Si la $e_{Q,I} = 0.5$, un incremento de 10% en la renta provocará unicamente un incremento de 5% en las compras de alimentos.

### 2.5.4.- Elasticidad cruzada

$$e_{Q,p'} = \frac{\Delta\%Q}{\Delta\%p'} = \frac{\partial Q}{\partial p'} \cdot \frac{p'}{Q} \begin{cases} >0, \text{ sustitutos} \\ <0, \text{ complementarios} \end{cases}$$