Versión impresa ISSN: 0716-7334
Versión electrónica ISSN: 0717-7593

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMÍA

Oficina de Publicaciones
Casilla 76, Correo 17, Santiago
www.economia.puc.cl

**MICROECONOMIA
INTERMEDIA**

Bernardita Vial
Felipe Zurita**

Trabajo Docente Nº 73
VERSIÓN REVISADA

Santiago, Julio 2007

* Los autores agradecen la colaboración de Felipe Varas, y el financiamiento del FONDEDOC 2005.
E-mail: bvial@faceapuc.cl y fzurita@faceapuc.cl

Índice general

Prólogo

El análisis económico descansa metodológicamente en dos pilares: la Teoría de la Decisión, encargada del análisis de las decisiones individuales, y la Teoría del Equilibrio, que estudia el resultado agregado del comportamiento de grupos de individuos. Este curso es una introducción a ambas, con un énfasis especial en su aplicación al estudio del funcionamiento del mercado como mecanismo de asignación de recursos.

La primera parte, entonces, se aboca al problema de la elección individual. El análisis de una decisión o elección por parte de un individuo es una explicación de por qué tomó un curso de acción determinado, habiendo tenido a su disposición cursos de acción alternativos. El primer capítulo muestra que podemos ocupar la optimización matemática para representar el comportamiento individual, siempre que éste satisfaga ciertos requisitos. La optimización enfatiza la idea que lo que cada persona hace es lo mejor que puede hacer en algún sentido, representado por el objetivo atribuido a esa persona. Un axioma distintivo del análisis económico, que cada persona hace lo mejor para sí misma, provee la base de la teoría del bienestar, acaso uno de los puntos más conocidos y controvertidos de la teoría económica. Los capítulos 2 al 4 aplican estos conceptos a la Teoría de la Demanda, mientras los capítulos 5 y 6 lo hacen a la Teoría de la Oferta. El séptimo capítulo vuelve sobre el problema de la elección, pero esta vez tomando en cuenta explícitamente la posibilidad de que quien decide ignore las consecuencias de sus actos, que es el tema de la Teoría de la Incertidumbre. En todos estos temas, la optimización matemática es parte del lenguaje además de constituir una herramienta fundamental; por ello se incluye un apéndice sobre el tema. El curso presupone, entonces, un conocimiento de cálculo a nivel de segundo o tercer año de universidad.

La segunda parte desarrolla la Teoría de la Competencia Perfecta, en la que la dimensión social del comportamiento económico se considera por primera vez. La idea del equilibrio apunta a que los procesos sociales se estabilicen al cabo de un tiempo en arreglos predecibles. El economista analiza en cada conjunto de arreglos imaginables la existencia o ausencia de gérmenes de cambio. Las predicciones de lo que cada situación social produzca últimamente se concentran en arreglos sin gérmenes de cambio, a los que denominamos equilibrios de las situaciones estudiadas. La existencia de innumerables nociones de equilibrio evidencia la dificultad de analizar situaciones sociales, y de encontrar puntos comunes en una amplia gama de situaciones.

En particular, el capítulo 8 desarrolla la noción de equilibrio walrasiano, que los capítulos 9 al 12 aplican al análisis de economías perfectamente competitivas. En un equilibrio walrasiano, ningún consumidor o productor tiene algún poder de negociación que le permita conseguir precios mejores que los de mercado. Por eso, los precios de mercado definen sus posibilidades, y los precios son los encargados de producir el equilibrio en la economía como un todo.

La tercera y última parte aborda el tema de la competencia imperfecta. En una economía imperfectamente competitiva, algunos jugadores pueden tener poder de negociación. El monopolista y el monopsonista, estudiados en el capítulo 13, escogen el (los) precio(s) al (a los) que transan. El oligopolista entiende la influencia de sus decisiones en las de sus competidores. La noción de equilibrio apropiada para el estudio de estas situaciones ya no es la de equilibrio walrasiano, sino la de equilibrio de Nash. El capítulo 14 desarrolla esta noción. El capítulo 15 la aplica al análisis del oligopolio.

El material cubierto corresponde a los cursos de Microeconomía I y II, que los autores han dictado en la Pontificia Universidad Católica de Chile por alrededor de siete años. Si bien existen diversos textos que cubren el material de ambos cursos, algunos son menos profundos, otros menos formales, y otros ponen un menor énfasis en lo analítico que lo requerido. Por ello nos hemos visto en la necesidad de complementar el material exigido para el curso con estos apuntes.

Parte 1

Elección Individual

CAPíTULO 1

Decisiones y Preferencias

Este capítulo presenta un método general para representar el comportamiento de un individuo. Un *individuo* no se refiere solamente a una persona, sino también puede referirse a un grupo u organización en cuyo comportamiento estemos interesados. Por ejemplo, un gobierno o una empresa.

Nos interesa tratar de explicar el comportamiento de un individuo en cuanto nos permite predecirlo, esto es, anticipar lo que hará en situaciones nuevas. Por ejemplo, nos interesa predecir cómo reaccionará el consumidor ante cambios en los precios, cómo reaccionará una empresa ante cambios en la regulación, etc.

Sin embargo, encontrar la razón última del comportamiento de un individuo es una tarea no sólo inconclusa, sino principalmente ajena a la economía. La psicología, la teología y la filosofía, buscan explicaciones sobre diversos aspectos del comportamiento de las personas. La psicología social, la sociología y la ciencia política, sobre el comportamiento de grupos de personas. La economía, en cambio, no busca la razón última del comportamiento, sino que se limita a representarlo.

Así, el individuo "se comporta", es decir, escoge cursos de acción cuando es llamado a hacerlo. No tratamos de explicar por qué se comporta de la manera que lo hace, si su acción fue el resultado de un proceso consciente, razonado, de análisis de lo involucrado en la decisión, o si se trató de una reacción emocional, o una instintiva. Para enfatizar esta indiferencia frente a las causas últimas del comportamiento, muchos autores prefieren hablar de "elección individual", un término más neutro que el de "decisión individual", que sugiere algún nivel de conciencia o razonamiento.

No obstante lo anterior, sí nos importa que el comportamiento sea estable. Esto porque si el proceso que genera elecciones fuese cambiante, la información pasada no sería útil para predecir el efecto de nuevas circunstancias sobre el comportamiento. Además de ello, sería extraordinariamente difícil, si no imposible, verificar las teorías.

1. Axiomas de elección

En su formulación más abstracta, el problema de la decisión se puede representar imaginando un conjunto $\mathcal{A}$ que contiene el universo de acciones que eventualmente el individuo puede tener a su alcance. Un problema de elección particular es el de escoger una de esas acciones, denotadas genéricamente por a, dentro de un conjunto de posibilidades $A \subset \mathcal{A}$. Si a^* es el elemento escogido, decimos que el problema de elección A se resolvió en a^*.

Es importante notar que $\mathcal{A}$ contiene sólo cursos de acción mutuamente excluyentes. Por ejemplo, $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los pares de zapatos que una persona puede llegar a tener, y A representa los que tiene y puede ponerse en una mañana en particular. O bien, $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los paquetes de cursos que un alumno puede escoger en segundo año de la carrera, y A es el subconjunto de esos paquetes que efectivamente está autorizado a tomar en virtud de los cursos que hasta el momento ha aprobado.

Suponemos cierta estructura en la manera en que la persona escoge, que en lo esencial, asume que el individuo es capaz de jerarquizar los elementos de cualquier conjunto A de posibilidades, esto es, jerarquiza los elementos de $\mathcal{A}$. Las acciones en los primeros lugares de la jerarquía son escogidas siempre que sean alcanzables en ese problema de decisión. Así, la acción en el primer lugar de la jerarquía siempre se escoge, salvo que no esté en A. De no estar el primer lugar, se escoge la acción que está en el segundo lugar, salvo que éste tampoco esté. Y así sucesivamente.

La idea de la jerarquía contiene la noción de estabilidad a la que hicimos referencia. Esta estabilidad permite predictibilidad. Mejor dicho, permite imaginar predictibilidad, por cuanto para predecir se necesita conocer la jerarquía. Y la jerarquía se construye observando el comportamiento, por cuanto es sólo una representación de él.

Si efectivamente se puede construir una jerarquía con los elementos de $\mathcal{A}$, entonces sus elementos están ordenados por ella. Este ordenamiento se puede, entonces, representar por medio de una relación entre los elementos de $\mathcal{A}$, a la que llamaremos **relación de preferencias**. En efecto, podemos declarar que la acción a es (débilmente) **preferida** sobre la acción a' (denotado por $a \succsim a'$) cuando a está antes o en el mismo lugar de la jerarquía que a'; y podemos declarar que a es (estrictamente) preferido sobre a' (denotado por $a \succ a'$) cuando a está antes que a' en la jerarquía.

Preferido es en este contexto un sinónimo de escogido: la jerarquía se construyó poniendo antes aquella acción que es escogida por sobre cualquier otra opción por debajo de ella. En cada problema de decisión, entonces, la acción escogida es la "más preferida" de las opciones.

Resumimos esta estructura en los siguientes axiomas sobre la relación $\succsim$, que se define sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, que hacen de $\succsim$ una relación refleja, completa y transitiva, respectivamente:

Axioma 1 (reflexividad). $a \succeq a \qquad \forall a \in \mathcal{A}$

Axioma 2 (completitud). $a \succeq a' \;\; \vee \;\; a' \succeq a \quad \forall a, a' \in \mathcal{A}$

Estos axiomas garantizan que siempre haya una elección: si hay una sola acción disponible, entonces esa es "escogida". Si hay dos o más, una de ellas es escogida.

Observe, además, que el axioma de completitud es el que explícitamente dice que las preferencias no dependen del conjunto de posibilidades, ya que el ordenamiento o jerarquía es el mismo para todo A que contenga los elementos a y a'.

Este axioma no excluye la posibilidad de que simultáneamente $a \succsim a'$ y $a' \succsim a$; en este caso, decimos que a y a' son **indiferentes**, y escribimos $a \sim a'$. Esto significa que están en el mismo lugar de la jerarquía. $\sim$ es una **relación de indiferencia** en $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

Cuando en un problema de decisión hay dos cursos de acción preferidos sobre el resto e indiferentes entre sí, la elección no está determinada. Este tipo de situaciones no ocurre frecuentemente en los modelos que vamos a analizar, y en todo caso, metodológicamente se ha preferido resolver los empates en cada modelo, en su propio mérito, y no al nivel de generalidad que lo analizamos aquí.

Finalmente, tenemos:

Axioma 3 (transitividad). $a \succeq a' \;\; \wedge \;\; a' \succeq a'' \;\Rightarrow\; a \succeq a'' \quad \forall a, a', a'' \in \mathcal{A}$

El axioma 3 es llamado a veces de consistencia o racionalidad. El término **racionalidad** lo ocuparemos en distintos sentidos a lo largo del curso, pero con mayor frecuencia en el sentido presente, a saber, la ausencia de contradicciones internas. Considere el siguiente ejemplo: una persona prefiere más peras a menos, y está indiferente entre las siguientes alternativas:

$$\begin{array}{ccc} \text{tres peras} & \sim & \text{una sandía} \\ \text{una sandía} & \sim & \text{cuatro duraznos} \\ \text{cuatro duraznos} & \sim & \text{cinco peras} \end{array}$$

Si la indiferencia no es transitiva, este ordenamiento es posible. Entonces, si este individuo tiene cinco peras, aceptaría cambiarlas por cuatro duraznos, éstos por una sandía, y ésta por tres peras. La posición final es claramente menos preferida, pese a que nunca aceptó algo menos preferido. Desde la perspectiva de la persona con la cual transó, la inconsistencia de las preferencias de este individuo son una oportunidad de ganancia fácil. El axioma de transitividad, entonces, asume que el comportamiento individual no da cabida a oportunidades de ganancia fácil o arbitraje.

En adelante le llamaremos relación de preferencias a una relación que satisfaga estos axiomas. Una relación de preferencias, entonces, resume todas las decisiones a las que la persona se podría ver enfrentado. En efecto, si se encuentra en el problema de elección A, la persona escoge $a^* = \{a^* : a^* \succsim a \;\; \forall a \in A\}$. a^* es la acción de A que está más alta en la jerarquía.

Al describir el comportamiento de un individuo por medio de su relación de preferencias, se observa nítidamente una de las características distintivas del método económico: el buscar la causa del comportamiento individual en eventuales cambios en sus posibilidades. El individuo modifica su decisión si A cambia, de manera que su comportamiento a^* se explica por A; esto es, a^* es una función de A : $a^*(A)$. La persona, entonces, "responde" a sus posibilidades.

Por otra parte, el hecho de que a^* sea la acción de A que está más alta en la jerarquía, abre la pregunta de si existirá una manera de representar esta decisión como un problema de maximización. Parece natural, dado que a^* "maximiza" la preferencia.

Definición 1. *Decimos que la función*

$$\begin{aligned} u &: \mathcal{A} \to \mathbb{R} \\ &: a \to u(a) \end{aligned}$$

representa *a la preferencia* $\succsim$ *si* $\forall a, a' \in \mathcal{A}$

$$a \succsim a' \;\Leftrightarrow\; u(a) \geq u(a')$$

Cuando una función u como ésta existe, la llamamos **función de utilidad**. De existir esta función de utilidad, por construcción las decisiones provienen de su maximización, es decir,

$$a^*(A) = \{a^* : a^* \succsim a \;\; \forall a \in A\}$$

y

$$a^*(A) = \arg\max_{a \in A} u(a)$$

son maneras equivalentes de expresar la misma idea: no hay supuestos nuevos en esta construcción.

Le llamamos **utiles** a la unidad de medida, o escala, en que esta función está construida. Así, la acción a le genera al individuo $u(a)$ utiles, algún número real.

Sin embargo, la existencia de una función de utilidad que represente una determinada preferencia no está garantizada por estos tres axiomas, para ello es necesario un cuarto axioma. Técnicamente, escribimos:

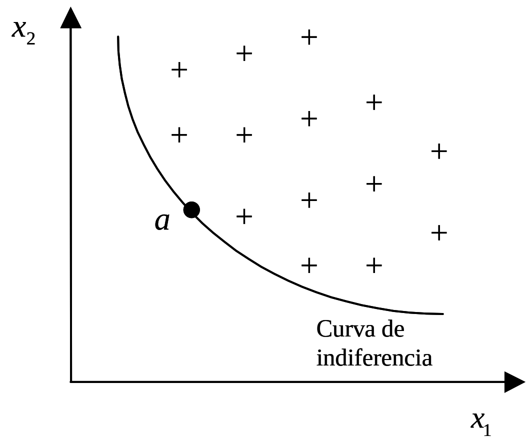


FIGURA 1. El conjunto de lo preferido

AXIOMA 4 (continuidad). *Para toda* $a \in \mathcal{A}$*, los conjuntos* $\{a' : a' \succsim a\}$ *y* $\{a' : a' \precsim a\}$ *son cerrados.*

Para entender qué significa este axioma, recordemos cuál es la característica fundamental de un intervalo cerrado en IR: el intervalo cerrado $I = [a, b]$ se define como $I = \{x \in \text{IR} : a \leq x \leq b\}$, es decir, como el conjunto de todos los puntos comprendidos entre a y b, *incluyendo los límites que definen el intervalo*, $x = a$ y $x = b$ (en cambio, el intervalo abierto no contiene a sus límites).

Análogamente, lo que pide el axioma de continuidad es que los conjuntos $P(a) \equiv \{a' : a' \succsim a\}$ (el conjunto de todas las acciones que son preferidas por sobre a), y $M(a) \equiv \{a' : a' \precsim a\}$ (el conjunto de todas las acciones que son menos preferidas que a) contengan sus puntos límite. Si ello se cumple, entonces los conjuntos $P(a)$ y $M(a)$ contienen acciones a' tales que el individuo está indiferente entre a y a' (lo que denotamos como $a' \sim a$), lo que nos permite graficar curvas de indiferencia como normalmente lo hacemos.

Para ilustrar lo anterior, supongamos que las acciones son canastas de dos bienes, es decir, que $\mathcal{A} = \text{IR}^2_+$ (donde cada $a = (x_1, x_2)$ muestra la cantidad del bien 1 y la cantidad del bien 2 que hay en la canasta respectivamente). Imaginemos que el conjunto de todas las canastas preferidas sobre a es toda el área al nor-este de la curva en la figura 1 (marcada con $+$). Entonces, el límite de ese conjunto es la curva de indiferencia misma (que contiene a todas las canastas a' que cumplen que el individuo está indiferente entre a y a').

Ahora, supongamos que el individuo siempre prefiere consumir más de un bien que menos (no hay saciedad). Para entender por qué si se cumplen

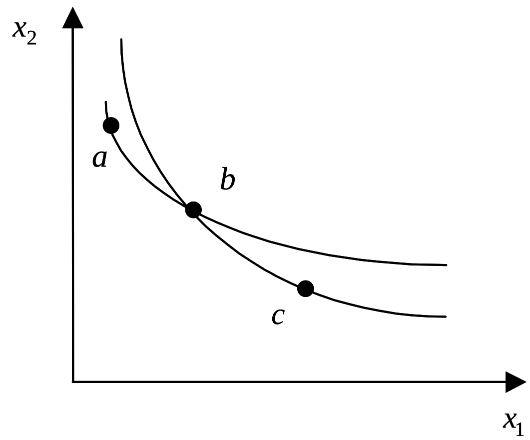


FIGURA 2. Transitividad y Curvas de Indiferencia

los axiomas 1 al 4, las preferencias se pueden representar mediante una función de utilidad, es útil notar que si trazamos una línea de 45° desde el origen, las canastas que están más lejos del origen sobre esa línea siempre son preferidas sobre las canastas que están más cerca del origen (ya que tienen más de ambos bienes). Los axiomas 1, 2 y 4 aseguran que por cada punto en $\mathcal{A}$ pasa una curva de indiferencia. Notemos que el axioma de transitividad indica que estas curvas de indiferencia no se cruzan. Ello, porque si las curvas de indiferencia se cruzaran como muestra la figura 2, tendríamos que $a \sim b$ y $b \sim c$ pero $a \nsim c$, por lo que se violaría el axioma de transitividad.

Más aún, por cada punto en la línea de 45° pasa una curva de indiferencia distinta, y las curvas más lejanas del origen representan canastas que están más arriba en el ordenamiento de preferencias. Todas las canastas tienen que estar sobre alguna curva de indiferencia, que necesariamente tiene que cortar a la línea de 45° en algún punto, como se ilustra en la figura 3 (ya que el conjunto de todo lo preferido por sobre esa canasta incluye a todas las canastas que tienen más de alguno de los dos bienes, y ese conjunto siempre pasa por la línea de 45°). Luego, para construir la función u, simplemente podríamos asignarle a cada canasta el número correspondiente a la proyección en el eje horizontal del punto en que se intersecta su curva de indiferencia con la línea de 45°. Lo anterior se ilustra con u_a, u_b, u_c y u_d en la figura 3

El ejemplo clásico de una situación en la que no es posible construir una función de utilidad es el de las **preferencias lexicográficas**. En este ejemplo, $\mathcal{A} = \mathrm{IR}_+^2$, es decir, las acciones son canastas o paquetes de dos características. La preferencia lexicográfica tiene la siguiente forma:

$$(x_1, x_2) \succ (x_1', x_2') \Leftrightarrow x_1 > x_1' \quad \vee \quad \{x_1 = x_1' \;\wedge\; x_2 > x_2'\}$$

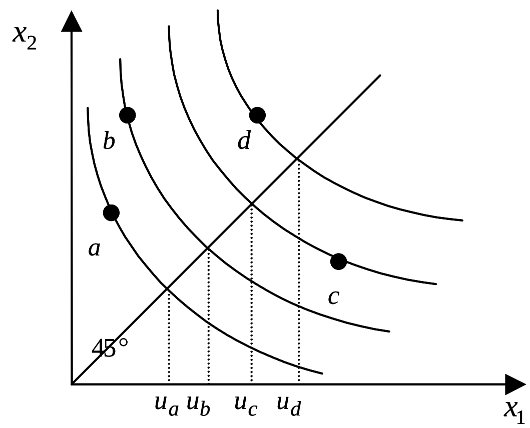


FIGURA 3. Construyendo la Función de Utilidad

En palabras, una canasta es mejor si tiene más de la primera característica, o si teniendo lo mismo de la primera, tiene más de la segunda. Este ordenamiento de preferencias es similar al ordenamiento que se da en un diccionario: las palabras que comienzan con a van antes que aquellas que empiezan con b, independientemente de su segunda letra, y así sucesivamente. En este caso, vemos que no hay ningún par de canastas distintas entre las cuales el individuo esté indiferente, por lo que no es posible dibujar curvas de indiferencia (o la curva de indiferencia colapsa en un sólo punto: el individuo sólo está diferente entre a y el mismo a).

TEOREMA 1. *Si los axiomas 1 a 4 se satisfacen, entonces existe una función de utilidad $u(a)$, continua, que representa a la preferencia* $\succsim$.

Así, existiendo una función de utilidad, es posible representar el problema de elección como uno de maximización:

$$a^*(A) = \arg\max_{a \in A} u(a),$$

esto es, el curso de acción escogido a^* es aquél que maximiza la función $u(\cdot)$ dentro del conjunto de alternativas A, o el argumento de su maximización.

Es importante notar que esta representación no es única. Por ejemplo, si $u(a) > u(a')$, entonces también $u(a) + 2 > u(a') + 2$, de modo que

$$\arg\max_{a \in A} u(a) = \arg\max_{a \in A} [u(a) + 2];$$

Esa preferencia, entonces, se puede representar indistintamente por las funciones $u(a)$ y $v(a) = [u(a) + 2]$. En general, cualquier transformación monótona creciente de $u(a)$ representa la misma preferencia: si $v(a) = f(u(a))$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente, entonces $u(a) > u(a') \Rightarrow v(a) > v(a')$.

En este sentido, decimos que la utilidad es **ordinal**, en contraposición a **cardinal**. Es ordinal porque lo único que interesa de ella es el ordenamiento sobre las acciones que representa, y no el nivel de utiles, o valor, que alcance.

2. Algunos ejemplos de elección

2.1. Consumidor en mercados competitivos. Quizás la aplicación más conocida de la teoría que discutimos es la del comportamiento del consumidor. La situación planteada es la de un individuo (persona o familia), que tiene preferencias descritas sobre canastas de artículos o servicios (x_1, x_2), donde cada x_ℓ es la cantidad del artículo o servicio ℓ que la canasta en cuestión contiene. Como las cantidades a consumir no pueden ser negativas, en este ejemplo $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2_+$. Las preferencias, asumiendo los axiomas 1 al 4, se pueden representar por medio de la función de utilidad.$u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$.

2.1.1. Preferencias. La forma de u depende de qué clase de servicios o artículos estemos considerando. Es posible que el individuo considere que más unidades son preferibles que menos, pero también es posible lo inverso. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2. *El artículo o servicio ℓ se denomina **bien** si $\frac{\partial u}{\partial x_\ell} > 0$, **mal** si $\frac{\partial u}{\partial x_\ell} < 0$ y **neutro** si $\frac{\partial u}{\partial x_\ell} = 0$.*

Es importante notar que la definición es subjetiva, toda vez que depende de las preferencias del individuo considerado. Más aún, para un mismo individuo un artículo puede considerarse bien o mal dependiendo de la cantidad que consuma (considere, por ejemplo, la cantidad de lluvia caída).

El uso de derivadas en la definición no es necesario: un bien se denomina bien si la utilidad es creciente en su cantidad, mal si es decreciente y neutro si es constante. Sin embargo, es cómodo suponer que la función de utilidad tiene derivadas definidas porque abrevia la presentación, y así lo haremos.

En lo que sigue, consideramos el caso de dos bienes, de los cuales el consumidor nunca se sacia. Por **saciedad** entendemos el paso de bien a neutro.

Si partimos de una canasta base, y la modificamos en $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)$, la canasta resultante será evaluada en:

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

Como ambos son bienes, esto es $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x_2} > 0$, claramente una canasta que contenga más de ambos bienes es preferida ($\mathrm{d}x_1 > 0$ y $\mathrm{d}x_2 > 0 \Rightarrow \mathrm{d}u > 0$) y otra con menos de ambos bienes es considerada peor ($\mathrm{d}x_1 < 0$ y $\mathrm{d}x_2 < 0 \Rightarrow \mathrm{d}u < 0$). En cambio, si la nueva canasta contiene más de un bien pero menos del otro, la evaluación que haga la persona dependerá de lo

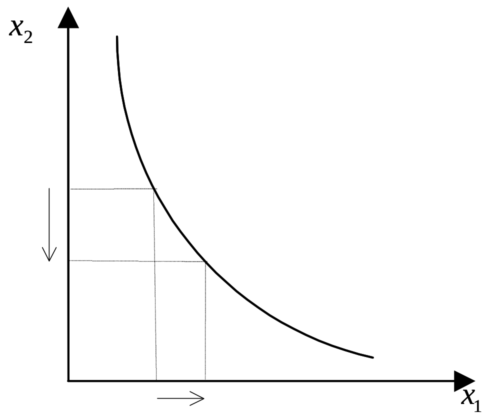


FIGURA 4. Representación de la Tasa Marginal de Sustitución Subjetiva

"valioso" que sea cada bien para ella. Una manera muy útil de caracterizar las preferencias cuando éstas son representables por medio de una función de utilidad, es a través de las curvas de indiferencia:

DEFINICIÓN 3. *Una **curva de indiferencia** es un conjunto de canastas* (x_1, x_2) *con la propiedad que todas entregan el mismo nivel de utilidad, esto es,* $u(x_1, x_2) = \overline{u}$.

En una curva de indiferencia, la utilidad es constante, y por lo tanto separa canastas preferidas de canastas no preferidas. La pendiente de la curva de indiferencia se obtiene de:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 = 0 \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} &= -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \end{aligned}$$

El valor absoluto de la pendiente recibe el nombre de **Tasa Marginal de Sustitución Subjetiva** (TMS), porque indica la máxima cantidad que el consumidor está dispuesto a entregar del bien 2 en sustitución de una unidad del bien 1[1]:

$$TMS = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \equiv \frac{u_1}{u_2}$$

Gráficamente, lo anterior se representa en la figura 4.

[1]Sea $y = f(x_1, x_2, ...)$ una función cualquiera. En adelante, representaremos la primera derivada de f respecto de x_i como f_i. Las derivadas siguientes se denotarán agregando más subíndices: f_{ii} es la segunda derivada respecto de x_i; f_{ij} es la derivada cruzada, etc.

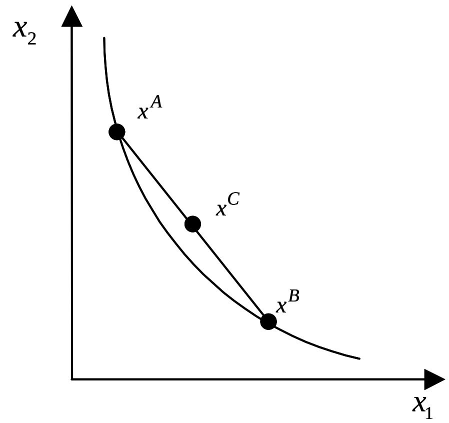


Figura 5. Convexidad de Curvas de Indiferencia y preferencia por la variedad

Es posible que la TMS no exista, esto es, que no exista ninguna cantidad, por grande que sea, que se le pueda entregar de un bien a la persona para que acepte a renunciar por una cantidad infinitesimal del otro. Esto ocurre con las preferencias lexicográficas. Una manera sencilla de verlo es la siguiente. Considere tres canastas: una de referencia, otra más preferida y otra menos preferida que la de referencia. El axioma de continuidad supone que en cualquier circunstancia de estas características, existirá otra canasta intermedia, distinta a la de referencia, que le resulte indiferente. La comparación de las distintas cantidades de cada bien entre ambas canastas indiferentes define una TMS. La inexistencia de una TMS, entonces, significa que el paso de más a menos preferido es violento, porque no atraviesa por la indiferencia.

En principio, la TMS puede ser decreciente (como en la figura 4) o creciente. Decir que la TMS es decreciente significa que al aumentar el consumo de x_1 disminuyendo x_2 de modo que la utilidad permanezca constante, la TMS cae. La TMS es en sí misma una función de x_1 y x_2, esto es, su valor depende de cuál sea la canasta que inicialmente estamos modificando. El que la persona se sienta inclinada a trabajar por un salario bajo si es pobre no significa que también lo hará si es rica.

La convexidad de las curvas de indiferencia, que implica una TMS decreciente, representa una cierta preferencia por la "variedad", en el sentido de que combinaciones (lineales) de dos canastas consideradas iguales por la persona son preferidas. En la figura 5, por ejemplo, la canasta x^C es estrictamente preferida a cualquiera de las dos canastas con las que fue hecha, x^A y x^B.

Entonces, la TMS es estrictamente decreciente si y sólo si, para cualquier par de canastas x^A y x^B tales que $u\left(x^A\right) = u\left(x^B\right) \equiv \overline{u}$, y para cualquier $\lambda \in (0,1)$, tenemos:

$$u\left(\lambda x^A + (1-\lambda)\, x^B\right) > \overline{u} \tag{2.1}$$

Ahora bien, por definición de concavidad (ver Apéndice Matemático, sección A), cualquier función de utilidad estrictamente cóncava satisface la siguiente condición:

$$u\left(\lambda x^A + (1-\lambda)\, x^B\right) > \lambda u\left(x^A\right) + (1-\lambda)\, u\left(x^B\right)$$

para cualquier par de canastas $x^A, x^B \in \mathcal{A}$, y para cualquier $\lambda \in (0,1)$. A partir de esta condición se concluye que, si se escogen x^A y x^B de modo que $u\left(x^A\right) = u\left(x^B\right) \equiv \overline{u}$, cualquier función de utilidad estrictamente cóncava satisface la condición (2.1).

Si la preferencia $\succsim$ muestra preferencia por la variedad, ello se debe reflejar en que cualquier función de utilidad que represente a $\succsim$ tiene curvas de indiferencia convexas (o TMS decreciente). Pero sabemos que si u representa a la preferencia $\succsim$, también lo hace cualquier transformación monótona creciente de u. Entonces, si u es estrictamente cóncava, cualquier transformación monótona creciente de u –es decir, cualquier función estrictamente cuasicóncava– debe tener curvas de indiferencia convexas.

En efecto, si una función de utilidad v es estrictamente cuasicóncava, satisface la siguiente condición (ver Apéndice Matemático, sección A):

$$v\left(\lambda x^A + (1-\lambda)\, x^B\right) > \text{mín}\left\{v\left(x^A\right), v\left(x^B\right)\right\}$$

para cualquier par de canastas $x^A, x^B \in \mathcal{A}$, y para cualquier $\lambda \in (0,1)$. Nuevamente vemos que, si se escogen x^A y x^B de modo que $v\left(x^A\right) = v\left(x^B\right) \equiv \overline{v}$, la condición (2.1) se satsiface para v, de modo que v tiene curvas de indiferencia convexas. Esta misma conclusión se puede obtener a partir de la condición de TMS decreciente, como se muestra a continuación.

Al diferenciar la Tasa Marginal de Sustitución, encontramos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}TMS &= \frac{\partial TMS}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial TMS}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \\
\mathrm{d}TMS &= \frac{\partial\left(\frac{u_1(x_1,x_2)}{u_2(x_1,x_2)}\right)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial\left(\frac{u_1(x_1,x_2)}{u_2(x_1,x_2)}\right)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \\
\mathrm{d}TMS &= \frac{u_{11}u_2 - u_{21}u_1}{u_2^2}\mathrm{d}x_1 + \frac{u_{21}u_2 - u_{22}u_1}{u_2^2}\mathrm{d}x_2
\end{aligned}$$

Pero en la curva de indiferencia, $\mathrm{d}x_2 = -\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}x_1$. Reemplazando,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}TMS &= \frac{u_{11}u_2 - u_{21}u_1}{u_2^2}\mathrm{d}x_1 - \frac{u_1}{u_2}\frac{u_{21}u_2 - u_{22}u_1}{u_2^2}\mathrm{d}x_1 \qquad (2.2)\\ &= \frac{1}{u_2^3}\left(u_{11}u_2^2 - u_{21}u_2u_1 - \left(u_{21}u_1u_2 - u_{22}u_1^2\right)\right)\mathrm{d}x_1\\ \frac{\mathrm{d}TMS}{\mathrm{d}x_1} &= \frac{1}{u_2^3}\left(u_{11}u_2^2 - 2u_{21}u_2u_1 + u_{22}u_1^2\right)\end{aligned}$$

Entonces, la TMS es estrictamente decreciente si $\left(u_{11}u_2^2 - 2u_{21}u_2u_1 + u_{22}u_1^2\right) < 0$, lo que se satisface si u es cóncava. Si v no es cóncava, pero puede ser escrita como $v = f(u)$ con u estrictamente cóncava y $f' > 0$ (de modo que v es estrictamente cuasi cóncava), tenemos:

$$\begin{aligned}v_1 &= f'u_1 \quad v_{11} = f''u_1^2 + f'u_{11}\\ v_2 &= f'u_2 \quad v_{22} = f''u_2^2 + f'u_{22}\\ v_{21} &= f''u_2u_1 + f'u_{21}\end{aligned}$$

A partir de lo anterior, al calcular $\frac{\mathrm{d}TMS}{\mathrm{d}x_1}$ para v obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}TMS}{\mathrm{d}x_1} &= \frac{1}{v_2^3}\left(v_{11}v_2^2 - 2v_{21}v_2v_1 + v_{22}v_1^2\right)\\ &= \frac{1}{(f'u_2)^3}\Big(\left(f''u_1^2 + f'u_{11}\right)(f'u_2)^2 -\\ &\quad 2\left(f''u_2u_1 + f'u_{21}\right)f'u_1f'u_2 + \left(f''u_2^2 + f'u_{22}\right)(f'u_1)^2\Big)\\ &= \frac{1}{f'^3u_2^3}\left(f''f'^2u_1^2u_2^2 + f'^3u_{11}u_2^2 -\right.\\ &\quad \left.2f''f'^2u_2^2u_1^2 - 2f'^3u_{21}u_1u_2 + f''f'^2u_2^2u_1^2 + f'^3u_{22}u_1^2\right)\\ &= \frac{1}{(u_2)^3}\left(u_2^2u_{11} - 2u_1u_2u_{21} + u_1^2u_{22}\right)\end{aligned}$$

Dado que u es estrictamente cóncava, $\left(u_{11}u_2^2 - 2u_{21}u_2u_1 + u_{22}u_1^2\right) < 0$, por lo que v también tiene curvas de indiferencia convexas. En conclusión, la condición de convexidad estricta de las curvas de indiferencia se satisface si la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava.

2.1.2. Posibilidades. Las posibilidades del consumidor (el conjunto A) están determinadas por dos elementos: su ingreso y los precios. Para consumir una determinada canasta, debe comprarla. Para comprar una canasta con x_1 unidades del primer bien y x_2 unidades del segundo, debe gastar:

$$\$\left(x_1p_1 + x_2p_2\right)$$

Esta canasta es alcanzable con un ingreso de m sólo si:

$$m \geq x_1p_1 + x_2p_2.$$

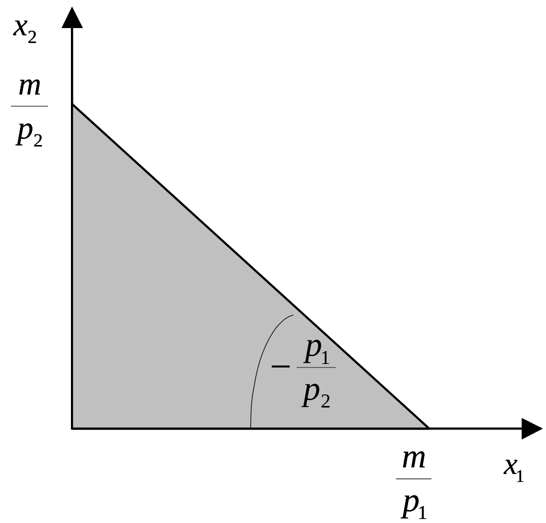


FIGURA 6. Conjunto de Posibilidades de un consumidor dotado de ingreso fijo

Si el individuo no tiene poder de negociación en ninguno de los mercados en que participa, entonces los precios de los bienes están dados para él, de manera que se pueden considerar parámetros del problema (las condiciones bajo las cuales esto ocurre son el tema del capítulo 9). Así, su problema de elección consiste en buscar la canasta más preferida dentro del conjunto:

$$A\left(p_1, p_2, m\right) = \left\{\left(x_1, x_2\right) \in \mathcal{A} = IR_{+}^{2} : m \geq x_1 p_1 + x_2 p_2\right\}.$$

En la figura 6 se representa el conjunto de posibilidades de este individuo.

El área gris, entonces, corresponde al conjunto de canastas alcanzables a esos precios y con ese ingreso. La frontera superior de este conjunto es la **restricción presupuestaria:**

$$m = x_1 p_1 + x_2 p_2$$

Despejando x_2, queda:

$$x_2 = \underbrace{\frac{m}{p_2}}_{\text{Intercepto}} - \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{\text{Pendiente}} x_1$$

Geométricamente, es la ecuación de una recta con intercepto $\frac{m}{p_2}$ y pendiente $-\frac{p_1}{p_2}$. El intercepto $\frac{m}{p_2}$ es la máxima cantidad del bien 2 que se puede comprar con m pesos. El intercepto en el eje x_1 es análogo.

El valor absoluto de la pendiente, en cambio, corresponde al **costo de oportunidad** del bien 1 en términos del bien 2 (o **Tasa Marginal de**

Sustitución de Mercado): la derivada $\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$ indica que para aumentar el consumo del bien 1 en una unidad, se debe disminuir el del 2 en $\frac{p_1}{p_2}$ unidades:

$$\mathrm{d}x_2 = -\frac{p_1}{p_2}\mathrm{d}x_1$$

2.1.3. Óptimo del consumidor. Para encontrar la decisión, es necesario resolver el problema de optimización con restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2} u(x_1, x_2) && (2.3)\\ \text{sujeto a: } & m \geq x_1 p_1 + x_2 p_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolverlo utilizando el método de Kuhn-Tucker, planteamos el lagrangeano:

$$\mathcal{L} = u(x_1, x_2) + \lambda\left[m - x_1 p_1 - x_2 p_2\right]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 \leq 0 \qquad chc \;\; x_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \tag{2.4a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 \leq 0 \qquad chc \;\; x_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \tag{2.4b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - x_1 p_1 - x_2 p_2 \geq 0 \qquad chc \;\; \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \tag{2.4c}$$

Dependiendo de dónde se encuentre el óptimo, las condiciones de primer y segundo orden variarán. Así, al haber 3 restricciones, cada una asociada a dos opciones (que se cumplan con o sin holgura), existen en principio $2^3 = 8$ casos que analizar, que surgen de todas las combinaciones posibles de condiciones satisfechas con o sin holgura. Estos casos se ilustran en la figura 7.

En los casos A, B y C se satisface la restricción presupuestaria sin holgura, y con holgura en todo el resto. En los casos C, E y F, se satisface la restricción de no negatividad del bien 2 sin holgura, y con holgura en todo el resto. Análogamente ocurre con los puntos B, D y F respecto del bien 1. En el punto G, todas las restricciones se satisfacen con holgura. Observe que no existe ningún punto en que todas se satisfagan con igualdad: no puede ocurrir que se compre cero de cada bien y a la vez se gaste todo el ingreso, si éste es positivo (y es por ello que en el gráfico se ilustran sólo 7 de los 8 casos).

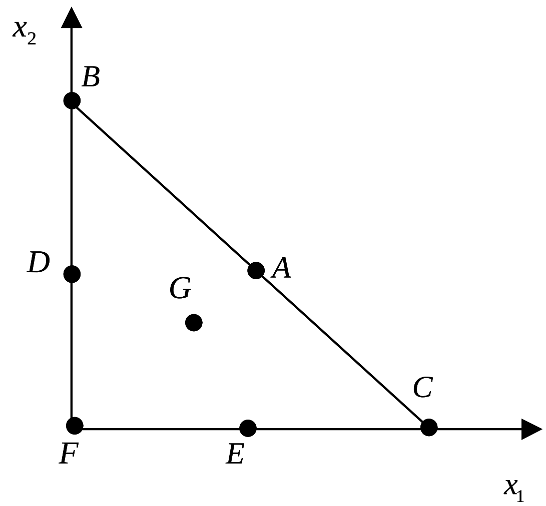


FIGURA 7. Casos posibles para evaluar condiciones de Kuhn-Tucker

CASO A: $\lambda, x_1, x_2 > 0$. En este escenario, se deduce que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ por las condiciones de holgura complementaria. Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \tag{2.5a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \tag{2.5b}$$

$$m - x_1 p_1 - x_2 p_2 = 0 \tag{2.5c}$$

De las ecuaciones (2.4a) y (2.4b), obtenemos la condición:

$$TMS = \frac{p_1}{p_2} \tag{2.6}$$

Ésta es la condición de tangencia de una curva de inferencia y la restricción presupuestaria. El óptimo se caracteriza entonces porque el consumidor paga por la última unidad comprada del bien 1 exactamente lo máximo que estaba dispuesto a pagar. Intuitivamente, de valorar más la última unidad, debería seguir comprando, por lo que su posición no sería óptima; de valorarla en menos, compró excesivamente.

Alternativamente, podemos escribir

$$\underbrace{\frac{1}{p_1}}_{\text{poder de compra de \$1 en el bien 1}} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \underbrace{\frac{1}{p_2}}_{\text{poder de compra de \$1 en el bien 2}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \tag{2.7}$$

Esta condición establece que si el consumidor tiene \$1 adicional para gastar, debe estar indiferente entre hacerlo en el bien 1 o el bien 2. En efecto, a cada lado de la igualdad tenemos el valor en utiles de gastar un peso más en cada bien. \$1 gastado en el bien 1 compra $\frac{1}{p_1}$ unidades, cada una de las cuales se traduce en $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ utiles. De no cumplirse esta condición, la persona preferiría gastar más en alguno de estos bienes que lo que está haciendo actualmente, lo que implica que la situación original no era óptima.

En el caso que analizamos, $\lambda > 0$. La ecuación (2.5c) indica que todo el presupuesto será gastado:

$$m = x_1 p_1 + x_2 p_2$$

Pero, por el teorema de la envolvente, el multiplicador lagrangeano mide la utilidad marginal del ingreso:

$$\lambda = \frac{\partial u^*}{\partial m}$$

En efecto, el valor que la solución planteada, $x_1^*(p_1, p_2, m)$, $x_2^*(p_1, p_2, m)$ y $\lambda^*(p_1, p_2, m)$ permite alcanzar es:

$$\mathcal{L}^* = u(x_1^*, x_2^*) + \lambda^*(m - x_1^* p_1 - x_2^* p_2)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial m} + \frac{\partial u}{\partial x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial m} \\ &\quad + \frac{\partial \lambda}{\partial m}(m - x_1^* p_1 - x_2^* p_2) \\ &\quad + \lambda^*\left(1 - \frac{\partial x_1^*}{\partial m}p_1 - \frac{\partial x_2^*}{\partial m}p_2\right) \end{aligned}$$

Rearreglando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial m} &= \frac{\partial x_1^*}{\partial m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1^*} - \lambda^* p_1\right) + \frac{\partial x_2^*}{\partial m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2^*} - \lambda^* p_2\right) \\ &\quad + \frac{\partial \lambda}{\partial m}[m - x_1^* p_1 - x_2^* p_2] + \lambda^* \end{aligned}$$

Pero x_1^*, x_2^* y λ^* satisfacen (2.5a), (2.5b) y (2.5c), de manera que

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial m} = \lambda^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = \frac{\partial u^*}{\partial m} \tag{2.8}$$

En el escenario que nos planteamos supusimos que la utilidad marginal del ingreso es positiva. Se sigue, entonces, que todo el ingreso deber ser gastado en el óptimo.

Las figuras 8 y 9 describen geométricamente el óptimo. En los puntos A y B de la figura 8, no se cumple la condición de tangencia; en el punto C,

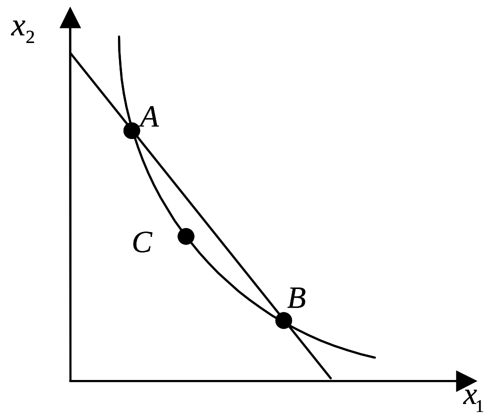


Figura 8. Canastas de consumo subóptimas

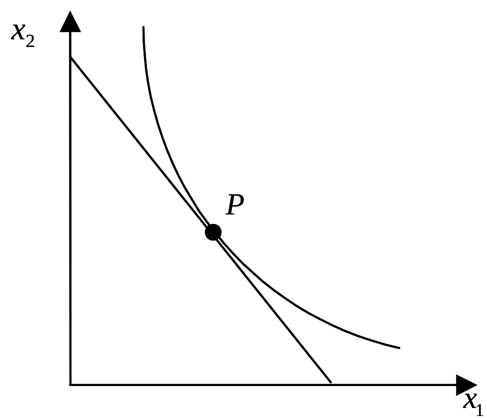


Figura 9. Óptimo del consumidor

no se gasta todo el ingreso. Para todos ellos es cierto que existen canastas simultáneamente preferidas y alcanzables, por lo que son subóptimas.

En cambio, en el punto P de la figura 9 se cumplen ambas condiciones. Esta canasta tiene la propiedad que no existe una canasta preferida a ella que sea, a su vez, alcanzable.

En estos dibujos hemos implícitamente supuesto que la TMS es decreciente, esto es, que el mapa de curvas de indiferencia es convexo. Como veremos a continuación, esto es en realidad necesario para que las condiciones de primer orden (en adelante, CPO) sean una guía para encontrar el óptimo.

En el caso que consideramos, el problema de optimización en dos variables se resuelve con una restricción de igualdad, de manera que existe una única condición de segundo orden (en adelante, CSO), a saber, que el determinante del Hessiano orlado sea positivo:

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & u_{11} & u_{12} \\ p_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} > 0$$

Resolviendo por el método de cofactores, tenemos:

$$\begin{aligned} \left|\overline{H}\right| &= -p_1 \left(p_1 u_{22} - p_2 u_{12}\right) + p_2 \left(p_1 u_{12} - p_2 u_{11}\right) \\ &= -p_2^2 u_{11} + p_2 p_1 u_{12} + p_1 \left(u_{21} p_2 - u_{22} p_1\right) \end{aligned}$$

Pero, de las CPO, tenemos $p_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $p_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x_2}$. Reemplazando, obtenemos:

$$\left|\overline{H}\right| = -\frac{1}{\lambda^2}\left(u_2^2 u_{11} - 2u_2 u_1 u_{12} + u_{22} u_1^2\right) > 0$$

Esta condición es exactamente la que pide que la TMS sea decreciente (o, equivalentemente, que u sea cuasicóncava). Veíamos que esto ocurre si hay una preferencia por la variedad. El cumplimiento de esta condición depende exclusivamente de las preferencias del individuo, por lo que no podemos descartar que existan consumidores para los cuales el caso A no describa su óptimo. Pasamos entonces a analizar otras posibilidades.

CASO B: $x_1 = 0,\ \lambda, x_2 > 0$. Los supuestos describen una situación en la que la utilidad marginal del ingreso es positiva, pero el individuo no consume del bien 1. Las condiciones de holgura complementaria implican que:

$$\begin{aligned} m - x_2 p_2 &= 0 \Rightarrow x_2 = \frac{m}{p_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 &= 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{p_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 &\leq 0 \Rightarrow \lambda \geq \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1} \\ &\Rightarrow \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1} \leq \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{p_2} \\ &\Leftrightarrow TMS = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \leq \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

Esto es, el consumidor no consumirá del bien 1 si su precio es mayor que su disposición a pagar, aún por la primera unidad. Observe que esto no significa que no lo valora, sino sólo que lo valora en menos que lo que cuesta.

La CSO corresponde a la del problema:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2) \\ s/a \qquad x_2 &= 0 \qquad x_1 = \frac{m}{p_1} \end{aligned}$$

No hay, entonces, CSO. Esto ocurre porque habiendo dos variables, la existencia de dos restricciones hace que no hayan grados de libertad. El caso C es similar.

CASO G: $\lambda = 0, x_1, x_2 > 0$. En este caso, la utilidad marginal del ingreso es 0, esto es, el consumidor está saciado de ambos bienes (si sólo estuviera saciado de uno, todavía querría más ingreso para comprar del otro bien). Así, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= m - x_1p_1 - x_2p_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Las utilidades marginales del consumo de todos los bienes debe ser 0. Las CSO son las de un problema de 2 variables sin restricciones, esto es, concavidad de $u(\cdot)$:

$$u_{11}, u_{22} < 0 \text{ y } u_{12} < \sqrt{u_{11}u_{22}}$$

Los diversos casos analizados, entonces, cubren las diversas posibilidades que pueden caracterizar las decisiones de distintos tipos de consumidor con ingreso m en mercados perfectamente competitivos. Dependiendo de sus decisiones, podremos inferir si valora cada bien o si está saciado de su consumo, si valora la variedad, etc.

2.2. Consumidor dotado de una canasta. Nuevamente consideramos un consumidor en mercados competitivos. La única diferencia de este caso con el anterior es la manera en que se definen las posibilidades: en el caso anterior suponíamos que el consumidor disponía de un ingreso m (exógeno), mientras que en este caso suponemos que dispone de una canasta inicial de bienes que puede transar en el mercado a los precios p_1 y p_2.

2.2.1. Preferencias. Nuevamente, las preferencias de este individuo se definen sobre canastas de consumo (x_1, x_2). Supondremos que estas preferencias se pueden representar mediante una función de utilidad u, exactamente como lo hicimos en el ejemplo anterior.

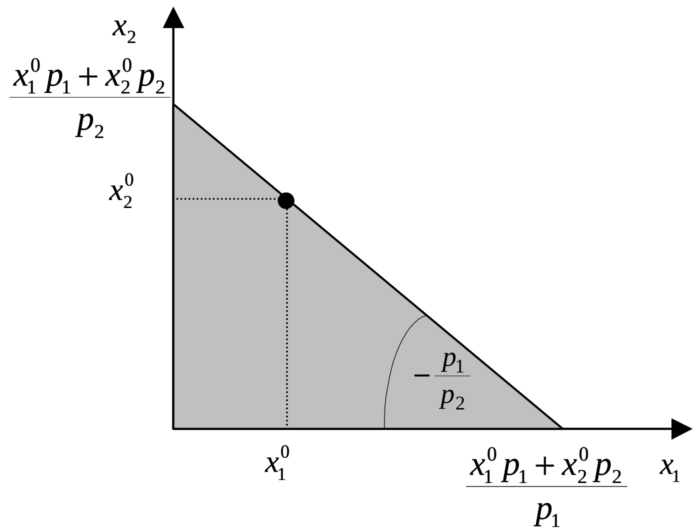


FIGURA 10. Restricción Presupuestaria para un consumidor dotado de una canasta

2.2.2. Posibilidades. Las posibilidades del consumidor (el conjunto A) están determinadas por dos elementos: su canasta inicial y los precios. Para consumir una determinada canasta, debe comprarla. Para comprar una canasta con x_1 unidades del primer bien y x_2 unidades del segundo, debe gastar:

$$\$ \left(x_1 p_1 + x_2 p_2\right)$$

Esta canasta es alcanzable con un dotación inicial $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ sólo si:

$$x_1^0 p_1 + x_2^0 p_2 \geq x_1 p_1 + x_2 p_2.$$

Nuevamente consideramos los precios como parámetros del problema. Así, su problema de elección consiste en buscar la canasta más preferida dentro del conjunto:

$$A\left(p_1, p_2, m\right) = \left\{\left(x_1, x_2\right) \in \mathcal{A} = IR_+^2 : x_1^0 p_1 + x_2^0 p_2 \geq x_1 p_1 + x_2 p_2\right\}.$$

El conjunto de posibilidades de este consumidor se representa en la figura 10.

El área gris de la figura 10, entonces, corresponde al conjunto de canastas alcanzables a esos precios y con esa dotación inicial. La frontera superior de este conjunto es la **restricción presupuestaria**:

$$x_1^0 p_1 + x_2^0 p_2 = x_1 p_1 + x_2 p_2$$

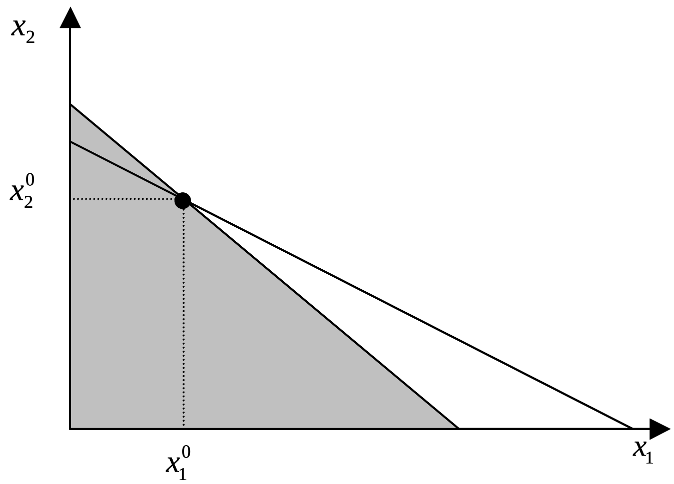


FIGURA 11. Cambio en la restricción presupuestaria al modificarse el precio relativo

Geométricamente, es la ecuación de una recta con intercepto $\frac{x_1^0 p_1 + x_2^0 p_2}{p_2}$ y pendiente $-\frac{p_1}{p_2}$. El intercepto $\frac{x_1^0 p_1 + x_2^0 p_2}{p_2}$ es la máxima cantidad del bien 2 que se puede comprar con la venta de la dotación inicial de bienes. El intercepto en el eje x_1 es análogo.

La pendiente nuevamente corresponde al **costo de oportunidad** del bien 1 en términos del bien 2: la derivada $\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$ indica que para aumentar el consumo del bien 1 en una unidad, se debe disminuir el del 2 en $\frac{p_1}{p_2}$ unidades.

Entonces, en este ejemplo tenemos preferencias representadas exactamente igual que en el caso anterior, y una restricción presupuestaria que se ve exactamente igual también, por lo que el óptimo del consumidor se caracteriza de manera análoga. Una diferencia fundamental con el caso anterior, sin embargo, es la siguiente: cuando baja el precio bien 1, por ejemplo, en el caso en que el consumidor disponía de un ingreso fijo m es claro que el conjunto de posibilidades simplemente se hace más amplio (o más pequeño, en el caso de que aumente el precio de un bien). En este caso, sin embargo, el conjunto de posibilidades no se amplía simplemente, sino que se modifica de la forma como se representa en la figura 11.

Esto es, se ganan posibilidades de consumo en un tramo, pero se pierden en el otro. El cambio será percibido como positivo o negativo, dependiendo de si el consumidor era comprador o vendedor neto del bien cuyo precio cayó, respectivamente.

2.3. La oferta de trabajo. Cuando analizamos la elección de horas de trabajo y de ocio de un consumidor que enfrenta precios, utilizamos el mismo instrumental desarrollado para la teoría del consumidor. En este caso consideramos un individuo que valora el consumo de bienes (x), y el tiempo en el hogar (u ocio, h).

2.3.1. Preferencias. Suponemos que las preferencias de este individuo se pueden representar mediante una función de utilidad de la forma: $u = u(x, h)$, que suponemos cumple con las siguientes condiciones: $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x > 0$, $\frac{\partial u}{\partial h} = u_h > 0$ (no saciedad), y $u_{xx}u_h^2 - 2u_x u_h u_{xh} + u_{hh}u_x^2 < 0$ (convexidad de las curvas de indiferencia).

2.3.2. Posibilidades. El conjunto de posibilidades de este individuo está determinado por:

- **i:** Su disponibilidad de ingreso no laboral (z) y por el salario de mercado, o pago al trabajo (w_ℓ), que junto con el precio de los bienes (p) determinan la restricción presupuestaria.
- **ii.:** Su disponibilidad de tiempo total (T), que puede dedicar al trabajo (ℓ) o al ocio (h). Esto determina la restricción de tiempo de este individuo.

Es decir, la elección de x y h está restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} px &\leq z + \ell w_\ell \\ \ell + h &= T \\ x, \ell, h &\geq 0 \end{aligned}$$

o, alternativamente,

$$\begin{aligned} px + hw_\ell &\leq z + Tw_\ell \\ x, (T - h), h &\geq 0 \end{aligned}$$

Esta segunda forma de escribir las restricciones presupuestaria y temporal en una sola, de la forma $px + hw_\ell \leq z + Tw_\ell$, enfatiza el hecho que el ingreso que obtendría este individuo si dedicara todo su tiempo disponible a trabajar sería $z + Tw_\ell$, lo que denominamos "ingreso completo" (*Full income*). A partir de ello, el ocio se puede considerar como consumo (con un precio del ocio de w_ℓ, que corresponde a lo que se deja de ganar por el hecho de no trabajar).

2.3.3. Óptimo del consumidor. El problema de elección de este individuo se puede representar como:

$$\max_{x,h} u = u(x,h)$$
$$s.a. \quad px + hw_\ell \leq z + Tw_\ell$$
$$x, (T-h), h \geq 0$$

Utilizaremos las condiciones de Kuhn-Tucker para encontrar la asignación óptima de ocio-trabajo. Para ello escribimos el lagrangeano como:

$$\mathcal{L} = u(x,h) + \lambda_1 (z + Tw_\ell - px - hw_\ell) + \lambda_2 (T-h)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = u_x - \lambda_1 p \leq 0 \qquad chc \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} x = (u_x - \lambda_1 p)\, x = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = u_h - \lambda_1 w_\ell - \lambda_2 \leq 0 \qquad chc \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} h = (u_h - \lambda_1 w_\ell - \lambda_2)\, h = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = z + Tw_\ell - px - hw_\ell \geq 0 \qquad chc \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} \lambda_1 = (z + Tw_\ell - px - hw_\ell)\, \lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = T - h \geq 0 \qquad chc \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} \lambda_2 = (T-h)\, \lambda_2 = 0$$

Dado el supuesto de no saciedad, sabemos que la restricción presupuestaria se cumple con igualdad en el óptimo. Dado que estamos estudiando la oferta de trabajo, nos concentraremos en los casos en que $x > 0$ (por lo que se debe cumplir que $u_x - \lambda_1 p = 0$), y en que $h > 0$ (por lo que se debe cumplir que $u_h - \lambda_1 w_\ell - \lambda_2 = 0$), para analizar los dos casos posibles respecto de las horas de ocio: $h = T$ ó $h < T$. Es decir, nos centramos en la pregunta de si el individuo decide trabajar ($h < T$) o no ($h = T$).

Gráficamente, el problema se puede representar como la búsqueda de la curva de indiferencia más alta que se puede alcanzar, dada las restricciones de presupuesto y de tiempo descritas, que se representan en la figura 12.

CASO A: $h < T$. En este caso sabemos que $\lambda_2 = 0$, por lo que obtenemos las condiciones $u_h - \lambda_1 w_\ell = 0$ y $u_x - \lambda_1 p = 0$, y como es usual estas dos condiciones se pueden reescribir como:

$$\frac{u_h}{u_x} = \frac{w_\ell}{p}$$

Es decir, nuevamente la solución óptima es aquélla en que se iguala la TMS al costo de oportunidad. Gráficamente, lo que buscamos entonces es la tangencia entre curva de indiferencia y restricción, tal como ocurría en la solución interior del problema del consumidor.

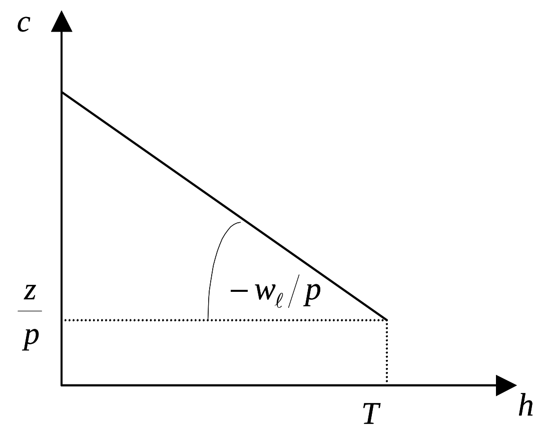


FIGURA 12. Restricción presupuestaria en elección de horas de trabajo

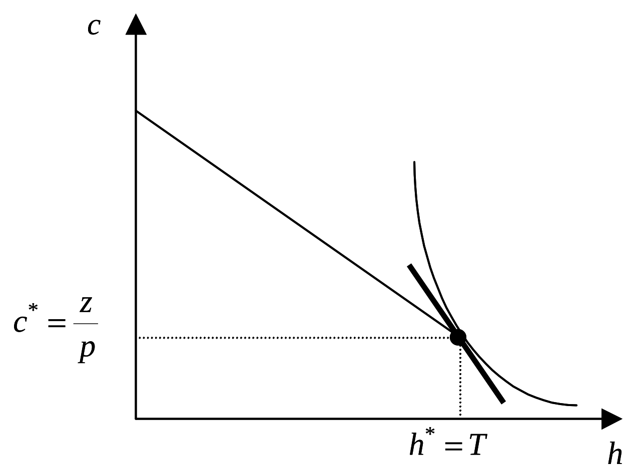


FIGURA 13. Caso en que el individuo decide no trabajar

CASO B: $h = T$ (o $\ell = 0$). En este caso sabemos que $\lambda_2 \geq 0$. Luego, la condición $u_h - \lambda_1 w_\ell - \lambda_2 = 0$ ahora implica: $u_h - \lambda_1 w_\ell = \lambda_2 \geq 0$. De modo que, al considerar la primera condición $u_x - \lambda_1 p = 0$, obtenemos:

$$\frac{u_h}{u_x} \geq \frac{w_\ell}{p}$$

Esto implica que el individuo no trabaja si la tasa marginal de sustitución subjetiva es más alta (o a lo sumo igual) que la tasa marginal de sustitución de mercado de ocio por consumo en el tramo relevante, como se representa en la figura 13.

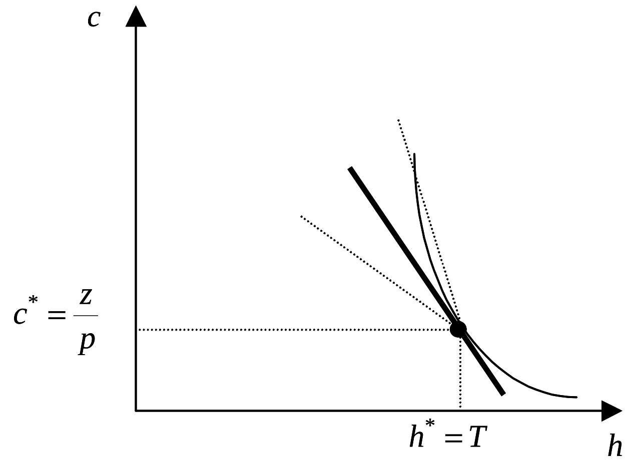


FIGURA 14. Salario de Reserva

Existe un nivel de salario w_ℓ^* que define el paso del caso A al caso B: para cualquier salario real $\frac{w_\ell}{p}$ mayor que $\frac{w_\ell^*}{p}$ el individuo decide trabajar, mientras que para cualquier salario menor el individuo decide no trabajar (y a ese salario está indiferente entre trabajar o no hacerlo). Dicho nivel de salario recibe el nombre de **salario de reserva**. En el caso que estamos considerando el salario real de reserva $\frac{w_\ell^*}{p}$ corresponde a la tasa marginal de sustitución subjetiva evaluada en el punto $\left(h = T, x = \frac{z}{p}\right)$, ya que para cualquier salario más alto decide trabajar, y para cualquier salario más bajo decide no trabajar, como se aprecia en la figura 14: si el salario es mayor al salario correspondiente a la TMS evaluada en $\left(h = T, x = \frac{z}{p}\right)$, vemos que el individuo decide trabajar (línea punteada superior). Si es menor, decide no trabajar (línea punteada inferior).

En casos más generales, mantenemos la definición de salario de reserva: aquel salario tal que, para un mayor salario el individuo decide trabajar, y para uno menor decide no trabajar. Así por ejemplo, si suponemos que existe un costo fijo f asociado a trabajar (costo de transporte, por ejemplo, que no depende de las horas trabajadas), tendremos que el salario de reserva será más alto que el indicado por la TMS evaluada en $\left(h = T, x = \frac{z}{p}\right)$, como se ilustra en la figura 15. En la figura se aprecia que el salario de reserva es mayor que el indicado por la TMS evaluada en $\left(h = T, x = \frac{z}{p}\right)$, marcada por la línea gruesa.

2.4. Consumo intertemporal. Cuando pensamos en un problema de consumo intertemporal, el énfasis está en que el individuo vive por dos

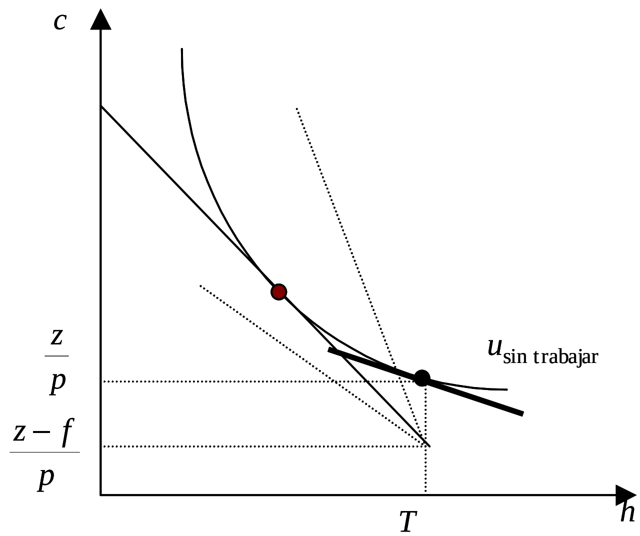


Figura 15. Salario de reserva con costo fijo de trabajar

o más períodos, y es posible que prefiera no gastar todo su ingreso en cada período, sino ahorrar algunos períodos, para desahorrar en otros (y poder gastar más que su ingreso en aquellos períodos).

2.4.1. Preferencias. En este caso, normalmente agregamos el consumo en el período t en un bien compuesto que denotamos c_t (cuyo precio podemos normalizar en 1), y las preferencias se definen sobre planes de consumo $c = (c_0, c_1, ...c_t, ..., c_T)$, donde T es el período final. Supondremos que $T = 1$, de modo que sólo hay dos períodos. Nuevamente supondremos que estas preferencias se pueden representar mediante una función de utilidad u.

2.4.2. Posibilidades. Si denotamos el ingreso del individuo en el período t como m_t, las posibilidades del individuo se definen por el par (m_0, m_1) y por la tasa a la que podemos traspasar ingreso presente a ingreso futuro y viceversa. Por ejemplo, si el individuo recibe su ingreso en un bien perecible que no se puede vender en el mercado, no hay manera de traspasar parte del ingreso presente al futuro. Si recibe su ingreso en un bien que es almacenable pero no se puede vender en el mercado, puede traspasar todo su ingreso presente al futuro, pero no obtiene ningún retorno por su ahorro. En cambio, si recibe su ingreso en dinero (o en un bien que puede vender y transformar en dinero), y al ahorrar \$1 gana un interés de r, sabemos que en el período siguiente recibe $\$\,(1+r)$ por cada peso ahorrado. Respecto de la capacidad de traspasar ingreso futuro al presente, es claro que ello depende de las posibilidades de endeudamiento de este individuo: si se puede endeudar a tasa r, sabemos que en el período siguiente tiene que entregar

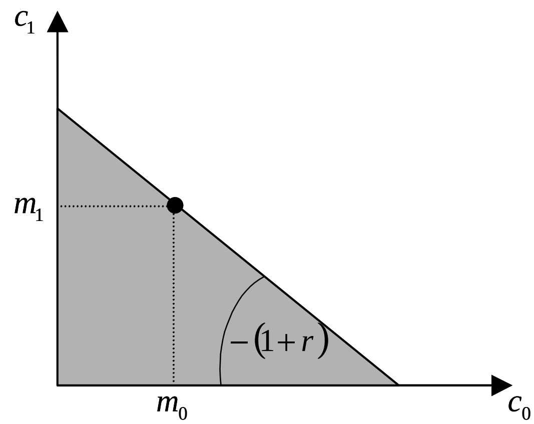


FIGURA 16. Conjunto de posibilidades en problema de consumo intertemporal

$\$ (1+r)$ por cada peso en que se haya endeudado en el período inicial (y si quiere entregar \$1 en $t=1$, en $t=0$ se debe endeudar en $\$ \left(\frac{1}{1+r}\right)$).

Entonces, si el individuo puede ahorrar o endeudarse a una tasa r en el mercado financiero, tenemos que si no consume nada en $t=1$, en $t=0$ el individuo podría consumir como máximo $m_0 + \frac{m_1}{1+r}$, esto es, el **valor presente** (VP) o **valor actual** (VA) de los ingresos de su vida activa. A su vez, si consume c_1 en $t=1$, en $t=0$ puede consumir como máximo $m_0 + \frac{m_1 - c_1}{1+r}$. De esta última condición se desprende que el conjunto de posibilidades de consumo intertemporal se define por:

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} \leq m_0 + \frac{m_1}{1+r}$$

En palabras, el valor presente del consumo no puede superar al del ingreso.

La frontera superior de este conjunto define la **restricción presupuestaria intertemporal:**

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = m_0 + \frac{m_1}{1+r}$$

la que es similar en su forma a la restricción presupuestaria del consumidor dotado de una canasta, como se muestra en la figura 16.

Este modelo también ha sido utilizado para entender la decisión de inversión. Si un inversionista dispone de un ingreso inicial y_0 y de un proyecto o conjunto de ellos, su ejecución generará un conjunto de posibilidades de consumo en el plano (c_0, c_1), digamos, de forma:

$$c_1 \leq g\left(y_0 - c_0\right)$$

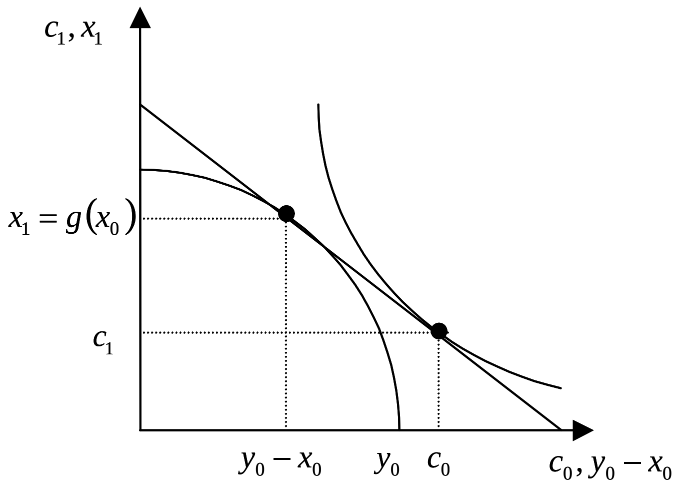


FIGURA 17. Teorema de Separación de Fisher-Hirshleifer

donde $g(x)$ es una función (posiblemente creciente) que indica cuánto dinero se obtiene en $t = 1$ si se invierte \$$x$ en $t = 0$. El monto invertido en $t = 0$ corresponde a la diferencia entre el ingreso disponible y el consumo en dicho período, $(y_0 - c_0)$.

La forma de este conjunto dependerá de las características del proyecto: si es divisible, tendrá una frontera continua; si el proyecto tiene rendimientos decrecientes, entonces será cóncavo. El inversionista, entonces, escogerá el punto que maximice su utilidad.

Si, además de los proyectos que definen este conjunto, el inversionista tiene acceso al mercado de capitales, pudiendo endeudarse o prestar a la misma tasa r, tenemos un resultado tremendamente importante, que provee la base conceptual de la Evaluación de Proyectos: el **Teorema de Separación de Fisher-Hirshleifer**. Este teorema establece que las preferencias del inversionista son irrelevantes para determinar la inversión óptima. Si definimos x_0 como la cantidad que invierte en $t = 0$ y x_1 la cantidad que obtiene en $t = 1$ producto de dicha inversión, notamos que el mayor conjunto de posibilidades de consumo se logra escogiendo el proyecto (o nivel de inversión inicial, x_0) que maximiza la siguiente expresión:

$$(y_0 - x_0) + \frac{x_1}{1+r}, \text{ ó } (y_0 - x_0) + \frac{g(x_0)}{1+r}$$

Lo más conveniente para el inversionista es elegir el proyecto que genera un mayor conjunto de posibilidades de consumo, y luego escoger dentro de ese conjunto la canasta de consumo óptima. Lo anterior se representa en la figura 17.

Esto implica que todo inversionista expuesto a esas posibilidades escoge el proyecto que maximiza el valor actual neto (VAN, esto es, el valor actual de los flujos netos de la inversión), que corresponde a $\left(-x_0 + \frac{g(x_0)}{1+r}\right)$, y escoge su plan de consumo favorito por la vía de prestar o endeudarse, dependiendo de si el proyecto le entrega más o menos consumo presente que lo que preferiría.

2.5. La dieta: el modelo de los atributos de Lancaster. Consideremos el problema de un consumidor que valora los atributos de los alimentos que consume (por ejemplo, vitaminas, V, y proteínas, P), y no los alimentos en sí mismos. Los alimentos se pueden adquirir en el mercado (y con ello indirectamente se adquieren atributos), pero los atributos no pueden ser comprados directamente. Los alimentos tienen distintos atributos: por ejemplo, la carne entrega a_c^V vitaminas y a_c^P proteínas; las frutas entregan a_f^V vitaminas y a_f^P proteínas, etc.

2.5.1. Preferencias. Las preferencias del individuo se definen sobre combinaciones de atributos, (V, P) en nuestro ejemplo. Suponemos nuevamente que estas preferencias se pueden representar mediante una función de utilidad u.

2.5.2. Posibilidades. Las posibilidades ahora dependen del ingreso del individuo (que suponemos fijo e igual a m), de los precios de los bienes (alimentos) que puede comprar en el mercado, y del contenido vitamínico y proteico de estos bienes.

Consideremos el caso de dos bienes: carne y frutas, con precios p_c y p_f, respectivamente. Entonces, las restricciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} p_f f + p_c c &\leq m \\ V &= f a_f^V + c a_c^V \\ P &= f a_f^P + c a_c^P \end{aligned}$$

La primera restricción es la presupuestaria, e indica qué canastas de frutas y carne se pueden comprar con m pesos. Las dos siguientes indican cuántas vitaminas y cuántas proteínas se obtienen de una canasta (f, c).

Si no se alcanza el punto de saciedad en alguno de los atributos valorados, entonces la restricción presupuestaria se satisfará sin holgura. Reemplazándola en las otras dos podemos conseguir el conjunto de calorías y proteínas alcanzables:

$$
\begin{aligned}
V &= \left(\frac{m - p_c c}{p_f}\right) a_f^V + c a_c^V \\
&\Rightarrow c = \frac{V p_f - a_f^V m}{a_c^V p_f - a_f^V p_c} \\
&\Rightarrow f = \frac{m - p_c \left(\frac{V p_f - a_f^V m}{a_c^V p_f - a_f^V p_c}\right)}{p_f} = \frac{m}{p_f} - \frac{p_c}{p_f}\left(\frac{V p_f - a_f^V m}{a_c^V p_f - a_f^V p_c}\right) \\
P &= f a_f^P + c a_c^P \\
&= \left(\frac{m}{p_f} - \frac{p_c}{p_f}\left(\frac{V p_f - a_f^V m}{a_c^V p_f - a_f^V p_c}\right)\right) a_f^P + \left(\frac{V p_f - a_f^V m}{a_c^V p_f - a_f^V p_c}\right) a_c^P
\end{aligned}
$$

Luego, podemos describir el conjunto de posibilidades como una ecuación lineal en el plano (V, P):

$$
\boxed{P = \left(\frac{a_f^P m a_c^V - a_c^P a_f^V m}{a_c^V p_f - a_f^V p_c}\right) - V\left(\frac{a_f^P p_c + a_c^P p_f}{a_c^V p_f - a_f^V p_c}\right)}
$$

Como la carne tiene más proteínas que los vegetales en términos relativos, esto es:

$$
\frac{a_f^P}{a_f^V} < \frac{a_c^P}{a_c^V},
$$

entonces la mayor cantidad posible de proteínas se consigue gastando todo el ingreso en carne. Eso corresponde al punto:

$$
(V, P) = \left(\frac{m}{p_c} a_c^V, \frac{m}{p_c} a_c^P\right)
$$

Similarmente, si todo el ingreso se gasta en vegetales, se obtiene la máxima cantidad posible de vitaminas:

$$
(V, P) = \left(\frac{m}{p_f} a_f^V, \frac{m}{p_f} a_f^P\right)
$$

Combinaciones de ambos dan origen a puntos intermedios. Geométricamente, entonces, el conjunto de posibilidades de consumo de vitaminas y proteínas es un triángulo, cuyos vértices corresponden al $(0, 0)$ y a los dos puntos indicados arriba, como se muestra en la figura 18.

Parte del atractivo de este ejemplo es que en cierto sentido permite pensar en la teoría del consumidor en general como la "forma reducida" de un problema más complejo, en que las personas satisfacen necesidades anteriores

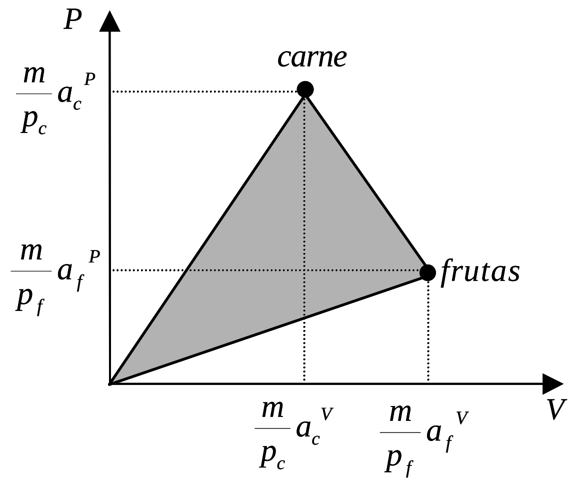


Figura 18. Conjunto de Posibilidades en problema de la dieta

(salud, estética, espiritualidad, tranquilidad, etc.) de manera indirecta por la vía de comprar carne, pinturas, libros, etc.

Por otro lado, nos hace pensar que podemos "descomponer" cada bien en pedazos cuyo valor acaso sea más fácil de valorar que el paquete entero. Piénsese por ejemplo en una casa. Sin duda, todas las casas son distintas: difieren no sólo en su tamaño y forma, distribución, tamaño y disposición de su terreno, materiales, antigüedad, etc., sino además en su ubicación, y los servicios públicos que ello conlleva (accesos, seguridad, etc.) Por ello, es virtualmente imposible pensar en mercados perfectamente competitivos de casas, puesto que por cierto no se trata de bienes homogéneos. Sin embargo, si los atributos de una casa se resumen en un conjunto reducido de características, entonces podemos pensar en mercados perfectamente competitivos de esas características, y en ese caso, el valor (precio perfectamente competitivo de la casa) sería simplemente la suma de los valores de sus atributos.

Otro ejemplo en el que esta idea se ha explotado significativamente es el mercado de los activos financieros: si se piensa cada activo financiero como un paquete de promesas de pago contingentes en la ocurrencia de diversos eventos (que el producto sea un éxito, que llueva de manera que la demanda sea baja, que no haya huelga, etc.), entonces el valor de cada activo puede inferirse de los valores de cada componente. Esta idea es, de hecho, la base de la mayor parte de los modelos de valoración de activos con que contamos actualmente, y sobre ella volveremos brevemente en el capítulo 8. A continuación, en cambio, usaremos la idea de los atributos en una adaptación diferente.

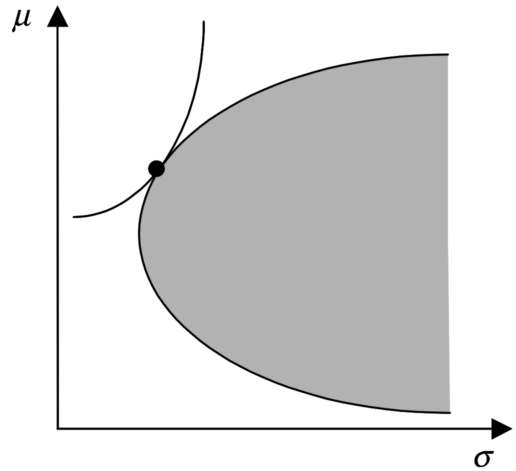


Figura 19. Elección de Cartera

2.6. El problema de la cartera. Una **cartera** de activos puede ser valorada por sus atributos. Una teoría simple propone que hay dos atributos relevantes desde la perspectiva de un inversionista: la rentabilidad esperada (esto es, la esperanza de la tasa de variación que la riqueza experimente en el período) y el riesgo, usualmente medido como la desviación estándar de la rentabilidad (o volatilidad).

Cada activo $k = 1, 2, ..., K$ entonces está representado por los siguientes números: su retorno esperado μ_k, la varianza de su retorno σ_k^2, y las covarianzas de su tasa de retorno con la de los otros activos, $\sigma_{kk'}$.

Si sólo hay dos activos, la varianza de una cartera en que $\alpha\,\%$ está invertida en el activo 1 está dada por:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \left(1 - \alpha^2\right) + 2\alpha \left(1 - \alpha\right) \sigma_{12}$$

y su retorno esperado por:

$$\mu = \alpha \mu_1 + \left(1 - \alpha\right) \mu_2$$

Siendo la varianza una función cuadrática de α y la media una función lineal, el conjunto de combinaciones de media y varianza que se pueden conseguir está dado por una forma cuadrática, como se muestra en la figura 19. Luego, un inversionista para quien el riesgo (varianza) sea un mal y el retorno esperado (media) un bien, tendrá, entonces que escoger una cartera como la que se muestra en la figura 19.

3. El problema del bienestar

La mayor parte del interés en la ciencia económica proviene de la capacidad que demuestre de contribuir últimamente a mejorar el bienestar de la humanidad, de un país, o de un grupo de personas. En efecto, más allá del valor estético de la ciencia, su utilidad proviene de su capacidad de proveernos de buenos consejos, que permitan mejorar nuestra calidad de vida. El bienestar de individuos y grupos, entonces, ocupa un lugar central en el análisis económico.

Hasta ahora, sin embargo, nos hemos limitado a *describir* el comportamiento de individuos, con un fin no más ambicioso que el de predecir lo que cada persona hará. En esta sección, en cambio, nos hacemos cargo de la pregunta de si lo que elige un individuo es o no una de las alternativas más deseables o de mayor bienestar.

La noción de bienestar es sin duda compleja. Una persona ciertamente no se siente bien si no ha satisfecho sus necesidades básicas (comida, abrigo, salud, descanso, etc.), pero seguramente la lista no acaba ahí. El bienestar también está relacionado con la seguridad, con las relaciones afectivas que establezca, con su opinión de sí misma (autoestima), etc. Pero el bienestar de una persona no se refiere a un paquete específico de bienes como éstos que podamos enumerar, sino a una sensación interior quizás fácilmente reconocible por sí misma pero de difícil descripción.

Tratándose de una sensación interior, no es fácilmente observable por terceras personas. En efecto, normalmente juzgamos cómo tal o cual evento debe haber afectado a una persona que conocemos, sin realmente ver su efecto, sino más bien imaginándolo en un acto de empatía, proyectando a partir de la experiencia personal. En la medida en que unos y otros seamos similares ("semejantes"), tal ejercicio de proyección puede ser perfectamente válido como método de predicción del bienestar ajeno. En cambio, en la medida en que seamos distintos, tal ejercicio nos dará un entendimiento parcial y a menudo equívoco sobre el bienestar del prójimo.

En el análisis del comportamiento del consumidor, por ejemplo, se enfatiza la heterogeneidad de las canastas que unas y otras personas compran. Si las personas actúan distinto, quizás no sólo difieran en sus posibilidades sino también en sus preferencias, y por ende en el bienestar que consiga de un bien o hecho.

La profesión ha adoptado un criterio en cierta medida pragmático, pero razonable al menos en una amplia gama de aplicaciones de interés para el economista, si bien no en general. Este criterio consiste en suponer, por una parte, que el bienestar es una sensación interior, inobservable por terceros, y por otra, que ninguna persona actúa en contra de su propio bienestar.

Observe que, combinados, estos supuestos significan que el bienestar de una persona es medible a partir del nivel de utilidad que alcance, puesto que la función de utilidad resume el comportamiento de la persona. Observe también que la única forma de saber qué le da mayor bienestar a una persona es observando su comportamiento. Este planteamiento es central en el análisis económico, por lo que a su formalización la llamaremos "Axioma 0" ó "Axioma base del bienestar".

AXIOMA 0 (base). *Todo individuo se comporta de manera coherente con su bienestar y, por tanto, su bienestar aumenta si y sólo si su utilidad lo hace.*

El axioma 0 es probablemente el responsable de la visión económica del hombre, u *homo economicus* como algunos autores prefieren llamarlo. La expresión "el hombre maximiza" apunta a la idea de que el hombre voluntariosamente intenta hacer lo que más le conviene con los medios a su alcance. Que no haga algo imposible –fuera de su alcance– es tautológico; que haga algo ("se comporte") también, puesto que de lo contrario no tendría un problema de elección. Que lo que haga sea lo mejor para sí mismo es obviamente algo que no puede comprobarse sin conocer qué es mejor para ese individuo; si aceptáramos el axioma 0, entonces esta frase también sería tautológica.

Por otro lado, para evitar ambigüedades, es importante que la evaluación que cada persona haga del bienestar propio sea la misma en todo momento del tiempo. En caso contrario, sería necesario apelar a una noción trascendente de bienestar, y el axioma 0 perdería su relevancia. Que una persona haga lo mejor para sí misma no significa mucho si esa misma persona cambia constantemente de opinión respecto de qué es mejor para sí. En cambio, si esa persona mantiene los mismos objetivos durante toda su vida, siempre puede evaluar su comportamiento con base en los mismos parámetros, consistentemente. Observe que el suponer que una persona mantiene siempre la misma noción de bienestar implica, bajo el axioma 0, que esa persona mantiene siempre las mismas preferencias o función de utilidad. En este caso, decimos que la persona es intertemporalmente consistente.

Como todo supuesto, el axioma 0 puede no ser válido en muchas situaciones. De ser cierto, por ejemplo, no existiría el arrepentimiento. Cuando una persona mira hacia atrás y desea haber actuado distinto, está reconociendo que existía otro curso de acción en el momento en que escogió, disponible y a la vez superior. Esto podría ocurrir porque su conocimiento mejoró en el intertanto, y en ese caso no tildaríamos de inconsistente al arrepentido, porque la razón por la que escogió una alternativa inferior era la ignorancia de la existencia de una mejor alternativa. Presumiblemente, por ejemplo, ésta es la razón por la que los padres toman las decisiones a nombre de los hijos: cuando son muy pequeños, no conocen sus opciones; cuando son algo mayores, no tienen claridad o no toman en cuenta las consecuencias de sus acciones, o bien sólo consideran las consecuencias inmediatas. Cuando alcanzan la edad adulta, idealmente agradecen las decisiones que contrariaron sus preferencias de entonces.

Si el arrepentimiento no va acompañado de un mayor conocimiento, sin embargo, sí estaríamos en presencia de una persona que "no maximizó" (violando el axioma 0), o alternativamente cambió la manera en que evalúa su propio bienestar, esto es, cambió su función de utilidad (y por tanto actúa de manera inconsistente en el tiempo). No es muy difícil imaginar situaciones de este tipo. Considérese, por ejemplo, el caso del drogadicto que se somete al tratamiento en contra de su voluntad, pero a posteriori lo agradece. Claramente evalúa de manera diferente la situación antes y después de rehabilitarse.

Habiendo reconocido la existencia de excepciones al axioma 0, quizás poca gente pueda objetar su validez intuitiva en la mayor parte de las situaciones que analizaremos. Por ejemplo, las decisiones de compra de las familias.

Es interesante observar que el axioma 0 es coherente con dos visiones filosóficas distintas del hombre: el liberalismo y el utilitarismo. De acuerdo al liberalismo, el ser humano sólo puede desarrollarse en plenitud en libertad, por lo que el resguardo de la libertad individual se convierte en un valor de suma importancia. El utilitarismo, en cambio, sostiene que el objetivo de la sociedad debiera ser la búsqueda del mayor bienestar posible para la humanidad, siendo este bienestar la suma del bienestar de cada uno de los individuos que la componen.

Observe que, bajo el axioma 0, lo que cada persona hace en libertad de hecho es lo mejor para sí misma. En la medida en que esto sea cierto, el utilitarista querrá preservar la libertad individual, pues ello es instrumental al objetivo de conseguir la mayor utilidad posible. Así, el utilitarista y el liberal apoyarán las mismas medidas. Sin embargo, sin el axioma 0, aún cuando el comportamiento propio pueda deteriorar el bienestar de una persona, el liberal seguirá apoyando el ejercicio de su libertad, mientras que el utilitarista preferirá ejercer la coerción para evitar la pérdida de bienestar.

Por cierto, la descripción presente es caricaturesca, pues existen una gama de liberales y utilitaristas. La profesión, gracias al axioma 0, se ha mantenido cercana a ambas visiones. Por otra parte, las discusiones que ocurren en su interior, frecuentemente se pueden caracterizar en términos de estas dos posturas. Sobre este tema volveremos al discutir la noción de bienestar social.

A lo largo de este curso, entonces, recurriremos al axioma 0 cada vez que queramos referirnos al bienestar de un individuo, suponiendo por tanto que es bueno para cada individuo satisfacer sus preferencias. Es importante tener presente este hecho, especialmente cuando lleguemos a conclusiones que desafíen la intuición.

Ejercicios

1. (*) El conjunto $\mathcal{A}=\{a,b,c,d\}$ representa cursos de acción mutuamente excluyentes. Se observa que un individuo escogió de la siguiente forma:

Cuando sus posibilidades fueron:	Escogió
$A=\{c,d,b\}$	c
$A=\{b,d\}$	d
$A=\{a,b,c,d\}$	a

   a) Construya una relación de preferencias consistente con este comportamiento.
   b) Construya una función de utilidad $u(\cdot)$ que represente esas preferencias.
   c) Demuestre que cualquier transformación monótona creciente de $u(\cdot)$ representa las mismas preferencias. Explique.
   d) Prediga el comportamiento del individuo en las siguientes situaciones. Explique su razonamiento.
      1) $A=\{b,c\}$
      2) $A=\{a,b,d\}$
      3) $A=\{d\}$
      4) $A=\{a,c\}$

2. (*) Apuretti tenía un trabajo en que se le pagaba \$500.000 al comienzo del mes. Sin embargo, no estaba muy feliz, porque, siendo un comprador compulsivo, en la segunda semana típicamente ya casi se había gastado todo ¡y todavía le quedaban tres semanas por delante! En efecto, en la semana 1 comía caviar y langostas y pasaba el fin de semana en un hotel en la nieve, mientras que en las tres semanas siguientes se iba a pie al trabajo y comía algunos cereales y conservas que hubiese echado al carro del supermercado casi por error.
   Hasta que un buen día fue despedido, y consiguió rápidamente otro trabajo en el que recibe \$100.000 semanales. Desde entonces se ve a Apuretti sonriente todos los días, y gastando en cada semana lo que recibe.
   a) ¿Puede imaginar alguna relación de preferencias que satisfaga los axiomas 1 a 3, que sea consistente con el comportamiento de Apuretti? Si puede, dibújela en un gráfico, poniendo en el eje horizontal el consumo en la semana 1, y en el vertical el consumo total de las semanas 2 a 4. Si no puede, muestre por qué. En cualquier caso, explique.

b) ¿Cree usted que haya razones para pensar en este caso que el axioma 0 no se cumple? Explique claramente.

3. (*) Dibuje la restricción presupuestaria para los dos bienes x e y que consume un individuo en las situaciones descritas a continuación. Sea preciso y explique claramente su respuesta en cada caso:
   a) El individuo tiene un ingreso de 2000, y paga un precio $p_x = 10$ por el bien x. El bien y no está disponible en el mercado.
   b) El individuo tiene un ingreso de 2000, y paga un precio $p_x = 10$ por el bien x. El precio del bien y es $p_y = 20$ por la primeras 10 unidades, y $p_y = 10$ si $y > 10$.
   c) El individuo tiene un ingreso de 2000, y paga un precio $p_x = 10$ por el bien x. El bien y sólo se puede comprar en paquetes de 10 unidades, cuyo precio es $p_{\overline{y}} = 150$ (donde $\overline{y}$ es el paquete de 10 unidades de y).
   d) El individuo tiene un ingreso de 2000, y paga un precio $p_x = 10$ por el bien x. El bien y sólo se puede comprar en paquetes de 10 unidades, cuyo precio es $p_{\overline{y}} = 150$ (donde $\overline{y}$ es el paquete de 10 unidades de y), pero además cada paquete de y viene con una unidad de x de regalo.
4. (*) Sufriday Agotada sólo piensa en sus próximas vacaciones, seguramente una espléndida combinación de días de playa (x_1) y días de paseo (x_2). Cada día de playa cuesta \$3.000, mientras que cada día de paseo cuesta \$6.000. Sufriday cuenta con un presupuesto de \$45.000 y dispone de 10 días de vacaciones. Sus preferencias, por otro lado, son representables por medio de la función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = 2 \ln x_1 + 3 \ln x_2$$

   a) Plantee un problema de optimización que le permita predecir cómo organizará Sufriday sus vacaciones, esto es, cuántos días paseará y cuántos días irá a la playa. En su respuesta, suponga perfecta divisibilidad de los días.
   b) Grafique el conjunto de posibilidades de Sufriday. Asigne en el gráfico una letra a cada caso posible, y explique en cada caso qué restricciones se satisfacen con holgura.
   c) Resuelva el problema por el método de Kuhn-Tucker. Preocúpese de explicar su procedimiento, y sea explícito respecto de condiciones de primer y de segundo orden.
   d) Explique por qué su respuesta no cambiaría si la función de utilidad de Sufriday hubiese, en cambio, sido

$$v(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}}} - \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Explique, asimismo, por qué su respuesta tampoco cambiaría si Sufriday no maximizara utilidad sino que minimizara el índice

$$I(x_1, x_2) = \frac{1}{e^{x_1^2 x_2^3}}$$

5. (*) Un consumidor valora el consumo de dos bienes, libros (L) y comida.(C), y enfrenta precios $p_L = 25$ y $p_C = 3$ respectivamente. El ingreso mensual de este individuo es fijo e igual a $m = 100$. Las preferencias de este individuo se pueden representar mediante la siguiente función de utilidad: $u(L, C) = L^{1/4}C^{3/4}$
   a) Plantee el problema de optimización del consumidor, y resuelva, explicando brevemente el procedimiento, y verificando las condiciones de segundo orden correspondientes. En su respuesta debe graficar el conjunto de oportunidades del consumidor, mostrando en el gráfico todos los casos posibles y explicando por qué descarta todos excepto uno.
   b) Suponga ahora que una nueva ley para promover la lectura obliga a todos los consumidores a comprar al menos dos libros al mes. Plantee el problema de optimización y resuelva **usando las condiciones de Kuhn-Tucker**. En su respuesta debe mostrar el procedimiento completo (justificando cada uno de los casos que descarte como solución), mostrando cómo cambia el conjunto de posibilidades del consumidor y mostrando en el gráfico cuáles son los nuevos casos posibles a verificar.
   c) ¿Aumentó o disminuyó la utilidad del consumidor al incorporar esta nueva restricción?, ¿por qué?
6. (*) Ana valora el consumo de vitaminas (V) y proteinas (P), atributos que no pueden ser adquiridos directamente en el mercado, sino a través de los alimentos (que puede combinar como ella quiera). Suponga que ella tiene un ingreso de \$5.000 y puede elegir entre tres alimentos posibles: A, B, y C.

   Cada unidad de A cuesta \$1000 y entrega 20 unidades de V y 5 unidades de P.

   Cada unidad de B cuesta \$500 y entrega 2 unidades de V y 10 unidades de P.

   Cada unidad de C cuesta \$250 y entrega 3 unidades de V y 3 unidades de P.

   Muestre en un gráfico el conjunto de posibilidades de consumo de Ana (en el plano V,P), explicando brevemente.
7. (**) Paula tiene que elegir cuántos kilos de carne (c) y cuántos kilos de verdura (v) comprar. La función de utilidad que representa las preferencias de Paula es:

$$u(c, v) = \frac{v}{(1 + c)}$$

El precio del kilo de carne es $p_c = 10$, y el precio del kilo de verduras es $p_v = 5$. El ingreso de Paula es 100, de modo que su restricción presupuestaria es

$$10c + 5v \leq 100$$

SE PIDE:

Plantee el problema de optimización y resuelva **usando las condiciones de Kuhn-Tucker**. En su respuesta debe mostrar el procedimiento completo (justificando cada uno de los casos que descarte como solución). Explique la intuición de su resultado.

8. (**) Juan valora el consumo de bienes (x) y ocio (h). Sus preferencias se representan mediante la función:

$$u = xh$$

Él dispone de 100 horas para el ocio o trabajo (ℓ), de modo que su restricción de tiempo es de la forma $h + \ell = 100$. Además, dispone de un ingreso no salarial de \$500, y recibe un salario de w por hora. El precio de los bienes es $p = 1$.

   a) Suponga que $w = 10$. Plantee el problema de optimización, y resuelva usando las condiciones de Kuhn Tucker (debe fundamentar brevemente por qué descarta los casos que correspondan). Recuerde verificar el cumplimiento de las condiciones de segundo orden correspondientes.
   b) Encuentre el salario de reserva, explicando claramente a qué corresponde este concepto. Apoye su respuesta en un gráfico.
   c) Suponga ahora que si Juan trabaja, su tiempo total disponible para el ocio y trabajo cae a 80 horas (gasta 20 horas en traslado al trabajo, lo que no constituye ocio ni trabajo). ¿Es su nuevo salario de reserva mayor o menor que el anterior? Explique claramente y grafique (no es necesario calcular).

9. (*) Un aumento de la tasa de interés reduce la riqueza de todos y, por tanto, empeora el bienestar de ahorrantes y deudores. Comente.

10. (**) Considere un individuo que vive dos períodos, $t = 0$ y $t = 1$, y cuyas preferencias se pueden representar mediante la función $u(c_0, c_1) = c_0 c_1$, donde c_t denota el consumo en el período t. Su dotación consiste en un ingreso de \$100 en $t = 0$ y nada en $t = 1$. Además, existe un mercado de crédito que permite prestar (ahorrar en $t = 0$) o pedir prestado (endeudarse en $t = 0$) a la tasa de interés $r = 10\,\%$.

    a) ¿Cuál será el nivel de consumo de este individuo en cada período? Plantee el problema de maximización correspondiente y resuélvalo mostrando su resultado en un gráfico (sea cuidadoso al graficar).

b) Suponga ahora que en $t = 0$ este individuo tiene la posibilidad de invertir en **uno** de los siguientes dos proyectos (mutuamente excluyentes):

Proyecto 1:	$g(x) = 10x^{\frac{1}{2}}$
Proyecto 2:	$g(x) = 20x^{\frac{1}{4}}$

donde por $\$x$ de inversión en $t = 0$, el proyecto entrega $\$g(x)$ en $t = 1$. Ambos proyectos son perfectamente divisibles. ¿Cuál proyecto escogerá? ¿Cuál será el monto de la inversión y el nivel de consumo de este individuo en cada período? Explique intuitivamente su resultado, mostrando la situación en un gráfico.

11. (***) Severo Fierro es una persona ordenada, inflexible, incluso algo neurótica según algunos. Independientemente de si eso es cierto o no, Severo cree en el balance, en el equilibrio, y se ha impuesto la disciplina de no consumir hoy un peso adicional si no puede garantizarse a sí mismo que podrá también hacerlo en el futuro. De este modo, su comportamiento de consumo intertemporal se puede representar por medio de la siguiente función de utilidad:

$$u(c_1, c_2) = \text{mín}\{c_1, c_2\}$$

donde c_1 es consumo presente y c_2 consumo futuro. Siendo también un hombre imaginativo y de visión, tiene tres proyectos de inversión independientes e indivisibles en carpeta, como se indica en la siguiente tabla:

Proyecto	Inversión	Retorno
α	10	20
β	10	10
γ	20	30

Severo, por otro lado, tiene una dotación de $(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = (200, 0)$, y no tiene acceso al mercado de crédito.

a) Caracterice su conjunto de posibilidades de consumo. Sea extremadamente cuidadoso(a) al indicar qué puntos de la frontera pertenecen y cuáles no pertenecen al conjunto.

b) Verifique que Severo podría escoger un perfil de consumo como $(c_1^*, c_2^*) = (60, 60)$.

c) Lo anterior significa que Severo podría desperdiciaría hasta 100 unidades de consumo en el presente, lo que ha llevado a sus críticos a tildarlo de "irracional". Existen diversos sentidos que se le pueden atribuir a la palabra irracional. Por ejemplo, fallar el Axioma de Transitividad, o bien fallar el Axioma 0. Explique qué significa ser irracional en ambos casos. ¿Es Severo una persona irracional en el sentido del Axioma de Transitividad? ¿Y en el sentido del Axioma 0?

d) No obstante lo anterior, es indudable que el comportamiento de Severo escapa a lo normal. Su amigo Miope Apuretti, por otro lado, tiene la siguiente preferencia:

$$\begin{aligned}(\widehat{c}_1, \widehat{c}_2) &\succ (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2) \Leftrightarrow \\ \{\widehat{c}_1 > \widetilde{c}_1\} \text{ ó } \{\widehat{c}_1 &= \widetilde{c}_1 \text{ y } \widehat{c}_2 > \widetilde{c}_2\}\end{aligned}$$

1) ¿Qué haría Miope si estuviese en el lugar de Severo?
2) ¿Es irracional Miope en alguno de los sentidos mencionados en (c)?

e) Suponga en cambio que se abre un mercado de crédito, en donde se puede prestar o pedir prestado a la tasa de $r = 10\,\%$.

1) Determine el nuevo conjunto de posibilidades de consumo.
2) ¿Qué hará Severo en esta nueva situación? ¿Desechará algo de consumo en alguna fecha?
3) ¿Qué haría Miope si estuviera en los zapatos de Severo?

f) Imagine que, finalmente, Miope y Severo llegan a viejos, y se juntan en su bar favorito a conversar sobre sus experiencias. Miope, muerto de sed y envidiando con toda su alma la cerveza que Severo toma, le confiesa que se arrepiente de haber actuado de la manera que lo hizo, con total descuido por su futuro. Severo, a propósito, es economista; quizás por eso le dice con toda seguridad: "no te creo". ¿Es acaso Severo un fiel devoto del Axioma 0? Suponga que Miope actuó y habló honestamente siempre; ¿es su comportamiento compatible con el Axioma 0?

Comentarios bibliográficos

La teoría de la utilidad tiene una historia larga. Jeremy Bentham (1824), fundador de la corriente filosófica conocida como utilitarismo, pensaba que las decisiones humanas se podían explicar con base en el placer y el dolor que causaran. La forma matemática de la teoría nació, sin embargo, en el movimiento conocido como la Revolución Marginalista, en que William Jevons (1871) en Inglaterra, Carl Menger (1871) en Alemania y León Walras (1874) en Francia, introdujeron independientemente la idea de la utilidad marginal.

En los años siguientes se discutió si la utilidad era o no una magnitud medible, y si se trataba de una magnitud ordinal o cardinal. La importancia de esta pregunta tiene que ver con (1) la posibilidad de estudiar científicamente la utilidad de manera directa, y (2) la posibilidad de comparar la utilidad de dos personas, para evaluar su bienestar relativo. Esto último es especialmente importante cuando se estudian las consecuencias para un conjunto de personas de determinadas políticas públicas. Aunque los fundadores de hecho concibieron a la utilidad como una magnitud cardinal medible, la visión moderna es la contraria. Por una parte, los intentos de los economistas de desarrollar una psicología hedonística no fueron fructíferos. Por otra, Hicks y Allen (1934) observaron que bastaba con imaginar la utilidad como una magnitud ordinal para desarrollar una teoría coherente de la conducta. Ése es el enfoque que adoptamos en este libro.

Es interesante observar la lentitud con que los economistas comenzaron a ocupar las matemáticas en general, y el cálculo infinitesimal en particular. Recuerde que el cálculo fue desarrollado por Leibnitz y Newton doscientos años antes. De hecho, Jevons (1871) creyó necesario, en un apéndice de su libro, hacer una defensa del uso de las matemáticas en el análisis económico. Aunque para la segunda mitad del siglo XX ya se había consolidado como el lenguaje ordinario de la disciplina, algunos economistas, notablemente de la Escuela Austríaca, lo desestiman hasta el día de hoy.

El sitio http://www.ucl.ac.uk/Bentham-Project/, mantenido por el University College London, contiene información sobre el trabajo de Jeremy Bentham.

Referencias

1: Bentham, Jeremy (1824) "An introduction to the principles of morals and legislation", en J. S. Mill and J. Bentham, *Utilitarianism and Other Essays, Harmandsworth: Penguin.*

2: *Hicks, J. y R. Allen (1934), "A Reconsideration of the Theory of Value",* Economica 1, 52-76 y 196-219.

3: Jevons, William S. (1871), "The Theory of Political Economy". Quinta edición, de 1957, reimpresa en 1965, Reprints of Economic Classics, August Keller.

4: Menger, Carl (1871), "Principles of Economics". Traducción del alemán por James Dingwall y Bert Hoselitz, 1976. Reimpreso en 1994 por Libertarian Press.

5: Walras, Léon (1874), "Elements of Pure Economics". Traducción del francés por William Jaffé, 1984. Orion Editions.

CAPíTULO 2

Teoría del Consumidor y Demanda Individual

En este capítulo profundizamos el análisis del comportamiento de un consumidor en mercados competitivos que comenzamos en el capítulo anterior. Para ello nos centramos en el caso en que las preferencias se pueden representar mediante una función de utilidad cuasicóncava (de modo que las curvas de indiferencia son convexas), en que no hay saciedad, y la solución al problema de optimización es interior, de modo que se consume algo de cada bien. En este contexto, definimos la función de demanda ordinaria, que surge del problema de maximización de la utilidad sujeto a la restricción de presupuesto, y la función de demanda compensada, que surge del problema dual: minimización del costo de alcanzar un determinado nivel de utilidad. Se estudian las interrelaciones entre ambas demandas, y la estática comparativa, que consiste en analizar las consecuencias asociadas al cambio en alguno de los parámetros que explican la cantidad demandada (precios e ingreso).

1. Demanda ordinaria y compensada

A partir de la maximización de utilidad, obtenemos las cantidades de ambos bienes (x_1 y x_2) que el individuo escoge dentro de su conjunto de posibilidades. En otras palabras, encontramos la cantidad consumida del bien ℓ (con $\ell = 1, 2$) para cada nivel de ingreso del individuo y precios de los bienes.

Definición 4. *La **demanda ordinaria** o **marshalliana** por el bien ℓ es una función que asigna, para cada nivel de ingreso m y precios de los bienes p_1, p_2, la cantidad consumida de x_ℓ que permite alcanzar el mayor nivel de utilidad posible, dado el conjunto de posibilidades del individuo. Denotamos esta función como $x_\ell^M = x_\ell\,(m, p_1, p_2)$.*

De ahora en adelante suponemos (salvo que se indique expresamente lo contrario) que estamos en una solución interior sin saciedad. Entonces, la función de demanda ordinaria surge de la maximización de la utilidad individual sujeto a la restricción presupuestaria. Es decir, la función $x_\ell^M = x_\ell\,(m, p_1, p_2)$ se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones que surge de las

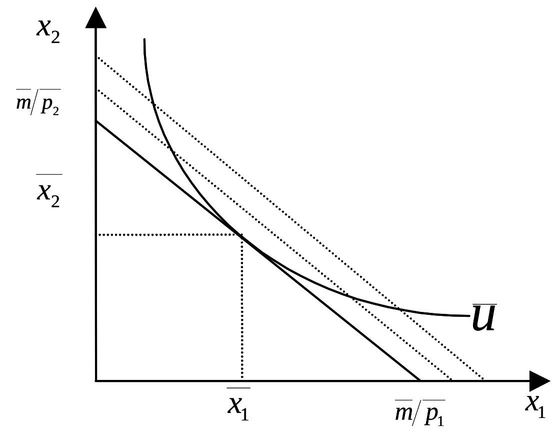


FIGURA 1. El problema de minimización de costos del consumidor

condiciones de primer orden del siguiente problema de optimización:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$
$$\text{sujeto a } m = x_1 p_1 + x_2 p_2$$

Ahora bien, supongamos que la máxima utilidad que se obtiene para un determinado nivel de ingreso $\overline{m}$ y precios $\overline{p_1}$ y $\overline{p_2}$ es $\overline{u}$. Nos podemos preguntar qué pasaría si buscamos las cantidades de x_1 y x_2 que permitan obtener el nivel de utilidad $\overline{u}$ al mínimo costo posible, para los mismos precios $\overline{p_1}$ y $\overline{p_2}$. Debería ser cierto que las cantidades encontradas con este procedimiento coinciden con las obtenidas a partir de la maximización de la utilidad dado ingreso $\overline{m}$, y que el mínimo costo posible de alcanzar $\overline{u}$ a dichos precios es justamente $\overline{m}$. Gráficamente en la figura 1 vemos que, si las curvas de indiferencia son convexas como en la figura, el mínimo costo posible de alcanzar el nivel de utilidad $\overline{u}$ no puede ser otro que el asociado a la canasta $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$, que cuesta $\overline{m}$.

En general, podemos buscar las cantidades de x_1 y x_2 que permiten obtener un determinado nivel de utilidad u al mínimo costo posible, dados los precios de los bienes p_1 y p_2.

DEFINICIÓN 5. *La* ***demanda compensada*** *o* ***hicksiana*** *por el bien ℓ es una función que asigna, para cada nivel de utilidad u y precios de los bienes p_1, p_2, la cantidad consumida de x_ℓ que permite alcanzar el nivel de utilidad u al mínimo costo posible. Denotamos esta función como $x_\ell^H = x_\ell(u, p_1, p_2)$*

Entonces, la función de demanda compensada surge de la minimización de costos, sujeto a un determinado nivel de utilidad. Es decir, la función

$x_\ell^H = x_\ell(u, p_1, p_2)$ se obtiene de resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x_1, x_2} C = x_1 p_1 + x_2 p_2$$
$$\text{sujeto a } u = u(x_1, x_2)$$

En este caso, el lagrangeano es:

$$\mathcal{L} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \gamma(u - u(x_1, x_2))$$

de modo que las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \gamma \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - u(x_1, x_2) = 0 \tag{1.3}$$

De estas condiciones, como era de esperar, se obtiene nuevamente la condición de tangencia:

$$TMS = \frac{p_1}{p_2}$$

Si reemplazamos en la función de utilidad $u = u(x_1, x_2)$ las funciones de demanda ordinaria encontradas, obtenemos la **función de utilidad indirecta**, que indica el máximo nivel de utilidad que se puede alcanzar para cada nivel de ingreso m y precios de los bienes p_1 y p_2. A su vez, si reemplazamos en la función de costo $C = x_1 p_1 + x_2 p_2$ las funciones de demanda compensada encontradas, obtenemos la **función de mínimo costo**, que indica el mínimo costo al que se puede alcanzar el nivel de utilidad u a los precios de los bienes p_1 y p_2. Todo esto se resume en el siguiente diagrama:

Maximización de utilidad	*Minimización de costos*
Max $u=u(x_1,x_2)$ s/a $m=x_1p_1+x_2p_2$	Min $C=x_1p_1+x_2p_2$ s/a $u=u(x_1,x_2)$
$\downarrow$	$\downarrow$
Demanda ordinaria: $x_1^M=x_1(p_1,p_2,m)$ $x_2^M=x_2(p_1,p_2,m)$	Demanda compensada: $x_1^H=x_1(p_1,p_2,u)$ $x_2^H=x_2(p_1,p_2,u)$
$\downarrow$	$\downarrow$
Función de utilidad indirecta: $v=u(x_1^M,x_2^M)=v(p_1,p_2,m)$	Función de mínimo costo: $C^*=x_1^Hp_1+x_2^Hp_2=C(p_1,p_2,u)$

EJERCICIO 1. *Considere una función de utilidad de la forma* $u(x_1,x_2) = x_1x_2$. *Encuentre las demandas marshalliana y hicksiana por los bienes* 1 *y* 2*, y muestre que la función de utilidad indirecta resultante es de la forma:* $v(p_1,p_2,m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$, *mientras que la función de mínimo costo es de la forma:* $C^*(p_1,p_2,u) = 2\sqrt{up_1p_2}$.

Si graficamos las *curvas* de demanda ordinaria y compensada por el bien ℓ, obtendremos dos curvas distintas. Al graficar la curva de demanda ordinaria por el bien 1, por ejemplo, dejamos constantes p_2 y m, como se observa en la figura 2.

En cambio, al graficar la curva de demanda compensada por el bien 1, dejamos constantes p_2 y u, como se ve en la figura 3.

Nos interesa entender los efectos sobre la cantidad consumida que tienen diversos cambios en el conjunto de posibilidades del consumidor.

Cuando baja el precio de un bien, las posibilidades cambian en dos aspectos. Por una parte, hay nuevas canastas alcanzables, y en este sentido el individuo es "más rico"; por otra, cambian los precios relativos de los bienes, y por tanto su costo de oportunidad. Conceptualmente, entonces, podemos descomponer la respuesta del consumidor entre lo que denominaremos efectos ingreso (o riqueza) y sustitución (precio relativo).

Decimos que el **efecto sustitución** es el cambio en la cantidad consumida de un bien al cambiar su precio, manteniendo constantes el precio de los demás bienes *y el nivel de utilidad* u_0 (lo que se refleja en la demanda compensada). A su vez, el **efecto ingreso** indica el cambio en la cantidad consumida de un bien ante un cambio en el ingreso, manteniendo los precios de todos los bienes constantes.

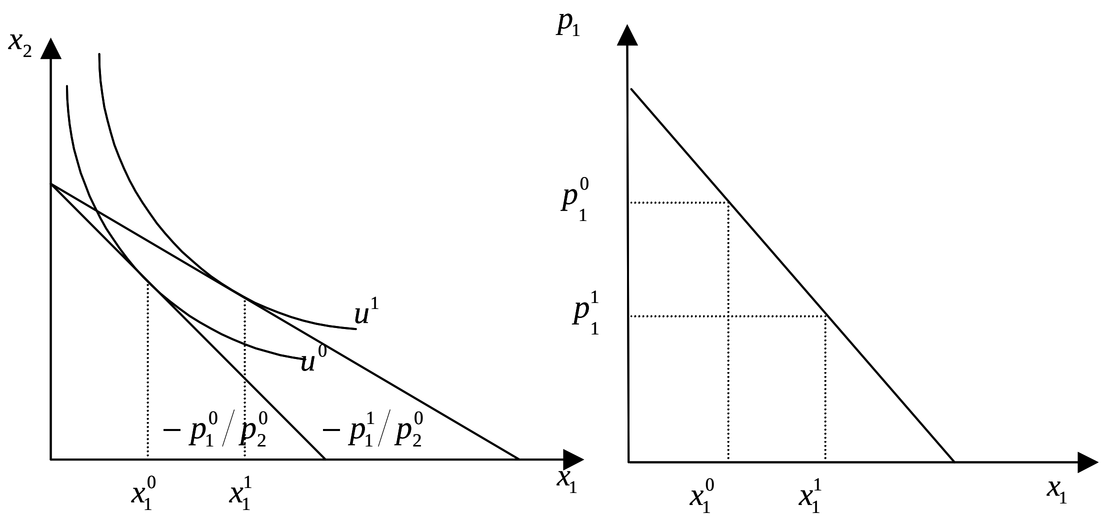


Figura 2. Derivación de la Demanda Ordinaria

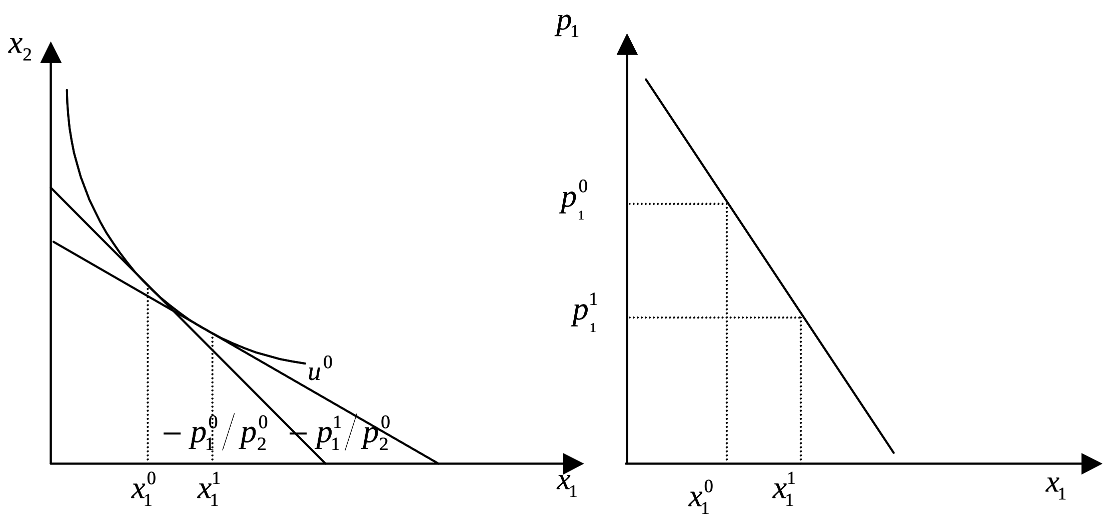


Figura 3. Derivación de la Demanda Compensada

La convexidad de las curvas de indiferencia asegura que al aumentar el precio de un bien, su cantidad consumida necesariamente debe caer si mantenemos el nivel de utilidad constante, de modo que la curva de demanda hicksiana debe tener pendiente negativa. En efecto, la TMS es decreciente, por lo que un aumento en $\frac{p_1}{p_2}$ requiere de una disminución en x_1 para que la TMS también aumente.

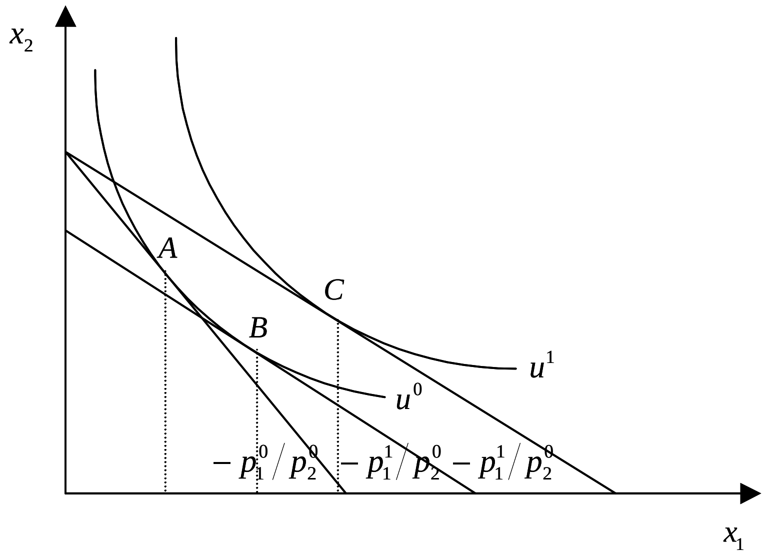
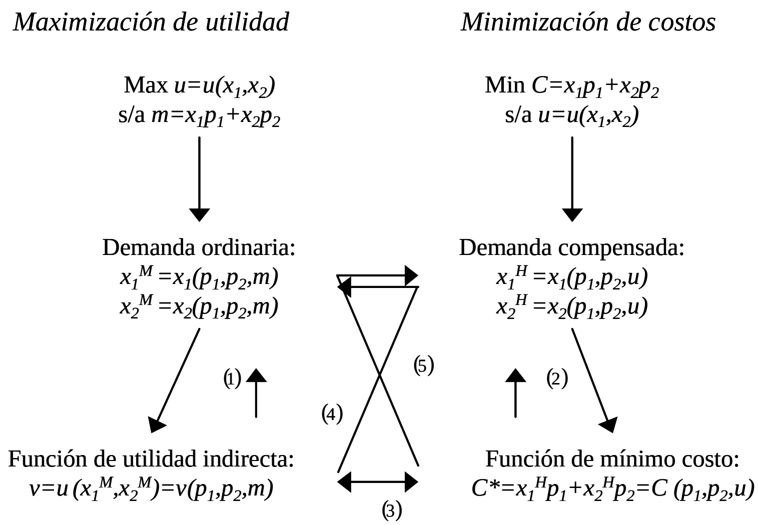


FIGURA 4. Efectos sustitución (A-B) y efecto ingreso (B-C). El caso de un bien normal

Gráficamente es fácil ver que si el efecto ingreso es positivo (el bien es superior o normal), entonces la demanda ordinaria es más elástica que la demanda compensada (ver la figura 4). A su vez, si el efecto ingreso es negativo (el bien es inferior), la demanda ordinaria es más inelástica que la compensada; mientras que si el efecto ingreso es nulo (el bien es neutro), la elasticidad de la demanda ordinaria y de la demanda compensada coinciden.

Estas conclusiones se pueden obtener a partir de un análisis gráfico (tal como en la figura anterior para el caso del bien normal), y también algebraicamente a través de la **Ecuación de Slutsky**.

Para derivar la ecuación de Slutsky, necesitamos derivar primero las relaciones que hay entre las demandas ordinaria y compensada, que se resumen en el diagrama siguiente. Las flechas no numeradas del diagrama indican las funciones de demanda que se pueden obtener a partir de la maximización de utilidad y minimización de costos (demanda ordinaria y compensada, respectivamente), y a partir de ellas, el valor de la función objetivo evaluada en el óptimo (función de utilidad indirecta y función de mínimo costo, respectivamente). Las flechas numeradas indican cómo a partir de estas últimas funciones podemos volver a obtener las demandas, como se explica a continuación.



En primer lugar, aplicando el teorema de la envolvente sabemos que $\frac{\partial v(p_1,p_2,m)}{\partial p_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1} = -\lambda x_1$, mientras que $\frac{\partial v(p_1,p_2,m)}{\partial m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = \lambda$ (utilidad marginal del ingreso). Con esto obtenemos:

$$x_1^M (p_1, p_2, m) = -\frac{\frac{\partial v(p_1,p_2,m)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v(p_1,p_2,m)}{\partial m}}$$

Esta identidad nos permite pasar de la función de utilidad indirecta a la demanda ordinaria (paso (1) en el diagrama), y se conoce como **Identidad de Roy**.

Asimismo, aplicando el teorema de la envolvente a la función de mínimo costo, vemos que $\frac{\partial C^*(p_1,p_2,u)}{\partial p_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1} = x_1$. Con esto podemos obtener directamente la función de demanda compensada a partir de la función de mínimo costo (paso (2) en diagrama):

$$x_1^H (p_1, p_2, u) = \frac{\partial C^* (p_1, p_2, u)}{\partial p_1}$$

lo que se conoce como **Lema de Shephard**.

Ejercicio 2. *Muestre que a partir de la función de utilidad indirecta puede obtener la demanda marshalliana usando la Identidad de Roy en el ejercicio anterior. Análogamente, muestre que puede obtener la demanda compensada a partir de la función de mínimo costo en el mismo ejercicio.*

El mínimo costo al que se puede alcanzar el máximo nivel de utilidad posible para unos precios de los bienes dados y un determinado nivel de ingreso m, es justamente dicho nivel de ingreso. Lo inverso también es cierto:

el máximo nivel de utilidad que se puede alcanzar gastando el mínimo costo necesario para alcanzar un determinado nivel de utilidad u, es justamente dicho nivel de utilidad.

$$\begin{aligned} C^*(p_1, p_2, v(p_1, p_2, m)) &= m \\ v(p_1, p_2, C^*(p_1, p_2, u)) &= u \end{aligned}$$

Luego, si despejamos u de la función de mínimo costo (y dejamos C^* como m), obtenemos la función de utilidad indirecta. Asimismo, si despejamos m de la función de utilidad indirecta (y dejamos v como u), obtenemos la función de mínimo costo (paso (3) en el diagrama).

Ejemplo 1. *En el ejemplo desarrollado en el ejercicio 1, si despejamos el ingreso en la función de utilidad indirecta obtenemos:* $m = 2\sqrt{vp_1p_2}$*, que corresponde a la función de mínimo costo si llamamos* C^* *a* m*, y si llamamos* u *a* v*. Lo propio ocurre si despejamos* u *en la función de mínimo costo:* $u = \left(\frac{C^*}{2\sqrt{p_1p_2}}\right)^2$.

Por el mismo argumento anterior, si en la función de demanda compensada reemplazamos u por la función de utilidad indirecta, obtenemos la función de demanda ordinaria (paso (4) en el diagrama):

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = x_1^H(p_1, p_2, v(p_1, p_2, m))$$

Esto se debe a que, al reemplazar u por la función de utilidad indirecta, lo que hacemos es equivalente a variar el nivel de utilidad de referencia en la minimización de costos cada vez que cambia el ingreso, de modo que la utilidad de referencia siempre sea la máxima alcanzable dados los precios y el ingreso. Es decir, es equivalente a maximizar la utilidad sujeto a la restricción de presupuesto.

Asimismo, si en la función de demanda ordinaria reemplazamos m por la función de mínimo costo, obtenemos la función de demanda compensada (paso (5) en el diagrama).

$$x_1^H(p_1, p_2, u) = x_1^M(p_1, p_2, C^*(p_1, p_2, u))$$

Ejercicio 3. *Con las funciones obtenidas en el ejercicio 1 muestre que se puede llegar a la demanda marshalliana a partir de la demanda compensada y la función de utilidad indirecta, y lo propio con la demanda hicksiana.*

De acuerdo a lo anterior, entonces, en general podemos escribir:

$$x_i^H(p_1, p_2, u) = x_i^M(p_1, p_2, C^*(p_1, p_2, u))$$

Luego, derivando respecto de p_j (y aplicando regla de la cadena) obtenemos la ecuación de Slutsky:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_i^H(p_1,p_2,u)}{\partial p_j} &= \frac{\partial x_i^M(p_1,p_2,m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^M(p_1,p_2,m)}{\partial m}\frac{\partial C^*}{\partial p_j} \\ &= \frac{\partial x_i^M(p_1,p_2,m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^M(p_1,p_2,m)}{\partial m}x_j^H,\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad proviene de la aplicación del Lema de Shephard.

2. Estática comparativa y elasticidades

La elasticidad mide el cambio porcentual en la variable de interés ante un determinado cambio porcentual en el parámetro en cuestión. En esta sección nos interesan las elasticidades precio propia de las demandas ordinaria y compensada (a la que comúnmente nos referimos como "la" elasticidad de la demanda), las elasticidades cruzadas, y la elasticidad ingreso.

DEFINICIÓN 6. *La* ***elasticidad precio*** *propia de la demanda corresponde al cambio porcentual en la cantidad demandada del bien ℓ ante un cambio porcentual en el precio del mismo bien, p_ℓ: $\eta_{\ell\ell} = \frac{\partial \ln x_\ell}{\partial \ln p_\ell} = \frac{\triangle \% x_\ell}{\triangle \% p_\ell}$. La elasticidad precio de la demanda ordinaria incluye el efecto ingreso y el efecto sustitución, mientras que la elasticidad precio de la demanda compensada sólo incluye el efecto sustitución.*

DEFINICIÓN 7. *La* ***elasticidad cruzada*** *de la demanda corresponde al cambio porcentual en la cantidad demandada del bien ℓ ante un cambio porcentual en el precio de otro bien ℓ', $p_{\ell'}$: $\eta_{\ell\ell'} = \frac{\partial \ln x_\ell}{\partial \ln p_{\ell'}} = \frac{\triangle \% x_\ell}{\triangle \% p_{\ell'}}$. Cuando esta elasticidad es positiva, decimos que el bien ℓ es* ***sustituto*** *de ℓ'; mientras que si es negativa, decimos que el bien ℓ es* ***complemento*** *de ℓ'. A su vez, al referirnos a la elasticidad cruzada de la demanda ordinaria, decimos que el bien ℓ es sustituto o complemento* ***bruto*** *de ℓ'; mientras que al referirnos a la elasticidad cruzada de la demanda compensada, decimos que el bien ℓ es sustituto o complemento* ***neto*** *de ℓ'.*

DEFINICIÓN 8. *La* ***elasticidad ingreso*** *corresponde al cambio porcentual en la cantidad demandada del bien ℓ ante un cambio porcentual en el ingreso, m: $\eta_{\ell m'} = \frac{\partial \ln x_\ell}{\partial \ln m} = \frac{\triangle \% x_\ell}{\triangle \% m}$. Cuando esta elasticidad es positiva, decimos que ℓ es un bien* ***normal*** *o* ***superior****; cuando es positiva y mayor que uno, decimos que es un bien de lujo; cuando es nula decimos que es un bien* ***neutro****, y cuando es negativa decimos que es un bien* ***inferior****.*

EJERCICIO 4. *Encuentre la elasticidad precio propia y cruzada de las demandas marshalliana y hicksiana encontradas en el ejercicio 1, y la elasticidad ingreso en el caso de la demanda marshalliana.*

2.1. Descomposición de Slutsky. La ecuación de Slutsky se puede expresar en términos de elasticidades, para lo cual hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\eta_{ij}^{H} &= \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} = \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} + \frac{\partial x_i^M}{\partial m}\frac{p_j}{x_i}x_j \\ &= \eta_{ij}^{M} + \frac{\partial x_i^M}{\partial m}\frac{m}{x_i}\frac{x_j p_j}{m} = \eta_{ij}^{M} + \alpha_j \eta_{im} \qquad (2.1)\end{aligned}$$

donde $\alpha_j = \frac{x_j p_j}{m}$ corresponde a la proporción del ingreso gastada en el bien j. Esta fórmula es general: j puede ser igual a i o distinto de i (en el primer caso obtendremos la elasticidad precio propia, y en el segundo caso obtendremos una elasticidad cruzada).

De manera que la ecuación de Slutsky indica que $\eta_{ij}^{M} = \eta_{ij}^{H} - \alpha_j \eta_{im}$, por lo que nuevamente podemos concluir que si el efecto ingreso es positivo, entonces la demanda ordinaria es más elástica que la demanda compensada; si el efecto ingreso es negativo, la demanda ordinaria es más inelástica que la compensada; mientras que si el efecto ingreso es nulo, las elasticidades de la demanda ordinaria y de la demanda compensada coinciden.

Ejercicio 5. *Demuestre que* $\eta_{ij}^{M} = \eta_{ij}^{H} - \alpha_j \eta_{im}$ *en el caso desarrollado en el ejercicio 1 y subsiguientes.*

2.2. Agregación de Engel. A partir de la restricción presupuestaria, sabemos que se debe cumplir (para la demanda ordinaria):

$$m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad (2.2)$$

Derivando la expresión anterior respecto de m, obtenemos:

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^M (p_1, ...p_n, m)}{\partial m} \qquad (2.3) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i p_i}{m}\right)\left(\frac{\partial x_i^M (p_1, ...p_n, m)}{\partial m}\frac{m}{x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_{im}\end{aligned}$$

Esto es, la suma ponderada de las elasticidades ingreso de los distintos bienes debe ser uno. Esto implica, por ejemplo, que no todos los bienes pueden ser neutros (la suma ponderada de las elasticidades sería cero). La intuición de este resultado es que si todos los bienes fueran neutros, diríamos que al aumentar el ingreso del individuo, no aumenta su consumo en ninguno de los bienes: es decir, si antes del cambio estaba gastando todo su ingreso, después del cambio le estará sobrando ingreso, lo que no es consistente con la no saciedad (recordemos que no hemos incorporado la decisión de ahorrar en el problema; es decir, la parte del ingreso que no se gasta, simplemente no se usa).

EJERCICIO 6. *Demuestre que* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_{im} = 1$ *en el caso desarrollado en el ejercicio 1 y subsiguientes.*

2.3. Agregación de Cournot. Siguiendo con la restricción presupuestaria, si la derivamos respecto de p_j obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= x_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^M (p_1, ...p_n, m)}{\partial p_j} \qquad (2.4) \\ &= \frac{x_j p_j}{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{m} p_j \frac{\partial x_i^M (p_1, ...p_n, m)}{\partial p_j} \\ &= \frac{x_j p_j}{m} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i x_i}{m}\right) \left(\frac{\partial x_i^M (p_1, ...p_n, m)}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i}\right) \\ &= \alpha_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_{ij}^M \end{aligned}$$

Si tenemos sólo dos bienes, al derivar respecto de p_1 lo anterior se reduce a $\alpha_1 + \alpha_1 \eta_{11}^M + \alpha_2 \eta_{21}^M = 0$. Lo anterior implica, por ejemplo, que si $\eta_{21}^M = 0$, entonces $\eta_{11}^M = -1$. La intuición detrás de esto es que si cae el precio del bien 1 y la cantidad demandada del bien 2 no cambia, entonces el gasto en el bien 1 debe permanecer constante: si p_1 cae en $a\,\%$, x_1 debe aumentar en el mismo $a\,\%$ (si no, no sería cierto que se gasta todo el ingreso, lo que no sería consistente con no saciedad).

EJERCICIO 7. *Demuestre que* $\alpha_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_{ij}^M = 0$ *en el caso desarrollado en el ejercicio 1 y subsiguientes.*

2.4. Simetría de Hicks. A partir del Lema de Shephard sabemos que:

$$x_i^H (p_1, p_2, u) = \frac{\partial C^* (p_1, p_2, u)}{\partial p_i} \qquad (2.5)$$

Derivando respecto de p_j, obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^H (p_1, p_2, ..., p_n, u)}{\partial p_j} &= \frac{\partial^2 C^* (p_1, p_2, ..., p_n, u)}{\partial p_i \partial p_j} \qquad (2.6) \\ &= \frac{\partial^2 C^* (p_1, p_2, ..., p_n, u)}{\partial p_j \partial p_i} \\ &= \frac{\partial x_j^H (p_1, p_2, ..., p_n, u)}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Es decir, en las demandas compensadas los efectos cruzados son simétricos. En términos de elasticidades, lo anterior implica:

$$\begin{aligned} \alpha_i \eta_{ij}^H &= \left(\frac{x_i p_i}{m}\right)\left(\frac{\partial x_i^H}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}\right) \\ &= \left(\frac{x_j p_j}{m}\right)\left(\frac{\partial x_j^H}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_j}\right) \\ \alpha_i \eta_{ij}^H &= \alpha_j \eta_{ji}^H \end{aligned} \tag{2.7}$$

En el caso de la demanda hicksiana, si el bien 1 es sustituto del bien 2, el bien 2 también debe ser sustituto del bien 1 (y lo mismo si son complementos). En ese caso, entonces, podemos simplemente decir que los bienes son "sustitutos entre sí" (o complementos).

A partir de (2.1) y (**??**) obtenemos:

$$\alpha_i\left(\eta_{ij}^M + \alpha_j \eta_{im}\right) = \alpha_j\left(\eta_{ji}^M + \alpha_i \eta_{jm}\right).$$

Luego, en el caso de la demanda marshalliana puede ocurrir que el bien 1 sea sustituto del bien 2 (i.e., $\eta_{12}^M > 0$), y sin embargo el bien 2 sea complementento del bien 1 (i.e., $\eta_{21}^M < 0$).

EJERCICIO 8. *Demuestre que $\alpha_i \eta_{ij}^H = \alpha_j \eta_{ji}^H$ en el caso desarrollado en el ejercicio 1 y subsiguientes.*

2.5. Homogeneidad de grado cero de las demandas.

2.5.1. Demanda ordinaria. Al no modificarse la restricción presupuestaria, debe ser cierto que si los precios de todos los bienes y el ingreso cambian en igual proporción, la cantidad demandada de cada uno de los bienes no cambia. Es decir,

$$x_i^M = x_i\left(p_1, p_2, ..., p_n, m\right) = x_i\left(\lambda p_1, \lambda p_2, ..., \lambda p_n, \lambda m\right) \tag{2.8}$$

Esto indica que la demanda ordinaria es homogénea de grado cero[1] en precios e ingreso. Pero el teorema de Euler indica que si una función $f = f\left(z_1, ...z_n\right)$ es homogénea de grado r en $z_1, ...z_n$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} z_k = rf \tag{2.9}$$

[1]La función $f\left(x_1, ..., x_n\right)$ se dice **homogénea de grado** r si $f\left(\lambda x_1, ..., \lambda x_n\right) = \lambda^r f\left(x_1, ..., x_n\right)$. Véase el apéndice 2.A.

Luego, en este caso tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_i^M}{\partial m} m = 0 \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i} + \frac{\partial x_i^M}{\partial m} \frac{m}{x_i} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}^M + \eta_{im} = 0$$

EJERCICIO 9. *Suponga que aumentan los precios p_1 y p_2 y el ingreso m en igual proporción. Muestre que la homogeneidad de grado cero de las demandas marshallianas implica que la función de utilidad indirecta es homogénea de grado 0.*

2.5.2. Demanda compensada. Al no modificarse los precios relativos, debe ser cierto que si los precios de todos los bienes cambian en igual proporción, la cantidad demandada de cada uno de los bienes no cambia si mantenemos constante un determinado nivel de utilidad $\overline{u}$. Es decir,

$$x_i^H = x_i\left(p_1, p_2, ..., p_n, \overline{u}\right) = x_i\left(\lambda p_1, \lambda p_2, ..., \lambda p_n, \overline{u}\right)$$

Esto indica que la demanda compensada es homogénea de grado cero en precios. Por el teorema de Euler tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j} p_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i} &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}^H &= 0 \end{aligned}$$

Si sólo existen dos bienes, la homogeneidad de grado 0 de la demanda compensada implica que éstos deben ser sustitutos netos. En efecto:

$$\left.\begin{array}{c} \eta_{11}^H + \eta_{12}^H = 0 \\ \eta_{11}^H \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \eta_{12}^H \geq 0$$

donde $\eta_{11}^H \leq 0$ por la convexidad de la curva de indiferencia.

EJERCICIO 10. *Demuestre que* $\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}^M + \eta_{im} = 0$ *y* $\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}^H = 0$ *en el caso desarrollado en el ejercicio 1 y subsiguientes.*

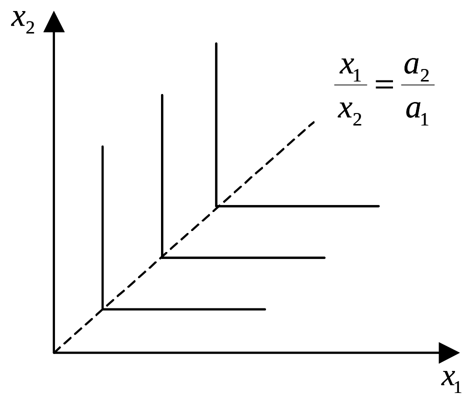


FIGURA 5. Curvas de indiferencia: el caso de las proporciones fijas

EJERCICIO 11. *Suponga que aumentan los precios p_1 y p_2 en igual proporción. Muestre que la homogeneidad de grado cero de las demandas hicksianas implica que la función de mínimo costo es homogénea de grado 1 en precios.*

3. Algunos ejemplos de funciones de utilidad

3.1. Función de utilidad de proporciones fijas. Como su nombre lo indica, en este caso el consumidor valora el consumo de los bienes en proporciones fijas. Un ejemplo clásico de estas preferencias es el de los zapatos: una persona que tenga sus dos piernas normalmente no valora un zapato izquierdo a menos que tenga también el zapato derecho; si ya tiene ambos zapatos, no valora un tercero, a menos que venga acompañado de un cuarto con el que forma otro par. La función de utilidad que representa estas preferencias es de la forma:

$$u(x_1, x_2) = \text{mín}\{a_1 x_1, a_2 x_2\}$$

Así, en el ejemplo de los zapatos, si x_1 es el número de zapatos del pie derecho y x_2 es el número de zapatos del pie izquierdo, $a_1 = a_2$. Esto implica que si $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$, la utilidad es la misma que si $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. Las curvas de indiferencia tendrán forma de L, como se ilustra en la figura 5 para el caso general.

Para encontrar la solución al problema de optimización de este individuo ya no podemos usar la condición de tangencia de curva de indiferencia y restricción presupuestaria (ya que la TMS no está definida en este caso). Pero para resolverlo basta notar que si el precio de los bienes es positivo, el consumidor nunca querrá comprar más unidades de un bien si su valoración marginal es nula. Luego, en el óptimo siempre querrá comprar las cantidades de x_1 y x_2 que satisfacen:

$$\begin{aligned} a_1x_1 &= a_2x_2 = u \\ p_1x_1 + p_2x_2 &= m \end{aligned}$$

Resolviendo, encontramos que la demanda condicionada es totalmente inelástica, es decir, no hay efecto sustitución:

$$\begin{aligned} x_1^*(p_1, p_2, u) &= x_1^*(u) = \frac{u}{a_1} \\ x_2^*(p_1, p_2, u) &= x_2^*(u) = \frac{u}{a_2} \end{aligned}$$

La demanda ordinaria, sin embargo, sí cambia al cambiar el precio. Es decir, si bien no hay efecto sustitución, sí hay un efecto ingreso asociado al cambio en el precio:

$$\begin{aligned} x_1^*(p_1, p_2, m) &= \frac{m}{\left(p_1 + p_2\frac{a_1}{a_2}\right)} \\ x_2^*(p_1, p_2, m) &= \frac{m}{\left(p_1\frac{a_2}{a_1} + p_2\right)} \end{aligned}$$

3.2. Función de utilidad de sustitución perfecta. Tal como su nombre lo indica, este caso es el opuesto al anterior: la sustitución es perfecta. Lo fundamental es que en este caso, a diferencia del anterior, la utilidad marginal de un bien no depende de la cantidad consumida del otro bien, como se representa con la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$$

En este caso, la utilidad marginal de ambos bienes es constante, y TMS$=\frac{a_1}{a_2}$, por lo que las curvas de indiferencia son líneas rectas de pendiente $-\frac{a_1}{a_2}$, como se muestra en la figura 6.

Dado que TMS es constante al igual que la relación de precios, en este caso la condición de tangencia tampoco nos indica cuál es la cantidad óptima a consumir de ambos bienes. Repasando las condiciones de Kuhn-Tucker (y/o mirando cuidadosamente la figura) vemos que en este caso la solución al problema del consumidor es generalmente de esquina:

$$\begin{aligned} x_1^*(p_1, p_2, m) &= \frac{m}{p_1} \text{ y } x_2^*(p_1, p_2, m) = 0 \qquad \text{si } \frac{a_1}{a_2} \geq \frac{p_1}{p_2} \\ x_1^*(p_1, p_2, m) &= 0 \text{ y } x_2^*(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_2} \qquad \text{si } \frac{a_1}{a_2} \leq \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

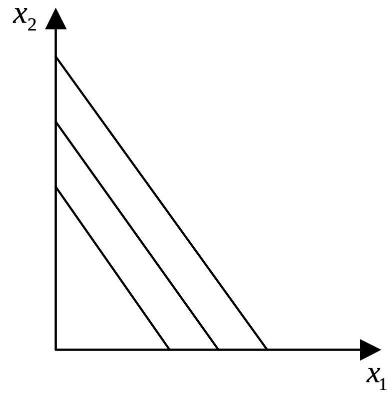


FIGURA 6. Curvas de indiferencia para el caso de una función de utilidad de sustitución perfecta.

En el caso particular en que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{p_1}{p_2}$ la cantidad óptima queda indeterminada (aunque siempre sobre la restricción presupuestaria).

3.3. Función de utilidad Cobb Douglas. La función de utilidad Cobb-Douglas es ampliamente utilizada, debido a la facilidad para operar con ella. En este caso, la función de utilidad es de la forma:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

Es fácil mostrar que en este caso las curvas de indiferencia resultantes son convexas. Un caso particular de utilidad Cobb-Douglas es el desarrollado en el ejercicio 1.

EJERCICIO 12. *Demostrar que la función de utilidad Cobb-Douglas es cuasi cóncava, o alternativamente, que las curvas de indiferencia son convexas.*

Luego, ahora sí tiene sentido utilizar la condición de tangencia para resolver el problema de optimización. Una particularidad de las demandas ordinarias que resultan de esta función es que la elasticidad ingreso de ambas demandas es unitaria. Esto significa que la proporción del ingreso que se dedica al pago del bien i es siempre la misma.

EJERCICIO 13. *Demostrar que en el caso de la utilidad Cobb-Douglas la proporción del ingreso que se gasta en el bien* 1 *es siempre la misma e igual a* $\frac{a_1}{a_1+a_2}$. *Notar que estas preferencias se pueden representar también mediante la función* $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, *en cuyo caso la proporción del ingreso que se dedica al pago del bien* 1 *es* α, *mientras que la proporción que se dedica al pago del bien* 2 *es* $1-\alpha$.

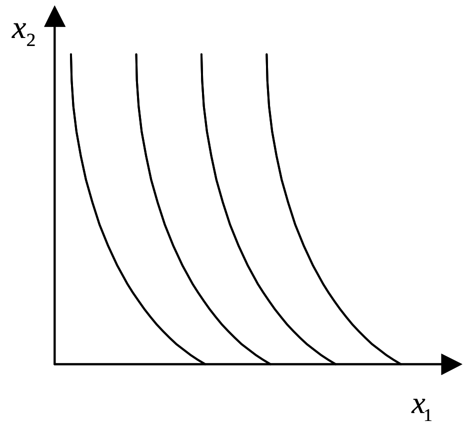


FIGURA 7. Preferencias Cuasilineales

EJERCICIO 14. *Considere una transformación monótona creciente de la función de utilidad del ejercicio anterior:*

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) &= \ln u(x_1, x_2) \\ &= \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2 \end{aligned}$$

Demostrar que las demandas que se obtienen a partir de esta función de utilidad coinciden con las obtenidas con la función de utilidad original, $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$. *Recordando que la función de utilidad es ordinal, ¿puede afirmar que este resultado es general?*

3.4. Preferencias cuasilineales. Decimos que las preferencias son cuasilineales (respecto de un bien 1, al que llamamos *numerario*), cuando todas las curvas de indiferencia son paralelas horizontalmente entre sí, tal como se muestra en la figura 7.

La particularidad de las preferencias cuasilineales es que el bien 1 (o el que se use como numerario) es superior, pero todos los demás bienes son neutros, siempre que el consumo del bien 1 sea positivo. Si tenemos n bienes, la forma general de la utilidad cuasilineal es la siguiente:

$$u(x_1, ..., x_n) = x_1 + \phi(x_2, ..., x_n)$$

donde la función $\phi(\cdot)$ es la que permite la convexidad de las curvas de indiferencia. Entonces, el nombre de utilidad *cuasilineal* proviene del hecho que el numerario entra en forma lineal a la función de utilidad (a diferencia del caso de sustitución perfecta, en que todos los bienes entran en forma lineal).

Un ejemplo de preferencias cuasilineales es el siguiente:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2^{0,5}$$

En este caso las curvas de indiferencia son convexas, debido a que $\phi(x_2) = x_2^{0,5}$ es cóncava. Al resolver por método de Kuhn Tucker, encontramos la siguiente condición a partir de la CPO en el caso en que $x_1, x_2, \lambda > 0$:

$$TMS = 2x_2^{0,5} = \frac{p_1}{p_2}$$

De esta igualdad podemos obtener directamente la demanda por el bien 2, y reemplazando en la restricción presupuestaria, la demanda por el bien 1. En el caso en que $x_1 = 0$ y $x_2, \lambda > 0$, obtenemos las condiciones:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda p_1 &\leq 0 \\ \frac{1}{2x_2^{0,5}} - \lambda p_2 &= 0 \\ x_2 p_2 &= m \end{aligned}$$

Resolviendo, entonces, las funciones de demanda quedan de la forma:

$$\begin{aligned} x_2^*(p_1, p_2, m) &= \begin{cases} \left(\frac{p_1}{2p_2}\right)^2 & \text{si } \frac{m}{p_1} > \frac{p_1}{4p_2} \\ \frac{m}{p_2} & \text{si no} \end{cases} \\ x_1^*(p_1, p_2, m) &= \begin{cases} \frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2} & \text{si } \frac{m}{p_1} > \frac{p_1}{4p_2} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

La demanda por x_2 no depende del ingreso (el bien 2 es neutro) siempre que la cantidad consumida del bien 1 sea positiva. En ese caso, la demanda por el bien 1 sí depende del ingreso, y de hecho este bien es de lujo.

A su vez, la función de utilidad indirecta es de la forma:

$$v(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \frac{m}{p_1} + \frac{p_1}{4p_2} & \text{si } \frac{m}{p_1} > \frac{p_1}{4p_2} \\ \sqrt{\frac{m}{p_2}} & \text{si no} \end{cases}$$

Ejercicios

1. (*) El país A está firmando un tratado de libre comercio, a través del cual se compromete a reducir sus aranceles de importación. Usted quiere evaluar el impacto que tendrá la caída en el precio de los bienes importables sobre el consumo de todos los bienes, caída que se producirá por la reducción de los aranceles en el país A. Para ello, suponga que el precio de los demás bienes y el ingreso de los individuos permanecerá constante, y que todos los individuos en A son idénticos.

   Entonces, si x_1 es la cantidad consumida de bienes importables, y x_2 la cantidad consumida de bienes no importables en A, usted debe estimar η_{11}^M y η_{21}^M. (hay sólo dos bienes, x_1 y x_2).

   Estudios previos indican que sería razonable suponer en sus cálculos lo siguiente:

- que la proporción del ingreso que se gasta en bienes importables es un 50 %.

- que al mantener el ingreso constante, si el precio de x_2 aumenta en un 10 %, la cantidad demandada de x_2 cae en un 10 %.

- que al considerar sólo el efecto sustitución, se encuentra que la elasticidad precio de la demanda por x_2 es -1.

SE PIDE:

Utilizando los supuestos enunciados, encuentre las elasticidades solicitadas, explicando la intuición económica detrás de cada uno de los resultados que vaya obteniendo (es decir, en cada paso intermedio debe explicar la intuición económica de su resultado).

2. (*) Suponga que las preferencias de un individuo se pueden representar como

$$u\left(x_1, x_2\right) = \min\left\{x_1, 2x_2\right\}$$

(proporciones fijas). ¿Cuál es la elasticidad precio de la demanda compensada por x_1 y la elasticidad ingreso por x_1? ¿Cuál es entonces la elasticidad precio de la demanda marshalliana por x_1? Calcule, explique la intuición de su resultado (no la matemática que utilice), y apoye su respuesta en un gráfico.

3. (**) Los mil habitantes de Talismán son fanáticos fotógrafos. Cada uno de ellos ha recibido al nacer una cámara fotográfica, la que usan para sacar cuantas fotos pueden, dejando por cierto una parte de su ingreso para cubrir sus otras necesidades. En particular, todos tienen preferencias idénticas dadas por

$$u(x_1, x_2) = A \ln(1 + x_1) + x_2$$

donde x_1 es consumo del resto de los bienes, y x_2 el número de fotografías. El costo de una fotografía es $\$p_2$, y el de una unidad de consumo del resto de los bienes es \$1. El habitante i tiene un ingreso de m_i $(i = 1, 2, ..., 1000)$, y $\sum_{i=1}^{1000} m_i = M$.

   a) Obtenga las demandas individuales por ambos bienes. Obtenga también las demandas agregadas, suponiendo que todos están en solución interior.

   b) Compruebe en el bien 2 que la Identidad de Roy se satisface a nivel individual. Compruebe, asimismo, que la agregación de Engel se cumple tanto a nivel individual como agregado.

   c) Suponga que inicialmente para el talismán 125, $m_{125} = 200$, $A = 101$ y $p_2 = 1$. Si p_2 sube en un 10 %, ¿en cuánto cambia la cantidad demandada? ¿Qué parte de ese cambio obedece al efecto sustitución?

4. (**) Considere la siguiente función de utilidad:

$$u\left(x_1, x_2\right) = 2\sqrt{x_1} + x_2$$

En lo que sigue, m representa al ingreso, p_1 el precio del bien 1 y p_2 el del 2.

a) Caracterice las preferencias que representan, dibujando cuidadosamente el mapa de curvas de indiferencia que generan. ¿Se trata de dos bienes? ¿Tiene esta persona preferencias por la variedad?

b) Verifique, sin olvidar eventuales condiciones de segundo orden, que las demandas ordinarias (o marshallianas) por cada bien son respectivamente:

$$x_1^* = \begin{cases} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 & \text{si } m \geq \frac{p_2^2}{p_1} \\ \frac{m}{p_1} & \text{si } m < \frac{p_2^2}{p_1} \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} \frac{m}{p_2} - \frac{p_2}{p_1} & \text{si } m \geq \frac{p_2^2}{p_1} \\ 0 & \text{si } m < \frac{p_2^2}{p_1} \end{cases}$$

c) Explique claramente por qué esta persona no consumiría del bien 2 si su ingreso fuese menor que $\frac{p_2^2}{p_1}$. ¿Acaso no lo valora?

d) Determine si cada bien es normal, inferior, o neutro.

e) Encuentre el valor del multiplicador lagrangeano. Explique, entonces, por qué a este tipo de función de utilidad se le conoce como de "métrica monetaria".

f) Encuentre la función de gasto mínimo $C(p_1, p_2, u)$, y derive a partir de ella las demandas compensadas (o hicksianas) por cada bien. Recuerde que el Lema de Shephard establece que:

$$\frac{\partial C}{\partial p_j} = x_j^{**}$$

g) Verifique el cumplimiento de la ecuación de Slutzky, esto es:

$$\frac{\partial x_1^M(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1^H(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1^M(p_1, p_2, m)}{\partial m} x_1^M(p_1, p_2, m)$$

Explique su significado.

5. (**) Suponga que todas las familias pobres son iguales, y consumen dos bienes: L (leche) y OB (otros bienes). Inicialmente las familias consumen L_0 litros de leche, a un precio p_{L_0}.

Usted se encuentra evaluando un proyecto destinado a asegurar un consumo mínimo de leche de las familias pobres (L^*, donde $L^* > L_0$). Para cumplir con este objetivo se evalúan dos posibilidades:

i) entregar a la familia el monto de dinero necesario para comprar la cantidad de leche que necesaria para alcanzar L^* es decir, entregarles un regalo de $(L^* - L_0) \cdot p_{L_0}$

ii) venderles leche a un precio menor (p_{L_1}), de manera que el gasto de la familia necesario para consumir la cantidad L^* deseada siga siendo $GL_0 = L_0 \cdot p_{L_0}$ =gasto inicial en leche *a*) Grafique la nueva restricción presupuestaria de la familia en cada una de las dos posibilidades, y compare con la restricción inicial.

b) Analice cómo tendría que ser la elasticidad ingreso de los otros bienes ($\eta_{OB,I}$) para que la familia efectivamente consuma el nivel L^* con el regalo de i). ¿Cómo tendría que ser entonces la elasticidad ingreso de la leche para que así fuera?

c) Analice cómo tendría que ser la elasticidad cruzada de los otros bienes respecto de la leche ($\eta_{OB,L}$) para que con el cambio de precios en ii) la familia efectivamente consumiera el nivel L^*; ¿ cómo tendría que ser entonces la elasticidad precio de la demanda ordinaria por otros bienes y de la demanda por leche para que así fuera?

NOTA: en su respuesta no basta con aplicar leyes de demanda, debe explicar

6. (**)La función de utilidad de José es de la forma $U(F, O) = 2\ln F + 2\ln O$, donde F son partidos de fútbol y O son otros bienes. Si José se inscribe en el Club de Amigos del Fútbol, debe pagar una cuota de \$$m$, que le da derecho a una rebaja de un 19 % de descuento en las entradas a los partidos. Encuentre la máxima cuota, como porcentaje de su ingreso, que se podría cobrar a José por entrar al club ($\frac{m}{I_0}$).

7. (***) Mónica sólo valora el café y los libros. Con un ingreso monetario de m, y con precios de café y libros dados por p_1 y p_2 respectivamente, obtiene una utilidad de

$$v(m, p_1, p_2) = \begin{cases} \ln 10\frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{10p_1}(m - 10p_1) & \text{si } \frac{m}{10} \geq p_1 \\ \ln \frac{m}{p_2} & \text{si } \frac{m}{10} < p_1 \end{cases}$$

Si inicialmente $(m, p_1, p_2) = (100, 1, 2)$ y el fisco repentinamente decidiera recaudar \$1 de parte de Mónica en impuestos, ¿qué clase de impuestos preferiría ella que le cobraran? ¿Un impuesto al ingreso, al consumo de libros o al consumo de café (todos ellos por cierto recaudando el mismo monto)? Justifique con cifras.

8. (***) Considere un individuo cuyas preferencias se pueden representar por la función $u = \sqrt{x_1 x_2}$. Los precios de los bienes son $p_1 = 1$ y $p_2 = 4$ respectivamente, y su ingreso es $m = 100$. Suponga que el gobierno quiere que los individuos reduzcan su consumo de x_1 a la mitad, pero sin afectar su bienestar (imagine por ejemplo que x_1 es electricidad, y el gobierno teme que si no se reduce su consumo ahora, las reservas de agua sean insuficientes para proveer electricidad en el futuro). Para ello el gobierno decide poner un impuesto de monto t al consumo de x_1 (de manera que el nuevo precio sería $p_1' = 1 + t$) y dar un subsidio de monto fijo a los consumidores (de modo que el nuevo ingreso sería $m' = 100 + z$).

Encuentre cuál es el monto de t y z que cumpliría con los objetivos del gobierno (es decir, que reduzca el consumo de x_1 a la mitad pero sin cambiar el nivel de utilidad del individuo). Explique la intuición de su procedimiento, indicando por qué la función de utilidad indirecta y/o la función de mínimo costo nos da una información útil en este caso.

Comentarios bibliográficos

Otra consecuencia de la aceptación de la utilidad como una magnitud ordinal es que, por ese hecho, queda relegada a un segundo plano, siendo la preferencia el elemento básico, o primitivo, de la teoría. Éste fue el punto de partida del trabajo de Evgeny Slutsky (1915), y la conexión entre la demanda y la preferencia fue completamente entendida recién a partir del trabajo del premio nobel Gerard Debreu (1954, 1959).
La teoría de la demanda, en tanto, fue desarrollada en propiedad por Alfred Marshall (1890). El desarrollo de la estática comparativa de la decisión del consumidor tuvo como propósito entender qué restricciones sobre el comportamiento impone el supuesto de la existencia de una relación de preferencias.

Referencias

1: Debreu, Gerard (1954) Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function", en *Decision Processes,* editado por R. Trall y otros, Joh Wiley.
2: Debreu, Gerard (1959), "Theory of Value", John Wiley.
3: Marshall, Alfred (1890), "Principles of Economics". Octava edición de 1920, reimpresa en 1997 por Prometheus Books.
4: Slutsky, Evgeny (1915), "Sulla teoria del bilancio del consumatore", Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica 51, 1-26. Reimpreso como .On the Theory of the Budget of the Consumer", en Stigler, G. y K. Houlding (1953), Readings in Price Theory", Irving.

CAPíTULO 3

Análisis del Bienestar del Consumidor

1. Introducción

En el capítulo anterior estudiamos el efecto que tiene sobre la cantidad demandada de los bienes un cambio en el precio de algún bien o del ingreso. Pero para contestar algunas preguntas interesantes no basta con eso; muchas veces queremos además saber si ante un determinado cambio, el individuo queda en una mejor o una peor situación que la original, y cuánto ha cambiado su bienestar. Por ejemplo, al evaluar un proyecto que consiste en la construcción de una carretera, quisiéramos medir de alguna manera quiénes ganan y quiénes pierden, y cuánto ganan o pierden, para tomar una decisión.

Para aproximarnos a una respuesta a estas preguntas, lo primero que normalmente asumimos es que las personas hacen lo mejor para sí mismas (axioma 0). Con este axioma adicional, la función de utilidad no sólo representa un ordenamiento de preferencias, sino que además podemos decir que si la utilidad asociada a una determinada acción es mayor que aquella asociada a otra acción, entonces la primera es “mejor” para el individuo, o le da un mayor bienestar. Esta aproximación nos es útil para decir, por ejemplo, que si después del cambio el individuo aún puede escoger la acción que elegía antes del cambio, y sin embargo prefiere otra, entonces está mejor luego del cambio. Sin embargo, esta aproximación sigue sin ayudarnos a evaluar *cuánto* mejor o peor está el individuo luego de un cambio. El problema fundamental con que nos encontramos para contestar esta pregunta es el que la función de utilidad es ordinal: si una determinada función de utilidad es una buena representación del ordenamiento de preferencias de un individuo, también lo es cualquier transformación monótona de la misma, por lo que no tiene sentido calcular la diferencia en utiles para cuantificar el cambio en el bienestar. Necesitamos de alguna manera llevar el cambio en la utilidad a una unidad de medida cardinal, como pesos, para que la cuantificación tenga sentido.

Una manera simple y ampliamente utilizada de llevar el cambio en la utilidad a una unidad de medida cardinal es a través del excedente del consumidor marshalliano. La idea intuitiva detrás de esta medida proviene de la interpretación de la curva de demanda como ”disposición a pagar”: cada vez que el consumidor compra una unidad a un precio menor a su disposición a pagar, ganaría la diferencia para sí. El área entre la curva de demanda y el precio (esto es, la integral) nos entrega esa ganancia acumulada, o excedente del consumidor. Pese a su significado intuitivo y a la simplicidad de su cálculo, sin embargo, tiene un defecto mayor: no está definido para cambios en más de un precio a la vez, lo que en muchas aplicaciones es la norma y no la excepción, ni tampoco para cambios en otras variables, cuyo efecto sobre el bienestar quisiéramos medir en otras aplicaciones (como el nivel de contaminación, la disponibilidad de transporte público, etc.).

A lo largo de este capítulo derivamos otras medidas de bienestar, la variación compensatoria y la variación equivalente, que resuelven este problema del excedente del consumidor marshalliano. Cuando estudiemos estas medidas de bienestar, nos vamos a centrar en la exposición en el cambio en el bienestar asociado a un cambio en el precio de un bien (o de varios de ellos). Sin embargo, estas medidas pueden ser utilizadas en contextos mucho más generales, para medir el efecto de un cambio en cualquier otra variable que afecte el bienestar del individuo.

Otro problema del excedente del consumidor marshalliano es que su interpretación -la diferencia entre la disposición a pagar y el monto gastado en el bien- es correcta sólo en el caso de un bien neutro. Para entender por qué dicha interpretación no es exacta cuando el bien no es neutro, se deriva gráficamente el excedente del consumidor ("verdadero", para diferenciarlo del marshalliano), y se compara con las demás medidas de bienestar mencionadas.

En la exposición ocuparemos bastante el instrumental gráfico, y por ello nos simplificaremos en el siguiente sentido: si estamos evaluando el cambio en el bienestar debido al cambio en el precio del bien 1, y el individuo consume n bienes (donde todos los demás bienes mantienen sus precios constantes inicialmente), agregaremos los $n-1$ bienes restantes en una canasta que llamaremos "otros bienes" (OB), cuyo precio se normaliza a uno.

2. Variación compensatoria

Digamos que el individuo tiene un ingreso de m_0, y alcanza inicialmente un nivel de utilidad u_0, como se muestra en la figura 1. Nos preguntamos cómo cambia el bienestar del individuo al caer el precio del bien 1 desde p_1^0 hasta p_1^1.

Al caer el precio del bien 1, manteniéndose constantes el precio de los otros bienes y el ingreso del individuo, sabemos que debe estar mejor. Queremos tener una medida en pesos de *cuánto* aumentó su bienestar. Para ello, una primera pregunta que nos podemos hacer es: cuánto ingreso podríamos

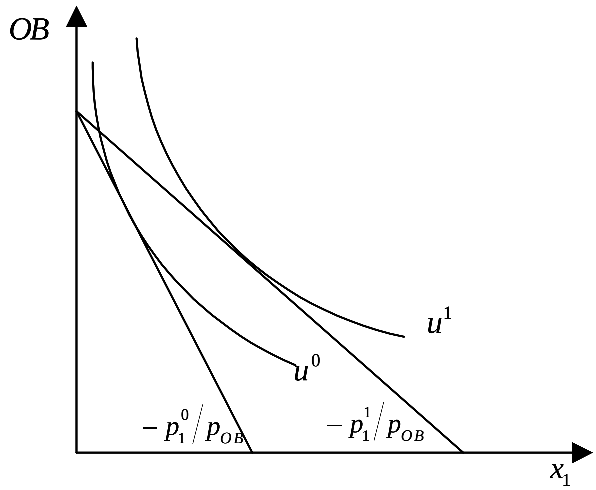


FIGURA 1. Cambio en el precio del bien 1

quitarle al individuo de modo que, luego del cambio, quede con el nivel de **utilidad** u_0.

DEFINICIÓN 9. *La **variación compensatoria** (VC) responde a la siguiente pregunta: ¿cuánto podría disminuir el ingreso del individuo para que, habiendo ocurrido el cambio, quede igual como si no hubiera ocurrido (i.e., quede en u_0)?*

En otras palabras, la variación compensatoria mide cuánto es lo máximo que estaría dispuesto a pagar o entregar de su ingreso el individuo para que ocurriera el cambio (observe que la respuesta a esta pregunta coincide con la respuesta a la pregunta planteada en la definición). Es por esa razón que creemos que puede ser una buena medida del cambio en el bienestar.

Para contestar esta pregunta hacemos uso de la función de mínimo costo: sabemos que el mínimo gasto necesario para alcanzar el nivel de utilidad u_0 a los precios p_1^1 y p_{OB} (es decir, habiendo ocurrido el cambio), es $C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_0\right)$. Además, sabemos que el ingreso inicial m_0 coincide con el mínimo gasto necesario para alcanzar el nivel de utilidad u_0 a los precios p_1^0 y p_{OB} (precios iniciales), $C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_0\right)$, o alternativamente, con el mínimo gasto necesario para alcanzar el nivel de utilidad u_1 a los precios finales. Luego, la respuesta a la pregunta es:

$$\begin{aligned} VC &= C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_0\right) \\ &= C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_1\right) - C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_0\right) \end{aligned}$$

Lo anterior se ilustra en la figura 2.

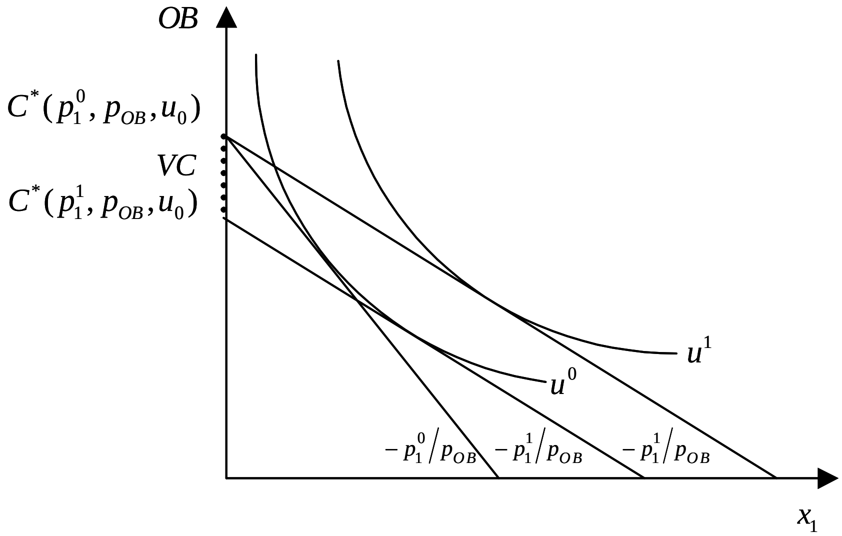


FIGURA 2. Variación Compensatoria: $C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_0\right)$

Ahora, esto también podemos llevarlo a las curvas de demanda: sabemos por el Lema de Shephard que:

$$\frac{\partial C^*\left(p_1, p_{OB}, u_0\right)}{\partial p_1} = x_1^H\left(p_1, p_{OB}, u_0\right) \tag{2.1}$$

Luego, podemos escribir la variación compensatoria como:

$$\begin{aligned} VC &= C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_0\right) \quad (2.2)\\ &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial C^*\left(p_1, p_{OB}, u_0\right)}{\partial p_1} dp_1 = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^H\left(p_1, p_{OB}, u_0\right) dp_1 \end{aligned}$$

Es decir, la variación compensatoria se puede medir como el área bajo la curva de demanda compensada para el nivel de utilidad u_0, entre el precio inicial y el final, como se ilustra en la figura 3.

EJERCICIO 15. *Considere las funciones de utilidad utilizadas en el ejercicio (14) del capítulo anterior:*

$$\begin{aligned} u\left(x_1, x_2\right) &= x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \\ v\left(x_1, x_2\right) &= \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2 \end{aligned}$$

Muestre que, aún cuando las funciones de costo mínimo que se derivan a partir de ellas son diferentes, si calculamos la Variación Compensatoria asociada a un cambio en el precio p_1, obtendremos el mismo resultado en ambos casos.

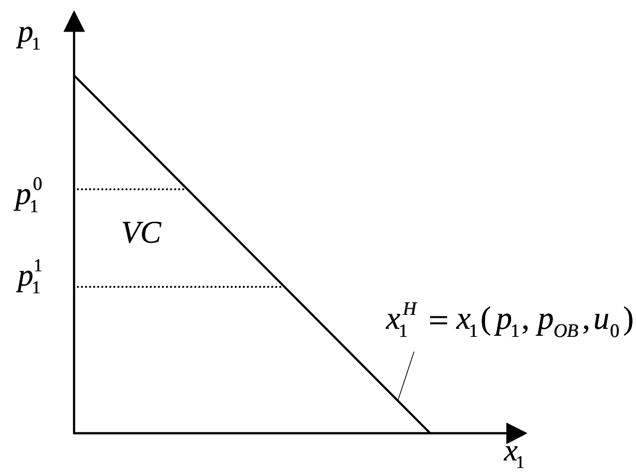


FIGURA 3. Variación Compensatoria en demanda compensada

Esta medida no sólo es válida para una caída en el precio de un bien. Si éste aumentara, el análisis sería análogo, y la medida la misma: $VC = C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_0\right)$. La diferencia radica en que en este caso el bienestar *cae*, y eso se ve reflejado en que una VC negativa: si nos preguntamos cuánto es lo máximo que podemos quitarle al individuo de su ingreso para que, habiendo ocurrido el alza en el precio, quede como si no hubiera ocurrido, nos damos cuenta de que dicho monto debe ser negativo (es decir, debemos darle más ingreso, ya que el precio aumentó).

Por otra parte, si cambia el precio de más de un bien al mismo tiempo, el análisis anterior sigue siendo totalmente válido. Al ver la variación compensatoria como el área bajo las demandas, tenemos dos opciones igualmente válidas. La primera se obtiene de sumar y restar $C^*\left(p_1^1, p_2^0, u_0\right)$ en la expresión anterior, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
VC &= C^*\left(p_1^0, p_2^0, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_2^1, u_0\right) \qquad (2.3)\\
&= \left[C^*\left(p_1^0, p_2^0, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_2^0, u_0\right)\right] \\
&\quad + \left[C^*\left(p_1^1, p_2^0, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_2^1, u_0\right)\right] \\
&= \left[\int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial C^*\left(p_1, p_2^0, u_0\right)}{\partial p_1} dp_1\right] + \left[\int_{p_2^1}^{p_2^0} \frac{\partial C^*\left(p_1^1, p_2, u_0\right)}{\partial p_2} dp_2\right] \\
&= \left[\int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1\left(p_1, p_2^0, u_0\right) dp_1\right] + \left[\int_{p_2^1}^{p_2^0} x_2\left(p_1^1, p_2, u_0\right) dp_2\right]
\end{aligned}$$

Esto es, en este caso la variación compensatoria corresponde a la suma de: i) el área bajo la demanda compensada por el bien 1 entre su precio inicial y el final, manteniendo el precio del bien 2 en p_2^0 (precio inicial del bien 2), y ii) el área bajo la demanda compensada por el bien 2 entre su precio inicial y el final, manteniendo el precio del bien 1 en p_2^1 (precio final del bien 1).

La segunda alternativa se obtiene de manera análoga, sumando y restando $C^*\left(p_1^0, p_2^1, u_0\right)$, con lo que obtenemos:

$$
\begin{aligned}
VC &= C^*\left(p_1^0, p_2^0, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_2^1, u_0\right) \qquad (2.4)\\
&= \left[C^*\left(p_1^0, p_2^0, u_0\right) - C^*\left(p_1^0, p_2^1, u_0\right)\right] \\
&\quad + \left[C^*\left(p_1^0, p_2^1, u_0\right) - C^*\left(p_1^1, p_2^1, u_0\right)\right] \\
&= \left[\int_{p_2^1}^{p_2^0} \frac{\partial C^*\left(p_1^0, p_2, u_0\right)}{\partial p_2} dp_2\right] + \left[\int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial C^*\left(p_1, p_2^1, u_0\right)}{\partial p_1} dp_1\right] \\
&= \left[\int_{p_2^1}^{p_2^0} x_2\left(p_1^0, p_2, u_0\right) dp_2\right] + \left[\int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1\left(p_1, p_2^1, u_0\right) dp_1\right]
\end{aligned}
$$

Esto es, en este caso la variación compensatoria corresponde a la suma de: i) el área bajo la demanda compensada por el bien 1 entre su precio inicial y el final, manteniendo el precio del bien 2 en p_2^1 (precio final del bien 2), y ii) el área bajo la demanda compensada por el bien 2 entre su precio inicial y el final, manteniendo el precio del bien 1 en p_1^0 (precio inicial del bien 1).

3. Variación equivalente

Nuevamente nos ponemos en el caso en que cae el precio del bien 1, manteniéndose constante el precio de los otros bienes (OB) y el ingreso del individuo, caso en que sabemos que el individuo debe estar mejor. Otra pregunta posible para obtener una medida en pesos de *cuánto* aumentó su bienestar, es cuánto ingreso tendríamos que darle al **individuo** de modo que, sin haber ocurrido el cambio, quede con el nivel de utilidad u_1.

DEFINICIÓN 10. *La* ***variación equivalente*** *(VE) responde a la siguiente pregunta: ¿cuánto debería aumentar el ingreso del individuo para que, sin que haya ocurrido el cambio, quede igual como si hubiera ocurrido (i.e., quede en u_1)?*

En otras palabras, la variación equivalente mide cuánto es lo mínimo que estaría dispuesto a aceptar el individuo (el mínimo monto que le deberían

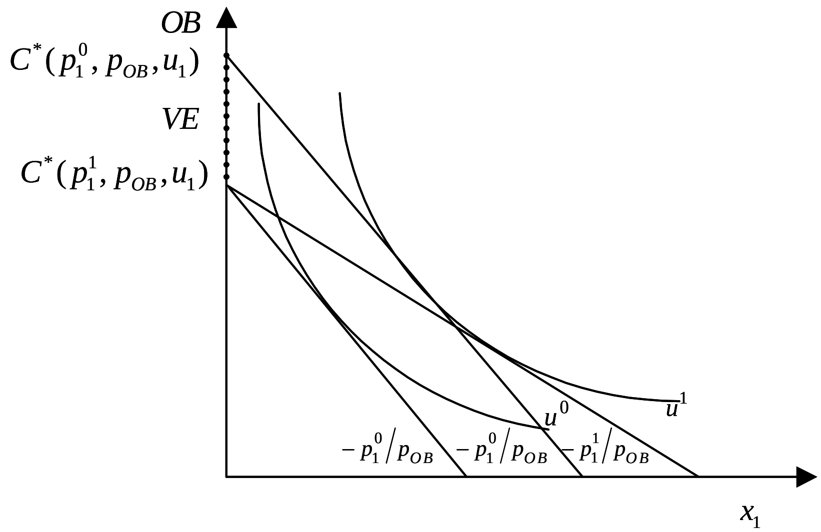


FIGURA 4. Variación Equivalente: $C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_1\right) - C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_1\right)$

pagar) para que no ocurra el cambio (observe que la respuesta a esta pregunta coincide con la respuesta a la pregunta planteada en la definición). Es por esa razón que creemos que esta puede ser otra buena medida del cambio en el bienestar.

Para contestar esta pregunta hacemos uso de la función de mínimo costo: sabemos que el mínimo gasto necesario para alcanzar el nivel de utilidad u_1 a los precios p_1^0 y p_{OB} (es decir, si no ha ocurrido el cambio), es $C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_1\right)$. Además, sabemos que el ingreso inicial m_0 coincide con el mínimo gasto necesario para alcanzar el nivel de utilidad u_1 a los precios p_1^1 y p_{OB} (precios finales), es decir, $C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_1\right)$ (o alternativamente, con $C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_0\right)$). Luego, la respuesta a la pregunta es:

$$\begin{aligned} VE &= C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_1\right) - C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_1\right) \\ &= C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_1\right) - C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_0\right) \end{aligned}$$

Lo anterior se ilustra en la figura 4.

Esto también podemos llevarlo a las curvas de demanda: sabemos por Lema de Shepard que

$$\frac{\partial C^*\left(p_1, p_{OB}, u_1\right)}{\partial p_1} = x_1^H\left(p_1, p_{OB}, u_1\right) \tag{3.1}$$

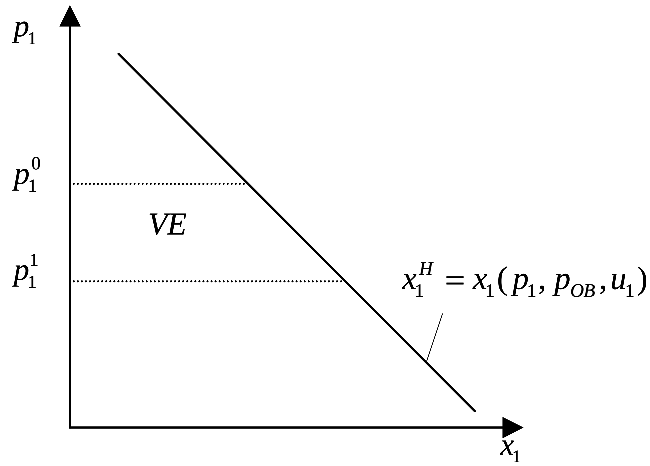


FIGURA 5. Variación Equivalente en demanda compensada

Luego, podemos escribir la variación equivalente como:

$$\begin{aligned} VE &= C^*\left(p_1^0, p_{OB}, u_1\right) - C^*\left(p_1^1, p_{OB}, u_1\right) \\ &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial C^*\left(p_1, p_{OB}, u_1\right)}{\partial p_1} dp_1 = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^H\left(p_1, p_{OB}, u_1\right) dp_1 \end{aligned}$$

Es decir, la variación equivalente se puede medir como el área bajo la curva de demanda compensada para el nivel de utilidad u_1, entre el precio inicial y el final, como se representa en la figura 5.

Al ver la variación compensatoria y equivalente en términos de áreas, es fácil deducir que si x_1 es un bien normal o superior, la variación equivalente es mayor que la variación compensatoria; si x_1 es un bien inferior, la variación equivalente es menor que la variación compensatoria y si es neutro, ambas medidas coinciden.

Nuevamente, tal como en el caso de la variación compensatoria, si hay un alza en p_1 se aplica el mismo análisis, y la única diferencia con el caso en que el precio cae, es que al subir el precio el bienestar *cae,* por lo que el resultado es que la VE es negativa (es decir, tendrían que quitarle ingreso al individuo para que, sin haber ocurrido el cambio, quede como si hubiera ocurrido). Nuevamente también, si tenemos dos bienes cuyos precios cambian al mismo tiempo, obtenemos que $VE = C^*\left(p_1^0, p_2^0, u_1\right) - C^*\left(p_1^1, p_2^1, u_1\right)$. Aplicando el mismo razonamiento anterior, también podemos escribir la VE de dos maneras equivalentes en términos de áreas:

$$\begin{aligned}
VE &= C^*\left(p_1^0, p_2^0, u_1\right) - C^*\left(p_1^1, p_2^1, u_1\right) \\
&= \left[\int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1\left(p_1, p_2^0, u_1\right) dp_1\right] + \left[\int_{p_2^1}^{p_2^0} x_2\left(p_1^1, p_2, u_1\right) dp_2\right] \\
&= \left[\int_{p_2^1}^{p_2^0} x_2\left(p_1^0, p_2, u_1\right) dp_2\right] + \left[\int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1\left(p_1, p_2^1, u_1\right) dp_1\right]
\end{aligned}$$

Ambas medidas, la variación compensatoria y la variación equivalente, son útiles también en otros contextos. Por ejemplo, si el cambio no es en el precio de uno o más bienes, sino en condiciones ambientales, o cualquier otra variable relevante para el individuo (que afecte su bienestar), podemos usar estas dos medidas para medir el cambio en el bienestar, aplicando las preguntas que las definen.

4. Excedente del consumidor

Una tercera medida de bienestar es el **excedente del consumidor**. Lo que queremos medir en este caso es el bienestar asociado al consumo de una determinada cantidad de un bien (x_1) a los precios actuales. Para ello nos preguntamos cuánto es lo máximo que el individuo estaría dispuesto a entregar de su ingreso para poder consumir la cantidad actualmente consumida de este bien, y lo comparamos con el monto que efectivamente paga.

DEFINICIÓN 11. *El **excedente del consumidor** es la diferencia entre lo máximo que el individuo está dispuesto a pagar por la cantidad que actualmente consume del bien, y lo que efectivamente paga.*

Digamos que al precio actual $\overline{p_1}$, el individuo escoge una cantidad $\overline{x_1}$, y obtiene un nivel de utilidad $\overline{u}$ (en todo este análisis, el precio de los otros bienes es siempre $p_{OB} = 1$).

Lo máximo que el individuo está dispuesto a pagar por $\overline{x_1}$ corresponde a la suma de dinero que lo dejaría indiferente entre su situación actual, y una situación en que no consume nada del bien 1, pero gasta todo su ingreso en los otros bienes. Evidentemente, para que esta pregunta tenga una respuesta interesante, debe ser cierto que si el individuo no consume nada del bien 1 y gasta todo su ingreso en el consumo de otros bienes obtiene algún nivel de utilidad distinto de cero (si no, estaría dispuesto a pagar todo su ingreso). Llamaremos u_0 al nivel de utilidad que obtiene si no consume nada de x_1 y gasta todo su ingreso en el consumo de otros bienes. Entonces, el máximo monto que el individuo está dispuesto a pagar por la cantidad actualmente

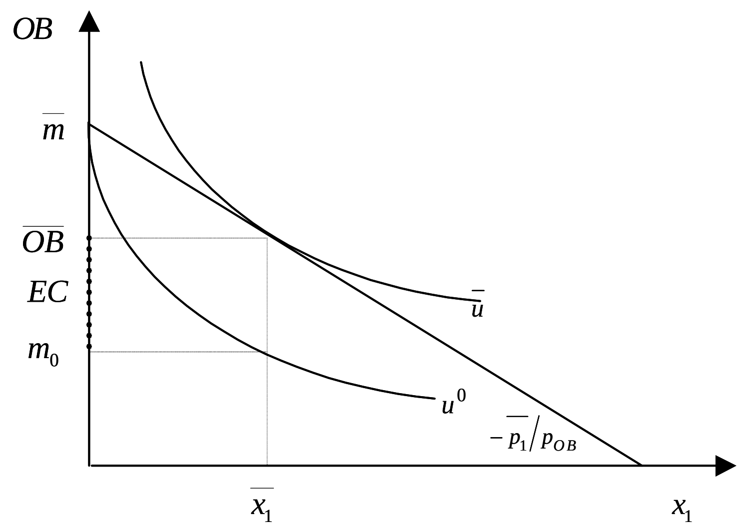


FIGURA 6. Excedente del Consumidor: $\overline{OB} - m_0$

consumida es la diferencia entre el ingreso actual $\overline{m}$, y el nivel m_0 que tendría que gastar en OB, para poder alcanzar el nivel de utilidad u_0 al consumir m_0 unidades de OB y $\overline{x_1}$ unidades del bien 1.

La cantidad que efectivamente paga es $\overline{x_1 p_1}$. Pero da la restricción presupuestaria sabemos que:

$$\begin{aligned} \overline{x_1 p_1} + \overline{OB} &= \overline{m} \\ &\Rightarrow \overline{x_1 p_1} = \overline{m} - \overline{OB} \end{aligned}$$

De modo que el excedente del consumidor (EC) corresponde a

$$\begin{aligned} EC &= (\overline{m} - m_0) - \left(\overline{m} - \overline{OB}\right) \\ &= \overline{OB} - m_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lo anterior se representa en la figura 6.

4.1. Excedente del consumidor como área bajo la curva de demanda. Para poder expresar este monto como áreas bajo las curvas de demanda, nuevamente haremos uso del Lema de Shephard. Para ello, necesitamos escribir el excedente del consumidor en términos de diferencia entre funciones de mínimo costo, para lo cual vamos a descomponer la máxima disposición a pagar $(\overline{m} - m_0)$ en dos partes. En primer lugar, sabemos que $\overline{m} = C^* (\overline{p_1}, p_{OB}, \overline{u})$, pero también es cierto que $\overline{m}$ es el mínimo costo al que se puede alcanzar el nivel de utilidad u_0 a un precio p_1 tal que el consumo de $x_1 = 0$, por lo que $\overline{m} = C^* (p_1 = \infty, p_{OB}, u_0)$. Además, si las curvas

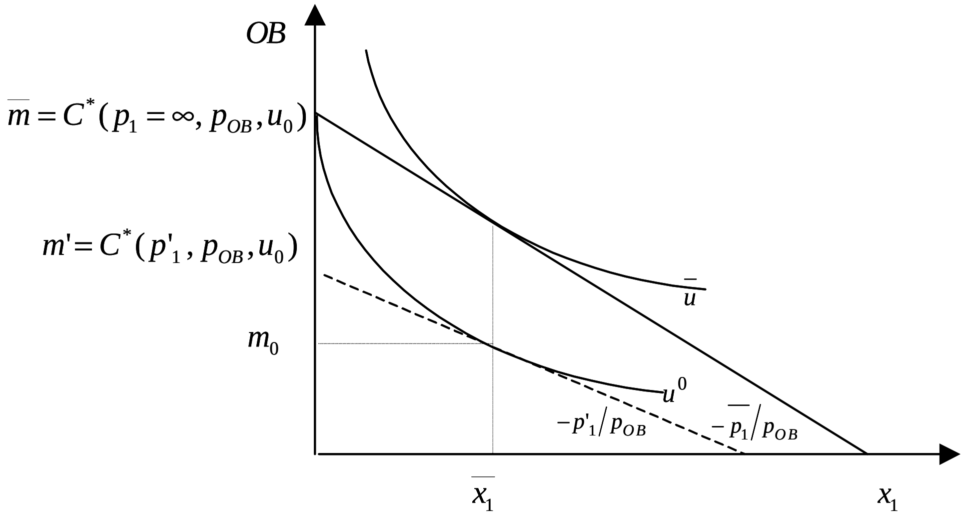


FIGURA 7. Derivando el Excedente del Consumidor en términos de funciones de costo

de indiferencia son convexas, hay algún precio p'_1 al cual el individuo consumiría $\overline{x_1}$ alcanzando el nivel de utilidad u_0, y que corresponde al precio implícito en la restricción presupuestaria que es tangente a la curva de indiferencia de nivel u_0 en el punto en que $x_1 = \overline{x_1}$. Notar que p'_1 coincide con $\overline{p_1}$ sólo si el bien 1 es neutro; si el bien 1 es superior, entonces $p'_1 < \overline{p_1}$, mientras que si es inferior, entonces $p'_1 > \overline{p_1}$. Con esto definimos m' como $m' = C^*(p'_1, p_{OB}, u_0)$, como se ve en la figura 7 (que corresponde al caso de un bien superior).

Por último, la diferencia entre m' y m_0 corresponde a $p'_1\overline{x_1}$ (ya que esta vez tenemos que $m' = p'_1\overline{x_1} + m_0$). Luego, podemos escribir $(\overline{m} - m_0)$ como:

$$\begin{aligned}
(\overline{m} - m_0) &= \left[\overline{m} - m'\right] + \left[m' - m_0\right] \qquad (4.2)\\
&= \left[C^*(p_1 = \infty, p_{OB}, u_0) - C^*\left(p'_1, p_{OB}, u_0\right)\right] + \left[p'_1\overline{x_1}\right]\\
&= \left[\int_{p'_1}^{\infty} \frac{\partial C^*(p_1, p_{OB}, u_0)}{\partial p_1} dp_1\right] + p'_1\overline{x_1}\\
&= \int_{p'_1}^{\infty} x_1(p_1, p_{OB}, u_0)\, dp_1 + p'_1\overline{x_1}
\end{aligned}$$

Entonces, cuando representamos el excedente del consumidor como áreas bajo las curvas de demanda, tendremos que la máxima disposición a pagar

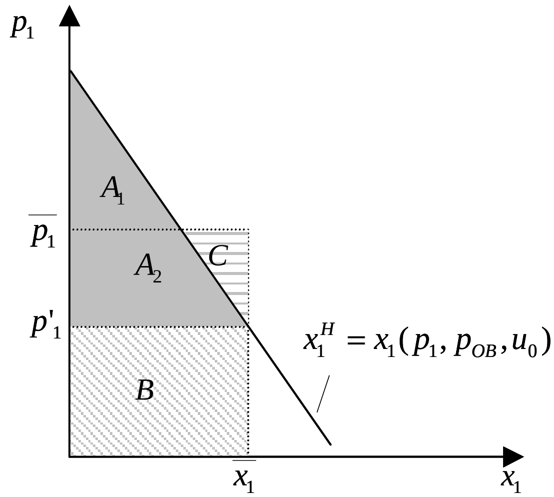


Figura 8. Excedente del Consumidor en demanda compensada: el caso de un bien normal

es la suma de $A+B$, con $A = A_1 + A_2 = \int\limits_{p_1'}^{\infty} x_1\left(p_1, p_{OB}, u_0\right) dp_1$ y $B = p_1'\overline{x_1}$. Luego, para obtener el excedente del consumidor, a esta suma le debemos restar $\overline{p_1 x_1}$, por lo que $EC = A_1 - C$ como se ve en la figura 8, que corresponde al caso de un bien normal:

En el caso del bien neutro, dado que $p_1' = \overline{p_1}$, no hay nada que restar al área A_1. En el caso del bien inferior, en que $p_1' > \overline{p_1}$, tendremos que la máxima disposición a pagar es la suma $A+B+C$, con $A = \int\limits_{p_1'}^{\infty} x_1\left(p_1, p_{OB}, u_0\right) dp_1$ y $B + C = p_1'\overline{x_1}$. Entonces, para obtener el excedente del consumidor, a esta suma le debemos restar $C = \overline{p_1 x_1}$, por lo que $EC = A+B$, como se ve en la figura 9.

Si comparamos el excedente del consumidor con la variación compensatoria y la variación equivalente asociadas al cambio de un precio $p_1 = \infty$ hasta $p_1 = \overline{p_1}$, vemos que en el caso del bien normal $VE > VC > EC$ como se ve en la figura 10.

En el caso de un bien inferior, el excedente del consumidor es menor que la variación compensatoria, pero mayor que la variación equivalente: $VC > EC > VE$. Lo anterior se ilustra en la figura 11.

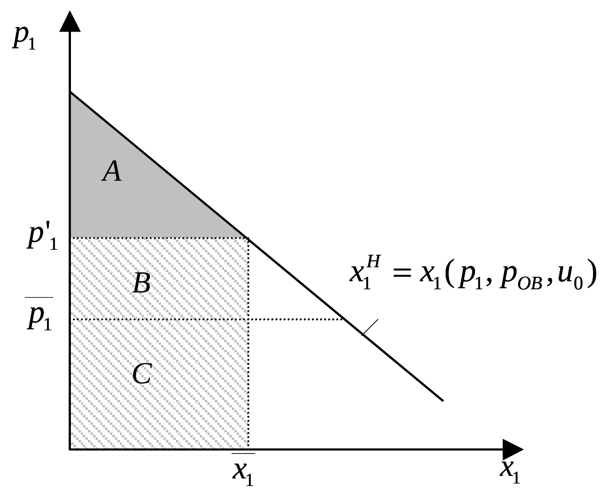


Figura 9. Excente del Consumidor en demanda compensada: el caso de un bien inferior

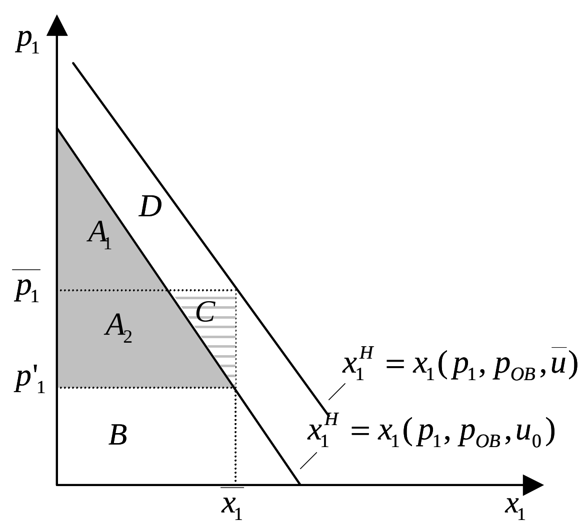


Figura 10. Comparando distintas medidas de bienestar en el caso de un bien normal: $EC = A_1 - C$, $VC = A_1$ y $VE = A_1 + D$

5. Excedente del consumidor marshalliano

La medida de bienestar que se utiliza más frecuentemente en las aplicaciones, es el **excedente del consumidor marshalliano** (ECM). Su

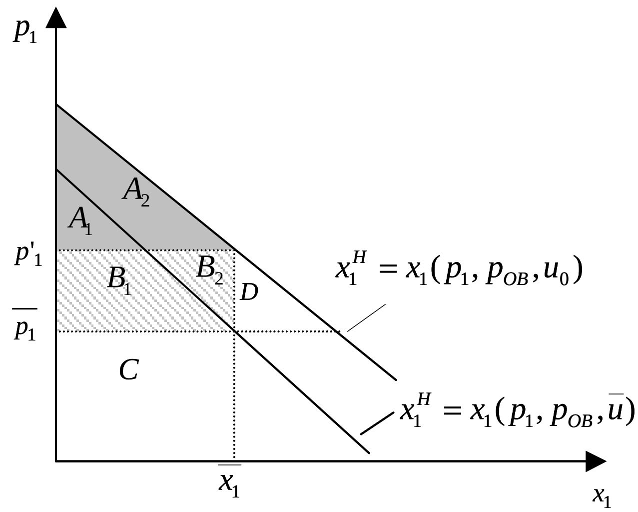


FIGURA 11. Comparando distintas medidas de bienestar en el caso de un bien inferior: $EC = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$, $VC = A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + D$ y $VE = A_1 + B_1$

gran ventaja proviene de que sólo necesitamos conocer o estimar la demanda marshalliana para obtener esta medida de bienestar, y no la demanda hicksiana o la función de mínimo costo. El ECM corresponde al área bajo la curva de demanda marshalliana hasta el precio $\overline{p_1}$ es decir, $ECM = \int_{\overline{p_1}}^{\infty} x_1 \left(p_1, p_{OB}, \overline{m}\right) dp_1$, como se ilustra en la figura 12 para el caso de un bien normal.

En el lenguaje común, es muy frecuente referirse al ECM como "excedente del consumidor" simplemente. Esto se debe a que la interpretación que normalmente se hace del ECM es la que corresponde al EC, vista anteriormente: la diferencia entre lo máximo que el individuo está dispuesto a pagar por la cantidad que actualmente consume del bien, y lo que efectivamente paga. Esta interpretación es correcta sólo en el caso en que la demanda hicksiana coincide con la marshalliana (y por lo tanto, el área bajo ambas curvas es igual). Es decir, en el caso del bien neutro.

En el caso del bien superior, se verifica que $VE > ECM > VC > EC$ (ver figura 12). En el caso de un bien neutro, la curva de demanda marshalliana coincide con la hicksiana para el nivel de utilidad u_0 y también para el nivel de utilidad $\overline{u}$, por lo que las cuatro medidas coinciden. En el caso de un bien inferior, tenderemos que $VC > EC > ECM > VE$, como se puede verificar a partir de la figura 13. Es decir, en todos los casos el ECM se encuentra entre la VC y la VE.

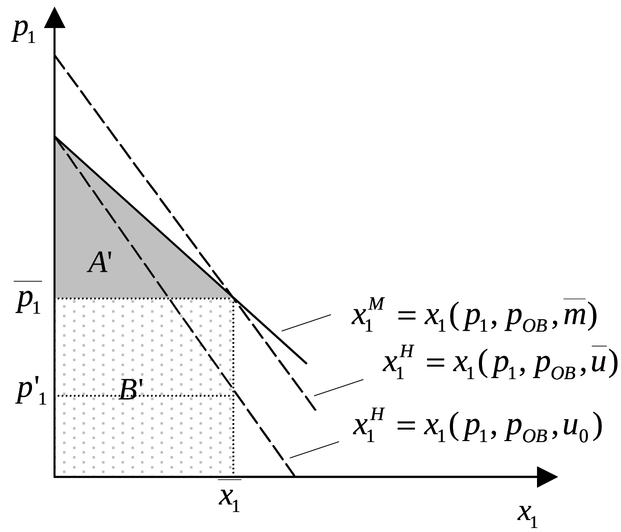


Figura 12. Excedente del Consumidor Marshalliano para un bien normal: $ECM = A'$

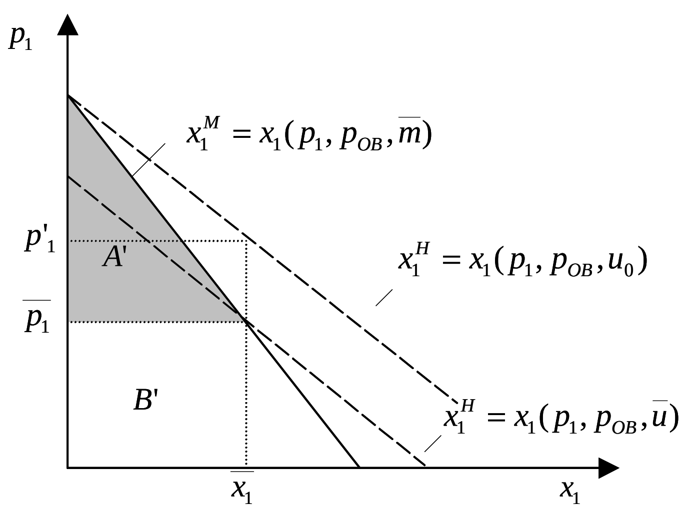


Figura 13. Excedente del Consumidor Marshalliano para bien inferior: $ECM = A'$

6. Aplicación: índices de precio

Un número índice es un indicador que se elabora para medir la evolución de alguna variable a través del tiempo. Estos índices se ocupan, por ejemplo, para describir la evolución de la actividad de un país (índice de cantidad), o establecer reajustes mínimos de salarios (índice de precios). Para la elaboración de un número índice se debe definir un período base, al cual se asigna un índice de 100.

Una manera de medir el cambio en el costo de vida es a través de comparar el costo de alcanzar un determinado nivel de bienestar entre un período y otro. Para ello podríamos evaluar el cambio en la función de mínimo costo para un determinado nivel de utilidad a los precios iniciales y finales. Este índice se suele llamar Indice de Precios Verdadero (IPV). Por ejemplo, si pasamos de una lista de precios $p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0$, a otra $p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1$, podríamos calcular un índice de cambio en el costo de vida para el nivel de utilidad u_0 o para el nivel u_1 (nivel de utilidad que se alcanza en el período inicial y final respectivamente) como:

$$\begin{aligned} IPV\left(u_0\right) &= 100 \times \frac{C^*\left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1, u_0\right)}{C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_0\right)} \\ IPV\left(u_1\right) &= 100 \times \frac{C^*\left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1, u_1\right)}{C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_1\right)} \end{aligned}$$

Sin embargo, la aproximación anterior tiene el problema de que requiere del conocimiento acerca de las preferencias de los individuos, por lo que en la práctica resulta muy difícil de aplicar. En esta sección estudiaremos dos aproximaciones, los índices de precios de Laspeyres y de Paasche. Para calcular estos índices sólo es necesario conocer las cantidades consumidas y los precios iniciales y finales.

La dificultad del cálculo de un índice de precios surge del hecho que el individuo cambia la composición de la canasta que consume al modificarse los precios relativos. En efecto, si existiera un solo bien, la única compensación que le permitiría comprar el número de unidades que anteriormente compraba (y por ende, alcanzar el mismo nivel de utilidad) es un reajuste de su ingreso en la misma proporción en que aumentó el precio:

$$\begin{aligned} m_0\left(\frac{p^1}{p^0}\right) &= x^0 p^0 \left(\frac{p^1}{p^0}\right) = x^0 p^1 = m_1 \\ &\Rightarrow \frac{m_1}{m_0} = \frac{p^1}{p^0} \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre si, habiendo muchos bienes, todos los precios cambian en la misma proporción (puesto que no cambian los precios relativos, y al recuperarse el poder adquisitivo inicial, la persona escoge la misma canasta anterior). O, si aún cambiando los precios relativos, el individuo nunca cambia la composición de la canasta que consume (esto es, su función de utilidad es del tipo Leontief), en cuyo caso la compensación corresponde al promedio ponderado de todos los cambios de precio, donde la ponderación corresponde al porcentaje del presupuesto destinado a cada bien ($\alpha_i = \frac{x_i^0 p_i^0}{m_0}$) :

$$m_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1 = m_1$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0}$$

En cambio, si la canasta es distinta después del cambio en los precios, surge la pregunta de cuál canasta utilizar para ponderar las distintas variaciones de precio: si la inicial, la final o alguna otra.

El Índice de Precios de Laspeyres (IPL) utiliza las cantidades consumidas en el período inicial para ponderar los cambios en los precios: aquellos bienes que tenían una mayor proporción en el gasto inicial reciben una mayor ponderación.

$$\begin{aligned} IPL &= 100 \times \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0} = 100 \times \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1}{m_0} \\ &= 100 \times \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^0 p_i^0}{m_0} \right) \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right) = 100 \times \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right) \end{aligned}$$

donde $\alpha_i^0 = \frac{x_i^0 p_i^0}{m_0}$ representa la proporción en el gasto total que corresponde al gasto en el bien i.

El Índice de Precios de Paasche (IPP) utiliza las cantidades consumidas en el período final para ponderar los cambios en los precios.

$$\begin{aligned} IPP &= 100 \times \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0} = 100 \times \frac{m_1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0} \\ &= 100 \times \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^1 p_i^1}{m_1} \right) \left(\frac{p_i^0}{p_i^1} \right)} = 100 \times \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^1 \left(\frac{p_i^0}{p_i^1} \right)} \end{aligned}$$

Es claro que si la canasta inicial y la final coinciden ($x_i^1 = x_i^0$ para todo i), entonces ambos índices son iguales:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0}$$

Para evaluar si el IPL es una buena aproximación del cambio en el costo de vida, notamos que $C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_0\right) = m_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0$. Entonces, resulta claro que podemos escribir el IPL como:

$$\begin{aligned} IPL &= 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1}{C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_0\right)} \\ &\approx 100 \times \frac{C^*\left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1, u_0\right)}{C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_0\right)} = IPV\left(u_0\right) \end{aligned}$$

De modo que si los cambios de precio son pequeños, la aproximación debería ser precisa. Estamos utilizando la siguiente aproximación: $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1 \approx C^*\left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1, u_0\right)$. Es decir, aproximamos el costo de alcanzar la *utilidad* inicial a los precios nuevos como el costo de alcanzar la *canasta* inicial a los precios nuevos. Pero sabemos que posiblemente existe otra canasta que permite alcanzar el mismo nivel de utilidad a los precios nuevos (permitiendo sustitución), por lo que sabemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1 \geq C^*\left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1, u_0\right)$; es decir, $IPL \geq IPV\left(u_0\right)$. Entonces, el IPL sobreestima el cambio en el costo de vida asociado a la utilidad inicial.

Para evaluar si el IPP es una buena aproximación del cambio en el costo de vida, consideramos el nivel de utilidad de referencia final. Sabemos que $C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_0\right) = m_0$ y que $C^*\left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1, u_1\right) = m_1$. Entonces, resulta claro que podemos escribir el IPP como:

$$\begin{aligned} IPP &= 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0} = 100 \times \frac{C^*\left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1, u_1\right)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0} \\ &\approx 100 \times \frac{C^*\left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1, u_1\right)}{C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_1\right)} = IPV\left(u_1\right) \end{aligned}$$

De modo que si los cambios son pequeños, la aproximación debería ser precisa. En este caso utilizamos la siguiente aproximación: $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0 \approx C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_1\right)$. Es decir, aproximamos el costo de alcanzar la utilidad final a los precios iniciales como el costo de alcanzar la canasta final a los precios iniciales. Pero nuevamente debe ser cierto que $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0 \geq C^*\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0, u_1\right)$; es decir, $IPP \leq IPV(u_1)$. Por lo tanto, el IPP subestima el cambio en el costo de vida asociado a la utilidad final.

En la práctica, mayoritariamente se utiliza el Índice de Precios al Consumidor (IPC) para determinar los reajustes salariales. El IPC es un índice de Laspeyres que considera un número reducido de bienes, a los que se les asignan ponderaciones provenientes de una encuesta de presupuesto familiar, que en Chile, por ejemplo, se realiza aproximadamente cada diez años. Es decir, las ponderaciones asignadas a cada bien no corresponden a las de ninguna familia en particular, ni se recalculan con la periodicidad con que se reajustan los salarios. Por ello, no es claro si para una determinada familia el reajuste recibido sobre o subestima el indicado por el IPV.

Ejercicios

1. (*) Juan recibe un ingreso fijo de m y enfrenta precios p_1 y p_2 por lo bienes 1 y 2 respectivamente. Las preferencias de Juan se pueden representar por la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + 100)(x_2)$$

   a) Con los supuestos enunciados:
      1) Encuentre la demanda marshalliana de Juan por x_1.
      2) Suponga que Juan tiene un ingreso de 1000, y enfrenta precios $p_1 = 1 = p_2$. Encuentre la cantidad de x_1 consumida por Juan (llamaremos a esa cantidad $\overline{x_1}$).

   b) Encuentre el excedente de Juan por el consumo de $\overline{x_1}$: para ello calcule cuánto es lo máximo que Juan estaría dispuesto a pagar por consumir $\overline{x_1}$, y reste lo que efectivamente paga.

2. (**) En el país B se planea extender la línea de Metro (tren rápido), de manera que éste pasaría por la comuna X. Usted debe evaluar el impacto que tendría sobre el bienestar de los residentes de la comuna X la materialización de este proyecto.

   Para ello, suponga que todos los individuos de la comuna son idénticos, y que sus preferencias se pueden representar como:

$$u = \frac{x_1^{1/2} x_2^{1/2}}{t}$$

   donde x_1 y x_2 representan la cantidad consumida de los bienes 1 y 2 respectivamente, y t representa el tiempo de traslado. Los precios de los bienes 1 y 2 son $p_1 = 1 = p_2$. El ingreso de cada individuo es \$2000. Si se materializara el proyecto, t caería desde $t = 2$ a $t = 1$ (mientras que el ingreso y los precios de los bienes permanecerían constantes).

a) Estime el cambio en el bienestar del individuo, midiendo la variación compensatoria y la variación equivalente.

b) ¿Cuál es el cambio en p_1 que generaría el mismo cambio en el bienestar que se produce con la extensión de la línea de Metro a la comuna X? Es decir, debe calcular cuánto tendría que cambiar p_1 para que, si no se extendiera la línea de Metro, los residentes de X vieran aumentado su bienestar en la misma magnitud que al extenderse la línea, permaneciendo todo lo demás constante.

c) En base a su respuesta en b), indique cómo estimaría el cambio en bienestar calculado en a) usando curvas de demanda. (sólo indique cómo lo haría, sin resolver).

3. (**) Considere el caso de un individuo que debe escoger entre dos empleos: uno de ellos es entretenido (E), y tiene un sueldo I_E, mientras que el otro aburrido (A) y tiene un sueldo I_A.

   Suponga que el individuo valora el consumo de bienes, x_1 y x_2 (cuyos precios en el mercado son $p_1 = p_2 = 1$), y la entretención, que medimos con un índice e. El trabajo E tiene un valor de $e = 100$, mientras que el trabajo A tiene un valor de $e = 1$.

   Las preferencias se pueden representar como: $u = \sqrt{x_1 x_2 e}$

   a) Si $I_A = 1{,}000$, ¿cuál es el valor de I_E que deja al individuo indiferente entre ambos empleos?

   b) Suponga ahora que en ambos empleos el sueldo es 100, pero en el empleo A se subsidia el consumo de x_1 en un $z\,\%$, de modo que por cada unidad de x_1 los trabajadores de A pagan de su bolsillo sólo $(1 - z)$; ¿cuál es el valor de z que deja al individuo indiferente entre ambos empleos?

   c) Indique qué relación tienen las medidas calculadas en *a*) y *b*) con los conceptos de variación equivalente y compensatoria vistos en clases, y con la forma como medimos cambio en bienestar usando curvas de demanda. Debe explicar claramente.

4. (**) Gonzalo tiene un ingreso inicial I_0 y consume dos bienes: comida en restaurantes (x_1) y otros bienes (x_2), cuyos precios son p_1 y p_2 respectivamente. Las preferencias de Gonzalo se pueden representar por la siguiente función de utilidad: $u(x_1, x_2) = x_1^{0,2} x_2^{0,8}$.

   a) A Gonzalo le ofrecen una cuponera, que tiene una cantidad ilimitada de cupones con descuentos para comer en restaurantes (la cantidad de cupones es ilimitada debido a que puede pedir todos los que desee). Cada cupón le daría derecho a un

50 % de descuento. Los cupones no se pueden revender. Calcule cuánto es lo máximo que está dispuesto a pagar Gonzalo por la cuponera como porcentaje de su ingreso inicial I_0.

b) Suponga que $I_0 = 100$, los precios de los bienes son $p_1 = p_2 = 1$ y que el precio de cuponera es 10. Estime mediante la variación compensatoria el cambio en el bienestar de Gonzalo asociado a la posibilidad de comprar esta cuponera. Explique su procedimiento (debe explicar el razonamiento detrás del procedimiento).

5. (**) Considere el caso de un consumidor con función de utilidad indirecta:

$$v(p_1, p_2, m) = \frac{0,2^{0,2}0,8^{0,8}m}{p_1^{0,2}p_2^{0,8}} = \frac{km}{p_1^{0,2}p_2^{0,8}},$$

donde $k = \frac{1}{5}4^{\frac{4}{5}}$. Su ingreso es de $m = 100$, e incialmente enfrenta los precios $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$. El gobierno estudia la posibilidad de regular ciertos aspectos de la producción del bien 1 (en particular, la contaminación que genera) pero está preocupado por el daño que la consecuente alza en el precio tendría sobre los consumidores. De aprobarse la regulación en estudio, el precio del bien 1 subiría a 2. Hay 100 consumidores del bien 1, todos iguales al consumidor descrito arriba.

Las siguientes preguntas se refieren a un consumidor individual:

a) Encuentre su demanda por el bien 1.

b) ¿Qué pasaría con la cantidad demandada del bien 1 si el precio subiera de 1 a 2?

c) Si el gobierno lo quisiera compensar por el aumento en el precio causado por la regulación, ¿cuánto tendría que pagarle?

d) Por su parte, ¿cuánto estaría dispuesto a pagar el consumidor para evitar que la regulación no se aprobara?

e) Calcule la variación del excedente del consumidor marshalliano.

f) Comente sobre el origen de la diferencia entre sus respuestas a (c) y a (d).

g) Suponga, en cambio, que Ud. no conoce la función de utilidad indirecta ni las demandas, sino solamente sabe que las cantidades demandadas a los precios de 1 y de 2 son las que calculó en (b), y que de disponer de \$1 adicional de ingreso, el consumidor compraría $\frac{4}{10}$ unidades más del bien 2 . Intente una aproximación a (c), (d) y (e). (por ejemplo, suponiendo que las demandas son lineales). Explique claramente su procedimiento.

6. (**) Cuando Rita vivía en Carahue, era realmente feliz: con una mesada de \$100.000 mensuales hubiera podido arrendar una casa de

400 mt^2, o bien bajar 10 veces el río Imperial en balsa, su pasatiempo favorito. Por eso, cuando su familia le pidió que se viniera a Santiago (donde el arriendo del metro cuadrado (x_1) cuesta el doble, y la bajada del río Maipo (x_2) –equivalente para ella al Imperial– lo mismo), no estuvo muy contenta. Decidió, como buena economista, poner a prueba a su familia: si ellos estaban dispuestos a compensarla, vendría; si no, no. Pero no les dijo el monto de la compensación, y pese a que todos saben que las preferencias de Rita son $U(x_1, x_2) = x_1 + 40 \ln x_2$, las opiniones de los familiares están divididas:

La mamá:	"debemos darle lo suficiente como para que viva en las mismas condiciones que antes, es decir, que tenga el mismo departamento y el mismo número de bajadas de río que en Carahue".
El papá:	"debemos darle su variación compensatoria".
La abuela:	"debemos darle su variación equivalente".
El hermano:	"debemos darle su excedente del consumidor".

a) Explique en el contexto de este ejemplo a qué corresponde cada proposición.
b) Calcule la compensación adecuada, esto es, la más barata que logre convencerla de venir.
c) Calcule una de las compensaciones inadecuadas propuestas, y explique claramente por qué es mayor/menor/igual que la calculada en (b).

7. (***) Considere un individuo cuyas preferencias se pueden representar como $u = x_1 x_2 x_3$, donde x_1 y x_2 son bienes que se compran en el mercado, y cuyos precios son $p_1 = p_2 = 1$. La variable x_3 es un índice de calidad del aire que respira. Mientras más lejos esté la vivienda de este individuo de la zona industrial, mejor es la calidad del aire que respira. Así, si d es la distancia entre la vivienda del individuo y la zona industrial, sabemos que $x_3 = 100d$.

   El individuo recibe todos los meses un ingreso de \$1500, pero debe pagar inmediatamente el monto que gasta en el arriendo de su vivienda, p_v. Luego, su ingreso disponible para la compra de x_1 y x_2 es $m = 1500 - p_v$.

   a) Suponga que este individuo puede elegir su lugar de residencia, y que el arriendo (precio de la vivienda) es $p_v = 10d$ (es decir, las viviendas que están más lejos de la zona industrial tienen un precio más alto). Encuentre la máxima utilidad que puede alcanzar este individuo dados los precios que enfrenta.
   Ayuda: el individuo maximiza utilidad escogiendo x_1, x_2 y d.
   b) Suponga ahora que el precio de la vivienda se duplica, pasando a ser $p_v = 20d$. Calcule el cambio en el bienestar asociado a este cambio en el precio de la vivienda, usando la variación compensatoria. Explique la intuición de su procedimiento.

Referencias

1: Bergson, Abram (1975), "A Note on Consumer's Surplus", *Journal of Economic Literature,* Vol. 13, No. 1, pp. 38-44.

2: Chipman, John y James Moore (1980), "Compensating Variation, Consumer's Surplus, and Welfare", *The American Economic Review,* Vol. 70, No. 5, pp. 933-949

3: Harberger, Arnold (1971), "Three Basic Postulates for Applied Welfare Economics: An Interpretive Essay", *Journal of Economic Literature,* Vol. 9, No. 3, pp. 785-797.

4: McKenzie, George e Ivor Pearce (1976), "Exact Measures of Welfare and the Cost of Living", *The Review of Economic Studies,* Vol. 43, No. 3, pp. 465-468.

CAPíTULO 4

Preferencias Reveladas

1. Axiomas de preferencias reveladas

Hasta el momento hemos estudiado el comportamiento de un consumidor a partir del conocimiento de sus preferencias. En este capítulo nos preguntamos qué podemos averiguar de esas preferencias por medio de la observación de su comportamiento, esto es, qué nos *revela* su comportamiento.

Una pregunta fundamental, y acaso anterior, es si el comportamiento del individuo de hecho puede pensarse como proveniente de alguna jerarquía o preferencia. Esto es, si volvemos hacia atrás y somos momentáneamente excépticos respecto de cualquier regularidad en ese comportamiento, ¿será compatible con los axiomas de la preferencia 1 a 3? A continuación identificaremos qué tipo de comportamiento es compatible con esos axiomas, y cuál no lo es.

Supongamos que observamos diversas decisiones de un individuo. Si vemos que escoge el acto a cuando b también es factible, decimos que para él a **se revela directamente preferido** a b, y lo denotamos por $a \overset{d}{\succ} b$. No confunda $\overset{d}{\succ}$ con $\succ$: al observar la decisión definimos $\overset{d}{\succ}$, pero sin más información no podemos inferir que futuras decisiones del individuo serán compatibles con alguna preferencia $\succ$.

La principal característica de la preferencia es la transitividad. Si vemos que el individuo escoge el acto a cuando b también es factible, y si escoge el acto b cuando c también es factible, decimos que para él a **se revela indirectamente preferido** a c, y lo denotamos por $a \overset{i}{\succ} b$. Note que no hemos observado la elección de a cuando c es factible, por lo que nunca vimos a la persona actuar así. La diferencia, entonces, entre la revelación directa y la indirecta, es que la primera corresponde a una elección real, mientras la segunda no. Qué escogería a pudiendo escoger c es meramente una conjetura de nuestra parte, pero que resultaría correcta en caso de existir una preferencia $\succ$. De la misma forma, utilizaremos el símbolo $\overset{d/i}{\succ}$ para referirnos a preferencia revelada directa o indirectamente.

Podemos, entonces, pensar en dos niveles de inferencia, dados por:

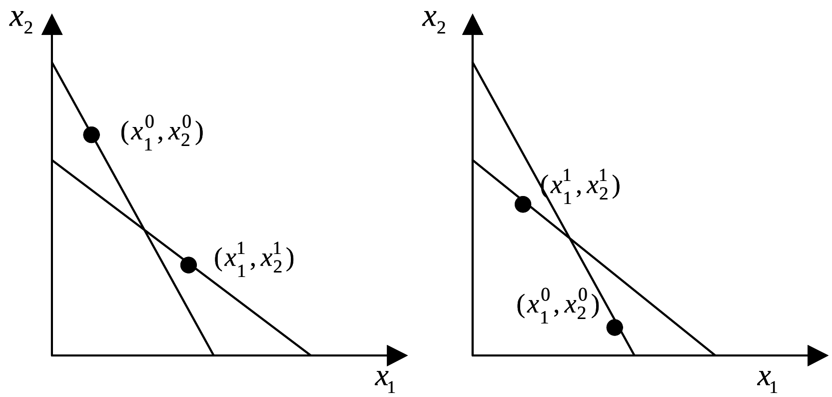


FIGURA 1. Axioma Débil de Preferencias Reveladas

AXIOMA 6 (Débil de Preferencias Reveladas). *Si* $a \overset{d}{\succ} b \Rightarrow b \overset{d}{\nsucc} a$.

AXIOMA 7 (Fuerte de Preferencias Reveladas). *Si* $a \overset{d/i}{\succ} b \Rightarrow b \overset{d/i}{\nsucc} a$.

El Axioma Débil de Preferencias Reveladas supone la estabilidad necesaria en el comportamiento: si una vez actuó de tal forma, siempre que se enfrente a las mismas opciones lo hará de la misma forma. El Axioma Fuerte de Preferencias Reveladas, en tanto, agrega al Débil el requerimiento de transitividad (o coherencia) en el comportamiento. La figura 1 ilustra decisiones de un individuo que satisface (a la izquierda) y de otro que no satisface (a la derecha) el axioma Débil.

En efecto, el gráfico de la izquierda de la figura 1 muestra que la canasta $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ fue escogida cuando la canasta $\mathbf{x}^1 = \left(x_1^1, x_2^1\right)$ no era alcanzable, y viceversa, por lo que el Axioma Débil no restringe en forma alguna esas decisiones. En cambio, el gráfico de la derecha muestra que $\mathbf{x}^0$ fue escogida cuando $\mathbf{x}^1$ sí era alcanzable (de manera que $\mathbf{x}^0$ se reveló directamente preferida por sobre $\mathbf{x}^1$), y que $\mathbf{x}^1$ fue escogida cuando $\mathbf{x}^0$ también era alcanzable (por lo que $\mathbf{x}^1$ se reveló directamente preferida por sobre $\mathbf{x}^0$), contradiciendo al Axioma Débil.

Los gráficos de la figura 2 ilustran decisiones de un individuo que satisface (a la izquierda) y de otro que no satisface (a la derecha) el Axioma Fuerte. El gráfico de la izquierda muestra que $\mathbf{x}^0$ se reveló directamente preferida por sobre $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$, puesto que ambas eran alcanzables cuando $\mathbf{x}^0$ fue escogida, y que $\mathbf{x}^1$ se reveló directamente preferida por sobre $\mathbf{x}^2$ por la misma razón. El Axioma Fuerte establece en este caso, entonces, que no deberíamos observar que $\mathbf{x}^1$ sea escogida si $\mathbf{x}^0$ es alcanzable, ni que $\mathbf{x}^2$ sea escogida cuando alguna de las otras dos es alcanzable, pero nunca observamos estas circunstancias por lo que el axioma no es contradicho. En cambio,

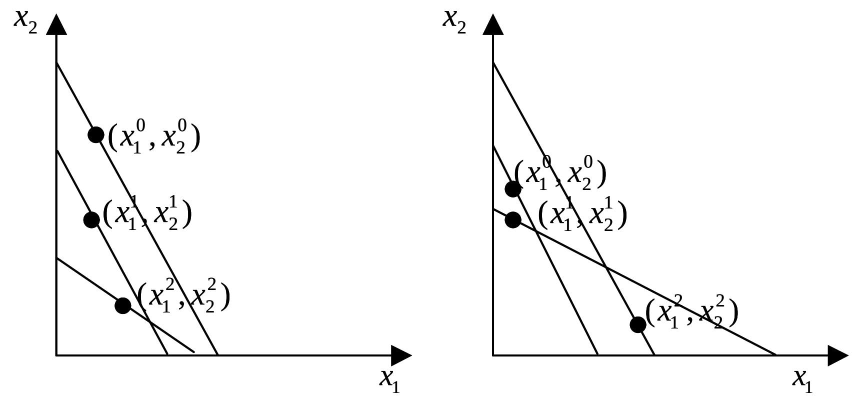


FIGURA 2. Axioma Fuerte de Preferencias Reveladas

el gráfico de la derecha muestra que $\mathbf{x}^0$ se reveló directamente preferida por sobre $\mathbf{x}^1$ y que $\mathbf{x}^1$ lo hizo sobre $\mathbf{x}^2$, de manera que $\mathbf{x}^0$ se reveló indirectamente preferida por sobre $\mathbf{x}^2$; no obstante, cuando $\mathbf{x}^2$ fue escogida, $\mathbf{x}^0$ era alcanzable, por lo que $\mathbf{x}^2$ se reveló directamente preferida por sobre $\mathbf{x}^0$, contradiciendo al Axioma Fuerte.

En el caso ilustrado en el gráfico de la derecha de la figura 2, no sólo no se cumple el axioma fuerte, sino que tampoco se cumple el axioma débil. Ahora bien, si la canasta contiene tres o más bienes, es posible que se cumpla el axioma débil y no el fuerte. En general, entonces, el cumplimiento del axioma fuerte implica que también se cumple el débil, pero no a la inversa.

EJEMPLO 2. *Suponga que usted observa el comportamiento de un individuo en tres fechas t distintas $(A, B$ y $C)$: observa la canasta escogida a cada lista de precios (cantidades x_1, x_2 y x_3 a los precios p_1, p_2 y p_3 para los bienes $1, 2$ y 3 respectivamente). El comportamiento observado se representa en la siguiente tabla:*

	Canasta en t			*Precios en t*		
	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3
Fecha $t = A$	9	10	10	1	1	1
Fecha $t = B$	8	12	9	2	1	1
Fecha $t = C$	3	15	12	2	2	1

(por ejemplo, en la fecha A los precios de los tres bienes son 1, y el individuo escoge 9 unidades del bien 1, 10 unidades del bien 2 y 10 unidades del bien 3).

Se verifica que $\mathbf{x}^A \overset{d}{\succ} \mathbf{x}^B$, $\mathbf{x}^B \overset{d}{\succ} \mathbf{x}^C$ y $\mathbf{x}^C \overset{d}{\succ} \mathbf{x}^A$, y que el comportamiento de este individuo es consistente con el axioma débil de preferencias reveladas.

Sin embargo, dado que $\mathbf{x}^A \overset{i}{\succ} \mathbf{x}^C$ *y* $\mathbf{x}^C \overset{d}{\succ} \mathbf{x}^A$, *el axioma fuerte de preferencias reveladas no se satisface.*

Es claro que si el comportamiento de un individuo se ajusta a una preferencia, entonces satisface ambos axiomas. Por otro lado, ¿existe alguna otra regularidad que su comportamiento tenga, no capturada en los axiomas Débil y Fuerte? La respuesta a esta pregunta es, quizás sorprendentemente, negativa. Resulta ser que el comportamiento de un individuo puede pensarse como proviniendo de una relación de preferencias si y sólo si obedece el axioma fuerte de preferencias reveladas: nada más ni nada menos puede deducirse del hecho que el individuo jerarquiza sus opciones.

Para entender este resultado, note que si las funciones de demanda satisfacen el axioma débil, entonces para cada conjunto de posibilidades de consumo imaginable, podemos suponer que la canasta escogida es la que está más arriba en la jerarquía dentro de ese conjunto de posibilidades (es preferida por sobre las demás canastas factibles): el axioma débil asegura que nunca se va a escoger una canasta distinta con las mismas posibilidades. Más aún, el axioma fuerte asegura que la relación de preferencias que podemos formar a partir de esa jerarquía es transitiva. Esto a su vez permite comparar cada par de canastas entre sí (lo que indica que la relación de preferencias así formada es completa), ya que aunque nunca se revelara directamente que una es preferida por sobre la otra, siempre podemos encontrar una canasta "intermedia" que permita establecer el ordenamiento. Así, por ejemplo, en la figura 3 vemos que al comparar la canasta a con la b, nunca se revela directamente que una es preferida sobre la otra (ya que cuando se escoge a, b no está disponible y viceversa). Pero la canasta c permite, con el axioma fuerte, asegurar que la canasta a no puede ser preferida sobre la b: decimos que $a \succ c$ y $c \succ b$, por lo que la transitividad (que se deriva del axioma fuerte) implica que $a \succ b$.

Un uso común de la idea de preferencias reveladas es el encontrar cotas para la reacción probable de un individuo en situaciones nuevas. No es posible obtener predicciones precisas observando un conjunto reducido de decisiones, porque las preferencias son un resumen de todas las decisiones imaginables. Sin embargo, en muchas situaciones es suficiente saber que un efecto "es a lo sumo de tal magnitud", o "es al menos de tal otra".

2. Aplicación: convexidad de las curvas de indiferencia

Decíamos en el contexto de la preferencia que la convexidad de las curvas de indiferencia denotaban una cierta preferencia por la variedad. Aquí queremos invertir el argumento: supongamos que un consumidor escoge siempre una canasta "balanceada", esto es, que no se especializa en el consumo de

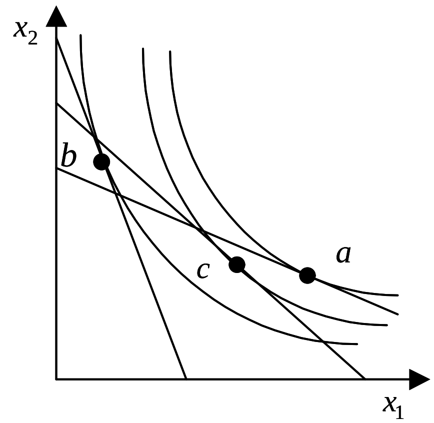


FIGURA 3. Transitividad y axioma fuerte de preeferncias reveladas.

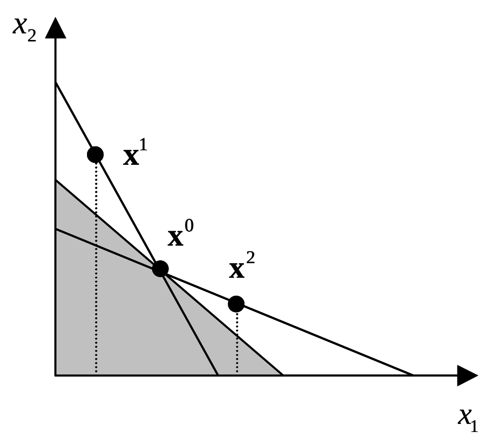


FIGURA 4. Convexidad de Curvas de Indiferencia y Preferencias Reveladas

uno de los bienes. De ese hecho podemos inferir que sus curvas de indiferencia son convexas, como lo muestra la figura 4.

El razonamiento es como sigue: suponga que el consumidor compró la canasta $\mathbf{x}^0$, por lo que ésta se reveló directamente preferida por sobre todas las canastas en el área gris. Si el precio relativo del bien 1 subiera, pero a la vez se compensara al consumidor de manera de que todavía pueda comprar $\mathbf{x}^0$, él no escogería una canasta a la derecha de $\mathbf{x}^0$ puesto que todas aquellas que a los nuevos precios son alcanzables, pertenecen al área gris. La nueva canasta tiene que ser entonces una como $\mathbf{x}^1$. Pero si se escoge $\mathbf{x}^1$ siendo $\mathbf{x}^0$ alcanzable, entonces $\mathbf{x}^1$ se revela directamente preferida por sobre $\mathbf{x}^0$. Luego, $\mathbf{x}^1$ debe estar en un nivel más alto en la jerarquía (esto es, de mayor utilidad) que $\mathbf{x}^0$. Como $\mathbf{x}^0$ está por encima de todas las canastas del área gris, se sigue que entre la canasta más alta del área gris que contiene las x_1^1 unidades del bien 1 (que es peor que $\mathbf{x}^0$) y $\mathbf{x}^1$ (que es mejor que $\mathbf{x}^0$) debe haber una tercera canasta que es indiferente con $\mathbf{x}^0$. Luego, la curva de indiferencia que pasa por $\mathbf{x}^0$ también pasa por esa tercera canasta. Repitiendo este argumento ahora para una caída en el precio del bien 1, concluimos que la nueva canasta debiera ser una como $\mathbf{x}^2$. Nuevamente podemos decir que hay una canasta entre $\mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}^2$ que contiene las mismas unidades x_1^2 del bien 1, y que es indiferente con $\mathbf{x}^0$. Luego, la curva de indiferencia, que une a $\mathbf{x}^0$ con todas las demás canastas indiferentes a ella, debe ser convexa.

3. Aplicación: índices de precio

El concepto de preferencias reveladas nos da otra perspectiva para comprender las diferencias entre tipos de índices de precio como método de reajuste de salarios y sus consecuencias sobre el bienestar. Los gráficos de la figura 5 ilustran distintas posibilidades para un individuo que consume una canasta inicial $\mathbf{x}^0$, y una final $\mathbf{x}^1$ después de que los precios de los bienes cambian de $\left(p_1^0, p_2^0\right)$ a $\left(p_1^1, p_2^1\right)$. En el gráfico de la izquierda, es claro que el individuo está mejor en el período final: aún pudiendo escoger la canasta $\mathbf{x}^0$ escoge $\mathbf{x}^1$, por lo que esta última debe ser preferida (note que podemos afirmar que está mejor, aún cuando en el período final consume más unidades de x_1 pero menos de x_2). En el gráfico de la derecha, es claro que el individuo estaba mejor en el período inicial: aún pudiendo escoger la canasta $\mathbf{x}^1$, escogía $\mathbf{x}^0$, por lo que esta última debe ser preferida. En el gráfico de abajo, en cambio, no podemos afirmar que el individuo esté mejor o peor en el período inicial.

En resumen, tenemos que si la canasta inicial es alcanzable en el período final (esto es, todavía está dentro del conjunto de posibilidades después del cambio en los precios) pero no es escogida, entonces debe estar mejor en el período final (en el sentido que la canasta final se revela preferida por sobre la inicial). Por otra parte, si en el período inicial la canasta final era factible, pero no era escogida, entonces debe haber estado mejor en el período inicial que en el final. Ahora nos preguntamos si podemos decir que el individuo está mejor o peor que en el período inicial si reajustáramos su ingreso en un determinado porcentaje.

En primer lugar, si reajustamos su ingreso en al menos lo indicado por su IPL, el individuo debe estar mejor que en el período inicial. En efecto,

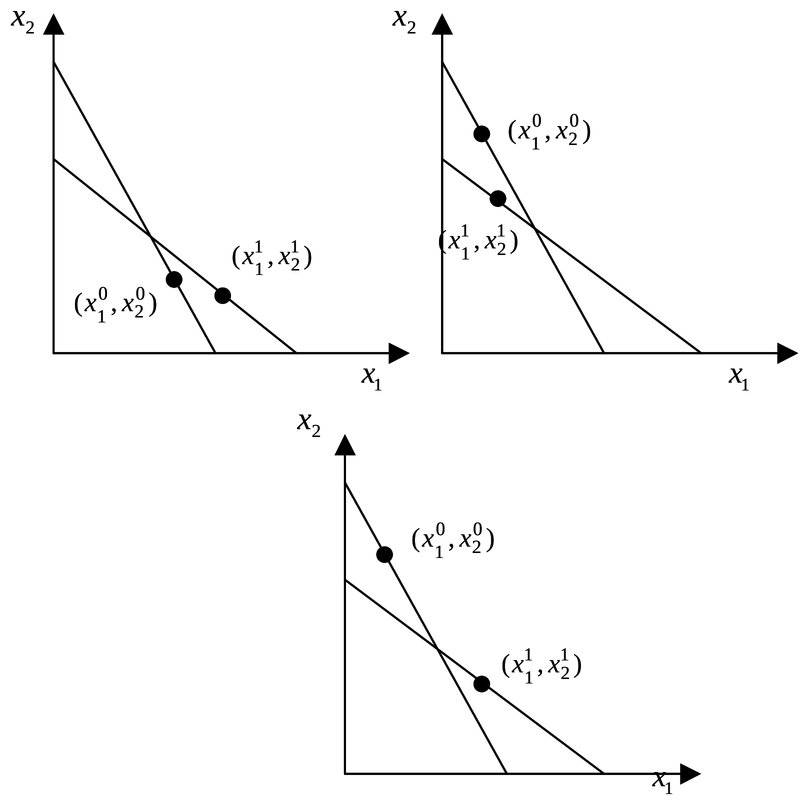


FIGURA 5. Indices de Precios y Preferencias Reveladas

como $m_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^1$ y $m_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0$, tenemos:

$$100 \times \frac{m_1}{m_0} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0} \geq IPL = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0}$$

Luego, $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^1 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^1$, por lo que podemos concluir que la canasta inicial es factible a los precios finales (y sin embargo no es la escogida), por lo que el individuo debe estar mejor en el período final que en el inicial.

Por otra parte, si el reajuste no es superior al indicado por el IPP, entonces el individuo debe estar peor que en el período inicial:

$$100 \times \frac{m_1}{m_0} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0} \leq IPP = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0}$$

Luego, $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0$, por lo que podemos concluir que la canasta final era factible a los precios iniciales (y sin embargo no era escogida). Tenemos, entonces, que el reajuste correcto está comprendido entre ambos índices.

De esta forma, utilizando el concepto de preferencias reveladas, llegamos a una conclusión similar a la que obteníamos previamente, pero prescindiendo de la función de mínimo costo.

Ejercicios

1. (*) Determine si las siguientes decisiones satisfacen los axiomas débil y fuerte de preferencias reveladas:

$precios \vert canasta$	A	B	C
A	108	123	98
B	96	96	102
C	146	105	123

   donde cada celda contiene la canasta indicada valorada al precio indicado (por ejemplo, en la celda (A, B) se indica que cuando los precios son A el costo asociado a comprar la canasta B es 123), y las canastas efectivamente consumidas a los distintos precios son las de la diagonal (al precio A se consume la canasta A, etc.).
2. (**) El consumidor α compró la canasta $(x_1, x_2) = (1, 9)$ cuando los precios eran $(p_1, p_2) = (1, 1)$, y la canasta $(5, 6)$ cuando los precios fueron $(2, 1)$. En cambio, el consumidor β compró en el primer caso la canasta $(7, 3)$, y la $(7, 2)$ en el segundo.
   a) ¿Son compatibles esas decisiones con la hipótesis de la maximización de (alguna función de) utilidad? Esto es, satisfacen los axiomas fuerte y débil de preferencias reveladas? Explique claramente.
   b) Considere a α y a β como miembros del grupo "consumidores". ¿Es coherente el comportamiento del grupo de consumidores con los axiomas fuerte y débil de preferencias reveladas? Discuta.
3. (**) Imagine que una universidad selecciona a sus alumnos con el siguiente procedimiento: acepta a aquellos que tienen el mayor puntaje en la Prueba de Aptitud, y si dos personas tienen el mismo puntaje y queda una vacante, escoge al de mejor promedio en

la enseñanza media. Si un observador externo quisiera aplicar la teoría de la preferencia para entender su política de admisión, ¿cree usted que el comportamiento observado satisfaría los axiomas débil y fuerte de preferencias reveladas?

Referencias

1: Cohen, Jessica y William Dickens (2002) "A Foundation for Behavioral Economics", *The American Economic Review,* Vol. 92, No. 2, Papers and Proceedings of the One Hundred Fourteenth Annual Meeting of the American Economic Association, pp. 335-338.

2: Thaler, Richard (1997), "Irving Fisher: Modern Behavioral Economist", *The American Economic Review,* Vol. 87, No. 2, Papers and Proceedings of the Hundred and Fourth Annual Meeting of the American Economic Association, pp. 439-441.

3: Samuelson, Paul A. (1948), "Consumption Theory in Terms of Revealed Preference", *Economica,* New Series, Vol. 15, No. 60, pp. 243-253.

4: Sen, Amartya (1973), "Behaviour and the Concept of Preference", *Economica,* New Series, Vol. 40, No. 159, pp. 241-259.

CAPíTULO 5

Teoría de la Producción y la Oferta

1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la teoría del comportamiento de empresas que operan en ambientes perfectamente competitivos, esto es, los determinantes de las decisiones de contratación de insumos (que en virtud de la simplicidad restringimos a las nociones vagas de capital y trabajo, pero cuyo espíritu es amplio, abarcando decisiones como localización, inversión, etc.), de producción y de venta.

A diferencia del caso del consumidor, en que en principio se considera a la preferencia como un factor completamente subjetivo, en el caso de la empresa se supone un objetivo particular, el de la maximización de las ganancias.

En cierta medida, este supuesto es necesario para mantener la coherencia con la teoría del consumidor. En efecto, supongamos que el consumidor es una persona (y no, por ejemplo, una familia). Ese consumidor es probablemente a la vez un trabajador o un empresario. ¿Qué significa que su comportamiento en estos otros roles sea coherente con su comportamiento como consumidor? Entre otras cosas, significa que si como consumidor no está saciado, entonces en sus otros roles optará por decisiones que le permitan conseguir un mayor nivel de consumo en tanto ello no interfiera con otros objetivos. Así, el trabajador escogerá la ocupación que le ofrezca el mayor ingreso total (entendido como ingreso monetario más valor del ocio), y el empresario tomará decisiones tendientes a conseguir el mayor ingreso neto (ganancia) de su empresa.

Esto, en tanto no valoren o no le preocupen otros aspectos relacionados con el trabajo o la empresa, en cuyo caso estas otras características competirían con el ingreso del trabajador o con las ganancias del empresario. Que el trabajador tenga una preferencia que depende sólo del ocio y del ingreso significa que no tiene preferencias por tipos de trabajo, lo que seguramente no se ajusta a la realidad. Quizás los artistas, por ejemplo, mayoritariamente sienten que están renunciando a mayores niveles de consumo a cambio de dedicarse a actividades que los llenan de satisfacción. Como toda teoría, el propósito de la teoría de la oferta de trabajo aludida es puntual, y no dice relación con estos aspectos. En virtud de la simplicidad, entonces, se sacrifican (grandes) cuotas de realismo descriptivo en aspectos de menor importancia respecto del problema que interesa analizar. En cambio, esos aspectos son incorporados cuando se consideran importantes para el problema que se analiza. Así, por ejemplo, la incorporación de los gustos por determinadas actividades es el centro de la teoría de las diferencias igualizantes.

De igual manera, que el empresario busque exclusivamente maximizar ganancias significa que le son indiferentes la tasa de mortalidad de empleados por accidentes laborales, vender automóviles con desperfectos mecánicos o causar un desastre ecológico, en tanto esas decisiones generen mayores ganancias que las alternativas, lo que ciertamente no describe adecuadamente el comportamiento ético de un gran número de empresarios. Para el análisis de situaciones en que las preferencias por conductas éticas son importantes, es relativamente sencillo complicar el análisis que desarrollamos en este capítulo. El modelo simple del que nos ocupamos ahora, en cambio, es útil para el análisis de decisiones éticamente neutrales.

Se debe enfatizar que estas simplificaciones no suponen una negación de los aspectos de la realidad que se dejan de lado, sino sólo su congelamiento momentáneo para lograr claridad en otros aspectos a través del famoso "hechizo" *ceteris paribus*.

Existe otra complejidad relacionada con las ya mencionadas, cuyo análisis postergamos de la misma forma: la pregunta acaso anterior de si la empresa **puede** o no maximizar ganancias. Puede ser que los dueños de una empresa quieran conseguir la mayor ganancia o lucro posible, pero ya sea por la necesaria especialización en las tareas o en razón del tamaño de las operaciones, se vean obligados a delegar buena parte de las decisiones. Es perfectamente imaginable que la delegación de tareas sea imperfecta, y que redunde en que muchas decisiones no sean las que el o los dueños preferirían hubiesen sido (un ejemplo inmediato: el gasto de papel, luz y teléfono en las oficinas). Sin embargo, si bien en este capítulo suponemos que los dueños de las empresas tienen un control total sobre los insumos, es posible incorporar en cierta medida los costos de la delegación al describir las posibilidades tecnológicas del empresario.

Matemáticamente, entonces, suponemos que las decisiones de contratación de insumos, de producción y de venta del (único) bien o servicio que la empresa ofrece, provienen de:

$$\begin{aligned} \max_{q,z_1,\ldots,z_n} \pi &= (pq) - (w_1 z_1 + \ldots + w_n z_n) \qquad (1.1) \\ \text{sujeto a} \quad 0 &\leq q \leq f(z_1, \ldots, z_n) \\ z_1, z_2, \ldots, z_n &\geq 0 \end{aligned}$$

donde q es el número de unidades del bien vendidas al precio unitario de p, z_j el número de unidades del insumo j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ contratadas o empleadas en la producción del bien, w_j el precio unitario del insumo j, y $f(z_1, \ldots, z_n)$

es el máximo número de unidades del bien que, con la tecnología disponible y la canasta de insumos $(z_1, ..., z_n)$, la empresa puede producir.

La ganancia (π) corresponde a la diferencia entre el ingreso total por ventas y los costos de producción. Estos costos incluyen no sólo el dinero que el empresario debe desembolsar para el pago a los factores que contrata (trabajadores, insumos, maquinarias, etc.), sino también el costo de oportunidad de los insumos de los cuales él es dueño directamente, como es el valor de su propio tiempo, el pago que podría recibir si arrendara sus instalaciones o terrenos a terceros, etc. Es decir, la ganancia "económica" no necesariamente corresponde a la utilidad contable de la empresa, sino que corresponde a lo que denominamos el "excedente del productor"[1]. Al analizar el cambio en el bienestar de un consumidor, y dada la naturaleza ordinal de la función de utilidad, se hacía necesario buscar alguna manera de expresar el cambio en "utiles" en unidades de bienes o en pesos, para lo cual se desarrollaron varias medidas de bienestar alternativas. En este caso, sin embargo, y dado que el excedente del productor ya está expresado en pesos, no es necesario buscar medidas alternativas. El supuesto de competencia se manifiesta en que los precios de insumos y del producto se toman como dados, esto es, no hay negociación posible sobre esos valores.

Este capítulo, entonces, estudia la forma de la solución del problema (1.1). En la próxima sección se ahonda (y abunda) en la descripción de la restricción. En la siguiente se estudian los costos en conexión con las posibilidades. La última sección estudia la solución en forma global.

2. Funciones de producción

En concordancia con el método delineado en los dos capítulos anteriores, entender un problema de decisión parte por entender el conjunto de posibilidades a que el individuo se enfrenta.

Una visión simple de la empresa la imagina como una caja negra, en la que por algún proceso no especificado, el uso de determinados insumos resulta en la generación de un determinado producto. Quizás existen diversas maneras de generar el mismo nivel de producto, o quizás el uso de una misma canasta de insumos puede resultar en diversos niveles de producto. Lo que sin duda es cierto es que independientemente de la tecnología con que se combinen los insumos, la cantidad de producto que se obtiene de una canasta finita de insumos debe ser finita. Considerando que otras canastas de insumos probablemente tienen otros límites máximos de producción, escribimos formalmente:

$$q \leq f(z_1, ..., z_n) \tag{2.1}$$

[1]Si existe algún costo fijo inevitable, éste no debe ser sustraído para computar el excedente del productor, ya que dicho costo se debe pagar independientemente de si el empresario decide producir o no.

La **función de producción** describe el límite (o frontera) de estas posibilidades. Matemáticamente, es una función que asigna a cada combinación de factores $z_1, z_2, ..., z_n$ el máximo nivel de producto posible (lo que considera de manera implícita la tecnología existente como un dato). Si (2.1) describe las posibilidades, la función de producción:

$$q = f(z_1, ..., z_n) \tag{2.2}$$

describe su frontera.

En general en este curso consideraremos el caso de dos factores, que usualmente llamaremos capital y trabajo, y denotaremos por K y L respectivamente.

Podemos, al igual que en el caso de la función de utilidad, caracterizar la función de producción en términos de sus derivadas parciales (gradiente) y de sus curvas de nivel (llamadas en este contexto **isocuantas**). A diferencia de la función de utilidad, sin embargo, consideramos a la función de producción como cardinal, esto es, cualquier transformación de f genera posibilidades distintas. En términos del gráfico en tres dimensiones, su altura absoluta es importante. De hecho, le llamamos **progreso técnico** al crecimiento de esta frontera.

Existen diversas preguntas que nos podemos hacer respecto de la tecnología existente, o función de producción, que en último término la caracterizan, a saber: (1) qué ocurre con la cantidad producida al variar K o L; (2) qué ocurre con la cantidad producida si cambian ambos factores a la vez; y (3) cuál es el grado de sustituibilidad entre los factores. Analizaremos cada una de estas tres preguntas por separado.

2.1. Productividad de los factores.

1. La noción de **productividad** se refiere a la relación entre el nivel de producto obtenido y los insumos que se ocuparon en generarlo. Un insumo se hace más productivo cuando la misma cantidad de insumo genera más unidades de producto. Existen, sin embargo, diversas maneras en las que podemos pensar en productividad, y conviene distinguirlas. Se define la **Productividad Marginal** (o el Producto Marginal) de un factor j como:

   $$PMg_j = \frac{\partial f}{\partial z_j} \equiv f_j$$

   Así, la Productividad Marginal corresponde al (máximo) número de unidades de producto que se pueden conseguir si se aumenta el insumo j en una unidad, y sólo el insumo j. Observe que el que se trate de una derivada parcial significa que existe una condición de *ceteris paribus* sobre el resto de los insumos. Es importante notar que, por la misma razón, la Productividad Marginal de un insumo depende de la cantidad usada de cada uno de los otros insumos. Así, por ejemplo, la productividad del trabajo depende de la cantidad de capital que se emplee, y viceversa. En el caso en que la función de producción es diferenciable dos veces, tenemos además la siguiente condición de simetría:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial z_j} &= \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right) = \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\end{aligned}$$

Cuando $\frac{\partial f_i}{\partial z_j} > 0$ decimos que los factores son complementarios en la producción o **q-complementarios**, mientras que cuando $\frac{\partial f_i}{\partial z_j} < 0$ decimos que son **q-anticomplementarios**.

La **Productividad Media**, en cambio, corresponde a la simple razón entre el número de unidades de producto que (en promedio) se consiguen a partir del número de unidades del insumo empleado:

$$PMe_j = \frac{q}{z_j}$$

Observe que la Productividad Media depende del nivel de contratación del insumo. En particular, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial PMe_j}{\partial z_j} &= \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{f(z_1, z_2)}{z_j}\right) \\ &= \frac{f_j z_j - f(z_1, z_2)}{z_j^2} = \frac{1}{z_j}\left(f_j - \frac{q}{z_j}\right) \\ &= \frac{1}{z_j}\left(PMg_j - PMe_j\right)\end{aligned}$$

Luego, la Productividad Media de un factor es creciente cuando la Productividad Marginal es mayor que ella, decreciente cuando es menor, y constante cuando ambas son iguales.

El cambio porcentual en q ante un cambio porcentual en uno de los factores corresponde a la **elasticidad insumo-producto** (ε_{q,z_i}):

$$\varepsilon_{q,z_i} = \frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{z_i}{q} = \frac{PMg_i}{PMe_i}$$

2.2. Rendimientos a escala:

1. ¿Qué ocurriría con el nivel de producción si se aumentara la contratación de todos los insumos en la misma proporción $(\lambda - 1)$ %? Si el nivel de producción aumenta en $(\lambda - 1)$ %, decimos que la tecnología en q_0 es de **rendimientos constantes a escala**; si aumenta en menos, decimos que en q_0 es de **rendimientos decrecientes a escala**, y si lo hace en más, que en $q_0$es de **rendimientos**

crecientes a escala. Tenemos:

$$f \text{ tiene rendimientos } \left\{ \begin{array}{c} \text{crecientes} \\ \text{constantes} \\ \text{decrecientes} \end{array} \right\} \text{ a escala}$$

$$\text{si } \frac{q_1 - q_0}{q_0} \equiv \frac{f(\lambda z_1, \lambda z_2)}{f(z_1, z_2)} - 1 \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} (\lambda - 1) \qquad \forall \lambda > 1$$

Esencialmente, una tecnología es de rendimientos constantes a escala si es posible "repetir" un negocio o fracción de él: dos fábricas idénticas consiguen el doble de producto que cada una de ellas por separado. Mucha gente prefiere pensar que si se toma literalmente el término "idéntica", debiera ser *siempre* el caso que se consigue duplicar la producción, esto es, que todas las tecnologías son de rendimientos constantes a escala. Sin embargo, es igualmente claro que en la producción de muchos bienes o servicios es imposible duplicar (o aumentar en la misma proporción) *todos* los insumos. No podemos, por ejemplo, montar dos fábricas en la misma ubicación, o pedirle a Madonna que dé dos conciertos en países distintos a la misma hora. Siempre existen insumos (esto es, variables que afectan el resultado de la producción) insustituibles, replicables sólo parcialmente, o limitados. Luego, si bien una descripción completa de la tecnología consideraría a todos los factores que afectan el proceso productivo, en la práctica se suele optar por descripciones parciales, en que la producción es función fundamentalmente de insumos variables o controlables por la empresa. Así, si bien en una descripción completa el conocimiento sería un insumo (aunque fijo en el corto plazo), en las descripciones habituales está fuera de la función, y explica los cambios en ella cuando el conocimiento crece (progreso técnico).

Observe el parecido entre la definición de rendimientos a escala y la definición de función homogénea de grado 1. En efecto, la función de producción es homogénea de grado 1 si y sólo si tiene rendimientos constantes a escala *en todo* q. En general, una función de producción no tiene por qué ser homogénea.

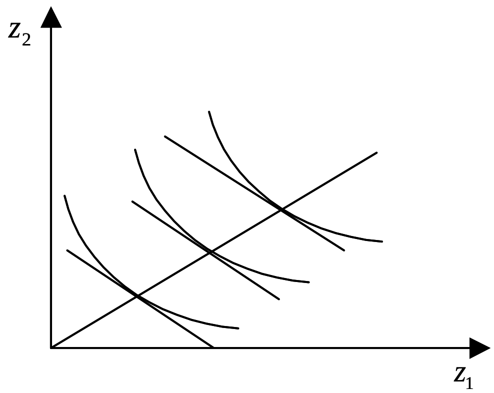
Las funciones de producción homogéneas, en todo caso, tienen algunas características interesantes. Dos de ellas son las siguientes:

2. Si la función de producción es homogénea de grado r, entonces tiene rendimientos crecientes a escala si $r > 1$, constantes si $r = 1$, y decrecientes si $r < 1$. En efecto, si f es homogénea de grado r satisface:

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^r f(z_1, z_2)$$

Luego,

$$\frac{f(\lambda z_1, \lambda z_2)}{f(z_1, z_2)} = \lambda^r$$



a)

FIGURA 1. Mapa de isocuantas para función de producción homotética

Pero $\lambda^r > \lambda$ si y sólo si $r > 1$.

3. Si la función de producción es homogénea de grado r, la razón de productividades marginales entre factores depende sólo de la razón de uso entre factores, y no del nivel de uso de cada uno por separado (ver Apéndice Matemático, sección C, de funciones homogéneas). Es decir, para cualquier función de producción homogénea sabemos que la pendiente de la isocuanta es la misma mientras la razón de uso de factores no cambie. Esta propiedad es común a cualquier función homotética (esto es, funciones homogéneas o transformaciones crecientes de funciones homogéneas). En la figura 1 se presenta un mapa de isocuantas para una función de producción homotética.

   Por otro lado, se define la **elasticidad producto total** ε_{PT} como el cambio porcentual en q ante un cambio equiproporcional en todos los factores de $a\,\%$.

$$\varepsilon_{PT} = \frac{\triangle\,\%q}{a\,\%}$$

donde $\triangle\,\%z_1 = \triangle\,\%z_2 = a\,\%$. Entonces, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\triangle\,\%q &= \frac{dq}{q} = \frac{f_1 dz_1 + f_2 dz_2}{q} = f_1 \frac{dz_1}{z_1}\frac{z_1}{q} + f_2 \frac{dz_2}{z_2}\frac{z_2}{q} \\ &= a\,\%\left(\frac{f_1}{PMe_1} + \frac{f_2}{PMe_2}\right) \\ &= a\,\%\left(\varepsilon_{q,z_1} + \varepsilon_{q,z_2}\right)\end{aligned}$$

De modo que obtenemos

$$\varepsilon_{PT} = \left(\varepsilon_{q,z_1} + \varepsilon_{q,z_2}\right)$$

De esta forma, f tiene rendimientos crecientes a escala si y sólo si $\varepsilon_{PT} > 1$; rendimientos constantes a escala si y sólo si $\varepsilon_{PT} = 1$, y rendimientos decrecientes a escala si $\varepsilon_{PT} < 1$.

Nuevamente en el caso de las funciones homogéneas de grado r, sabemos por Euler que:

$$\begin{aligned} f_1 z_1 + f_2 z_2 &= rq \\ &\Rightarrow \varepsilon_{PT} = r \end{aligned}$$

de modo que la elasticidad producto total es igual al grado de homogeneidad de la función. En la figura 1 veíamos que en el caso de las funciones de producción homotéticas, al aumentar el uso de ambos factores en un determinado porcentaje (manteniendo la misma razón de uso), la forma de la isocuanta se mantiene. La particularidad de las funciones homogéneas, como su nombre lo sugiere, es que ante dicho aumento en el uso de factores, la tasa a la cual aumenta la producción es siempre la misma.

2.3. Sustituibilidad entre factores (movimiento a través de la isocuanta):

1. Se define la isocuanta de la manera siguiente:

   DEFINICIÓN 12. *Una **isocuanta** es un conjunto de combinaciones de factores (z_1, z_2) con la propiedad que todas entregan el mismo número de unidades producidas, esto es, $f(z_1, z_2) = \overline{q}$.*

   La pendiente de la isocuanta se obtiene de:

$$\begin{aligned} dq &= 0 = f_1 dz_1 + f_2 dz_2 \\ &\Rightarrow \left.\frac{dz_2}{dz_1}\right|_{q\,\text{constante}} = -\frac{f_1}{f_2} \end{aligned}$$

   El valor absoluto de la pendiente de la isocuanta, que llamaremos **Tasa Marginal de Sustitución Técnica** (TMST), indica cuántas unidades adicionales de capital es necesario contratar para mantener el nivel de producción si se deja de contratar una unidad de L.

   La forma de la isocuanta indica el grado de sustituibilidad entre factores en la producción de ese bien determinado: si la pendiente de la isocuanta es constante, decimos que los factores son sustitutos perfectos (sustituibilidad infinita); si la función es de proporciones fijas, decimos que no hay posibilidad de sustitución (sustituibilidad nula). Esto se puede representar a través de la **elasticidad de**

sustitución directa entre factores:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\triangle\,\%\,(z_2/z_1)}{\triangle\,\%\,(f_1/f_2)} = \frac{\partial \ln (z_2/z_1)}{\partial \ln (f_1/f_2)}\\ &= -\frac{\triangle\,\%\,(z_1/z_2)}{\triangle\,\%\,(f_1/f_2)} = -\frac{\partial \ln (z_1/z_2)}{\partial \ln (f_1/f_2)}\end{aligned}$$

Los casos extremos son el de la función de producción de proporciones fijas, cuya ecuación es $q = \min\{a_K K, a_L L\}$, y el de la función de producción lineal o de sustitución perfecta, con ecuación $q = a_K K + a_L L$.

La tecnología se encuentra, entonces, resumida en la función de producción. Ésta indica el límite de las posibilidades. Una inspección rápida del problema que nos ocupa, esto es:

$$\begin{aligned}\max_{q,z_1,\dots,z_n} \pi &= (pq) - (w_1 z_1 + \dots + w_n z_n)\\ \text{sujeto a} \quad 0 &\leq q \leq f(z_1,\dots,z_n)\\ z_1, z_2, \dots, z_n &\geq 0\end{aligned}$$

revela que salvo en el caso extremo en que el óptimo sea no producir, el empresario preferirá estar en el límite de sus posibilidades. El no producir lo máximo posible con los insumos que se emplean significa dejar pasar la oportunidad de ganar más sin aumentar los costos, lo que evidentemente no sería coherente con la maximización de ganancias. Por eso, la restricción referida a q se satisfará sin holgura (observe que $f(0,\dots,0) = 0$), pudiendo el problema reescribirse como:

$$\begin{aligned}\max_{q,z_1,\dots,z_n} \pi &= (pq) - (w_1 z_1 + \dots + w_n z_n)\\ \text{sujeto a} \quad q &= f(z_1,\dots,z_n)\\ z_1, z_2, \dots, z_n &\geq 0\end{aligned}$$

o, equivalentemente, como:

$$\max_{z_1,\dots,z_n} \pi = pf(z_1,\dots,z_n) - (w_1 z_1 + \dots + w_n z_n)$$
$$\text{sujeto a} \quad z_1, z_2, \dots, z_n \geq 0$$

Por otro lado, resulta pedagógico dividir este problema de optimización en dos etapas:

i.: Buscar, para un nivel de producto fijo, la combinación de insumos que resulta más barata. Analíticamente, esto corresponde a:

$$\min_{z_1,\dots,z_n} (w_1 z_1 + \dots + w_n z_n)$$
$$\text{sujeto a} \quad f(z_1,\dots,z_n) \geq q$$

Denote por $C(q)$ al mínimo costo resultante, esto es, $C(q) = w_1 z_1^* + \dots + w_n z_n^*$.

ii.: Buscar, conociendo el mínimo costo de cada nivel de producto, la cantidad que conviene producir. Analíticamente:

$$\max_{q\geq 0}\left(pq - C\left(q\right)\right)$$

Éste es el camino que recorremos a continuación.

3. Minimización de costos

Deseamos encontrar el mínimo costo al que la empresa puede producir cada nivel de q, dada la tecnología y los precios de los factores. Para ello es necesario encontrar la combinación óptima de factores para cada nivel de q, entendiendo "óptima" como aquella combinación de mínimo costo para cada nivel de producción.

Gráficamente, lo que buscamos es la combinación de K y L que permite alcanzar una isocuanta al mínimo costo posible. El conjunto de combinaciones de K y L que involucran el mismo costo total se representa en la curva de **isocostos**. Dado que suponemos en esta parte del curso que las empresas son tomadoras de precios, la isocosto será una línea recta. La pendiente de la isocosto se obtiene de:

$$\begin{aligned} dC &= 0 = w_1 dz_1 + w_2 dz_2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{dz_2}{dz_1}\right)_{C \text{ constante}} = -\frac{w_1}{w_2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

El valor absoluto de la pendiente de la isocosto, que llamaremos **Tasa Marginal de Sustitución de Mercado** (TMSM) corresponde al costo de oportunidad de z_1 en términos de z_2. De manera que el problema consiste en encontrar la combinación de z_1 y z_2 perteneciente a una determinada isocuanta que pertenezca a la isocosto más baja (o de menor costo).

Formalmente, el problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{\{z_1,z_2\}} C &= w_1 z_1 + w_2 z_2 \\ \text{s/a} &: f\left(z_1, z_2\right) = q \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para resolver el problema de optimización usamos el lagrangeano:

$$\mathcal{L} = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \lambda\left(q - f\left(z_1, z_2\right)\right) \tag{3.3}$$

de modo que las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w_1 - \lambda f_1 = 0 \tag{3.4a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = w_2 - \lambda f_2 = 0 \tag{3.4b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = q - f\left(z_1, z_2\right) = 0 \tag{3.4c}$$

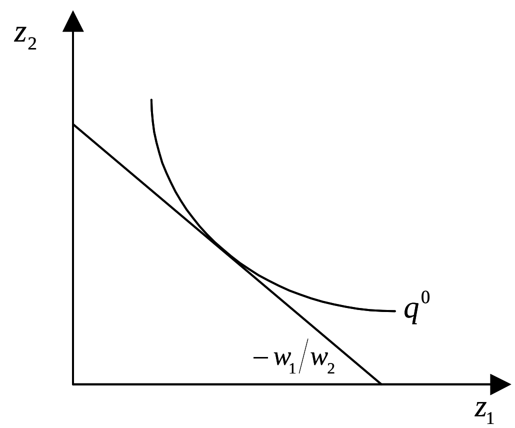


Figura 2. Isocuanta e Isocosto

De las CPO se desprende la siguiente condición:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_1}{f_2} \tag{3.5}$$

Esta condición indica entonces que se deben igualar la pendiente de la isocosto a la pendiente de la isocuanta, o la TMSM a la TMST, como se observa en la figura 2.

Consideremos la intuición detrás de esta condición de óptimo, con $z_1 = L$ y $z_2 = K$. Si por ejemplo tenemos que TMSM$= a$ y TMST$= b$, con $a < b$, sabemos que se puede obtener una unidad más de L entregando a unidades de K y manteniendo el costo constante; pero para mantener la producción, sabemos que si L aumenta en una unidad, podemos disminuir K hasta en b unidades. Luego, dado que $b > a$, es posible disminuir el costo sin afectar la producción (entregando b unidades de K), por lo que es claro que la situación inicial no era óptima (alternativamente, es posible aumentar la producción sin modificar el costo entregando a unidades de K).

La condición de segundo orden de este problema es similar a la que obteníamos en teoría del consumidor, y análogamente exige la convexidad de las isocuantas, o que la función de producción sea cuasicóncava. Es decir, la CSO (que se obtiene del Hessiano Orlado) es la siguiente:

$$f_{11} (f_2)^2 + f_{22} (f_1)^2 - 2f_{12}f_1f_2 \leq 0$$

Entonces, al resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de las tres condiciones de primer orden, obtenemos la cantidad de factores demandada por la empresa para cada nivel de precios de los factores y de producto: $z_i^* = z_i (w_1, w_2, q)$. Estas funciones son las llamadas **funciones de demanda condicionada de factores** (condicionada en el nivel de q). Además, del sistema de ecuaciones obtenemos $\lambda^* = \lambda (w_1, w_2, q)$. Al reemplazar las funciones de demanda condicionadas de factores dentro de la función objetivo, obtenemos la **función de mínimo costo**, o **función de costos** de la empresa:

$$\begin{aligned} C^* &= w_1 z_1 (w_1, w_2, q) + w_2 z_2 (w_1, w_2, q) \\ &= C (w_1, w_2, q) \end{aligned}$$

A partir del teorema de la envolvente obtenemos el **costo marginal** como:

$$CMg = \frac{\partial C^* (w_1, w_2, q)}{\partial q} = \lambda^* (w_1, w_2, q)$$

El **costo medio** se obtiene a su vez como:

$$CMe = \frac{C^* (w_1, w_2, q)}{q}$$

Luego,

$$\frac{\partial CMe}{\partial q} = \frac{\partial \left(\frac{C^*}{q} \right)}{\partial q} = \frac{\left(\frac{\partial C^*}{\partial q} \right)}{q} - \frac{C^*}{q^2} = \frac{CMg - CMe}{q}$$

de modo que el costo medio crece cuando $CMg > CMe$, decrece cuando $CMg < CMe$ y permanece constante cuando ambos son iguales.

3.1. Economías de escala. Si el costo medio crece a medida que aumenta q, es decir, $\frac{\partial CMe}{\partial q} > 0$, decimos que hay deseconomías de escala. Si a la inversa, el costo medio cae a medida que aumenta q, es decir, $\frac{\partial CMe}{\partial q} < 0$, decimos que hay economías de escala. Otra forma de ponerlo: si el costo total aumenta en mayor proporción que el aumento en el producto, tenemos deseconomías a escala; si aumenta menos que el producto, tenemos economías a escala. Para medir lo anterior podemos calcular entonces la elasticidad costo total:

$$\varepsilon_{CT} = \frac{\Delta \%CT}{\Delta \%q} = \frac{\partial C^*}{\partial q} \frac{q}{C^*} = \frac{CMg}{CMe}$$

Entonces, si $CMg > CMe$, el costo total crece porporcionalmente más que el producto, por lo que el costo medio aumenta con q.

Cuando la función de producción es homotética[2], los conceptos de rendimientos a escala y de economías a escala coinciden: si la elasticidad producto total es mayor que la unidad (rendimientos a escala crecientes), quiere decir que si aumentan los dos factores en un $a\,\%$, el producto aumenta en un porcentaje más alto ($b\,\% > a\,\%$). Luego, el costo aumentó en un $a\,\%$ y el

[2]Es decir, cuando la senda de expansión es una recta que pasa por el origen, puesto que la razón de productividades marginales depende sólo de la razón de uso de factores, de modo que si no cambian los precios relativos, entonces la razón de uso óptima no puede cambiar. Ver apéndice 2.A.

producto en $b\,\% > a\,\%$, por lo que la elasticidad costo total es menor que uno, y hay economías a escala.

De este modo, la función de costos tiene una forma que refleja las características de la tecnología, que a su vez se resume en la función de producción. El problema de decisión del empresario está, entonces, condicionado por ésta.

4. Maximización de ganancias y oferta de la empresa

Volvemos entonces al problema original de la empresa. Decíamos que existen dos maneras equivalentes de pensarlo:

1. Maximizar ganancias eligiendo el nivel de producto, dado que ya se definió cuál es la combinación óptima de factores para cada nivel de q (es decir, considerando la función de costo total $C^*(w_1, w_2, q)$ encontrada antes). En este caso el énfasis está en la cantidad óptima a producir, y la cantidad de factores a utilizar se puede obtener de las demandas condicionadas, una vez que determinemos q^*. De aquí se obtiene la función de oferta de la empresa.
2. Maximizar ganancias eligiendo el nivel de uso de factores. En este caso llegamos a la misma condición de óptimo que antes, pero ahora obtenemos la **función de demanda no condicionada de factores** (que se estudiará en más detalle en el capítulo siguiente). Luego, el énfasis está en el uso de factores que maximiza las ganancias, y de los factores utilizados se infiere la cantidad óptima de producto.

En la primera formulación, tenemos el siguiente problema de maximización:

$$\max_q \pi = pq - C^*(w_1, w_2, q) \tag{4.1}$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p - \frac{\partial C^*(w_1, w_2, q)}{\partial q} = 0 \tag{4.2}$$

Es decir, la cantidad óptima a producir es aquella en que se iguala el precio al costo marginal.

Este punto crítico es efectivamente un máximo local si se cumple la CSO:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -\frac{\partial^2 C^*(w_1, w_2, q)}{\partial q^2} = -\frac{\partial CMg}{\partial q} < 0$$

por lo que se requiere que el costo marginal sea creciente. De esto se desprende que la curva de oferta (si existe) debe tener pendiente positiva.

Además, si existe la opción de no producir, para que convenga producir debe ser cierto que la utilidad obtenida con producción es mayor (o igual) que sin producción. Si hay costos inevitables, esto implica que se debe dar la siguiente condición:

$$pq^* - C^*(w_1, w_2, q^*) \geq -CFI$$

donde q^* denota la cantidad encontrada de la CPO, y CFI denota el costo fijo inevitable (que se debe pagar aunque no se produzca). Nos referiremos a esta desiguladad como **condición de no cierre**.

Si separamos el costo $C^*(w_1, w_2, q^*)$ en la parte evitable (que denotamos $CE(w_1, w_2, q^*)$) de la inevitable, obtenemos:

$$\begin{gathered} pq^* - CE(w_1, w_2, q^*) - CFI \geq -CFI \\ \Leftrightarrow pq^* \geq CE(w_1, w_2, q^*) \\ \Leftrightarrow p \geq \frac{CE(w_1, w_2, q^*)}{q^*} \equiv CMeE \end{gathered}$$

Dado que mientras produzca, la empresa lo hace igualando $p = CMg$, la condición anterior va a ser cierta siempre que $CMg \geq CMeE$, por lo que se requiere que $p \geq CMeE_{mínimo}$ (ya que mientras el costo medio evitable vaya cayendo, sabemos que es porque $CMg < CMeE$). Luego, la condición para que la empresa no cierre es que $p \geq CMeE_{mínimo}$.

Definición 13. *La **oferta** de la empresa es una función*[3] *que asigna, para cada precio del producto p y precios de los factores w_1, w_2, la cantidad ofrecida por la empresa q que permite alcanzar el mayor nivel de utilidad posible al productor. Denotamos esta función como $q^* = q(w_1, w_2, p)$.*

Observe que la condición de no cierre implica que la curva de oferta puede ser discontinua: cuando la función de producción es cóncava, la oferta es la cantidad q en que se iguala el costo marginal al precio si $p > CMeE_{mínimo}$; es cero si $p < CMeE_{mínimo}$; y puede ser cualquiera de ambas si $p = CMeE_{mínimo}$.

Lo anterior se representa en la figura 3, donde la curva de oferta está marcada con un trazo grueso.

En la segunda formulación, tenemos el siguiente problema de maximización:

$$\max_{z_1, z_2} \pi = pf(z_1, z_2) - w_1 z_1 - w_2 z_2 \tag{4.3}$$

[3]Estrictamente hablando, la oferta en algunos casos no es una función, sino una correspondencia. Esto ocurre cuando, para ciertos precios del bien y de factores, la firma está indiferente entre producir un nivel q^* y no producir. En ese caso, la oferta no asigna un sólo nivel de producto, sino dos niveles posibles: 0 y q^*.

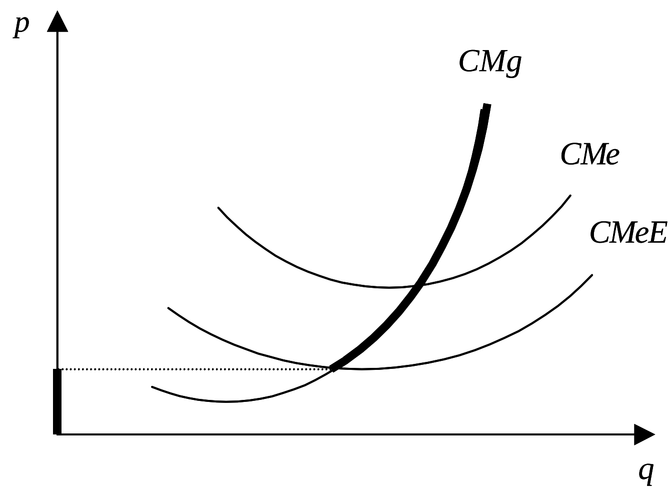


FIGURA 3. Oferta de la Firma

Luego, las CPO son de la forma:

$$\frac{\partial \pi}{\partial z_1} = pf_1 - w_1 = 0 \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z_2} = pf_2 - w_2 = 0 \quad (4.4b)$$

De estas condiciones se obtiene nuevamente la condición de tangencia que obteníamos de la minimización de costos: $TMSM = TMST$. Pero además se obtiene la condición de igualdad del valor del producto marginal de cada factor con su precio: $pf_i = w_i$. El punto crítico encontrado con las CPO es máximo si se cumple la CSO:

$$H = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} \quad \text{negativa definida}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_{11}, f_{22} < 0;\ f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

Para que se cumpla esta condición es necesario que la función de producción sea cóncava. ¿Por qué es así, si en la caso de la minimización de costos decíamos que basta con cuasiconcavidad? La respuesta es que con la maximización de ganancias estamos buscando más respuestas que con la minimización de costos: no sólo cómo producir, sino también cuánto producir. Por eso es que el requisito para que se cumpla la CSO en este caso es más fuerte: con cuasiconcavidad basta para contestar cómo producir, pero no alcanza para contestar cuánto producir, a menos que la función sea cóncava.

De hecho, lo que la CSO está señalando es que los rendimientos crecientes a escala son incompatibles en cierta medida con el supuesto de competencia perfecta. En competencia perfecta, ninguna empresa puede vender más caro que el precio de mercado porque nadie le compraría, ni le conviene vender a un precio menor, porque no necesita rebajar el precio para vender toda su producción. Pero si el costo medio es decreciente (lo que ocurre cuando hay rendimientos crecientes a escala y los precios de los insumos están dados), cada vez que el empresario aumenta la escala de producción aumenta también su margen unitario, por lo que a un precio determinado quisiera vender infinitas unidades. Esto evidentemente es imposible, porque en algún momento toparía con la demanda; cuando eso ocurra, tendría que rebajar el precio para aumentar las unidades vendidas, y en ese caso ya no es tomador de precios.

Ahora bien, si la función de producción es de rendimientos constantes a escala, no se cumple la CSO. En este caso, el costo medio y el marginal son constantes e iguales entre sí, por lo que la cantidad óptima a producir no queda determinada a partir de la CPO. En efecto, si el costo unitario es c, entonces para $p > c$ la empresa obtiene una ganancia positiva si produce, y esta ganancia es estrictamente creciente en q –por lo que la empresa querría producir una cantidad ilimitada–; si $p = c$ la empresa está indiferente entre producir o no producir –e indiferente entre producir cualquier nivel de q–, mientras que si $p < c$ no le conviene producir. Por lo anterior, decimos que en este caso la oferta es infinitamente elástica, y la escribimos de la forma:

$$q^* \begin{cases} = \infty & \text{si } p > c \\ \in [0, \infty) & \text{si } p = c \\ = 0 & \text{si } p < c \end{cases}$$

A las CPO y CSO tendríamos que agregar además una condición de no cierre como la que se obtuvo en la sección anterior; ello, por cuanto nos interesa ver el máximo global.

De las dos CPO obtenemos un sistema de ecuaciones, y al resolverlo encontramos la *demanda no condicionada por factores*: $z_i^* = z_i(w_1, w_2, p)$. Esta demanda difiere de la demanda condicionada, ya que esta última incluye sólo **efecto sustitución**, mientras que la demanda no condicionada incluye además el efecto escala. El **efecto escala** indica cuánto cambia la cantidad demandada de cada factor al cambiar la cantidad producida de q. Entonces, si por ejemplo estamos considerando la demanda por L, sabemos que al cambiar w_L no sólo va a cambiar L por efecto sustitución (movimiento a través de la isocuanta: demanda condicionada), sino que además cambia el costo marginal de producción, y al mismo precio p eso indica que cambia la cantidad producida del bien, por lo que se modifica también la cantidad demandada de L por efecto escala.

4.1. Largo plazo versus corto plazo. Hasta aquí hemos supuesto que la empresa puede escoger libremente la cantidad de factores a contratar. Sin embargo, en algunos procesos productivos la contratación de insumos es bastante inflexible en el corto plazo: por ejemplo, en algunas industrias un aumento en la capacidad de producción requiere de la construcción de plantas y compra de maquinarias de gran envergadura, cuya producción e instalación requiere de tiempo, y que después no puede ser desmantelada fácilmente. Asimismo, los contratos de arriendos de maquinaria, e incluso contratos laborales, frecuentemente establecen plazos mínimos. En estos casos, una vez contratado el factor, la empresa debe seguir pagando por él, independientemente de su uso, lo que introduce un costo fijo de producción.

En esta sección consideramos este caso, suponiendo que es el capital el que no puede ser fácilmente modificado en el corto plazo. Entonces, si se contrata un nivel de capital $\overline{K}$ óptimo para el nivel de producción $\overline{q}$, ¿cómo es el costo total, medio y marginal de producción para niveles de producción distintos de $\overline{q}$? De la respuesta a esta pregunta depende cómo es la oferta de la empresa de corto plazo.

Existen (al menos) dos casos que se pueden dar, dependiendo de las condiciones de la producción. En el primero, la empresa no puede contratar más capital (maquinarias), pero puede dejar capacidad sin usar:

$$\begin{aligned} \max_{K,L} \pi &= pf(K,L) - w_L L - w_K K \\ \text{s/a} \quad K &\leq \overline{K} \end{aligned}$$

Este sería el caso de una empresa que no puede ampliar el tamaño de la planta en el corto plazo, pero sí puede dejar parte de la planta inutilizada (sin tener que incurrir en un costo por ello).

En el segundo, en cambio, la empresa debe usar la cantidad de que dispone:

$$\begin{aligned} \max_{K,L} \pi &= pf(K,L) - w_L L - w_K K \\ \text{s/a} \quad K &= \overline{K} \end{aligned}$$

En ambos casos, necesariamente el costo total de producción es mayor que en ausencia de la restricción. Esto se explica por el argumento ya familiar de que las restricciones disminuyen los conjuntos de posibilidades, y las posibilidades no pueden hacer daño.

En el segundo caso, de hecho tenemos que la restricción transforma al problema en uno de una variable:

$$\max_{L} \pi = pf\left(\overline{K}, L\right) - w_L L - w_K \overline{K}$$

Entonces, el costo del capital se convierte en un costo fijo. Si es evitable o no, depende de si se debe pagar en caso de escoger un nivel nulo de producción. Se sigue también que el costo medio será superior al de largo plazo, salvo en aquél nivel de producción para el cual ese nivel de capital es óptimo, esto es, $\overline{q}$. Lo anterior se ilustra en la figura 4. Por ello, distintas curvas de costo

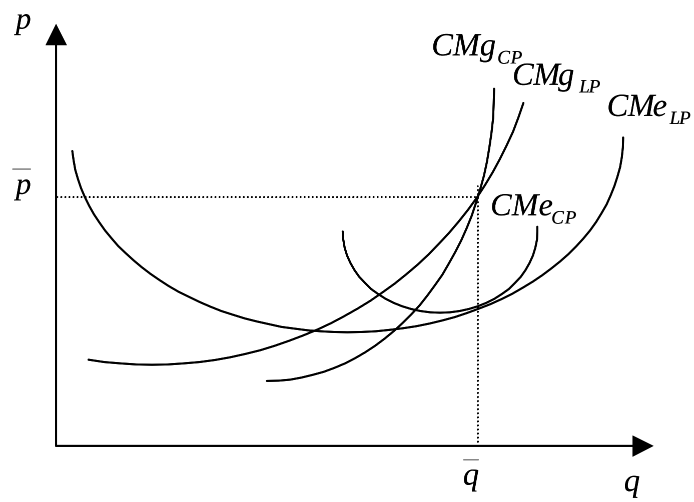


FIGURA 4. Costos de corto plazo (CP) y largo plazo (LP)

medio de corto plazo comparten un punto con la curva de costo medio de largo plazo, esto es, esta última es la envolvente inferior de ellas.

Los costos marginales, en cambio, no se comportan de la misma forma. Por ejemplo, un exceso de capacidad instalada puede significar costos totales muy altos para la empresa, pero a la vez generar costos marginales de producción muy bajos –o menores a los que tendría si adaptara la capacidad instalada a la escala actual de producción–. Similarmente, la falta de capacidad puede forzar un costo marginal de producción más alto, pues obliga a la contratación de mayores unidades del insumo variable que de otra forma se requeriría. Lo anterior se representa en la figura 5: para un nivel de producción $q_0 < \overline{q}$ el costo total es más alto en el corto plazo (isocosto marcada con línea continua) que en el largo plazo (isocosto marcada con línea punteada), pero el *aumento* en el costo asociado a un aumento en la producción hasta $\overline{q}$ es menor en el corto plazo que en el largo plazo.

Así, en la figura 4 se observa que el costo marginal de corto plazo es menor que el de largo plazo para niveles de producción inferiores a $\overline{q}$, y mayor que el de largo plazo para niveles de producción mayores que $\overline{q}$. Esto implica que, partiendo de un precio $\overline{p}$, si el precio disminuye la empresa reduce su producción en el corto plazo, pero esta reducción es menor que la que ocurriría si la empresa tuviera completa flexibilidad para escoger el uso de factores (largo plazo). A su vez, si el precio aumenta la cantidad ofrecida también aumenta en el corto plazo, pero menos que en el largo plazo. En otras palabras, la oferta de corto plazo es más inelástica que la de largo plazo.

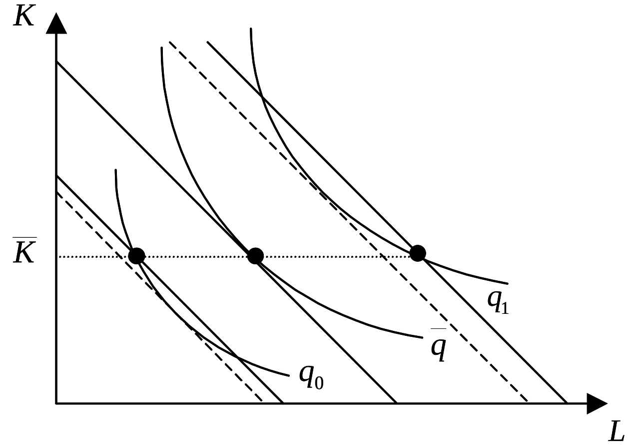


Figura 5. Isocostos de corto plazo con $K = \overline{K}$ (línea continua) y de largo plazo con K variable (línea discontinua)

Ejercicios

1. (*) Determine si las siguientes funciones de producción presentan rendimientos a escala crecientes, constantes o decrecientes:
$$q = A\sqrt{K} + B\sqrt{L}$$
$$q = \text{mín}\{K, 2L\}$$
2. (*) Suponga que la función de producción agregada para la economía en su conjunto puede caracterizarse por $q = K^{0{,}25}L^{0{,}75}$. Explique por qué, si los mercados de factores fuesen perfectamente competitivos, los trabajadores recibirían un 75 % del PGB como ingreso.
3. (*) Suponga que la función de produción de una empresa se puede escribir como: $q = A(t) f(K, L)$, donde las variaciones de A a través del tiempo representan el progreso técnico. Muestre que en este caso el progreso técnico es neutral (es decir, no afecta las combinaciones relativas de factores de la empresa).
4. (*) Considere una empresa competitiva cuya tecnología se representa mediante la siguiente función de producción: $q = F(K, L) = K^{0{,}2}L^{0{,}2}$. Los precios de los factores y del producto son w_K, w_L y p_q respectivamente. Independientemente de si produce o no, la empresa debe pagar un costo fijo de monto F.
   a) Derive la demanda condicionada por K y calcule su elasticidad precio (η_{KK}^{cond}). Encuentre además la función de costo marginal.
   b) Derive la demanda no condicionada por K y calcule su elasticidad ($\eta_{KK}^{no\ cond}$). Explique por qué ambas elasticidades difieren, refiriéndose explícitamente a la dirección del efecto escala.

   c) Calcule el excedente del productor si los precios de los factores y del bien fueran $w_L = w_K = 100$ y $p_q = 4{,}000$ respectivamente, y $F = 10{,}000$.

5. (*) Considere el caso de una empresa con una tecnología descrita por:

$$q = T\sqrt{L}$$

donde T es el tamaño de la planta (medido en metros cuadrados), L el número de trabajadores, y q el número de unidades de producto. El metro cuadrado de planta cuesta $\$w_T$, y a cada trabajador se le paga $\$w_L$. El tamaño de la planta no es posible cambiarlo en el corto plazo; más aún, considérelo fijo en un nivel de T_0.

   a) ¿Cuántos trabajadores se deben contratar para producir q unidades del bien?
   b) Explique por qué la función de costos (de corto plazo) es:

$$C\left(q, w_L, w_T\right) = w_L \frac{q^2}{T^2} + w_T T$$

   c) Caracterice y dibuje las funciones de costo medio y costo marginal. En particular, establezca si son crecientes o decrecientes, y si una es superior a la otra.
   d) Explique cuánto querría vender el dueño de esta empresa si pudiese vender la cantidad que quisiera al precio p, y si su motivación fuese únicamente lucrar. Sea claro y preciso.
   Considere de ahora en adelante que el tamaño de la planta es variable.
   e) Si el precio p es tal que en la situación anterior la empresa obtenía ganancias, ¿querría ampliar el tamaño de la planta? Fundamente.
   f) ¿Diría Ud. que la tecnología de esta empresa tiene retornos decrecientes a escala? Fundamente.
   g) Obtenga la función de costos de largo plazo. Caracterice y dibuje las funciones de costo medio y marginal.
   h) Explique cuánto querría vender el dueño de esta empresa si pudiese vender la cantidad que quisiera al precio p, y si su motivación fuese únicamente lucrar. Sea claro y preciso.

6. (**) La empresa XX emplea hoy 24 unidades de capital a un precio de \$14 por unidad, y 25 unidades de trabajo a un salario de \$10 por unidad.
   a) Si el precio del producto es de \$10 por unidad, y suponiendo mercados competitivos, ¿cuál es el costo marginal de producción?
   b) Suponga que la función de producción de la empresa presenta rendimientos constantes a escala. ¿A cuánto asciende la producción de la empresa? ¿Los beneficios netos?

c) Suponga que si sube el salario a \$12 por unidad, y si se decidiera producir lo mismo que inicialmente, las cantidades contratadas de capital y trabajo cambiarían a 26 y 23 unidades respectivamente. ¿Cuál es la elasticidad de sustitución de la función de producción de la empresa?

7. (**) Considere una empresa tomadora de precios, cuya función de producción es $q = K^{1/2} + L^{1/2}$. Los precios de los factores K y L son w_K y w_L respectivamente.
   a) ¿Cómo son los rendimientos a escala y las economías a escala de esta empresa?
   b) Derive la función de demanda condicionada por L (L en función de precios de factores y q), y encuentre una expresión para su elasticidad precio.
   AYUDA: para llegar a una expresión para la elasticidad conviene utilizar la definición $\varepsilon = \frac{\partial L^*}{\partial w_L}\frac{w_L}{L^*}$, no aplicar logaritmo.
   c) ¿Es superior o inferior el factor L? (justifique su respuesta). ¿Qué ocurre entonces con el costo marginal cuando aumenta w_L? Explique la intuición de su respuesta.
   d) Derive la función de demanda no condicionada por L (L en función de precios de factores y p), y calcule su elasticidad.
   e) Compare las elasticidades calculadas en *d*) y en *b*), indicando cuál de ellas es mayor en valor absoluto; explique por qué difieren, refiriéndose explícitamente a la dirección del efecto escala en este caso particular.
   f) ¿Cambiaría la función de demanda no condicionada por L si K estuviera fijo (corto plazo de la empresa)? Explique la intuición de su respuesta.
8. (**) Una empresa competitiva produce Y, cuyo precio inicial es P_Y^0, utilizando dos insumos, M y N, cuyos precios iniciales son w_M^0 y w_N^0 respectivamente. El precio de M aumentó en un 21 %, y el gobierno quiere evitar que por esta razón disminuya la cantidad producida de Y. Por ello, decide dar un subsidio a la empresa de $z\,\%$ sobre el precio inicial de Y (es decir, $P_Y^1 = (1 + z\,\%) \cdot P_Y^0$). Si la función de producción de esta empresa es: $Y = (M)^{1/4} \cdot (N)^{1/4}$, ¿en qué porcentaje $z\,\%$ debe aumentar el precio de Y para que la cantidad producida de Y no cambie?
9. (**) Considere una empresa tomadora de precios, que tiene disponible dos tecnologías (mutuamente excluyentes) para fabricar el bien q. Sea L el número de trabajadores contratados, y K el número de máquinas contratadas. Si elige la tecnología A, su función de producción es de la forma: $q = K_A^{1/4} L^{1/4}$. Si elige la tecnología B, su función de producción es de la forma $q = K_B^{1/2} L^{1/4}$. Los precios de los factores son $w_L = 1$, $w_{K_A} = 1$, $w_{K_B} = 2$ (las máquinas

para producir con la tecnología B son más caras que las de A), y el precio de q es $p_q = 100$. No hay costos fijos de producción.

SE PIDE: Indique qué tecnología le conviene usar a la empresa, fundamentando claramente su respuesta.

10. (**) Producir cososos requiere de una fábrica y de operarios. Existen, sin embargo, fábricas de distinto tamaño. La productividad marginal del trabajo está, en una fábrica de tamaño T (metros cuadrados), dada por:

$$\frac{1}{4}T^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$$

donde L es el número de operarios.

a) Determine cuál es la manera más barata de producir q unidades de cososos, cuando el metro cuadrado de planta cuesta \$ 2, y cada operario \$ 8. Explique cuidadosamente su procedimiento.

b) Determine, entonces, la curva de oferta de largo plazo de la empresa. Explique.

c) Imagine que, siendo el precio de cada cososo $P = 2400$, la empresa escoge un nivel óptimo de insumos. Si en el corto plazo no fuese posible alterar el tamaño de la planta, encuentre la función de costos de corto plazo asociada a la decisión anterior.

d) Determine, entonces, la curva de oferta de corto plazo. Compare con (b). Explique.

Comentarios bibliográficos

El supuesto de maximización de ganancias de las empresas como noción de racionalidad de las empresas ha sido objeto permanente de controversia. Armen Alchian (1950) considera la posibilidad de que aunque l as empresas no maximicen conscientemente las ganancias, el proceso evolutivo seleccione aquellas empresas que ex-post tomaron mejores decisiones, de modo que el comportamiento de las sobrevivientes se podría entender como si maximizaran utilidades. El punto de fondo es que, aún cuando el lucro no fuese un objetivo explícito, o al menos no el único, la sobrevivencia económica de la empresa depende de su capacidad de generar ganancias. Sin embargo, Prajit Dutta y Roy Radner (1999) insisten en que, aún cuando lo anterior imprime una tendencia pro ganancias en la conducta de las empresas, el argumento evolutivo no es suficiente para justificar al lucro como único objetico de la empresa: en un mundo con incertidumbre, casi seguramente las empresas que sobreviven en el largo plazo siguen otras reglas de decisión. La gran ventaja de la teoría desarrollada en este capítulo no es su apego estricto a la realidad (es, después de todo, una teoría), sino su simplicidad y su grado de abstracción. Esta teoría permite identificar fuerzas, efectos, direcciones a las que apunta el sesgo pro ganacias en los distintos planos de acción de la empresa: producción, ventas y contratación de insumos.

Referencias

1: Alchian, Armen (1950), "Uncertainty, Evolution, and Economic Theory", *The Journal of Political Economy,* Vol. 58, No. 3, 211-221.
2: Dutta, Prajit y Roy Radner (1999), "Profit Maximization and the Market Selection Hypothesis", *The Review of Economic Studies,* Vol. 66, No. 4., pp.769-798.
3: Radner, Roy (1996), "Economic Survival". *Nancy Schwartz Memorial Lecture,* Northwestern University.

CAPíTULO 6

Demanda por Factores

En este capítulo se estudia en detalle la demanda por factores a nivel de la empresa, analizando cuidadosamente la estática comparativa.

1. Demanda condicionada por factores

En el capítulo anterior escribíamos el problema de minimización de costos de la empresa como sigue:

$$\min_{\{z_1,z_2\}} C = w_1 z_1 + w_2 z_2 \qquad\qquad \text{s/a: } f(z_1,z_2) = q$$

Utilizando el lagrangeano:

$$\mathcal{L} = w_1 z_1 + w_2 z_2 \; + \lambda\left(q - f(z_1,z_2)\right)$$

obteníamos las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} &= w_1 - \lambda f_1 = 0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} &= w_2 - \lambda f_2 = 0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= q - f(z_1,z_2) = 0\end{aligned}$$

De las CPO se desprende la condición de tangencia de la isocuanta con la isocosto:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

Tal como ocurría en teoría del consumidor, la condición de segundo orden de este problema exige la convexidad de las isocuantas, o que la función de producción sea cuasicóncava.

Al resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de las tres condiciones de primer orden, obtenemos la cantidad de z_1 y z_2 demandada por la empresa para cada nivel de precios de los factores y de producto: $z_i^* = z_i(w_1, w_2, q)$. Estas funciones son las llamadas *funciones de demanda condicionada de factores* (condicionada en el nivel de q).

Definición 14. *La demanda condicionada por el factor i es una función que asigna, para cada nivel de producción q y precios de los factores* w_1, w_2*, la cantidad demandada de* z_i *que permite alcanzar el menor nivel de costo posible al productor. Denotamos esta función como* $z_i^C = z_i\,(w_1, w_2, q)$

Además, del sistema de ecuaciones obtenemos $\lambda^* = \lambda\,(w_1, w_2, q)$. Al reemplazar las funciones de demanda condicionada de factores dentro de la función objetivo, obtenemos la función de mínimo costo, o función de costos de la empresa:

$$\begin{aligned} C^* &= w_1 z_1\,(w_1, w_2, q) + w_2 z_2\,(w_1, w_2, q) \\ &= C\,(w_1, w_2, q) \end{aligned}$$

1.1. Estática comparativa.

1.1.1. Elasticidad precio de la demanda condicionada. Aplicando el teorema de la envolvente, obtenemos las demandas por factores (Lema de Shephard):

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_i} = z_i^*\,(w_1, w_2, q)$$

La elasticidad precio de esta demanda (que incluye sólo efecto sustitución), es de la forma:

$$\eta_{ii}^S = \frac{\partial z_i^*\,(w_1, w_2, q)}{\partial w_i}\frac{w_i}{z_i} = \frac{\partial \ln z_i^*\,(w_1, w_2, q)}{\partial \ln w_i}$$

Sabemos que la demanda condicionada es homogénea de grado cero en precios de factores. Esto se debe a que, al cambiar w_1 y w_2 en igual proporción, la pendiente de la isocosto no cambia, por lo que al dejar q constante debemos encontrar el mismo punto de tangencia original. Luego, obtenemos (por Euler):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial w_i} w_i + \frac{\partial z_i}{\partial w_j} w_j &= 0 \\ &\Rightarrow \eta_{ii}^S + \eta_{ij}^S = 0 \end{aligned}$$

En primer lugar, es importante notar que, dada la convexidad de las isocuantas, η_{ii}^S es siempre negativa (o cero cuando no hay posibilidad de sustitución). Si por ejemplo consideramos el caso de $i = 1$, con un aumento en w_1, la TMSM, y por lo tanto el nuevo punto de tangencia debe ocurrir a una mayor TMST: la única manera de encontrar un punto en la misma isocuanta con una mayor TMST es disminuyendo la cantidad contratada del factor 1 y aumentado la del factor 2. Lo anterior se representa en la figura 1.

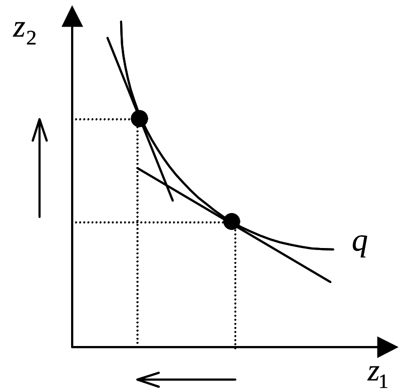


Figura 1. Efecto sustitución negativo

De esto se desprende que, si hay sólo dos factores de producción, ellos deben ser sustitutos netos (o sustitutos Hicks-Allen, definiendo sustitución neta como $\eta_{ij}^S > 0$: al aumentar w_j aumenta el uso de z_i).

A su vez, aplicando teorema de la envolvente obtenemos que los efectos cruzados son simétricos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_i}{\partial w_j} &= \frac{\partial^2 C^*}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \\
&\Rightarrow \left(\frac{z_i w_i}{C^*}\right) \frac{\partial z_i}{\partial w_j} \frac{w_j}{z_i} = \left(\frac{z_j w_j}{C^*}\right) \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \frac{w_i}{z_j} \\
&\Rightarrow \alpha_i \eta_{ij}^S = \alpha_j \eta_{ji}^S
\end{aligned}$$

Definimos la elasticidad de sustitución como el cambio porcentual en la razón de uso de factores ante un cambio porcentual en la TMST, *manteniendo el producto constante*. Usando las demandas condicionadas (y dado que en ellas podemos dejar el producto constante), podemos redefinir la elasticidad de sustitución como:

$$\sigma = \frac{\partial \ln \left(z_j/z_i\right)}{\partial \ln \left(f_i/f_j\right)} = \frac{\partial \ln \left(z_j^*/z_i^*\right)}{\partial \ln \left(w_i/w_j\right)}$$

Ahora, si consideramos el caso de rendimientos constantes a escala (función de producción homogénea de grado 1), sabemos que z_j^*/z_i^* sólo depende de los precios relativos de factores w_i/w_j, y no del nivel de producto ni de los precios en nivel. Luego, podemos escribir:

$$\sigma = \frac{\partial \ln \left(z_j^*/z_i^*\right)}{\partial \ln \left(w_i/w_j\right)} = \frac{\mathrm{d} \ln \left(z_j^*/z_i^*\right)}{\mathrm{d} \ln \left(w_i/w_j\right)} = \frac{\mathrm{d} \ln z_j^* - \mathrm{d} \ln z_i^*}{\mathrm{d} \ln w_i - \mathrm{d} \ln w_j}$$

si mantenemos w_j constante, tenemos que $\mathrm{d}\ln w_j = 0$, y por lo tanto la expresión anterior queda:

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}\ln z_j^*}{\mathrm{d}\ln w_i} - \frac{\mathrm{d}\ln z_i^*}{\mathrm{d}\ln w_i}$$

y dado que en la derivación suponemos que q y w_j permanecen constantes, podemos escribir lo anterior como:

$$\sigma = \eta_{ji}^S - \eta_{ii}^S$$

Juntando todos estos antecedentes, tenemos que para este caso, la elasticidad precio de la demanda condicionada por factores se puede escribir como $\eta_{ii}^S = -\alpha_j \sigma$:

$$\begin{aligned}
\eta_{ii}^S &= -\eta_{ij}^S \\
&= -\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\eta_{ji}^S \\
&= -\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(\sigma + \eta_{ii}^S\right) \\
&\Rightarrow \quad \eta_{ii}^S \left(\frac{\alpha_i + \alpha_j}{\alpha_i}\right) = -\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\sigma \\
&\Rightarrow \quad \eta_{ii}^S = -\alpha_j \sigma
\end{aligned}$$

Ejemplo 3. *El caso de las proporciones fijas:*
Consideremos ahora el caso de la función de producción de proporciones fijas, de la forma:

$$q = \text{mín}\{a_1 z_1, a_2 z_2\}$$

En este caso claramente la combinación de factores que minimiza el costo de producir un determinado nivel de q es la que se obtiene de igualar ambos argumentos de la función al nivel de q deseado:

$$q = a_1 z_1 = a_2 z_2$$

Despejando las demandas condicionadas, obtenemos entonces:

$$z_i^* = \frac{q}{a_i}$$

Luego, la elasticidad precio de esta demanda es nula.

Ejemplo 4. *El caso de la sustitución perfecta:*
Consideremos el caso de la función de producción de sustitución perfecta:

$$q = b_1 z_1 + b_2 z_2$$

En este caso, la TMST es fija e igual a $\frac{b_1}{b_2}$, por lo que nuevamente no podemos usar condición de tangencia para encontrar el óptimo. En este caso, vemos *que el mínimo costo al que se puede alcanzar el nivel de producción q es aquel en que el uso de factores es el siguiente:*

$$z_i^* = \begin{cases} = \frac{q}{b_i} & si \ \frac{w_i}{w_j} < \frac{b_i}{b_j} \\ \in \left[0, \frac{q}{b_i}\right] & si \ \frac{w_i}{w_j} = \frac{b_i}{b_j} \\ = 0 & si \ \frac{w_i}{w_j} > \frac{b_i}{b_j} \end{cases}$$

Luego, en torno a $\frac{w_i}{w_j} = \frac{b_i}{b_j}$ la elasticidad precio de la demanda es $-\infty$.

1.1.2. Elasticidad cruzada de la demanda condicionada. Ya sabemos que por homogeneidad de grado cero en la demanda tenemos:

$$\eta_{ij}^S = -\eta_{ii}^S$$

Luego, sabemos que en el caso de rendimientos constantes a escala, podemos escribir:

$$\eta_{ij}^S = -\eta_{ii}^S = \alpha_j \sigma$$

Para derivar una expresión exacta de esta elasticidad notamos que en el óptimo se deben cumplir las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} w_1 - \lambda f_1 \left(z_1^* \left(w_1, w_2, q\right), z_2^* \left(w_1, w_2, q\right)\right) &= 0 \\ w_2 - \lambda f_2 \left(z_1^* \left(w_1, w_2, q\right), z_2^* \left(w_1, w_2, q\right)\right) &= 0 \\ q - f \left(z_1^* \left(w_1, w_2, q\right), z_2^* \left(w_1, w_2, q\right)\right) &= 0 \end{aligned}$$

Derivando respecto de w_2 tenemos entonces:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \lambda}{\partial w_2} f_1 - \lambda f_{11} \frac{\partial z_1^*}{\partial w_2} - \lambda f_{12} \frac{\partial z_2^*}{\partial w_2} &= 0 \\ 1 - \frac{\partial \lambda}{\partial w_2} f_2 - \lambda f_{21} \frac{\partial z_1^*}{\partial w_2} - \lambda f_{22} \frac{\partial z_2^*}{\partial w_2} &= 0 \\ -f_1 \frac{\partial z_1^*}{\partial w_2} - f_2 \frac{\partial z_2^*}{\partial w_2} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando $\frac{\partial z_2^*}{\partial w_2}$ de la tercera igualdad, encontramos:

$$\frac{\partial z_2^*}{\partial w_2} = -\frac{f_1}{f_2} \frac{\partial z_1^*}{\partial w_2}$$

Luego, las dos primeras igualdades se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \lambda}{\partial w_2} f_1 f_2 - \lambda f_{11} f_2 \frac{\partial z_1^*}{\partial w_2} + \lambda f_{12} f_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \frac{\partial z_1^*}{\partial w_2}\right) &= 0 \\ f_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial w_2} f_2 f_1 - \lambda f_{21} f_1 \frac{\partial z_1^*}{\partial w_2} + \lambda f_{22} f_1 \left(\frac{f_1}{f_2} \frac{\partial z_1^*}{\partial w_2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

e igualando obtenemos:

$$\frac{\partial z_1^*}{\partial w_2} = -\frac{f_1 f_2}{\lambda\left(f_{11} f_2^2 + f_{22} f_1^2 - 2 f_{21} f_1 f_2\right)}$$

Entonces, dado que f_1 y f_2 son positivas, y recordando que por condición de segundo orden el denominador de la expresión anterior es negativo, obtenemos que $\frac{\partial z_1^*}{\partial w_2} \geq 0$. Este resultado es el esperado, ya que la demanda condicionada incluye sólo el efecto sustitución; en efecto, al aumentar el precio de z_2 disminuye el uso del factor 2, por lo que para mantener el nivel de producción constante debe ser cierto que aumenta el uso del factor 1.

1.1.3. Cambio en la cantidad demandada del factor al cambiar el nivel de producto deseado. Por último, nos falta analizar qué ocurre con la cantidad demandada del factor si cambia el nivel de producción. Definimos un **factor superior** como aquel en que aumenta la cantidad contratada al aumentar la cantidad producida del bien; un **factor inferior** como aquel en que la cantidad contratada cae al aumentar la cantidad producida del bien, y un **factor neutro** como aquel en que la cantidad contratada no cambia al cambiar la producción. En términos de la demanda no condicionada, entonces, tenemos que el factor z_i es superior cuando la derivada $\frac{\partial z_i^*(w_1,w_2,q)}{\partial q}$ es positiva, inferior cuando es negativa, y neutro cuando es nula.

Claramente, no pueden ser ambos factores inferiores, ya que para aumentar q debe aumentar el uso de al menos uno de los dos factores.

Si un factor es inferior, entonces la senda de expansión tiene pendiente negativa. Luego, si la función de producción es homotética (como es el caso de las funciones homogéneas), ninguno de los dos factores puede ser inferior.

Ahora bien, hay una relación entre la q-complementariedad de los factores y el hecho que sean superiores o inferiores. Para verificar esta relación, notamos que en el óptimo se deben cumplir las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} w_1 - \lambda f_1\left(z_1^*\left(w_1, w_2, q\right), z_2^*\left(w_1, w_2, q\right)\right) &= 0 \\ w_2 - \lambda f_2\left(z_1^*\left(w_1, w_2, q\right), z_2^*\left(w_1, w_2, q\right)\right) &= 0 \\ q - f\left(z_1^*\left(w_1, w_2, q\right), z_2^*\left(w_1, w_2, q\right)\right) &= 0 \end{aligned}$$

Derivando cada una de estas expresiones respecto de q, obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \lambda}{\partial q} f_1 - \lambda f_{11} \frac{\partial z_1^*}{\partial q} - \lambda f_{12} \frac{\partial z_2^*}{\partial q} &= 0 \\ -\frac{\partial \lambda}{\partial q} f_2 - \lambda f_{21} \frac{\partial z_1^*}{\partial q} - \lambda f_{22} \frac{\partial z_2^*}{\partial q} &= 0 \\ 1 - f_1 \frac{\partial z_1^*}{\partial q} - f_2 \frac{\partial z_2^*}{\partial q} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando $\frac{\partial z_2^*}{\partial q}$ de la tercera condición, obtenemos:

$$\frac{\partial z_2^*}{\partial q} = \frac{1}{f_2} - \frac{f_1}{f_2}\frac{\partial z_1^*}{\partial q}$$

Luego, las dos primeras condiciones se transforman en:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \lambda}{\partial q} f_1 f_2 - \lambda f_{11} f_2 \frac{\partial z_1^*}{\partial q} - \lambda f_{12} + \lambda f_{12} f_1 \frac{\partial z_1^*}{\partial q} &= 0 \\ -\frac{\partial \lambda}{\partial q} f_1 f_2 - \lambda f_{21} f_1 \frac{\partial z_1^*}{\partial q} - \lambda f_{22} \frac{f_1}{f_2} + \lambda f_{22} \frac{(f_1)^2}{f_2}\frac{\partial z_1^*}{\partial q} &= 0 \end{aligned}$$

e igualando obtenemos finalmente:

$$\frac{\partial z_1^*}{\partial q} = \frac{f_{22} f_1 - f_{12} f_2}{\left(f_{11}(f_2)^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22}(f_1)^2\right)}$$

Asimismo, obtenemos que:

$$\frac{\partial z_2^*}{\partial q} = \frac{f_{11} f_2 - f_{12} f_1}{\left(f_{11}(f_2)^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22}(f_1)^2\right)}$$

Consideremos el caso en que las productividades marginales de los factores son decrecientes (lo que forma parte de la condición de segundo orden para la maximización de utilidad). Dado que el denominador de las dos expresiones anteriores es siempre negativo (por condición de segundo orden de la minimización de costos), se concluye que si $f_{12} \geq 0$ ambos factores deben ser superiores. Por otra parte, si $f_{12} < 0$, el factor 1 puede ser superior o inferior. En todo caso, sabemos que la única forma de que el factor 1 sea inferior, es cuando $f_{12} < 0$.

Por otra lado, sabemos también que no pueden ser ambos factores inferiores: si por ejemplo el factor 1 es inferior, es porque $(f_{22} f_1 - f_{12} f_2) > 0$. Pero sabemos por condición de segundo orden que:

$$\begin{aligned} & (f_{22} f_1 - f_{12} f_2) f_1 + (f_{11} f_2 - f_{12} f_1) f_2 \\ = \; & f_{22}(f_1)^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{11}(f_2)^2 < 0 \end{aligned}$$

por lo que debe ser cierto que $(f_{11} f_2 - f_{12} f_1) < 0$, lo que implica que el factor 2 es superior. La intuición de este resultado es que para aumentar la producción, debe aumentar el uso de al menos uno de los dos factores.

La intuición del primer resultado (que la única forma de que el factor 1 sea inferior es que $f_{12} < 0$) es la siguiente: si el factor 1 es inferior, quiere decir que al aumentar q disminuye el uso de ese factor. Si la productividad marginal de los factores es decreciente, ello implica que aumenta f_1. Pero en el nuevo óptimo (con q más alto) debe ser cierto que $\frac{f_1}{f_2}$ sigue siendo igual a los mismos precios relativos de antes $\frac{w_1}{w_2}$. Luego, si aumenta f_1 debe ser cierto que f_2 también aumenta, y ello sólo puede ocurrir por la q-anticomplementariedad de los factores (ya que z_2 debe aumentar, y ello llevaría a que f_2 disminuya en vez de aumentar).

2. Demanda no condicionada por factores

El problema de maximización de ganancia de la empresa se puede escribir como:

$$\max_{z_1,z_2} \pi = pf(z_1, z_2) - w_1 z_1 - w_2 z_2$$

Luego, las CPO son de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial z_1} &= pf_1 - w_1 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial z_2} &= pf_2 - w_2 = 0 \end{aligned}$$

De estas condiciones se obtiene nuevamente la condición de tangencia que obteníamos de la minimización de costos: $TMSM = TMST$. Pero además se obtiene la condición de igualdad del valor del producto marginal de cada factor con su precio: $pf_i = w_i$. El punto crítico encontrado con las CPO es máximo si se cumple la condición de segundo orden, que exige que la función de producción sea cóncava.

De las dos CPO obtenemos un sistema de ecuaciones, y al resolverlo encontramos la demanda no condicionada por factores.

Definición 15. *La* ***demanda no condicionada*** *por el factor i es una función que asigna, para cada precio del producto p y precios de los factores w_1, w_2, la cantidad demandada de z_i que permite alcanzar el mayor nivel de utilidad posible al productor. Denotamos esta función como* $z_i^{NC} = z_i(w_1, w_2, p)$.

2.1. Relación con la demanda condicionada por factores. Esta demanda difiere de la demanda condicionada, ya que esta última incluye sólo *efecto sustitución*, mientras que la demanda no condicionada incluye además el efecto escala. El *efecto escala* indica cuánto cambia la cantidad demandada de cada factor al cambiar la cantidad producida de q.

Si por ejemplo estamos considerando la demanda por z_1, sabemos que al cambiar w_1 no sólo va a cambiar z_1 por efecto sustitución (movimiento a través de la isocuanta: demanda condicionada), sino que además cambia el costo marginal de producción, y al mismo precio p eso indica que cambia la cantidad producida del bien, por lo que pasamos a una nueva isocuanta. Eso significa que se modifica nuevamente la cantidad demandada de z_1 por efecto escala.

La demanda no condicionada de factores se puede obtener reemplazando en la demanda condicionada, la cantidad q que entrega la oferta. Es decir,

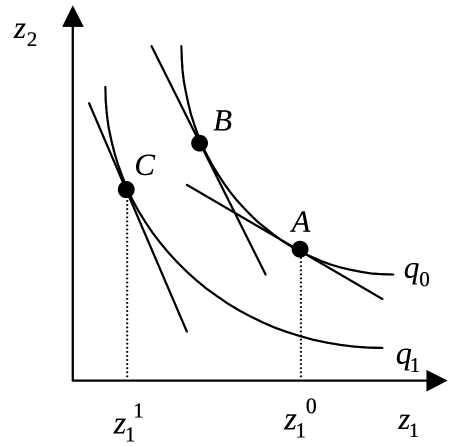


FIGURA 2. Efecto sustitución y efecto escala debido a un amuento en w_1.

siempre podemos escribir:

$$z_i^{NC}\left(w_1, w_2, p\right) = z_i^C\left(w_1, w_2, q^*\left(w_1, w_2, p\right)\right)$$

derivando y ocupando el teorema de la envolvente, obtenemos una expresión similar a la ecuación de Slutsky de la teoría del consumidor:

$$\frac{\partial z_i^{NC}}{\partial w_i} = \frac{\partial z_i^C}{\partial w_i} + \frac{\partial z_i^C}{\partial q^*}\frac{\partial q^*}{\partial w_i}$$

donde el primer término corresponde al efecto sustitución, y el segundo término corresponde al efecto escala.

Para analizar el signo del efecto escala es necesario saber cuánto cambia el costo marginal al cambiar el precio del factor, y cuánto cambia la cantidad demandada del factor al cambiar la cantidad producida. Aplicando teorema de la envolvente tenemos:

$$\frac{\partial z_i^*\left(w_1, w_2, q\right)}{\partial q} = \frac{\partial^2 C^*\left(w_1, w_2, q\right)}{\partial w_i \partial q} = \frac{\partial CMg}{\partial w_i}$$

Luego, si el factor es superior tenemos que al aumentar w_i aumenta el costo marginal, por lo que cae la cantidad producida de q, y cae también la cantidad demandada de z_i, de modo que el efecto escala va en la misma dirección del efecto sustitución. Lo anterior se representa en la figura 2, en que al aumentar w_1 cae el uso del factor 1 desde z_1^0 a z_1^1: el efecto sustitución es el paso del punto A al B, mientras que el efecto escala del punto B al C.

En el caso del factor inferior, a su vez, al aumentar w_i disminuye el costo marginal, por lo que aumenta la cantidad producida y esto lleva a que nuevamente caiga la cantidad demandada de z_i, de modo que el efecto escala también va en la misma dirección del efecto sustitución en este caso. La intuición detrás de la caída del costo marginal al aumentar el precio del

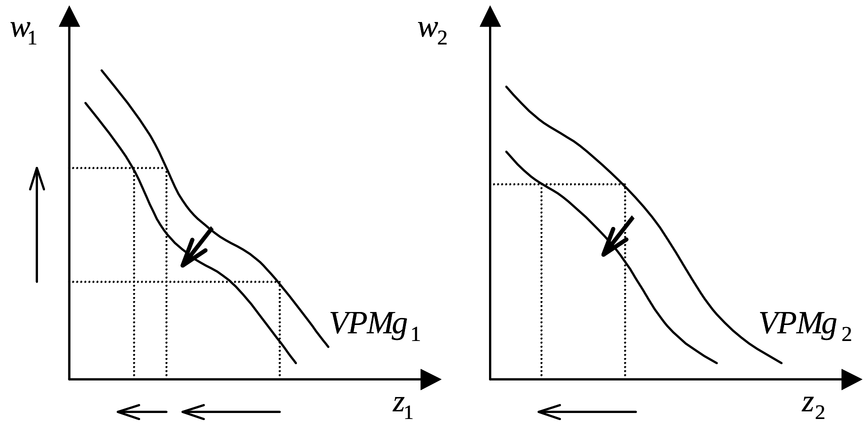


FIGURA 3. Movimiento a través de la curva de Valor Producto Marginal ($VPMg$) y desplazamiento de la misma.

factor inferior es que si se quiere disminuir la cantidad producida, el costo cae menos que antes del alza en el precio, porque al reducir la cantidad producida se contrata más de ese factor (inferior) que ahora es más caro (y se contrata menos de otros factores cuyo precio no ha cambiado).

2.2. Relación con la curva de VPMg. Vimos que la condición de primer orden del problema de maximización exige que en el óptimo se iguale el valor producto marginal del factor con su precio: $pf_i = w_i$. ¿Podemos decir entonces que la curva de demanda del factor es la curva del valor producto marginal?

La respuesta es genéricamente negativa, ya que el valor producto marginal del factor i depende del uso del factor j. Luego, si el precio del factor i cambia, no necesariamente nos quedaremos en la misma curva de valor producto marginal:

i.: Si los factores son q-complementarios, al aumentar w_i disminuye z_i (movimiento a través de la curva de $VPMg$), por lo que disminuye la productividad marginal de z_j, lo que reduce el uso de z_j, y a su vez reduce la productividad marginal de z_i, lo que provoca una caída aún mayor el uso de z_i. Lo anterior se refleja en la figura 3: al aumentar w_1 cae el uso del factor 1, lo que reduce el $VPMg$ del factor 2, reduciéndose su uso, lo que a su vez reduce el $VPMg$ del factor, por lo que vuelve a caer su uso, y así sucesivamente.

ii.: Si los factores son q-anticomplementarios, al aumentar w_i disminuye z_i (movimiento a través de la curva de $VPMg$), por lo que aumenta la productividad marginal de z_j, lo que aumenta el uso de

z_j, y a su vez reduce la productividad marginal de z_i, por lo que se reduce aún más el uso de z_i.

Ejercicio 16. *Represente este caso gráficamente, como se hizo en la figura 3.*

En conclusión, la demanda no condicionada de factores es más elástica que la curva de valor producto marginal, a menos que los factores sean q-independientes, caso en que ambas coinciden.

2.3. Estática comparativa.

2.3.1. Elasticidad precio de la demanda no condicionada. Sabemos que en el óptimo se deben cumplir las condiciones de primer orden del problema de maximización. Estas condiciones son:

$$\begin{aligned} pf_1 &= w_1 \\ pf_2 &= w_2 \end{aligned}$$

Derivando estas condiciones respecto de w_1 obtenemos:

$$\begin{aligned} pf_{11}\frac{\partial z_1}{\partial w_1} + pf_{12}\frac{\partial z_2}{\partial w_1} &= 1 \\ pf_{21}\frac{\partial z_1}{\partial w_1} + pf_{22}\frac{\partial z_2}{\partial w_1} &= 0 \end{aligned}$$

Luego, tenemos que:

$$pf_{11}\frac{\partial z_1}{\partial w_1} + pf_{12}\left(-\frac{f_{21}}{f_{22}}\frac{\partial z_1}{\partial w_1}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial w_1} = \frac{f_{22}}{p\left(f_{11}f_{22} - (f_{12})^2\right)} < 0$$

Entonces, la elasticidad precio de la demanda no condicionada es negativa, como esperábamos.

2.3.2. Elasticidad cruzada de la demanda no condicionada. Derivando las condiciones de primer orden respecto de w_2 obtenemos:

$$\begin{aligned} pf_{11}\frac{\partial z_1}{\partial w_2} + pf_{12}\frac{\partial z_2}{\partial w_2} &= 0 \\ pf_{21}\frac{\partial z_1}{\partial w_2} + pf_{22}\frac{\partial z_2}{\partial w_2} &= 1 \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$pf_{21}\frac{\partial z_1}{\partial w_2} + pf_{22}\left(-\frac{f_{11}}{f_{12}}\frac{\partial z_1}{\partial w_2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial w_2} = -\frac{f_{12}}{p\left(f_{11}f_{22} - (f_{12})^2\right)}$$

A diferencia de lo que encontrábamos en el caso de la demanda condicionada, en que el nivel de producción se suponía constante, al considerar ahora la demanda no condicionada obtenemos un efecto cruzado que puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo de f_{12}. Si los factores son q-complementarios, la derivada es negativa: al aumentar w_2 sabemos que se reduce z_2 (movimiento a través de la curva de VPMg), lo que disminuye la productividad marginal de z_1, por lo que disminuye también la demanda de z_1, y vuelve a caer z_2 (ya que disminuye su PMg), y así sucesivamente.

Si los factores son q-anticomplementarios, la derivada es positiva: al reducirse z_2 aumenta la productividad marginal de z_1, por lo que aumenta el uso de z_1, lo que lleva a que disminuya la productividad marginal de z_2, y se reduzca aún más su consumo, y así sucesivamente.

Luego, la elasticidad cruzada puede ser positiva o negativa.

2.3.3. Cambio en la demanda no condicionada ante un cambio en el precio del producto final. Derivando las condiciones de primer orden respecto de p obtenemos:

$$\begin{aligned} pf_{11}\frac{\partial z_1}{\partial p} + pf_{12}\frac{\partial z_2}{\partial p} + f_1 &= 0 \\ pf_{21}\frac{\partial z_1}{\partial p} + pf_{22}\frac{\partial z_2}{\partial p} + f_2 &= 0 \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} pf_{11}\frac{\partial z_1}{\partial p} + pf_{12}\left(-\frac{f_2}{pf_{22}} - \frac{f_{21}}{f_{22}}\frac{\partial z_1}{\partial p}\right) + f_1 = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial p} = \frac{f_2 f_{12} - f_1 f_{22}}{p\left(f_{11}f_{22} - (f_{12})^2\right)} \\ \Rightarrow \frac{\partial z_2}{\partial p} = \frac{f_1 f_{12} - f_2 f_{11}}{p\left(f_{11}f_{22} - (f_{12})^2\right)} \end{aligned}$$

La condición de segundo orden del problema de maximización implica que el denominador de esta expresión es positivo. Luego, el signo de esta derivada depende del signo de $f_2 f_{12} - f_1 f_{22}$: si $f_{12} \geq 0$, entonces la derivada es positiva; si $f_{12} < 0$, la derivada puede ser positiva o negativa. La intuición detrás de este resultado es que al aumentar p, sabemos que aumentan z_1 y z_2 (ya que se desplaza hacia afuera la curva de VPMg de ambos factores). Si $f_{12} > 0$, el hecho que aumente z_2 lleva a que aumente la productividad marginal de z_1, por lo que aumenta aún más su demanda, y lo mismo con z_2. Pero si $f_{12} < 0$, el hecho que aumente z_2 hace que caiga la productividad marginal de z_1, y ello lleva a que caiga el uso de z_1, por lo que el efecto final sobre z_1 puede ser positivo o negativo (y lo mismo con z_2).

Otra manera de ver la intuición de este resultado es que, tal como derivamos en la sección previa, si $f_{12} > 0$ ambos factores son superiores. Eso implica que al aumentar p y aumentar por tanto la cantidad producida, aumenta la demanda de ambos factores. Por otra parte, si $f_{12} < 0$, es posible que uno de los dos factores sea inferior, por lo que al aumentar p y aumentar por tanto la cantidad producida puede disminuir la demanda de dicho factor.

En todo caso, debe ser cierto que el uso de al menos uno de los dos factores aumenta al aumentar p, ya que sabemos que la producción aumenta. Tal como en la sección previa, esto se demuestra de la siguiente forma: si z_1 disminuye, es porque $f_2 f_{12} - f_1 f_{22} < 0$ (con $f_{22} < 0$). El signo de $\frac{\partial z_2}{\partial p}$ depende del signo de $(f_1 f_{12} - f_2 f_{11})$. Pero por condición de segundo orden de la minimización de costos sabemos que:

$$\begin{aligned}(f_2 f_{12} - f_1 f_{22})\, f_1 + (f_1 f_{12} - f_2 f_{11})\, f_2 \\ = 2 f_1 f_2 f_{12} - (f_1)^2 f_{22} f_1 - (f_2)^2 f_{11} > 0\end{aligned}$$

Luego, si $(f_2 f_{12} - f_1 f_{22}) < 0$, debe ser cierto que el segundo término es positivo, de modo que $(f_1 f_{12} - f_2 f_{11}) > 0$ y por lo tanto $\frac{\partial z_2}{\partial p} > 0$.

A la inversa, si z_2 disminuyera (por lo que $(f_1 f_{12} - f_2 f_{11}) < 0$), debe ser cierto que z_1 aumentaría (o que $(f_2 f_{12} - f_1 f_{22}) > 0$).

Apéndice Apéndice 6.A Apéndice: leyes de Marshall

Elasticidad de la demanda por factores de una industria de retornos constantes

6.A.1 Preliminares. Derivaremos las Leyes de Marshall, que se aplican cuando las funciones de producción de cada empresa son de rendimientos constantes a escala. Consideramos entonces una industria compuesta por N empresas competitivas e idénticas, todas con una función de producción $f(z_1, z_2)$ homogénea de grado 1.

El hecho de que la función de producción de cada empresa sea homogénea de grado 1 tiene varias consecuencias que simplifican la derivación. Algunas propiedades importantes son:

1. Si ambos factores cambian en igual proporción (por lo que la razón de uso no cambia), el producto cambia en esa misma proporción.

2. La productividad marginal de cada uno de los factores depende sólo de la razón de uso entre ellos, y no de su nivel. Luego, la TMST también depende sólo de la razón de uso z_2/z_1. Esto implica que la senda de expansión es una línea recta que parte del origen, o que la razón de uso óptima no cambia mientras no cambien los precios relativos de los factores. En otras palabras, la razón de uso óptima no depende de q, sino sólo de w_1/w_2.
3. De las dos condiciones anteriores se desprende que, dados los precios de los factores, si el producto aumenta en $a\,\%$, la cantidad demandada de z_1 y z_2 aumenta en el mismo $a\,\%$. Es decir, si $z_i^C = z_i\left(w_1, w_2, q\right)$ es la demanda condicionada por el factor i, podemos escribir:

$$z_i\left(w_1, w_2, \left(1 + a\,\%\right) q\right) = \left(1 + a\,\%\right) z_i\left(w_1, w_2, q\right)$$

   Luego, podríamos escribir la demanda condicionada de factores como:

$$z_i\left(w_1, w_2, q\right) = q z_i\left(w_1, w_2, 1\right)$$

   (notar que esto sólo es válido para funciones de producción homogéneas de grado 1).
4. El costo marginal es constante, y lo denotaremos por c. Luego, el precio de equilibrio es igual c, y la cantidad producida y demandada en total es la que se determina en la demanda a dicho precio. Es decir, en equilibrio las empresas obtienen cero utilidad. Si la demanda de mercado es de la forma $X^d = X\left(p\right)$, entonces la cantidad total producida en la industria es $X\left(c\right)$. Sin embargo, la cantidad producida por cada empresa queda indeterminada. Supondremos que en equilibrio todas las empresas producen la misma cantidad, es decir, $q = \frac{X(c)}{N}$.
5. La demanda por factores a nivel de la industria es la suma horizontal de demandas individuales. Dado que las empresas tienen igual tecnología, enfrentan los mismos precios de factores, y producen la misma cantidad, sabemos que la cantidad demandada por todas las empresas es idéntica. Es decir, la cantidad demandada por la industria es

$$Z_i = N z_i\left(w_1, w_2, \frac{X\left(c\right)}{N}\right) = z_i\left(w_1, w_2, N\left(\frac{X\left(c\right)}{N}\right)\right) = z_i\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)$$

   donde la penúltima igualdad surge de que al multiplicar el q por N, obtenemos que la cantidad demandada del factor también se multiplica por N (propiedad 3). Esta condición indica entonces que la demanda por factores a nivel de la industria es exactamente igual a la demanda por factores de cada empresa evaluada en la cantidad total producida en la industria.

6. Asimismo, la producción a nivel de la industria se puede escribir como:

$$X = Nq = Nf(z_1, z_2) = f(Nz_1, Nz_2) = f(Z_1, Z_2)$$

donde la penúltima igualdad surge de la homogeneidad de grado uno de la función de producción. Luego, la cantidad producida en la industria se puede obtener a partir de evaluar la función de producción de cada empresa en la cantidad total de factores contratada en la industria. (notar que si la función no es homogénea de grado uno, esto no es cierto).

De todo lo anterior se concluye que al ser la función homogénea de grado 1, podemos considerar a la industria como una sola gran empresa que enfrenta precios de factores y del producto (cobra un precio igual al costo marginal), y que obtiene cero utilidades.

6.A.2 Oferta del factor cooperante infinitamente elástica. En este caso, suponemos que el precio del factor cooperante no se ve afectado, aún cuando cambie la cantidad utilizada de este factor a nivel de la industria.

En primer lugar, dado que podemos escribir la demanda por el factor i a nivel de la industria como

$$Z_i = z_i(w_1, w_2, X(c))$$

podemos descomponer el efecto del cambio en el precio de un factor sobre la demanda de la industria como sigue:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial w_i} = \left[\frac{\partial z_i(w_1, w_2, X(c))}{\partial w_i}\right] + \left[\frac{\partial z_i(w_1, w_2, X(c))}{\partial X(c)}\frac{\partial X(c)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial w_i}\right]$$

El primer término corresponde al efecto sustitución (ya que se busca el cambio en la demanda ante un cambio en el precio de factor, manteniendo la producción constante), y el segundo corresponde al efecto escala.

En términos de elasticidades, tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_i}{\partial w_i}\frac{w_i}{Z_i} &= \left[\frac{\partial z_i}{\partial w_i}\frac{w_i}{Z_i}\right] + \left[\left(\frac{\partial X(c)}{\partial c}\frac{c}{X(c)}\right)\left(\frac{\partial z_i}{\partial X(c)}\frac{X(c)}{Z_i}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial w_i}\frac{w_i}{c}\right)\right] \\
\eta_{ii}^T &= \left[\eta_{ii}^S\right] + \left[\eta_{xx}\left(\frac{\partial c}{\partial w_i}\frac{w_i}{c}\right)\right] \\
&= \left[-\alpha_j\sigma\right] + \left[\eta_{xx}\left(\frac{\partial c}{\partial w_i}\frac{w_i}{c}\right)\right]
\end{aligned}$$

donde η_{ii}^T denota la elasticidad de la demanda total por el factor i en de la industria; η_{ii}^S denota la elasticidad de la demanda condicionada (sólo efecto sustitución), y η_{xx} denota la elasticidad de la demanda de mercado por x. La segunda igualdad surge de que, recordando la propiedad 3, obtenemos:

$$\begin{aligned} z_i\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right) &= X\left(c\right) z_i\left(w_1, w_2, 1\right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial z_i}{\partial X\left(c\right)} = z_i\left(w_1, w_2, 1\right) = \frac{z_i\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{X\left(c\right)} \\ &\Rightarrow \frac{\partial z_i}{\partial X\left(c\right)} \frac{X\left(c\right)}{Z_i} = 1 \end{aligned}$$

Sólo falta entonces encontrar $\frac{\partial c}{\partial w_i} = \frac{\partial CMg}{\partial w_i}$. Pero sabemos que en el caso de la función homogénea de grado 1 el costo marginal es igual al costo medio de producción. Luego, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial w_i} &= \frac{\partial CMe}{\partial w_i} \\ &= \left(\frac{\partial C^*\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{\partial w_i} + \frac{\partial C^*\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{\partial X\left(c\right)} \frac{\partial X\left(c\right)}{\partial w_i}\right) \frac{1}{X} - \frac{\partial X\left(c\right)}{\partial w_i} \frac{C^*}{X^2} \\ &= \frac{z_i^*\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{X} + \frac{CMg}{X} \frac{\partial X\left(c\right)}{\partial w_i} - \frac{CMe}{X} \frac{\partial X\left(c\right)}{\partial w_i} \\ &= \frac{z_i^*\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{X} \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial w_i} \frac{w_i}{c} &= \frac{z_i^*\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{X} \frac{w_i}{c} \\ &= \frac{z_i^*\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{X} \frac{w_i}{CMe} \\ &= \frac{z_i^* w_i}{C^*} \equiv \alpha_i \end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$\eta_{ii}^T = \left[-\alpha_j \sigma\right] + \left[\alpha_i \eta_{xx}\right]$$

Luego, la elasticidad de la demanda por el factor i a nivel de la industria depende de la elasticidad de la demanda del producto final, de la elasticidad de sustitución, y del porcentaje del costo total dedicado al pago del factor. La intuición que está detrás de los dos primeros resultados es la siguiente:

- Dado que un alza en w_i genera un alza en el precio del producto, a mayor elasticidad de la demanda de mercado por x es mayor la caída en la cantidad demandada de x ante esta alza en el precio, y por lo tanto es mayor la caída en la cantidad demandada del factor.

- Dado que un alza en w_i con w_j constante implica un cambio en los precios relativos, a mayor elasticidad de sustitución es mayor la caída en el uso relativo del factor i asociado (dado un nivel de q fijo).

La elasticidad cruzada queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_i}{\partial w_j}\frac{w_j}{Z_i} &= \left[\frac{\partial z_i}{\partial w_j}\frac{w_j}{Z_i}\right] + \left[\left(\frac{\partial X(c)}{\partial c}\frac{c}{X(c)}\right)\left(\frac{\partial z_i}{\partial X(c)}\frac{X(c)}{Z_i}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial w_j}\frac{w_j}{c}\right)\right] \\
\eta_{ij}^T &= \left[\eta_{ij}^S\right] + \left[\eta_{xx}\left(\frac{\partial c}{\partial w_j}\frac{w_j}{c}\right)\right] \\
&= [\alpha_j\sigma] + [\alpha_j\eta_{xx}]
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5. *Demanda por factores a nivel de la industria cuando hay sólo efecto escala:*
En este caso particular, suponemos que la elasticidad de sustitución entre factores es nula. Es decir, consideramos una industria en que cada empresa tiene una función de producción de la forma:

$$q = \text{mín}\left\{a_1 z_1, a_2 z_2\right\}$$

En este caso, sabemos que las demandas condicionadas de factores son de la forma:

$$z_i^* = \frac{q}{a_i}$$

Luego, en el óptimo tenemos que el cambio porcentual en q y en el uso de factores es igual:

$$\frac{dz_i}{z_i} = \frac{1}{z_i}\frac{dq}{a_i} = \frac{dq}{q}$$

Las funciones de costo total, medio y marginal son de la forma:

$$\begin{aligned}
C^* &= \left(\frac{w_1}{a_1} + \frac{w_2}{a_2}\right) q \\
CMe &= \left(\frac{w_1}{a_1} + \frac{w_2}{a_2}\right) = CMg
\end{aligned}$$

Sabemos que a nivel de la empresa la demanda no condicionada y la oferta están indeterminadas. Sin embargo, a nivel de la industria quedan determinadas por la demanda. La condición de equilibrio en esta industria será $p = CMg = \left(\frac{w_1}{a_1} + \frac{w_2}{a_2}\right)$. Luego, la proporción del costo total que se dedica al pago de z_i es:

$$\alpha_i = \frac{w_i z_i}{C^*} = \frac{w_i \frac{q}{a_i}}{pq} = \frac{w_i}{a_i p}$$

Si cambia w_i manteniendo w_j constante, tenemos que p también cambia, lo que lleva a que cambie también la cantidad producida de q y por lo tanto la cantidad demandada de z_i:

$$\begin{aligned}
dp &= \frac{dw_i}{a_i} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{w_i}{a_i p}\frac{dw_i}{w_i} = \alpha_i \frac{dw_i}{w_i}
\end{aligned}$$

Entonces, si escribimos la elasticidad precio de la demanda como η_{xx}, tenemos:

$$\begin{aligned}
\eta_{xx} &= \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{\frac{dx}{x}}{\alpha_i \frac{dw_i}{w_i}} = \frac{\frac{dz_i}{z_i}}{\alpha_i \frac{dw_i}{w_i}} = \frac{1}{\alpha_i}\eta_{ii} \\
&\Rightarrow \eta_{ii} = \alpha_i \eta_{xx}
\end{aligned}$$

6.A.3 Oferta del factor cooperante con elasticidad finita. En este caso, tenemos un efecto adicional asociado al cambio en w_i: al cambiar el uso de z_j a nivel de la industria, es posible que cambie w_j.

Para encontrar la elasticidad en este caso, procedemos exactamente igual como lo hicimos antes, pero notando que al derivar respecto de w_i tenemos que considerar el efecto directo y el efecto indirecto debido a que el cambio en w_i afecta a w_j. Nuevamente, escribimos la demanda por el factor i a nivel de la industria como

$$Z_i = z_i\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)$$

podemos descomponer el efecto del cambio en el precio de un factor sobre la demanda de la industria como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_i}{\partial w_i} &= \left[\frac{\partial z_i\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{\partial w_i} + \frac{\partial z_i\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{\partial w_j}\frac{\partial w_j}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial w_i}\right] \\
&+ \left[\frac{\partial z_i\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{\partial X\left(c\right)}\frac{\partial X\left(c\right)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial w_i}\right. \\
&\left. + \frac{\partial z_i\left(w_1, w_2, X\left(c\right)\right)}{\partial X\left(c\right)}\frac{\partial X\left(c\right)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial w_j}\frac{\partial w_j}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial w_i}\right]
\end{aligned}$$

donde el primer paréntesis incluye el efecto sustitución, y el segundo el efecto escala.

En elasticidades:

$$\begin{aligned}
\eta_{ii}^T &= \frac{\partial Z_i}{\partial w_i}\frac{w_i}{Z_i} = \left[\frac{\partial z_i}{\partial w_i}\frac{w_i}{Z_i} + \left(\frac{\partial z_i}{\partial w_j}\frac{w_j}{Z_i}\right)\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_j}\frac{z_j}{w_j}\right)\left(\frac{\partial z_j}{\partial w_i}\frac{w_i}{z_j}\right)\right] \\
&+ \left[\left(\frac{\partial z_i}{\partial X\left(c\right)}\frac{X}{Z_i}\right)\left(\frac{\partial X\left(c\right)}{\partial c}\frac{c}{X}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial w_i}\frac{w_i}{c}\right)\right. \\
&\left. + \left(\frac{\partial z_i}{\partial X\left(c\right)}\frac{X}{Z_i}\right)\left(\frac{\partial X\left(c\right)}{\partial c}\frac{c}{X}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial w_j}\frac{w_j}{c}\right)\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_j}\frac{z_j}{w_j}\right)\left(\frac{\partial z_j}{\partial w_i}\frac{w_i}{z_j}\right)\right]
\end{aligned}$$

Pero $\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_j}\frac{z_j}{w_j}\right)$ es el cambio que se produce en el precio de w_j al cambiar la demanda por z_j, por lo que es el inverso de la elasticidad precio de la oferta por z_j. A su vez, $\left(\frac{\partial z_j}{\partial w_i}\frac{w_i}{z_j}\right)$ es la elasticidad cruzada de la demanda de la industria por z_j (incluyendo efecto ingreso y efecto sustitución, ya que lo importante es cuánto es el cambio total en la demanda por z_j). Por otra parte, sigue siendo cierto que $\frac{\partial c}{\partial w_i}\frac{w_i}{c} = \alpha_i$ y $\frac{\partial z_i}{\partial X(c)}\frac{X(c)}{Z_i} = 1$. Finalmente, sabemos que $\eta_{ij}^S = -\eta_{ii}^S$ por homogeneidad de grado cero de la demanda condicionada respecto de los precios de los factores. Con todo esto, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\eta_{ii}^T &= \left[\eta_{ii}^S + \frac{\eta_{ij}^S \eta_{ji}^T}{\varepsilon_{jj}}\right] + \left[\alpha_i \eta_{xx} + \alpha_j \frac{\eta_{xx}\eta_{ji}^T}{\varepsilon_{jj}}\right] \\
&= \left[-\alpha_j \sigma + \alpha_j \sigma \frac{\eta_{ji}^T}{\varepsilon_{jj}}\right] + \left[\alpha_i \eta_{xx} + \alpha_j \frac{\eta_{xx}\eta_{ji}^T}{\varepsilon_{jj}}\right]
\end{aligned}$$

Para llegar a la expresión final, notamos que hay una relación entre η_{ii}^T y η_{ji}^T: derivando la condición de cero ganancias ($w_1 z_1 + w_2 z_2 = pq = px$) respecto de w_i obtenemos:

$$\begin{aligned}
& z_i + \frac{\partial z_i}{\partial w_i} w_i + \frac{\partial z_j}{\partial w_i} w_j + z_j \frac{\partial w_j}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \\
&\quad = x \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial w_i} + \frac{\partial q}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \right) + p \left(\frac{\partial q}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial w_i} + \frac{\partial q}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \right) \\
&\qquad = x \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{w_i}{p} \frac{\partial z_i}{\partial w_i} + \frac{w_j}{p} \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \right) + p \left(\frac{w_i}{p} \frac{\partial z_i}{\partial w_i} + \frac{w_j}{p} \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \right)
\end{aligned}$$

por lo que finalmente llegamos a la siguiente expresión:

$$z_i + z_j \frac{\partial w_j}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_i} = x \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{w_i}{p} \frac{\partial z_i}{\partial w_i} + \frac{w_j}{p} \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \right)$$

En términos de elasticidades:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{w_j z_j}{w_i z_i} \left(\frac{z_j}{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial z_j} \right) \left(\frac{\partial z_j}{\partial w_i} \frac{w_i}{z_j} \right) &= \left(\frac{x}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left(\frac{w_i}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial w_i} + \frac{w_j z_j}{z_i w_i} \frac{w_i}{z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_i} \right) \\
1 + \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{\eta_{ji}^T}{\varepsilon_{jj}} &= \frac{1}{\eta_{xx}} \left(\eta_{ii}^T + \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \eta_{ji}^T \right) \\
\eta_{xx} + \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{\eta_{xx} \eta_{ji}^T}{\varepsilon_{jj}} &= \eta_{ii}^T + \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \eta_{ji}^T \\
&\Rightarrow \quad \eta_{ji}^T = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{\varepsilon_{jj} \left(\eta_{ii}^T - \eta_{xx} \right)}{\eta_{xx} - \varepsilon_{jj}}
\end{aligned}$$

Luego, volviendo a la expresión que teníamos para la elasticidad de la demanda del factor i a nivel de la industria, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\eta_{ii}^T &= -\alpha_j\sigma + \alpha_i\eta_{xx} + \eta_{ji}^T\left(\alpha_j\frac{\sigma}{\varepsilon_{jj}} + \alpha_j\frac{\eta_{xx}}{\varepsilon_{jj}}\right)\\
&= -\alpha_j\sigma + \alpha_i\eta_{xx} + \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{\varepsilon_{jj}\left(\eta_{ii}^T - \eta_{xx}\right)}{\eta_{xx} - \varepsilon_{jj}}\left(\alpha_j\frac{\sigma}{\varepsilon_{jj}} + \alpha_j\frac{\eta_{xx}}{\varepsilon_{jj}}\right)\\
&= -\alpha_j\sigma + \alpha_i\eta_{xx} + \alpha_i\frac{\left(\eta_{ii}^T - \eta_{xx}\right)}{\eta_{xx} - \varepsilon_{jj}}\left(\sigma + \eta_{xx}\right)
\end{aligned}$$

y despejando η_{ii}^T encontramos finalmente:

$$\eta_{ii}^T = \frac{\sigma\eta_{xx} + \varepsilon_{jj}\left(\alpha_i\eta_{xx} - \alpha_j\sigma\right)}{\varepsilon_{jj} + \alpha_i\sigma - \alpha_j\eta_{xx}}$$

Si la cantidad ofrecida del factor cooperante fuera fija (es decir, si $\varepsilon_{jj} = 0$), la elasticidad queda:

$$\begin{aligned}
\eta_{ii}^T &= \frac{\sigma\eta_{xx}}{\alpha_i\sigma - \alpha_j\eta_{xx}}\\
&\Rightarrow \frac{1}{\eta_{ii}^T} = \frac{\alpha_i}{\eta_{xx}} - \frac{\alpha_j}{\sigma}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6. *Demanda por factores a nivel de la industria cuando hay sólo efecto escala:*
Nuevamente suponemos que la elasticidad de sustitución entre factores es nula, por lo que obtenemos demandas condicionadas de factores de la forma:

$$z_i^* = \frac{q}{a_i}$$

Luego, nuevamente la condición de equilibrio es $p = CMg = \left(\frac{w_1}{a_1} + \frac{w_2}{a_2}\right)$, *y la proporción del costo total que se dedica al pago de* z_i *es* $\alpha_i = \frac{w_i}{a_i p}$.
Si cambia w_i *y* w_j *no se mantiene constante, nuevamente tenemos que* p *cambia (ahora por dos razones: por efecto directo del cambio en* w_i*, y por el efecto indirecto a través del cambio en* w_j*), lo que lleva a que cambie también la cantidad* q *producida y por lo tanto la cantidad demandada de* z_i*:*

$$\begin{aligned}
dp &= \frac{dw_i}{a_i} + \frac{dw_j}{a_j}\\
&\Rightarrow \frac{dp}{p} = \alpha_i\frac{dw_i}{w_i} + \alpha_j\frac{dw_j}{w_j}
\end{aligned}$$

Entonces, si escribimos la elasticidad precio de la demanda como η_{xx}, tenemos:

$$\begin{aligned}
\eta_{xx} &= \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{\frac{dx}{x}}{\alpha_i \frac{dw_i}{w_i} + \alpha_j \frac{dw_j}{w_j}} = \frac{1}{\alpha_i \left(\frac{dw_i}{w_i} / \frac{dz_i}{z_i} \right) + \alpha_j \left(\frac{dw_j}{w_j} / \frac{dz_j}{z_j} \right)} = \frac{1}{\frac{\alpha_i}{\eta_{ii}} + \frac{\alpha_j}{\varepsilon_{jj}}} \\
&\Rightarrow \frac{\alpha_i \eta_{xx}}{\eta_{ii}} + \frac{\alpha_j \eta_{xx}}{\varepsilon_{jj}} = 1 \\
&\Rightarrow \eta_{ii} = \frac{\alpha_i \eta_{xx}}{1 - \frac{\alpha_j \eta_{xx}}{\varepsilon_{jj}}}
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. (*) Suponga que una empresa produce utilizando dos factores, K y L. Si L es un factor es inferior (es decir, la cantidad contratada de dicho factor cae al aumentar la cantidad producida), la función de producción no puede ser homotética. Comente, apoyando su explicación con un gráfico.
2. (*) Considere una empresa que produce x en un mercado perfectamente competitivo, utilizando dos factores, K y L. La función de producción de la empresa es de la forma: $x = K^{1/4}L^{1/4}$. La empresa enfrenta precios de factores w_K y w_L respectivamente.
   a) Encuentre la elasticidad de sustitución σ y derive la demanda condicionada por L. Demuestre que la elasticidad precio de la demanda condicionada es idéntica a $-\alpha_k \sigma$
   b) Derive la demanda no condicionada por L, y demuestre que es más elástica que la demanda condicionada (es decir, que la elasticidad precio de la demanda condicionada es menor en valor absoluto que la de la demanda no condicionada), explicando la intuición de su resultado. En su respuesta debe indicar explícitamente si los factores son superiores o inferiores en este caso, y la consecuencia de ello. Apoye su respuesta con un gráfico.
   c) Encuentre la demanda no condicionada por L en caso que K sea fijo en un nivel $\overline{K}$. Compare la elasticidad precio de esta demanda con la encontrada en *b*), explicando la intuición de su resultado. En su respuesta debe indicar explícitamente si los factores son q-complementarios o anticomplementarios, y la consecuencia de ello. Apoye su respuesta con un gráfico.
3. (*) En las negociaciones de salario mínimo, la discusión solía centrarse en torno a dos parámetros: la inflación anticipada para el año y el aumento de la productividad del trabajo. Si el salario nominal se reajustaba e "inflación más productividad", se creía, no se generaría un aumento en el desempleo.

a) Explique en qué se basa la creencia de que el salario es igual al valor de la productividad marginal del trabajo.
b) Explique, entonces, por qué reajustes nominales del salario mínimo en los términos descritos arriba no debieran —ceteris paribus— aumentar el desempleo.

4. (**) Considere una industria compuesta por empresas competitivas e idénticas. Cada empresa produce x utilizando dos factores (1 y 2, con precios w_1 y w_2 respectivamente), con una tecnología como la descrita en la siguiente función de producción: $x = z_1^{1/2} + z_2^{1/2}$. Las empresas exportan su producto, cuyo precio internacional es $p^* = 100$.
   a) Si se pone un impuesto a la exportación de \$10 por unidad, de modo que ahora la empresa recibe \$90 por cada unidad vendida, ¿aumenta o se reduce la cantidad contratada de ambos factores en cada empresa? Fundamente claramente su respuesta, explicando la intuición detrás de ella (no es necesario calcular).
   b) Suponga ahora que el gobierno quiere evitar que debido a la introducción de este impuesto, cambie la cantidad contratada del factor 1 respecto de la situación inicial sin impuesto (por ejemplo, si z_1 es trabajo, el gobierno quiere que se mantenga la cantidad contratada de trabajadores en esta industria). Para ello, pone un subsidio a la contratación del factor 1 de $z\,\%$, de modo que ahora la empresa debe pagar un precio $w_1\,(1 - z\,\%)$ por este factor. Calcule el valor que debe tomar $z\,\%$ para que se logre el objetivo buscado.
5. (**) Por razones que no son del todo claras, ciertos gremios han conseguido obtener el control o la administración de las instituciones que proveen sus servicios. Por ejemplo, los gerentes de los hospitales son médicos, los administradores del poder judicial son abogados, y los directores de los colegios son profesores. En caso de conseguir el control, es probable que esas instituciones no solo no maximicen ganancias, sino que en cambio actúen como cooperativas gremiales, maximizando el pago total a médicos, abogados o profesores que trabajan en la institución.
   Para ser concretos, imagine que la provisión de servicios médicos (q) requiere de médicos (L_1) y otros profesionales (enfermeras, kinesiólogos, optometristas, etc.) (L_2). Considere el caso de una clínica bajo dos regímenes alternativos:
   a) Su dueño no es médico, y su objetivo es el lucro. Esto es, su comportamiento se obtiene de:

$$\begin{aligned} \max_{L_1, L_2, q} \; & \pi = pq - (w_1 L_1 + w_2 L_2) \\ \text{s/a} \quad & q = f(L_1, L_2) \end{aligned}$$

b) Su dueño es la cooperativa de médicos de la misma clínica, de manera que las utilidades se reparten entre ellos. A la cooperativa le interesa que el grupo de médicos reciba el mayor ingreso posible, pero la clínica se debe autofinanciar. Esto es, su comportamiento se obtiene de:

$$\max_{L_1, L_2, q} \pi + w_1 L_1 = pq - w_2 L_2$$
$$\text{s/a} \qquad q = f(L_1, L_2)$$
$$\pi \geq 0 \qquad \text{(autofinanciamiento)}$$

El lagrangeano asociado es:

$$\mathcal{L} = pf(L_1, L_2) - w_2 L_2 + \lambda (pf(L_1, L_2) - w_1 L_1 - w_2 L_2)$$

Compare las decisiones de **contratación de médicos** (L_1), **contratación de otros profesionales** (L_2), y **cantidad de servicios provistos** (q) bajo ambos regímenes, suponiendo que los precios de todos los insumos y del producto están dados y que $f(L_1, L_2)$ es homogénea de un grado $r < 1$. Explique clara e intuitivamente sus resultados.

CAPÍTULO 7

Incertidumbre

1. Utilidad esperada

El capítulo 1 desarrolló una teoría general de la decisión, que luego desde el capítulo 2 al 5 se aplicó al estudio de la demanda del consumidor, mientras que el 6 y el 7 lo hicieron al de la oferta y la demanda de insumos de la empresa. Este capítulo extiende la teoría general al caso en que la decisión es tomada en condiciones de **incertidumbre** o ignorancia, esto es, se preocupa de decisiones cuyas consecuencias son desconocidas al momento de elegir.

Por cierto, virtualmente toda decisión real cabe en esta categoría. Por ejemplo, ningún alumno sabe al entrar si la carrera le gustará; el jefe no sabe al contratarlo si el empleado será adecuado para las necesidades de la empresa; el consejo del Banco Central no sabe qué efecto tendrá la baja en la tasa de interés en el IPC del mes siguiente, etc. Desde el punto de vista de la modelación, sin embargo, agregar realismo es costoso, por lo que la utilización de la metodología que desarrollamos en este capítulo es recomendable solo en casos en que sea *esencial* para el análisis del problema en cuestión.

Seguimos imaginando que el comportamiento de un individuo es representable por medio de la maximización de una función de utilidad: la acción seleccionada es la que está más arriba en la jerarquía, dentro de las posibilidades. En ese sentido, el problema no es diferente al de los capítulos anteriores.

La diferencia, entonces, radica en que ahora nos preocupamos explícitamente de las **consecuencias** que los actos acarreen. En ese sentido, aspiramos a caracterizar una toma de decisiones **racional** en el sentido de que los actos del individuo propendan a consecuencias consideradas mejores (más preferidas).

Puesto de otra forma: un problema de decisión se considera de certidumbre si asociado a cada acto existe una única consecuencia posible. Podemos pensar que la relación de preferencias desarrollada en el capítulo anterior está definida sobre las consecuencias, y por esa vía sobre los actos. En un problema de decisión bajo incertidumbre, en cambio, un acto tiene consecuencias inciertas. Es factible distinguir, entonces, entre preferencias por actos y preferencias por consecuencias. En el momento de tomar la decisión (*ex ante*), la persona debe evaluar los actos a su alcance. Pero en ese momento la persona no sabe cuál será la consecuencia final del acto, sólo imagina cuáles son las consecuencias posibles. Por esa razón, la evaluación que haga de un acto en particular dependerá a su vez de la valoración de cada una de las consecuencias asociadas a dicho acto. Sólo tiempo después de escogida la acción, se revelará la consecuencia efectiva, momento en el cual también puede juzgar (*ex post*) si lo conseguido era más o menos preferido que otras alternativas que haya considerado posibles.

De acuerdo al axioma 3, de racionalidad o consistencia, en un problema bajo certidumbre el individuo escoge de manera de conseguir la mejor consecuencia dentro de las alcanzables. En un problema bajo incertidumbre, en cambio, escoge sin saber si la consecuencia *a posteriori* (ó *ex post*) resultará la mejor de acuerdo a su jerarquía.

Así, en este contexto se puede asociar la palabra **racionalidad** con un concepto distinto al implicado por el axioma 3: que las acciones escogidas propendan, en algún sentido, a conseguir consecuencias mejores de acuerdo a su jerarquía subjetiva. Siendo las consecuencias desconocidas, la evaluación sólo puede depender de lo que el individuo considere posible, y acaso del grado de confianza que tenga en la verosimilitud de uno u otro escenario que pueda imaginar.[1]

Una decisión racional en este segundo sentido, entonces, está basada en las consecuencias posibles de cada acto, y en las **creencias** o grado de confianza depositado en la ocurrencia de cada consecuencia.

Es posible pensar en un conjunto de escenarios o **estados de la naturaleza**, digamos $\mathcal{S}$. Cada escenario o estado involucra una descripción de todas las variables que le importan al individuo, de acuerdo a su preferencia sobre las consecuencias, pero que están fuera de su control (metafóricamente, determinadas por la naturaleza). Las consecuencias de una misma acción son en general distintas entre estados de la naturaleza, y para un mismo estado de la naturaleza, dos acciones pueden tener consecuencias distintas. Por ejemplo, un estado de la naturaleza puede ser "llueve sobre Santiago", y otro estado "no llueve sobre Santiago". La decisión "llevar el paraguas al salir" tiene consecuencias distintas dependiendo de cuál de esos estados se materializa. Es posible que la persona se arrepienta al final del día de

[1]Observe que le atribuimos al individuo la capacidad de *imaginar* consecuencias, de *entender* la conexión entre los actos y sus consecuencias, y de atribuir grados de *confianza* a la ocurrencia de uno u otro escenario, todas cualidades que asociamos al razonamiento consciente. Éste es un tercer sentido en que podemos ocupar la palabra "racional": el del uso de la razón. No obstante, estas atribuciones las hacemos fundamentalmente en un sentido retórico y no literal, puesto que también las haremos en ejemplos en los cuales los individuos sean, por ejemplo, plantas u otros seres vivos comúnmente considerados incapaces de razonar o de tener pensamiento conciente.

haberlo llevado si no llovió; de haber sabido que no llovería (esto es, de haber conocido el estado de la naturaleza), se habría podido evitar la desagradable consecuencia de acarrear todo el día el paraguas en vano. No obstante, cada vez que crea que es suficientemente posible (*probable*) que llueva lo llevará de nuevo.

Bajo esta formulación, un problema de decisión bajo incertidumbre se representa por medio del conjunto de actos $\mathcal{A}$, un conjunto de consecuencias $\mathcal{C}$, un conjunto de estados de la naturaleza $\mathcal{S}$ (denotamos por S su número de elementos), y una función $\pi : \mathcal{S} \rightarrow$IR, explicitando el grado de confianza que el individuo deposita en la ocurrencia del escenario s. Asociado a cada acto, entonces, existen consecuencias distintas en cada escenario s : el acto a está asociado a las consecuencias $\{c_1^a, ..., c_S^a\}$, teniendo cada una de ellas, respectivamente, un grado de confianza de $\{\pi_1, ..., \pi_S\}$ (independiente de a).

Ejemplo 7. *Un automovilista viajando por la carretera encuentra una bomba de bencina. En ese momento puede optar entre dos acciones: parar a llenar el estanque (llamémosle a_1) o seguir (llamémosle a_2). Digamos que le faltan 200 km. de viaje, que sabe que no existe otra bomba en el camino, pero que no sabe si la bencina que le queda es suficiente para los 200 km o no. Si para, llega atrasado a una reunión importante; si se le acaba la bencina, no llega.*
Es natural pensar en dos escenarios: la bencina que tiene "sí es suficiente" (estado s_1), y "no es suficiente" (s_2). Ambos escenarios claramente son mutuamente excluyentes. Las consecuencias de cada acto son: de a_1, llegar atrasado (llamémosle consecuencia c_1), independientemente de si era o no suficiente la bencina que ya tenía, vale decir, la consecuencia es la misma en los dos escenarios; de a_2, llegar a la hora (consecuencia c_2), lo que ocurriría en el escenario s_1, y no llegar (consecuencia c_3), lo que ocurriría en el escenario s_2.
Supongamos que el automovilista tiene las siguientes preferencias sobre las consecuencias: $c_2 \succ c_1 \succ c_3$. Ingredientes de su problema de decisión son, entonces, la evaluación o utilidad de las acciones, $U(a_1)$ y $U(a_2)$, que está relacionada con las valoraciones de las consecuencias $u(c_1)$, $u(c_2)$ y $u(c_3)$, y con sus creencias respecto de la verosimilitud de cada escenario, π_1 y π_2(que naturalmente son subjetivas, porque ¿cómo podría tener una creencia objetiva sobre la duración de la bencina que tiene en el estanque?).

Dijimos que imaginaríamos preferencias tanto sobre actos como sobre consecuencias. Imaginemos que ambas son representables por funciones de utilidad, digamos:

$$\begin{aligned} U &: \mathcal{A} \rightarrow \text{IR} \\ &: a \rightarrow U(a) \end{aligned} \tag{1.1}$$

en el primer caso, y

$$\begin{aligned} u &: \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{IR} \\ &: c \rightarrow u(c) \end{aligned} \tag{1.2}$$

La racionalidad en el primer sentido, el del axioma 3 (esto es, transitividad de la preferencia) está garantizada por la transitividad de U. La racionalidad en el segundo sentido (esto es, que los actos sean juzgados por su consecuencias probables) sugiere una relación entre U y u del siguiente estilo:

$$U(a) = f\left(u\left(c_1^a\right), ..., u\left(c_S^a\right); \pi_1, ..., \pi_S\right)$$

Una de tales funciones es la llamada función de **Utilidad Esperada**, o de **von Neumann-Morgenstern**, llamada así en honor a sus creadores[2], el matemático John von Neumann (también conocido por su rol protagónico en el desarrollo del computador) y el economista Oskar Mogenstern:

$$U(a) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s u\left(c_s^a\right) \tag{1.3}$$

donde π_s tiene la interpretación de una probabilidad que el individuo asocia a la consecuencia s.

La función que evalúa la consecuencia, $u\left(c_s^a\right)$, recibe el nombre de **función de Bernoulli** o **función de felicidad**. En la mayoría de las aplicaciones que veremos en este curso, c_s^a corresponde al nivel de consumo que alcanzaría el individuo si escogiera el acto a y se materializara el estado s. En la mayoría de las aplicaciones, también, analizaremos para facilitar la exposición el caso en que sólo hay dos estados de la naturaleza, esto es:

$$U\left(c_1, c_2\right) = \pi_1 u\left(c_1\right) + \pi_2 u\left(c_2\right) \tag{1.4}$$

Entonces, la función de utilidad esperada es el valor esperado de la "felicidad" o función de Bernoulli. Se debe enfatizar que el valor esperado de la función Bernoulli no es lo mismo que el valor esperado del consumo o consecuencia que se obtenga.

Ejemplo 8. *En el ejemplo del automovilista, una evaluación de utilidad esperada sería la siguiente:*

$$\begin{aligned} U(a_1) &= \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_1) = u(c_1) \\ U(a_2) &= \pi_1 u(c_2) + \pi_2 u(c_3) \end{aligned}$$

[2] En rigor, no son sus creadores (esta función fue usada en el mismo contexto por otros autores más de cien años antes, como veremos más adelante) sino quienes le dieron una justificación formal como método de decisión.

luego,

$$\begin{aligned} a_1 &\succsim a_2 \Leftrightarrow u(c_1) \geq \pi_1 u(c_2) + (1-\pi_1)\, u(c_3) \\ &\Leftrightarrow \frac{u(c_1)-u(c_3)}{u(c_2)-u(c_3)} \geq \pi_1 \end{aligned}$$

Así, parar a llenar el estanque es la mejor decisión para esta persona si la probabilidad de que le alcance la bencina (π_1) es suficientemente baja. Qué tan baja debe ser para que convenga parar, depende de la comparación entre qué tan importante es llegar atrasado a la reunión $[u(c_1) - u(c_3)]$, y de qué tan importante es no llegar $[u(c_2) - u(c_3)]$.

Algunas propiedades de la función de Utilidad Esperada son:

1. Es una generalización de la teoría del capítulo 1: bajo certidumbre, el acto a tiene una única consecuencia posible, esto es, independiente del escenario, $c_s^a = c_{s'}^a$ para todo $s, s' \in \mathcal{S}$. Se sigue entonces que $U(a) = u\left(c_s^a\right) \sum_{s=1}^{S} \pi_s = u\left(c^a\right)$, vale decir, la utilidad de la acción y la de la consecuencia son la misma, como habíamos dicho, por lo que la distinción entre acciones y consecuencias no era necesaria. Alternativamente, si una persona está completamente segura de la ocurrencia de un estado, digamos el s, entonces le atribuye probabilidad 0 a todos los otros, y $U(a) = 0{*}u\left(c_1^a\right) + ... + 1{*}u\left(c_s^a\right) + .., 0{*}u\left(c_S^a\right) = u\left(c_s^a\right).$
2. La evaluación de los actos es racional en el sentido 1 (por la transitividad), y en el sentido 2 porque no sólo depende de las consecuencias y las creencias, sino que "propende" a actos con mejores consecuencias (según $u(c)$). En efecto, si dos actos entregan las mismas consecuencias en todo escenario salvo uno, entonces el acto con la mejor consecuencia es también el de mayor U.
3. Finalmente, la aditividad de la función implica que la evaluación de una consecuencia no depende de lo habría ocurrido bajo ese acto en escenarios alternativos. Sobre este punto volveremos más adelante.

En lo que sigue nos concentraremos en el caso en que las consecuencias se refieren a niveles de consumo de un único bien o canasta. En diversas aplicaciones –notablemente en finanzas– es interesante entender el efecto de la incertidumbre en las decisiones. Por ejemplo, el efecto del riesgo en las decisiones de inversión. Para ello es útil caracterizar las preferencias $U(a)$, a lo que nos abocamos a continuación.

2. Aversión al riesgo

Considere la siguiente situación: en una conversación entre dos amigos surge la idea de hacer una apuesta simple. Cada uno de ellos escoge decir "cara" o "sello". Se lanza una moneda al aire, y si sale cara, quien dijo

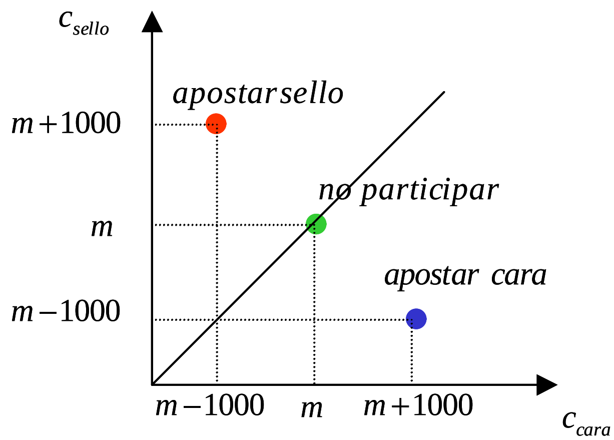


Figura 1. Cara o Sello

"sello" le paga a quien dijo "cara" \$ 1.000, mientras que si sale sello, quien dijo "cara" paga los \$ 1.000.

En nuestra gramática, esta situación se "escribe" de la siguiente forma: cada persona enfrenta una decisión en $\mathcal{A}$ ={no participar, participar y decir cara, participar y decir sello}, con las consecuencias asociadas, en términos de la cantidad de dinero con que terminen, de $\mathcal{C} = \{m + 1000, m, m - 1000\}$, donde m es la cantidad que tiene antes de la apuesta. Los estados de la naturaleza son $\mathcal{S}$ ={cara, sello}. En la figura 1 se representan gráficamente las acciones posibles en el espacio del consumo contingente en la ocurrencia de cada estado (esto es, el nivel de consumo que el individuo alcanzaría de darse cada estado posible).

La línea creciente, de 45°, se denomina **línea de certeza**, puesto que muestra el conjunto de perfiles de consumo libres de riesgo, esto es, cuyo valor no depende del estado de la naturaleza que se materialice.

Tenemos dos preguntas en mente:

1. Si estuviesen obligados a jugar, ¿preferirían decir cara, sello o estarían indiferentes?
2. Pudiendo escoger libremente sobre qué apostar, ¿preferirían jugar o no participar?

La primera pregunta se refiere a la probabilidad que cada persona le asocie a que la moneda salga cara o sello. En efecto, la utilidad esperada de apostar a cada alternativa es:

$$\begin{aligned} U(\text{apostar a cara}) &= \pi_{cara} u\,(m + 1000) + \pi_{sello} u(m - 1000) \\ U(\text{apostar a sello}) &= \pi_{cara} u\,(m - 1000) + \pi_{sello} u(m + 1000) \end{aligned}$$

Cara es mejor que sello si

$$U(\text{apostar a cara}) \geq U(\text{apostar a sello}) \Longleftrightarrow$$
$$\pi_{cara} \geq \pi_{sello}$$

Si no hay razón para suponer que un resultado es más probable que otro (esto es, si $\pi_{cara} = \pi_{sello} = \frac{1}{2}$), entonces, la persona debiera estar indiferente sobre a qué apostar. Si la moneda tuviera los dos lados iguales (por ejemplo, dos caras), una persona obligada a apostar a sello lo encontraría injusto porque perdería seguro. Si se le obligara apostar a cara, sería injusto para su contraparte. Decimos que esta apuesta es justa si el individuo está indiferente entre apostar cara o sello. Observe que si la apuesta es justa, tiene un valor esperado de 0. En el ejemplo, con probabilidad $\frac{1}{2}$, la persona gana \$1000, y con probabilidad $\frac{1}{2}$ los pierde, de manera que si y es la ganancia o pérdida como consecuencia de la apuesta, obtenemos:

$$E[y] = \frac{1}{2} * 1000 + \frac{1}{2} * (-1000) = 0$$

En general, decimos que una apuesta es **justa** si su pago tiene un valor esperado de 0. Por otra parte, se le llama **juego justo** a cualquier lotería o perfil de pagos riesgosos tales que su valor esperado es 0. Se le llama **línea de juegos justos** a todos los perfiles de consumo contingente que se pueden generar a partir de alterar un determinado perfil por la vía de agregarle juegos justos.

Imagine, por ejemplo, una persona con un perfil de consumo libre de riesgo $c_1 = c_2 = \overline{c}$. Si esta persona acepta una lotería que paga x_1 en el estado 1 y x_2 en el estado 2, entonces su nuevo perfil de consumo es:

$$c_1 = \overline{c} + x_1 \quad c_2 = \overline{c} + x_2$$

Si la lotería es un juego justo, su valor esperado es cero:

$$\begin{aligned} \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 &= 0 \\ &\Rightarrow x_2 = -\frac{\pi_1}{\pi_2} x_1 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} c_2 &= \overline{c} + x_2 \\ &= \overline{c} - \frac{\pi_1}{\pi_2} x_1 \\ &= \overline{c} - \frac{\pi_1}{\pi_2} (c_1 - \overline{c}) \end{aligned}$$

Entonces, el conjunto de todas las combinaciones posibles de consumo en los estados 1 y 2 que es posible generar a partir de $\overline{c}$ por medio de la

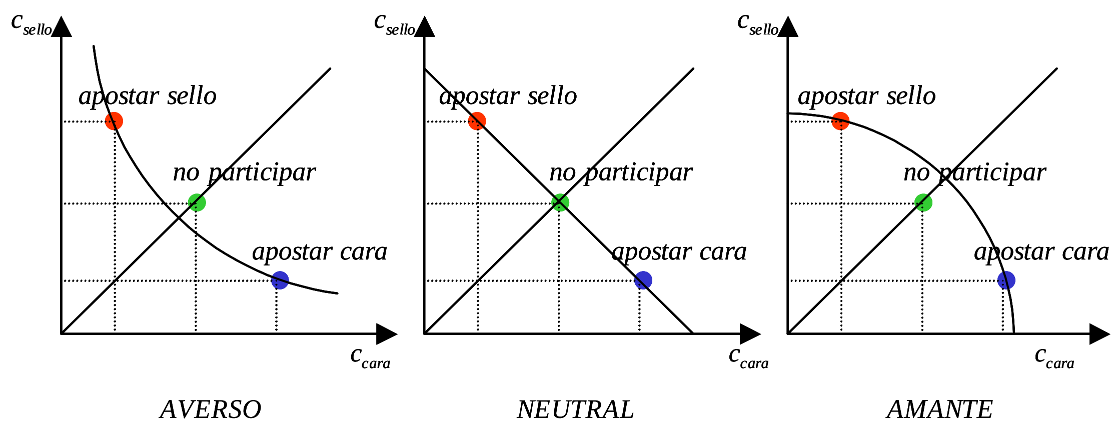


FIGURA 2. Aversión al Riesgo y convexidad de Curvas de Indiferencia

aceptación de juegos justos es:

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{\bar{c}}{\pi_2} - \frac{\pi_1}{\pi_2} c_1 \\
&\Leftrightarrow \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2 = \bar{c}
\end{aligned}
$$

Este conjunto corresponde a la línea de juegos justos. Observe que todos estos perfiles de consumo entregan el mismo valor esperado del consumo, aunque con distintos niveles de riesgo.

La segunda pregunta, entonces, la podemos reescribir como: ¿está dispuesta una persona con un consumo seguro de m a entrar en un juego justo? Es decir, ¿está dispuesta a dejar la seguridad de m, y reemplazarla por la posibilidad de ganar o perder, sin haber ganancia *ex ante* en valor esperado?

La respuesta es por cierto subjetiva, de manera que nos limitamos a clasificar y etiquetar las posibilidades:

DEFINICIÓN 16. *Una persona se dice* ***aversa al riesgo*** *si, partiendo de un consumo libre de riesgo, prefiere no jugar un juego justo. Se dice amante si lo prefiere, y neutral si está indiferente.*

En el ejemplo, como apostar a cara y a sello le son indiferentes, ambos puntos pasan por la misma curva de indiferencia. La pregunta de la aversión al riesgo, entonces, se traduce en una de convexidad de la curva de indiferencia, como lo muestran los gráficos en la figura 2.

Así, un mapa de curvas de indiferencia convexo representa a un averso al riesgo, uno cóncavo a un amante del riesgo, y uno lineal a una persona neutral al riesgo. Recordando nuestra discusión del capítulo 1, un individuo averso al riesgo tiene una función de utilidad esperada $U(c_1, c_2)$ cuasicóncava y una TMS decreciente. Uno neutral al riesgo, por su parte, tiene una TMS

constante, que no depende del nivel de riesgo asumido ni tampoco de su nivel de consumo. Observe que TMS constante equivale a decir $u'(c)$ es constante (¿por qué?), digamos:

$$u'(c) = a$$

Entonces,

$$u(c) = ac + b \tag{2.1}$$

es la forma general de la función Bernoulli de una persona neutral al riesgo.

Es importante notar que la curva de indiferencia de cualquier individuo, sea averso, amante o neutral al riesgo, es tangente a la línea de juegos justos en la línea de certeza. En efecto,

$$\begin{aligned} dU &= \pi_1 u'(c_1)dc_1 + \pi_2 u'(c_2)dc_2 = 0 \\ &\Rightarrow \ dc_2 = -\frac{\pi_1 u'(c_1)}{\pi_2 u'(c_2)} dc_1 \\ TMS &= \frac{\pi_1}{\pi_2}\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \\ &\Rightarrow \ TMS\,|_{c_1=c_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \end{aligned}$$

Esto significa que, partiendo de una posición sin riesgo, localmente toda persona (independientemente de sus preferencias) está indiferente entre aceptar o no un juego justo, esto es, localmente es neutral al riesgo.

En el caso de certidumbre, decíamos que la función de utilidad $U(a)$ era ordinal, esto es, que cualquier transformación monótona creciente de ella representaba las mismas preferencias. Lo mismo es cierto de la función de utilidad esperada, que también juzga acciones, pero no de la función Bernoulli, que juzga consecuencias, como veremos a continuación. En este caso, sólo una transformación lineal preserva el orden de preferencias.

En efecto, cualquier transformación lineal de la función Bernoulli representa la misma preferencia:

$$\sum_s \pi_s u(c_s^*) > \sum_s \pi_s u(\overline{c}_s)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left(\sum_s \pi_s u(c_s^*)\right) + \beta > \alpha\left(\sum_s \pi_s u(\overline{c}_s)\right) + \beta$$

$$\Leftrightarrow \sum_s \pi_s\left(\alpha u(c_s^*) + \beta\right) > \sum_s \pi_s\left(\alpha u(\overline{c}_s) + \beta\right)$$

si α es positivo.

Ejemplo 9. *Si la función Bernoulli $u(c) = \ln c$ representa la preferencia de un individuo y hay dos estados de la naturaleza, escribimos la utilidad* *esperada como*

$$\begin{aligned} U(a) &= \pi_1 \ln c_1^a + \pi_2 \ln c_2^a \\ &= \ln (c_1^a)^{\pi_1} + \ln (c_2^a)^{\pi_2} \end{aligned}$$

Entonces, la función

$$\begin{aligned} V(a) &= e^{U(a)} \\ &= e^{\ln\left(c_1^a\right)^{\pi_1} + \ln\left(c_2^a\right)^{\pi_2}} \\ &= (c_1^a)^{\pi_1} (c_2^a)^{\pi_2} \end{aligned}$$

representa la misma preferencia.

EJEMPLO 10. *En el ejemplo del automovilista, vemos que cualquier transformación lineal de u sigue entregando el mismo valor crítico* $\pi_1^* \equiv \frac{u(c_1)-u(c_3)}{u(c_2)-u(c_3)}$ *a partir del cual conviene seguir de largo: si* $v(c) = \alpha + \beta u(c)$, *entonces*

$$\begin{aligned} \frac{v(c_1) - v(c_3)}{v(c_2) - v(c_3)} &= \frac{\alpha + \beta u(c_1) - (\alpha + \beta u(c_3))}{\alpha + \beta u(c_2) - (\alpha + \beta u(c_3))} \\ &= \frac{\beta u(c_1) - \beta u(c_3)}{\beta u(c_2) - \beta u(c_3)} \\ &= \frac{u(c_1) - u(c_3)}{u(c_2) - u(c_3)} = \pi_1^* \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(c) = c$ define a un neutral al riesgo, de manera que

$$\begin{aligned} u(c_s) &= c_s \\ &\Rightarrow E[u(c_s)] = \sum_s \pi_s u(c_s) = \sum_s \pi_s c_s = E[c_s] \end{aligned}$$

Por el contrario, si $u(c_s)$ es cóncava, entonces $E[u(c_s)] < E[c_s]$ y la TMS es decreciente:

$$\begin{aligned} TMS &= \frac{\pi_1}{\pi_2} \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \\ \frac{dTMS}{dc_1} &= \frac{\pi_1}{\pi_2} \frac{u''(c_1)\, u'(c_2) - u''(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial c_1} u'(c_1)}{[u'(c_2)]^2} \le 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi_1}{\pi_2} \frac{u''(c_1)\, u'(c_2) - u''(c_2) u'(c_1) \frac{-\pi_1 u'(c_1)}{\pi_2 u'(c_2)}}{[u'(c_2)]^2} \le 0 \\ &\Leftrightarrow u''(c_1) + u''(c_2) \frac{\pi_1 [u'(c_1)]^2}{\pi_2 [u'(c_2)]^2} \le 0 \end{aligned}$$

lo que ocurre sólo si $u''() < 0$.

Así, una función Bernoulli cóncava representa a un averso al riesgo, una lineal a un neutral y una convexa a un amante, como se representa en la figura 3.

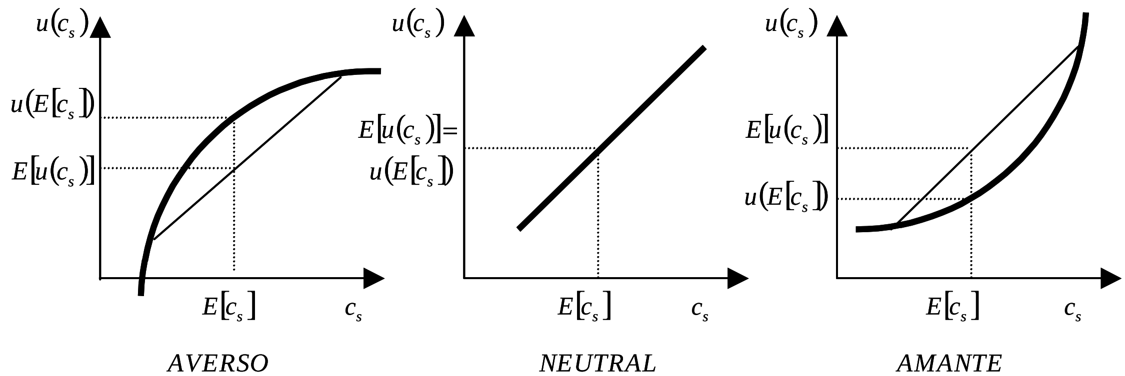


FIGURA 3. Aversión al Riesgo y Concavidad Función Bernoulli

Una transformación cóncava de $u(c_s^a)$ produce una función más cóncava, y por lo tanto representa a una persona más aversa, esto es, a otra preferencia. En otras palabras, en el caso de la función bernoulli no es cierto que cualquier transformación monótona creciente de ella represente las mismas preferencias, por lo que no basta que la función bernoulli sea cuasicóncava para afirmar que el individuo es averso al riesgo[3].

Es por esto que las medidas del grado de aversión al riesgo son en realidad medidas del grado de concavidad de la función Bernoulli. Hay dos medidas locales de aversión al riesgo que se ocupan comúnmente: el **grado de aversión absoluta al riesgo**, y el **grado de aversión relativa al riesgo**, definidos respectivamente por las fórmulas:

$$\begin{aligned} A(c) &= -\frac{u''(c)}{u'(c)} \\ R(c) &= -\frac{u''(c)}{u'(c)}c \end{aligned}$$

2.1. La paradoja de San Petersburgo. El riesgo es comúnmente considerado un mal: los individuos típicamente prefieren la certidumbre. La siguiente es un argumento ofrecido por el matemático Daniel Bernoulli para justificar la concavidad de las funciones Bernoulli (por supuesto él no las llamó de ese modo), y por tanto, de acuerdo a nuestra discusión anterior, la aversión al riesgo como actitud universal de la gente.

[3]En el caso de la función de utilidad esperada $U(c_1, c_2)$, sin embargo, basta con su cuasiconcavidad. Es decir, podemos afirmar que el individuo es averso al riesgo si su función bernoulli es cóncava, o alternativamente, si su función de utilidad esperada es cuasi cóncava.

Bernoulli propuso en 1738 –dos siglos antes del desarrollo de la utilidad esperada– la siguiente paradoja: se le ofrece a una persona la posibilidad de participar (previo pago) en una lotería. La lotería consiste en que la persona debe lanzar una moneda al aire; si sale sello, recibe un premio de \$2. Si sale cara, lanza la moneda de nuevo. Cada vez que lanza la moneda, el premio en caso de sello se duplica.

La pregunta es cuánto debiera estar dispuesta a pagar una persona por el derecho a participar en esta lotería.

Para un matemático (probabilista) como Bernoulli, la pregunta de si una persona debiera estar dispuesta a pagar o no el valor esperado de la lotería tenía sentido como punto de referencia, toda vez que el valor de \$1 con probabilidad 1 ciertamente es \$1, esto es, el valor esperado bajo certidumbre es intuitivo.

Los infinitos resultados posibles de la lotería son de la forma {sello en el primer lanzamiento, sello en el segundo, sello en el tercero, ...}. Sea k la variable aleatoria "número del lanzamiento en que sale sello por primera vez". Entonces, el premio en k es 2^k, y la probabilidad de que sea k es $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. El valor esperado de la lotería es entonces:

$$E[c] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

esto es, infinito. Ésa es la paradoja: si no parece razonable que una persona pague \$ 500 millones por entrar a una lotería en que va a ganar menos que eso con una probabilidad tan alta, mucho menos pagar 500 veces esa suma. Pero de acuerdo al cálculo anterior, cualquier suma finita es una subestimación del valor de la lotería.

La solución que Bernoulli propone consiste en representar el valor que la persona le atribuye al premio no directamente, sino evaluado por una función $u(2^k)$. Si esa función es cóncava, entonces la suma converge y, de hecho, el valor de la lotería puede ser pequeño e intuitivamente razonable. Por ejemplo, si $u(c) = c^{\frac{1}{2}}$, la utilidad esperada de la lotería es:

$$E[u] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} = 2.4142$$

Dos pesos y medio es sin duda una cifra más razonable que "infinito" como valor de la lotería. La función $u(c)$ es, naturalmente, la función Bernoulli.

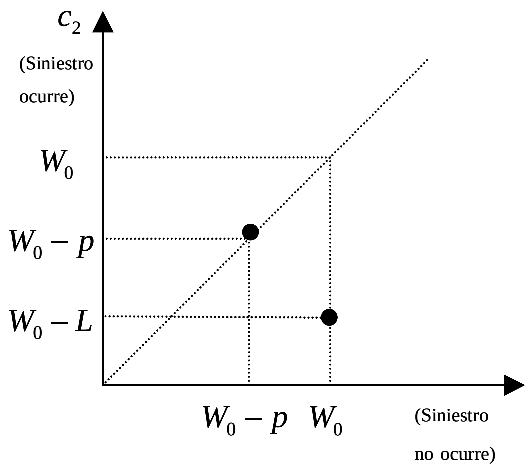


FIGURA 4. Seguro

3. Aplicación: seguros

Consideremos el caso de un individuo averso al riesgo que debe decidir si contratar un seguro que cubra total o parcialmente la pérdida asociada a la ocurrencia de un siniestro (robo, incendio, etc.). El individuo tiene un ingreso o riqueza "inicial" W_0 (antes de que se revele el estado de la naturaleza). Los estados de la naturaleza son $\mathcal{S}$ ={no ocurre el siniestro, ocurre el siniestro}, y las creencias son $\{\pi_1, \pi_2\} = \{\pi_1, (1 - \pi_1)\}$. En s_2 el individuo pierde un monto L.

Imaginemos que una compañía de seguros ofrece un seguro a este individuo, que le entrega una indemnización de monto z en caso de que ocurra el siniestro, a cambio de una prima p.[4] Entonces, denotaremos el "contrato de seguro" como un par $\langle z, p\rangle$ que especifica cuál es el monto que la compañía de seguros se compromete a entregar al asegurado en caso que ocurra el siniestro, y la prima que debe pagar el asegurado por ello. Analizaremos primero el caso de un seguro que devuelve la totalidad de la pérdida al asegurado en caso que ocurra el siniestro, al que denominamos **seguro de cobertura completa**. En la figura 4 se presenta la situación del individuo sin seguro, y su situación cuando toma este contrato de seguro, que es de forma $\langle L, p\rangle$.

Cualquier individuo, sea amante, neutral o averso al riesgo, estaría dispuesto a pagar algo por este seguro, ya que es una promesa de un cheque en caso de accidente. La máxima prima que el individuo está dispuesto a pagar por el seguro, que denotamos $p_{\text{máx}}$, es aquella que lo deja indiferente

[4] La prima del seguro corresponde al monto de dinero que debe pagarse a la compañía de seguros, independientemente del estado de la naturaleza que se realice.

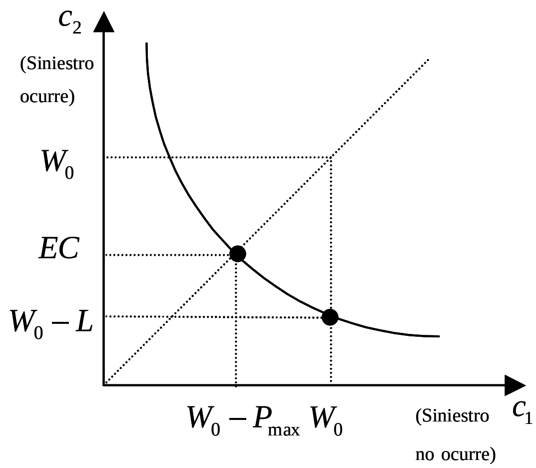


FIGURA 5. Máxima Prima a pagar por el seguro: el caso de la cobertura completa.

entre comprar no comprar el seguro; es decir, el valor de p que satisface

$$\pi_1 u\left(W_0\right) + \pi_2 u\left(W_0 - L\right) = u\left(W_0 - p\right)$$

Definimos el ingreso **equivalente cierto** (EC) como aquel nivel de ingreso cierto que deja al individuo con el mismo nivel de utilidad esperada que sin seguro. Gráficamente, en la figura 5 vemos que en el caso descrito, $p_{\text{máx}}$ corresponde a la diferencia entre la riqueza inicial del individuo y el "equivalente cierto": $(W_0 - EC)$.

Ahora bien, $p_{\text{máx}}$ corresponde a $(W_0 - EC)$ sólo en este caso particular, en que el seguro es de cobertura completa. Esto es así porque con cobertura completa, una vez contratado el seguro el nivel de ingreso que se obtiene es siempre el mismo, independiente del estado de naturaleza. Por ello en este caso tiene sentido comparar la utilidad sin seguro (con incertidumbre) con la utilidad que entrega un nivel de ingreso cierto (con seguro, sin incertidumbre). Sin embargo, en muchos casos de interés los seguros no ofrecen cobertura completa, sino sólo parcial. En estos casos debemos comparar la utilidad sin seguro (con incertidumbre), con la utilidad esperada con seguro, que sigue siendo con incertidumbre. Por lo tanto, el equivalente cierto ya no cumple ningún rol en el cálculo de la máxima prima que el individuo está dispuesto a pagar.

EJERCICIO 17. *Representa en un gráfico la situación con y sin seguro, cuando el seguro cubre la pérdida sólo parcialmente, porque un deducible de \$D es de cargo del asegurado. ¿Cómo encuentra $p_{\text{máx}}$ en este caso?*

En conclusión, la regla general es que $p_{\text{máx}}$ es la prima que satisface:

$$\pi_1 u\left(W_0\right)+\pi_2 u\left(W_0-L\right)=\pi_1 u\left(W_0-p\right)+\pi_2 u\left(W_0-p-L+z\right)$$

donde z es la indemnización pagada por el seguro en caso que ocurra el siniestro (es decir, $z=L-D$ en el caso del deducible).

Ahora consideremos el caso más general. Imaginemos que una compañía de seguros ofrece un seguro que en caso de que ocurra el siniestro, le devuelve un monto z (indemnización) y cobra q por cada peso de indemnización, de modo que el contrato es de la forma $\langle z, qz\rangle$. El individuo puede escoger el monto z que desee comprar (aunque lo más que puede pagar es $z=\frac{W_0-L}{q}$). Entonces, el problema de optimización del individuo (para una solución interior) se puede escribir como:

$$\max_z \pi_1 u\left(W_0-qz\right)+\pi_2 u\left(W_0-L+z-qz\right) \tag{3.1}$$

La condición de primer orden es:

$$\begin{aligned}
&\pi_1 u'\left(c_1\right)(-q)+\pi_2 u'\left(c_2\right)(1-q)=0\\
&\Rightarrow \pi_2 u'\left(c_2\right)(1-q)=\pi_1 q u'\left(c_1\right)\\
&\Rightarrow \frac{\pi_1 u'\left(c_1\right)}{\pi_2 u'\left(c_2\right)}=\frac{(1-q)}{q}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

La primera expresión corresponde a la tasa marginal de sustitución, como lo vimos antes. La segunda corresponde a la tasa marginal de sustitución de mercado (TMSM): a partir de la situación inicial sin seguro, el precio q por peso de indemnización define una restricción presupuestaria entre consumo en estado 1 y consumo en estado 2. Al pasar de la situación inicial a cualquier otro punto en la restricción tenemos:

$$\begin{aligned}
dc_2 &= \left(w_0-L\right)-\left(w_0-L+z-qz\right)=-z(1-q)\\
dc_1 &= \left(w_0\right)-\left(w_0-qz\right)=qz
\end{aligned}$$

Luego, $\frac{dc_2}{dc_1}=-\frac{(1-q)}{q}$, de modo que TMSM$=\frac{(1-q)}{q}$. La solución se muestra en la figura 6.

Dado que estamos considerando un individuo averso al riesgo, las curvas de indiferencia son convexas, por lo que la CSO está asegurada.

Al analizar la condición que surge de la CPO, vemos que si $q=\pi_2$, obtenemos como resultado que lo óptimo para este individuo es contratar un seguro tal que $c_1=c_2$; es decir, un seguro de cobertura completa. Cuando la prima se obtiene de $q=\pi_2$, es decir, cuando la prima es igual al gasto esperado para la compañía de seguros por concepto de pago de indemnización, decimos que es una **prima actuarialmente justa**. Este concepto se relaciona directamente con el concepto de juego justo, ya que una prima actuarialmente justa genera un conjunto de perfiles de consumo con la propiedad de que todos tienen el mismo consumo esperado. Entonces, es una consecuencia natural de la definición de aversión al riesgo el que el individuo

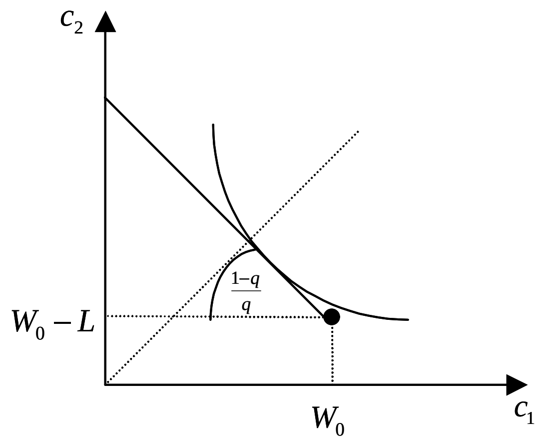


FIGURA 6. Cobertura óptima de seguro

escoja el seguro de cobertura completa (lo que se puede reinterpretar como que rechaza todos los demás perfiles de consumo posibles, que constituirían un juego justo).

En el caso en que $q > \pi_2$ (es decir, cuando la prima es mayor que el gasto esperado), en la línea de certeza la TMS es mayor que la $TMSM$. Luego, dada la convexidad de las curvas de indiferencia, es claro que el óptimo se da con $z < L$, es decir, con un seguro de cobertura incompleta.

4. Aplicación: Información asimétrica

En la aplicación anterior se definió una prima actuarialmente justa como aquella que es igual al gasto esperado para la compañía de seguros por concepto de pago de indemnización, es decir, $p = \pi_2 z$ (donde π_2 es la probabilidad de ocurrencia del siniestro, y z es la idemnización pactada). Hay casos, sin embargo, en que la compañía de seguros de hecho no conoce π_2 para cada individuo. En efecto, si los individuos difieren en su nivel de riesgo, de modo que hay individuos de tipo más riesgoso (π_2 alto), y otros de tipo menos riesgoso (π_2 bajo), entonces el cálculo de la prima actuarialmente justa requiere de información que la compañía de seguros desconoce. En ese caso, decimos que hay información asimétrica: el individuo (asegurado) conoce π_2, pero la compañía de seguros no. Dos situaciones de naturaleza distinta pueden generar esta asimetría:

- Selección adversa: en este caso, los individuos difieren en su tipo –y la compañía de seguros no conoce el tipo de cada individuo–.
- Riesgo moral: en este caso, los individuos son idénticos entre sí, pero pueden llevar a cabo acciones –inobservables para la compañía de

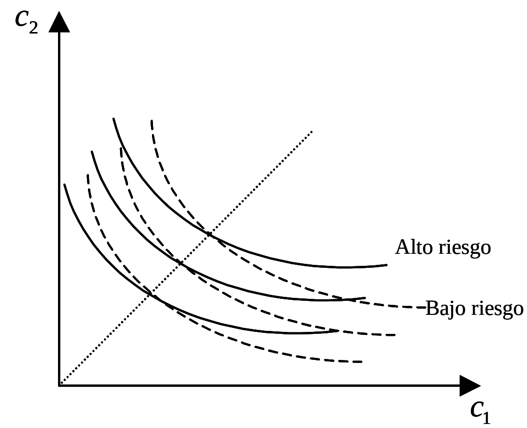


FIGURA 7. Mapas de curvas de indiferencia para individuos de alto riesgo (línea continua) y bajo riesgo (línea punteada).

seguros– que modifican su probabilidad de ocurrencia del siniestro. Es decir, los individuos pueden afectar π_2 con sus acciones (alternativamente, podrían afectar el nivel de gasto asociado a la ocurrencia del siniestro).

En lo que sigue analizaremos cada uno de estos casos por separado, aunque posiblemente muchas veces ellos se presentan simultáneamente.

4.1. El problema de la selección adversa. Considere dos tipos de individuo, de alto riesgo (A) y de bajo riesgo (B) respectivamente. La probabilidad de que ocurra el siniestro (accidente, por ejemplo) es mayor para los individuos A que para los B, de modo que $\pi_2^A > \pi_2^B$. Aún si ambos tipos de individuo tuvieran la misma función Bernoulli, sus mapas de curvas de indiferencia serían diferentes: la pendiente de las curvas de indifencia sobre la línea de certeza (que corresponde a $\frac{\pi_1}{\pi_2}$) es menor para los individuos de riesgo alto que para los individuos de riesgo bajo, como se muestra en la figura 7.

Si las compañías de seguros pudieran identificar a los individuos de alto y bajo riesgo y cobrarles primas diferentes, la prima actuarialmente justa sería mayor para los individuos de alto riesgo que para los individuos de bajo riesgo. Más aún, si ofrecieran contratos de la forma $\langle L, \pi_2^A L\rangle$ y $\langle L, \pi_2^B L\rangle$ a los individuos A y B respectivamente, los individuos de ambos tipos querrían comprar ese seguro: si denotamos por $p^A_{\text{máx}}$ y $p^B_{\text{máx}}$ la máxima prima que los individuos A y B están dispuestos a pagar por un seguro de cobertura completa respectivamente (tomando como su mejor alternativa no tener seguro), sabemos que $\pi_2^A L < p^A_{\text{máx}}$ y $\pi_2^B L < p^B_{\text{máx}}$.

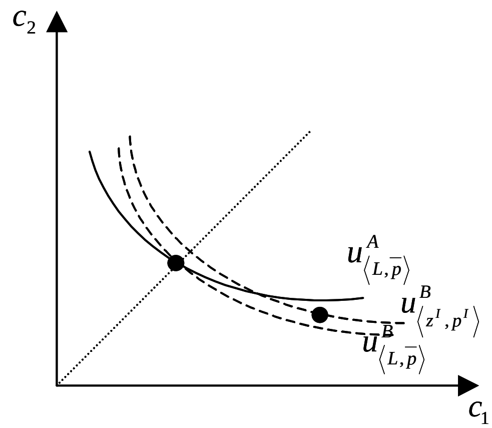


Figura 8. Contrato agrupador y separador.

Suponga, en cambio, que las compañías de seguro no pueden identificar a los consumidores de alto y bajo riesgo. Si las compañías siguen ofreciendo los contratos $\langle L, \pi_2^A L\rangle$ y $\langle L, \pi_2^B L\rangle$, todos los individuos escogerán el segundo, ya que este último promete la misma indemnización a un menor costo que el primero. Imagine, en cambio, que ofrecen un seguro de cobertura completa con prima $\overline{p} = \overline{\pi_2}L$, donde $\overline{\pi_2} = \alpha\pi_2^A + (1-\alpha)\,\pi_2^B$ y α es la proporción de individuos de alto riesgo en la población. Indudablemente, todos los individuos de riesgo alto querrían tomar el contrato $\langle L, \overline{p}\rangle$, ya que pagarían una prima incluso menor que su prima actuarialmente justa. No es claro, sin embargo, que los individuos de bajo riesgo quieran tomar ese seguro: lo harán si $\overline{p} \leq p^B_{\text{máx}}$, y ello sólo ocurre si la proporción de individuos de alto riesgo (α) es suficientemente baja.

Suponga que $\overline{p} \leq p^B_{\text{máx}}$. Si además del contrato $\langle L, \overline{p}\rangle$ se ofrece un seguro con cobertura incompleta de forma $\langle z^I, p^I\rangle$, es posible que todos los individuos de riesgo bajo prefieran este contrato por sobre $\langle L, \overline{p}\rangle$, como en el caso que se muestra en la figura 8. Si ello ocurre, el contrato $\langle L, \overline{p}\rangle$ ya no es viable, ya que la compañía de seguros que lo ofrece perdería a todos los clientes de riesgo bajo y tendría pérdidas en valor esperado. La prima del seguro de cobertura completa, entonces, debería aumentar hasta $p^A = \pi_2^A L$. Si el contrato de cobertura incompleta es preferido por sobre $\langle L, p^A\rangle$ sólo por los individuos de riesgo bajo, estaremos en una situación en que los individuos de distinto tipo se autoseleccionan en seguros diferentes: los de riesgo toman el contrato $\langle L, p^A\rangle$, y los de bajo riesgo el contrato $\langle z^I, p^I\rangle$. En ese caso, de hecho, los individuos dan a conocer su tipo (antes desconocido) a las compañías de seguros a través de su elección de contrato. Por esta razón decimos que este par de contratos $\langle L, p^A\rangle$ y $\langle z^I, p^I\rangle$ es "separador".

El problema de la selección adversa es en realidad un problema más general, que no sólo se presenta en los mercados de seguros. Un ejemplo clásico es el planteado por Akerlof (1970), quien describe un mercado de autos usados, en que la calidad del automóvil ofrecido en venta no es observable por el comprador.[5] Dado que no pueden verificar que los autos ofrecidos sean de buena calidad, los compradores no están dispuestos a pagar un precio alto por ellos. En este ejemplo, los vendedores dan a conocer su tipo (antes desconocido) a los compradores a través de su decisión de venta: sólo los vendedores de autos en malas condiciones (baja calidad) están dispuestos a venderlos a un precio bajo.

La selección adversa se encuentra también en los mercados de títulos transables, como las acciones. Por ejemplo, cuando un inversionista transa con información privilegiada puede obtener retornos anormales: compra cuando anticipa alzas, vende cuando anticipa bajas, y su información especial le permite predecir mejor que el resto cuándo ocurrirán esas bajas y alzas de precio. La ganancia de un inversionista es la pérdida de su contraparte, por lo que la posibilidad de que se transe con información privilegiada hace menos atractiva la participación en estos mercados a los individuos con menor información.

En los tres ejemplos la selección adversa dificulta la operación de los mercados. Cuando ocurre en un grado extremo, puede llegar a hacerlos inviables. Por otro lado, cuando es posible se desarrollan instituciones que pretenden controlar sus efectos negativos: vemos que los autos se venden con garantía, o que se desarrollan leyes de protección al consumidor. La mala fe es una figura que aparece en los códigos de comercio. De la misma forma, el comerciar con información privilegiada es ilegal en muchos países.

4.2. El problema del riesgo moral. Considere un individuo que debe decidir cuánto esfuerzo realizar para reducir la probabilidad de ocurrencia del siniestro, π_2. Las acciones que puede llevar a cabo para reducir π_2 incluyen, por ejemplo, transitar a una velocidad baja para evitar un accidente de tránsito, contratar una persona que encienda luces de noche al ausentarse de la casa en vacaciones para evitar robos, etc. Todas estas acciones son costosas para el individuo, pero puede ser óptimo llevarlas a cabo en ausencia de seguro para reducir la probabilidad de ocurrencia del siniestro. Sin embargo, una vez contratado un seguro –y limitada con ello la incertidumbre–, lo óptimo para el individuo es reducir o dejar de llevar a cabo estas acciones.

Alternativamente, es posible que el problema de riesgo moral se manifieste en un mayor gasto asociado a la ocurrencia del siniestro. Considere

[5] En este caso, los vendedores difieren en su tipo, donde el "tipo" ahora se refiere a la calidad del auto vendido.

por ejemplo el caso de un seguro de salud que promete reembolsar un porcentaje α del gasto en que incurre el individuo en caso de enfermedad. En ausencia del seguro, el individuo debe pagar el precio de cada prestación de salud; con seguro, en cambio, sólo debe pagar un porcentaje $(1-\alpha)$ del precio real de la prestación. Dado que enfrenta un precio más bajo por cada prestación, es probable que al contratar el seguro, el individuo consuma mayor cantidad de prestaciones –o escoja prestadores más caros–. Antes de contratar el seguro, entonces, el individuo realizaba un esfuerzo por reducir su gasto, que se reflejaba en que no consumía prestaciones cuyo beneficio consideraba que no compensaba el costo.[6] Luego de contratar el seguro el individuo disminuye su esfuerzo por reducir su gasto en salud, dado que parte de ese gasto es pagado por la compañía de seguros. Ahora bien, si las compañías de seguro anticipan este cambio de comportamiento de los individuos, ajustarán su prima de acuerdo a ello: si en ausencia de seguro el gasto asociado al siniestro es L^0 y luego de contratar el seguro es L^1, la prima actuarialmente justa será $p^1 = \pi_2\left(\alpha L^1\right)$. En resumen, los asegurados consumen prestaciones adicionales al contratar un seguro de salud, aún cuando preferirían no consumirlas si enfrentaran su costo real al momento de la compra; sin embargo, ese costo sí es pagado por el mismo asegurado a través de una mayor prima. El gasto esperado total en salud incurrido por el asegurado corresponde a la suma de la prima más el gasto por pago de prestaciones:

$$
\begin{aligned}
p^1 + \pi_2\left(1-\alpha\right)L^1 &= \pi_2\left(\alpha L^1\right) + \pi_2\left(1-\alpha\right)L^1 \\
&= \pi_2 L^1
\end{aligned}
$$

En ausencia de seguro, en cambio, su gasto esperado total sería solamente $\pi_2 L^0$. Luego, el gasto esperado en salud incurrido por el asegurado aumenta al contratar un seguro. Este mayor gasto posiblemente es subóptimo, ya que se debe al consumo de prestaciones cuyo beneficio se consideraba que no compensaba el costo. Este problema no puede ser resuelto a través de un contrato de seguros con una cobertura condicional en el esfuerzo del asegurado –un contrato del tipo “seguro cubre porcentaje α si gasta poco, y un porcentaje menor si no”–, ya que el gasto “óptimo” asociado a cada diagnóstico varía con el nivel de gravedad del mismo, lo que no es fácilmente observable para la compañía de seguros. Esto es lo que justifica la práctica común de los seguros de salud de ofrecer planes de cobertura incompleta, de manera de balancear el beneficio de una mayor cobertura –la reducción de la incertidumbre– con el costo de ella –el aumento en el gasto–.

El riesgo moral es en realidad un problema más general, que se presenta cuando una parte de una trasacción puede llevar a cabo una acción en forma oculta que afecta los pagos de la otra parte. Una aplicación de esta idea a

[6] Un ejemplo de ello son exámens que permiten lograr una mayor certeza en el diagnótico de enfermedades, pero que se consideran innecesarios en ausencia de seguro.

nivel de la empresa es el de la inobservabilidad del esfuerzo realizado por los trabajadores en su labor. Dado que el esfuerzo es costoso para el trabajador y no es observable, si se le paga un salario fijo, él realizará un esfuerzo bajo. En este caso, el problema del riesgo moral se presenta porque la empresa no puede ofrecer un salario condicional en el esfuerzo del trabajador –un contrato del tipo "el salario es alto si realiza esfuerzo alto, y bajo si no"– ya que el esfuerzo realizado no es verificable. Esto es lo que justifica la práctica común de ofrecer contratos con pago condicional en las ventas –lo que normalmente implica que el vendedor debe asumir parte del riesgo asociado a la ocurrencia de un estado de la naturaleza en que las ventas sean bajas a pesar de haber realizado un esfuerzo alto–.

EJERCICIO 18. *Considere un empresario cuya función Bernoulli es* $u_E = 20v - w$*, donde* v *es el volumen de ventas mensual, y* w *es el salario pagado al vendedor. La probabilidad de obtener un volumen de ventas alto depende del esfuerzo del vendedor –lo que no puede ser observado por el empresario–: con esfuerzo alto (*$e = 10$*), las ventas son altas con probabilidad* $0{,}8$ *y bajas con probabilidad* $0{,}2$*, mientras que con esfuerzo bajo (*$e = 5$*), las ventas son altas con probabilidad* $0{,}2$ *y bajas con probabilidad* $0{,}8$*. La utilidad del vendedor depende del salario y de su esfuerzo: su función Bernoulli es* $u_V = \sqrt{w} - e$*. El vendedor podría, si quisiera, trabajar en otra empresa y obtener una utilidad* $U_R = 10$*. El empresario, sin embargo, no puede observar el nivel de esfuerzo del vendedor. Muestre que la utilidad del empresario se maximiza si ofrece un contrato con pago variable –que incentivará al vendedor a realizar un esfuerzo alto–: un contrato que establece un salario* $w_A = \frac{4225}{9}$ *si la ventas son altas, y* $w_B = \frac{1600}{9}$ *si las ventas son bajas. Note que debe tomar en cuenta dos tipos de restricciones: de participación (es decir, que el vendedor quiera trabajar en esta empresa y no en la otra), y de compatibilidad de incentivos (es decir, que el trabajador efectivamente prefiera realizar el esfuerzo alto y no el bajo si se diseña un contrato pensando en que el trabajador hará esfuerzo alto).*

5. Aplicación: carteras

Una segunda mirada al problema de la cartera entiende las decisiones de compra de activos no como la elección de un nivel de riesgo y una rentabilidad esperada, como se vio en el ejemplo del capítulo 3, sino como la elección indirecta de perfiles de consumo riesgoso.

Suponga que existen dos activos, A y B, con precios q_A y q_B, y dos estados de la naturaleza (1 y 2, correspondientes a "lluvia" y no "lluvia" si se quiere). Más aún, digamos que al activo A le va muy bien en el primer estado, pagando \$10, pero mal en el segundo, cuando paga \$2; y que al activo B le va igual en ambos estados (esto es, es libre de riesgo), pagando \$5.

Si la persona compra x_A unidades del activo A y x_B del activo B, entonces el nivel de consumo que alcanza en cada estado es:

$$\begin{aligned} c_1 &= 10x_A + 5x_B \\ c_2 &= 2x_A + 5x_B \end{aligned}$$

Por otro lado, si el inversionista dispone de $\$W$ para comprar en activos, las carteras que puede comprar satisfacen:

$$q_A x_A + q_B x_B \leq W$$

Observe la similitud de este problema con el modelo de los atributos de Lancaster. Esencialmente, estamos diciendo que una cartera se juzga de acuerdo a sus atributos, esto es, de acuerdo al perfil de consumo contingente que genera. El problema del inversionista entonces está dado por:

$$\begin{aligned} & & & \max_{x_A, x_B} \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) \\ \text{s/a} \quad & c_1 &=& \ 10x_A + 5x_B \\ & c_2 &=& \ 2x_A + 5x_B \\ & q_A x_A + q_B x_B &\leq& \ W \end{aligned}$$

Ejercicio 19. *Encuentre las condiciones que satisface la solución de este problema.*

Ejercicios

1. (*) Robinson Crusoe vive solo en una isla. Su alimento son los cocos que producen las palmeras de la isla, sin costo para Robinson. La función de utilidad es igual a $\sqrt{c_1 c_2}$ donde c_1 es el número de cocos que consume en el primer año y c_2 es el número de cocos que consume en el segundo año. Este año las palmeras produjeron 100 cocos. Él estima que la probabilidad que el próximo año produzcan 100 cocos es $0,6$ y que la probabilidad que produzcan 70 cocos es $0,4$.
   El problema de Robinson es decidir cuántos cocos de este año guardar para el próximo año. Él tiene 2 cajas donde podría guardar cocos sin que se deterioren y que sirven para exactamente 10 cocos cada una (no se pueden guardar menos de 10 cocos en una caja porque se echarían todos a perder).

   Se pide:
   Determine si a Robinson le conviene guardar 0, 10 ó 20 cocos de la cosecha de este año hasta el próximo año. Explique claramente su respuesta.
2. (*) Juan trabaja en la empresa A, que le paga un sueldo fijo de \$10.000 y un bono de \$4.400 si logra cumplir sus metas de venta. Es decir, si logra las metas recibe un ingreso total de \$14.400, y si

no las logra, un ingreso de \$10.000. La probabilidad de que cumpla las metas es p (probabilidad que él no puede modificar).

La función de utilidad de Juan, asociada al consumo en el estado de la naturaleza i, es de la forma $u_i = \sqrt{c_i}$ (donde i es un sub índice que toma valor 1 si alcanza las metas y cero si no). El precio de la canasta de consumo c es $p_c = 1$.

a) La empresa le propone cambiar el contrato por uno en que sólo paga un sueldo fijo \$12.100 (sin bono). Determine cómo debería ser la probabilidad p para que el individuo acepte este cambio de contrato.

b) Suponga que $p = 0{,}5$. Ahora la empresa B ofrece a Juan un trabajo que paga un sueldo fijo de \$16.900, pero es riesgoso en el sentido de que puede tener un accidente que le obligaría a gastar (de su bolsillo) un monto \$12.000 para recuperarse. La probabilidad de accidente es 0.4. ¿Acepta Juan esta oferta? (suponga que no puede comprar un seguro de accidente).

c) Juan sigue con las mismas opciones anteriores (contrato variable en A, contrato fijo en A, o contrato fijo en B (con probabilidad de accidente de 0.4)). Sin embargo, ahora puede comprar un seguro que le cubra todos sus gastos en caso de accidente; ¿cuál es la máxima prima que está dispuesto a pagar Juan por este seguro?

3. (*) Timor Ato está feliz con su trabajo: las horas que pasa en su oficina realmente no le molestan, y el ingreso que obtiene ($m = 100$) le resulta muy valioso: $u(m) = \sqrt{m}$. Sin embargo, lo inquieta la posibilidad de perder su trabajo y con ello su ingreso. A esta posibilidad le atribuye una probabilidad de 10 %.

   a) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por el **derecho** a contratar un seguro de desempleo por el monto que desee, en que por cada peso a recibir en caso de siniestro se paga un precio $p = \frac{1}{9}$?

   b) Imagine que este seguro existe, y que $p = \frac{1}{9}$. ¿A cuánto asciende el excedente de Timor?

   c) Compare sus respuestas en (a) y (b). Explique intuitivamente.

4. (**) Imagine dos pueblos A y B vecinos. Todos los años hay un huracán en uno de estos dos pueblos, pero nunca en ambos al mismo tiempo. En un año determinado, la probabilidad de que pase por el pueblo A es 0,5, y la probabilidad de que pase por el pueblo B es 0,5. Si no hay huracán, la cosecha anual del pueblo (A o B) es de 40,000 unidades. Si hay huracán, la cosecha se reduce a la cuarta parte (es sólo de 10,000 unidades).

   Las preferencias son iguales en ambos pueblos: la función de utilidad bernoulli del consumidor del pueblo A o B es de la forma $u = \sqrt{c}$, con $c =$ *consumo* (son aversos al riesgo). La única fuente de consumo es lo que se obtiene de la cosecha, que no es almacenable. Inicialmente ambos pueblos no están conectados (no saben de la existencia de sus vecinos).

a) Imagine ahora que ambos pueblos se conocen, y alguien propone firmar un contrato mediante el cual cada año después del paso del huracán, se junta la cosecha de ambos pueblos y divide el total en partes iguales (25,000 unidades para cada pueblo). ¿Aceptarán firmar este contrato ambos pueblos?

b) Relacione su resultado en *a*) con la definición de un individuo averso al riesgo de acuerdo a si acepta o no un juego justo (no basta con dar la definición; debe explicar cómo se aplica en este caso particular, mostrando todos los cálculos que sean necesarios).

c) Explique en qué se parece este contrato a un seguro (explicando si se parece a un seguro de cobertura completa o incompleta). Imaginando que el ingreso inicial es 40,000 y que la posible pérdida es 30,000 (de acuerdo a los datos del enunciado), indique cuál sería en este caso la prima del seguro, y muestre si esta sería una prima actuarialmente justa o no.

5. (**) José tiene un ingreso mensual de \$500,000 y debe escoger una casa para arrendar. Tiene dos alternativas posibles: una casa en el barrio A, u otra casa en el barrio B.

Ambas casas son idénticas, pero los barrios difieren en su seguridad: en el barrio A la probabilidad que (un mes cualquiera) entren y le roben \$100,000 es $p = 0{,}2$; en el barrio B dicha probabilidad es cero (el barrio B es totalmente seguro, nunca entran a robar).

La función de utilidad (bernoulli) de José es $u = \sqrt{w}$.

a) Si el arriendo de la casa en el barrio A cuesta \$200,000 mensuales, ¿cuál es el máximo arriendo que Juan está dispuesto a pagar por la casa en el barrio B? Explique brevemente la intuición de su resultado.

b) Suponga ahora que si José arrienda la casa en el barrio A, puede contratar un servicio de vigilancia que reduce la probabilidad de robo a cero. Suponga que el arriendo de la casa en el barrio A cuesta \$200,000 mensuales, y el de la casa en el barrio B cuesta más de \$500,000 mensuales.

1) ¿cuánto es lo máximo que José está dispuesto a pagar por el servicio de vigilancia mensualmente?; ¿y cuál sería la máxima prima que estaría dispuesto a pagar por un seguro de cobertura completa (que le devolviera los \$100,000 en caso de robo), si no existiera el servicio de vigilancia?

2) Compare y relacione sus respuestas a la pregunta *a*) y a las dos preguntas en (*b*) *i*.

c) Por último, suponga ahora que José puede contratar un seguro eligiendo el monto de la indemnización z. El costo por peso de indemnización es $q = 0{,}3$ (es decir, la prima es $0{,}3z$). Encuentre cuál es el monto de indemnización óptimo para Juan. Explique por qué si el seguro fuera actuarialmente justo Juan querría contratar $z^* = 100{,}000$ (no es necesario demostrar, sino explicar la intuición), y por qué en este caso (con $q = 0{,}3$) no es óptimo para Juan contratar un seguro de cobertura completa. En su respuesta suponga nuevamente que el arriendo de la casa B cuesta más de $500,000 mensuales.

6. (**) Don Juan, experto en Macroeconomía y Análisis de Coyuntura, cree que el año 2003 viene difícil. Él asigna las siguientes probabilidades a las distintas tasas de crecimiento del producto interno bruto.

Tasa de Crecimiento (%)	*Probabilidad*
0	0, 5
2	0, 4
3	0, 1

Don Juan tiene una riqueza inicial de $100,000 y su función de utilidad es de la forma $U = \sqrt{W}$ donde W es su riqueza final. Suponga que una empresa ha decidido contratar a don Juan para que les dé una predicción de la tasa de crecimiento para el año 2003. El informe dirá "la tasa de crecimiento para el año 2003 será de x por ciento", donde x puede tomar cualquier valor (incluso puede tener varios decimales). El pago que recibirá por el informe será

$$Pago = 25{,}000 - 5{,}000(TC - x)^2$$

donde TC es la tasa de crecimiento efectiva.

A modo de ejemplo, si dice $x = 1,5$ por ciento y la tasa de crecimiento es de 2 por ciento, entonces recibiría

$$\begin{aligned} Pago &= 25{,}000 - 5{,}000(2 - 1,5)^2 \\ &= 25{,}000 - 1{,}250 = 23{,}750 \end{aligned}$$

Obviamente, el pago se haría una vez conocida la tasa de crecimiento efectiva del año 2003.

Se pide:

Plantee SIN RESOLVER un problema de optimización que permita obtener el valor de x que maximiza la utilidad de don Juan. El planteamiento debe ser tal que el problema pueda ser resuelto con los métodos vistos en el curso.

7. (**) Un alumno valora su nota en el examen (E) sólo cuando aprueba, es decir:

$$u(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E < \overline{E} \\ E - \overline{E} & \text{si } E \geq \overline{E} \end{cases}$$

La aprobación ocurre cuando en el examen obtiene una nota mayor que la de presentación ($\overline{E}$). La nota es impredecible porque nunca se sabe qué va a preguntar el profesor. Por ejemplo, una buena nota se puede obtener con mucha suerte (estudiar justo lo que se pregunta) o con mucho estudio (saber todos los temas en profundidad), pero esto último es muy costoso y lo primero muy improbable. Explique por qué una persona será más arriesgada (por ejemplo, estudiando en profundidad unos pocos temas en lugar de saber un poco menos de cada tema pero cubrirlos todos) en la medida que "necesite" más nota en el examen.

8. (**) En invierno lloverá sobre la ciudad de Santiago fuerte con una probabilidad de π, y lloverá suave con una probabilidad de $(1 - \pi)$. La infraestructura de la ciudad tiene un valor de 100.000 millones. Una lluvia suave no alterará su valor, mientras que una lluvia fuerte generará pérdidas por 2.000 millones. Estas pérdidas, sin embargo, se podrían evitar construyendo colectores de aguas lluvia; la construcción de estos colectores cuesta 1.000 millones.

   Imagine la existencia de un agente representativo para la ciudad de Santiago, con preferencias dadas por

$$u(c_s) = \ln c_s$$

   donde c_s es el valor de la infraestructura en el evento de una lluvia de tipo s ($s = 1$ es lluvia fuerte, $s = 2$ es una lluvia suave) en miles de millones.

   a) Determine si este agente representativo es o no averso al riesgo, y en qué grado.
   b) Determine si la construcción del colector es o no un juego justo. Grafique estas posibilidades en el plano (c_1, c_2), indicando claramente la situación inicial, la situación con colector y la línea de juegos justos.
   c) Determine qué probabilidad de lluvia fuerte debería haber para que la construcción del colector sea preferida.
   d) En este escenario, ¿qué recomendaría si supiese que una lluvia fuerte ocurre cada cien años?

9. (**) Lustro Zapata es el dueño de una fábrica de zapatos; su único afán es el lucro. Su gran experiencia le permite predecir al comienzo de cada semestre el precio al cual podrá vender cada unidad del único modelo que fabrica. Con ese antecedente, decide sobre la contratación de trabajadores y otros insumos, que arregla en la

forma de contratos semestrales. El sueldo semestral de un trabajador es de 120, y el valor de la contratación de otros insumos por un semestre de 120 también. La tecnología de que dispone puede resumirse como

$$q = \ln L + \ln M$$

donde L es el número de trabajadores, y M el resto de los insumos; todas las cantidades están medidas en base semestral.
En vista del hecho que su capacidad predictiva es buena sólo para períodos semestrales, Lustro espera el comienzo de cada semestre para decidir qué hará en ese período.

a) Encuentre la función de costos de Lustro, y su mejor política de contratación de insumos en función de q.
b) Encuentre las mejores políticas de producción y contratación de trabajadores y otros insumos, en función de P, el precio de los zapatos.
c) Imagine que una legislación forzara a Lustro a hacer contratos de trabajo de al menos un año de duración. En concreto, suponga que Lustro sabe que el precio de los zapatos en el primer semestre será de 400, y le atribuye una probabilidad de un 50 % a que en el segundo semestre sea de 800 y de 50 % a 200. Si Lustro es neutral al riesgo, ¿cuántos trabajadores contrará?
d) Compare la situación en (b) con lo que hubiera hecho en ausencia de esta obligación. Explique claramente.

10. (***) Considere el caso de un empresario que debe escoger entre dos tecnologías para la fabricación de un producto, el que vende en un mercado perfectamente competitivo. La tecnología A requiere una inversión fuerte, pero permite producir con costos marginales más bajos que la B. En particular, las funciones de costo (incluyendo la inversión) asociadas a ambas tecnologías son las siguientes:

$$\begin{aligned} C_A(q) &= 10000 + 20q + \frac{1}{2}q^2 \\ C_B(q) &= 10 + 20q + 2q^2 \end{aligned}$$

a) Calcule el precio de venta del producto p a partir del cual al empresario le conviene escoger la tecnología A. Compruebe entonces, que al precio de $p = 100$ preferiría la B, mientras que al precio de $p = 200$ preferiría la A.
b) El problema de decisión se complica por el hecho de que la tecnología debe ser escogida antes de saber si la demanda será alta ($p = 200$) o baja ($p = 100$) [pero no la cantidad, que sigue pudiendo escogerse después de conocer el precio de venta]. Si el empresario tuviera una riqueza inicial de 7000 y fuera neutral al riesgo, ¿cuál es la mínima probabilidad que debiera asociarle

al estado de la naturaleza en que la demanda es alta para preferir la tecnología A?

c) Suponga, en cambio, que hay dos empresarios aversos al riesgo, idénticos entre ellos en cuanto a riqueza y posibilidades. Uno de ellos optó por A y el otro por B (donde sus diferentes decisiones se explican por las diferentes probabilidades que le asocian a cada evento). ¿Existe algún algún acuerdo que ambos pudieran suscribir, bajo el cual cada uno de ellos se compromete a mandarle un cheque al otro en estados distintos, y que deje a ambos en una posición libre de riesgo? Explique claramente.

Comentarios bibliográficos

Si bien el problema conceptual que la incertudumbre aporta al análisis de las decisiones ha acompañado a la teoría de la utilidad desde sus comienzos, no fue sino hasta el libro de John von Neumann y Oskar Morgenstern "La Teoría de los Juegos"(1946), en que desarrollaron axiomáticamente la función de utilidad esperada, que su análisis formal fue posible. Son subproductos de este desarrollo no sólo la teoría de juegos no cooperativos y sus aplicaciones (gran parte de la microeconomía moderna, y buena parte de la ciencia política y la sociología), sino también subdisciplinas completas como la economía financiera. La importancia de este desarrollo es de hecho tan monumental, que con certeza habrían recibido un premio Nobel de haber existido uno en ciencias sociales en esos años (el primero en economía se otorgó en 1969) o en matemáticas.
Hirshleifer (1958, 1961, 1965, 1966) fue pionero en sus aplicaciones en economía financiera. Su Teorema de Separación dio una base conceptual a las técnicas de evaluación de proyectos.

Referencias

1: Hirshleifer, Jack (1958), "On the Theory of Optimal Investment Decision", *The Journal of Political Economy,* Vol. 66, No. 4, pp. 329-352.
2: Hirshleifer, Jack (1961) "Risk, The Discount Rate, and Investment Decisions," *The American Economic Review,* Vol. 51, No. 2, pp. 112-120.
3: Hirshleifer, Jack (1965), "Investment Decision Under Uncertainty: Choice-Theoretic Approaches", *The Quarterly Journal of Economics,* Vol. 79, No. 4, pp. 509-536.
4: Hirshleifer, Jack (1966), "Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach", *The Quarterly Journal of Economics,* Vol. 80, No. 2, pp. 252-277.
5: Savage, L. (1957), "The Foundations of Statistics", Wiley. Revised edition, Dover, 1972.
6: Von Neumann, J. and O. Morgenstern (1946), "The Theory of Games", Princeton.

Parte 2

Equilibrio bajo Competencia Perfecta

En la primera parte se desarrolló un método general para representar y estudiar el comportamiento de individuos, y se ilustró su operatoria con diversos ejemplos, notablemente el del consumidor y el del productor que viven en ambientes perfectamente competitivos. Este método, sin embargo es sólo un ingrediente del enfoque económico para aproximarse al estudio de los problemas sociales, precisamente porque hasta ahora sólo hemos mirado el comportamiento de individuos aislados, que no interactúan directamente con otros individuos.

La teoría del equilibrio es entonces la segunda de las dos partes del método de análisis económico. Tal como la teoría del comportamiento individual tiene como objetivo describir y estudiar el comportamiento de individuos aislados, el objetivo de la teoría del equilibrio es describir y estudiar el comportamiento de sociedades aisladas o grupos de individuos. Un aspecto central de la teoría del equilibrio es el efecto que el comportamiento de un individuo tiene sobre el de otro. Este entrelazamiento de comportamientos (bajo el axioma 0) puede entenderse como el resultado del hecho general de que lo que unos individuos hagan tiene efectos en el bienestar de otros.

Aún cuando la interrelación entre los individuos sea un aspecto central de la teoría, existen algunas situaciones en las que esa interrelación puede ocurrir de manera indirecta. Por ejemplo, los agentes de una economía pueden relacionarse quizás sólo a través de los precios, en un intercambio anónimo. O bien, el grado de congestión generado por un grupo de automovilistas puede afectar a todos, pero ninguno de ellos en particular tiene la capacidad de cambiarlo. En casos como estos el análisis del comportamiento del grupo se simplifica considerablemente, porque es posible abordarlo como una suma de partes aisladas, siendo ésta una extensión sencilla de la teoría del comportamiento individual. Éste es el caso de una **economía perfectamente competitiva**, que estudiaremos en los siguientes cuatro capítulos. La noción de equilibrio apropiada para este caso, el **equilibrio walrasiano** o competitivo, se define en el capítulo 8, para analizarse en detalle en los siguientes capítulos en diferentes contextos: equilibrio parcial, equilibrio general en una economía de intercambio, y finalmente equilibrio general en una economía con producción.

Una sociedad entonces consiste de un grupo de individuos relacionados unos con otros. Una **economía**, nuestro objeto último de estudio, es una sociedad en que las relaciones tienen que ver con la organización de la explotación y uso de los recursos con que cuenta. La decisión colectiva que nos preocupa en este caso es la organización de la actividad económica: producción (qué bienes producir y cómo) y consumo (cómo repartir la canasta de bienes producida entre los consumidores), donde las posibilidades están acotadas por los recursos de que se dispone (dotación de bienes e insumos) y la tecnología (funciones de producción).

En una **economía de mercado**, el mecanismo de decisión consiste de los siguientes principios:

1. Establecimiento de derechos de propiedad. Se establece (bajo algún mecanismo) que cada persona es dueña de una determinada canasta de bienes (típicamente a través de la herencia) o insumos (por ejemplo, su capacidad de trabajar) que llamamos dotación. También puede ser dueño de ideas o conocimiento, que llamamos a veces capital humano, de otras tecnologías, y de participaciones sobre negocios establecidos. En todos los casos, el derecho de decidir sobre el uso de estos bienes, insumos o capacidades, y el beneficio de los frutos que generen, residen en sus dueños (con las limitaciones que la ley establezca).
2. Intercambio voluntario. La única forma de que una persona se adueñe de los bienes o recursos de otra es por la vía de la negociación voluntaria. Entonces, la dotación se puede reemplazar por otra canasta sólo si existen contrapartes con las cuales acordar el intercambio. Esto implica que dichas transacciones deben ser *mutuamente* beneficiosas.

Una economía organizada alrededor de estas directrices, y en que cada individuo (consumidor o empresario) enfrenta precios dados de los bienes e insumos, alcanza un equilibrio competitivo o walrasiano, que estudiaremos en los tres capítulos siguientes.

Una propiedad fundamental del equilibrio walrasiano se establece en el Primer Teorema del Bienestar, que dice que la asignación de recursos de una economía en equilibrio walrasiano es eficiente en el sentido de Pareto. Adam Smith (1776) acuñó la metáfora de la "mano invisible" para representar este resultado, según la cual el interés propio lleva a los participantes en el mercado a la consecución de un objetivo que ninguno de ellos posee, esto es, el bienestar del grupo.

CAPíTULO 8

Equilibrio Walrasiano

Este capítulo analiza en detalle la operación de un mercado en condiciones de competencia perfecta. Una economía en competencia perfecta es aquella en la que los esfuerzos de los individuos que la pueblan por conseguir mejores precios para los productos que compran o venden se han desplegado a tal nivel, que es imposible conseguir mejoras adicionales. Esto es, se ha negociado hasta el punto en que todos enfrentan ofertas y demandas infinitamente elásticas: nadie le compraría a un vendedor si cobrara más caro que sus competidores, ni a él le convendría cobrar menos porque no necesita hacerlo para vender toda su producción. Simétricamente, al consumidor le es imposible conseguir un precio menor para los bienes que compra, porque si intenta hacerlo el productor prefiere venderle a terceros. En escenarios como éste, la noción de equilibrio apropiada es la de Walras.

En cursos introductorios muchas veces se mencionan condiciones para la competencia perfecta como que el número de individuos sea grande a ambos lados del mercado, que todos los individuos estén informados de lo mismo, etc. En realidad, esas condiciones no son ni necesarias ni suficientes para que la economía produzca un ambiente perfectamente competitivo, aunque sea dable pensar que con ellas sea altamente factible conseguirlo. Lo desafortunado de esta manera de presentar la idea de la competencia perfecta es que su ingrediente fundamental, el esfuerzo desplegado por los individuos para mejorar su situación (o actividad competitiva), aparece relegado a un segundo plano o incluso queda invisible.

En este capítulo desarrollamos la noción de competencia perfecta, y de equilibrio walrasiano como método de representarla. Para ello definimos el equilibrio walrasiano en un mercado en forma aislada primero (equilibrio parcial), y luego considerando a todos los mercados en forma simultánea (equilibrio general). La convergencia al equilibrio y la estabilidad del mismo se discuten a continuación. Posteriormente se analiza el problema de la agregación, esto es, bajo qué condiciones podemos tratar la demanda y la oferta agregadas como el resultado de un problema de maximización de un "agente representativo". Discutimos además nociones generales de bienestar social, que luego aplicamos al estudio del equilibrio walrasiano. El resultado principal, conocido como Primer Teorema del Bienestar, establece que la

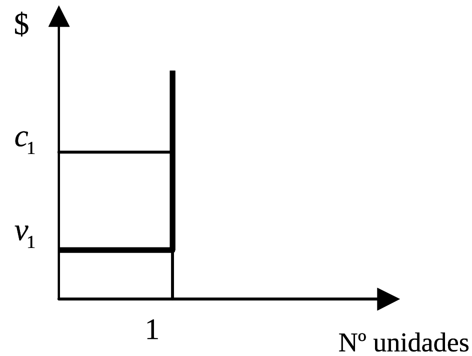


FIGURA 1. Un comprador y un vendedor

asignación de recursos de una economía en equilibrio walrasiano es eficiente en el sentido de Pareto.

1. Noción de competencia

Considere un mercado simple, en que un conjunto de n compradores potenciales quisieran comprar una (y sólo una) unidad del bien en caso de ser suficientemente barato, y donde un conjunto de m dueños del bien (cada uno poseyendo una unidad) estarían dispuestos a vender en caso de ser suficientemente atractivo. En particular, digamos que el comprador i está dispuesto a pagar a lo sumo $\$c_i$ por una unidad del bien (y \$0 por cualquiera adicional), y que el vendedor j lo vendería si se le pagara un precio de al menos $\$v_j$. Supongamos también que $n \geq m$. Así, la información de los compradores se resume en $C = \{c_1, ..., c_n\}$ y la de los vendedores en $V = \{v_1, ..., v_m\}$. Para ahorrar en notación, usaremos la valoración de cada uno para nombrarlos.

Imagine inicialmente sólo hubiera un vendedor y un comprador, como se muestra en la figura 1.

No tenemos todavía un argumento que nos permita predecir con algún grado de confianza qué pasaría si estos dos individuos se sientan a negociar, esto es, a qué precio cerrarían la transacción. Sin embargo, sí tenemos claridad sobre algunos puntos, a saber:

1. Existe un rango de precios $p \in [v_1, c_1]$ con la propiedad de que si la transacción se celebra a alguno de ellos, ambos individuos están mejor que en su situación inicial; en cambio, cualquier precio fuera de ese intervalo deja a alguno de ellos peor que no participando en este mercado. Entonces, si bien no sabemos qué precio acordarán, si acuerdan alguno tiene que ser uno de este intervalo.

2. En esta situación existen ganancias sociales del intercambio. En efecto, bajo el criterio de que es deseable que las oportunidades de que un miembro de la economía gane sin que otro pierda sean aprovechadas (el criterio de Pareto, que discutiremos en profundidad hacia el final de este capítulo), esta transacción es deseable desde una perspectiva social. Una medida monetaria de la ganancia de que esta transacción se realice es la diferencia en las valoraciones (medidas por las disposiciones a pagar) de uno u otro. En efecto, si el objeto cambia de manos desde el vendedor hacia el comprador, el valor que la persona que lo consuma le asigna cambia de v_1 a c_1. En este sentido, una medida de la ganancia social de la transacción es la diferencia, $c_1 - v_1$.

Podemos, entonces, ver esta situación de la siguiente forma: existe una torta a repartir de tamaño $g = c_1 - v_1$, llamada ganancias del intercambio o **excedente total**. Si el proceso de negociación termina con el acuerdo de transar a un precio p, el hecho que el acuerdo sea voluntario nos indica que $p \in [v_1, c_1]$, de manera que en realidad es una propuesta de división de la torta: el comprador se queda con una fracción $\frac{c_1 - p}{g}$ y el vendedor con una fracción $\frac{p - v_1}{g}$ de g. Le llamamos **excedente del consumidor** al pedazo del excedente total del que se apropia el comprador, y **excedente del vendedor** (o productor si ése fuera el caso) al pedazo del que se apropia el vendedor. Denotaremos al excedente del individuo i (sea comprador o vendedor) por π_i.

Es importante observar que en la generación de esta torta intervinieron ambos individuos. Una pregunta que surge naturalmente es cuánto aportó cada uno, y si ese aporte tiene alguna conexión con el tamaño del pedazo que le tocó. Es natural también pensar en el aporte del individuo como la diferencia entre la situación actual con aquella que se hubiera producido de no haber estado (o de sustraerse) de la economía. Llamémosle f_{-i} al excedente total que habría en otra economía idéntica a la actual salvo porque en esa otra falta el individuo i. Entonces, al aporte del individuo i se puede medir por la diferencia $(f - f_{-i})$. Intuitivamente, que f sea igual a f_{-i} significa que la torta hubiera sido igual sin que i estuviera, de manera que su aporte es 0: i no era necesario para hacer f. Denotamos al aporte de i por a_i.

En nuestro ejemplo, sin embargo, observamos que si el comprador no hubiera estado, no se podría haber generado el excedente, y lo mismo ocurre con el vendedor. Tenemos: $a_{c_1} = f - 0 = f$ y $a_{v_1} = f - 0 = f$. ¡La suma de los aportes de cada uno de los miembros de la economía es mayor que la torta que se formó! Es, entonces, evidentemente imposible crear un sistema en que cada individuo reciba como pago el valor total de su aporte.

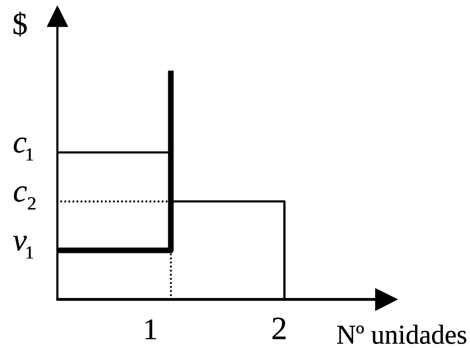


FIGURA 2. Dos compradores y un vendedor

Como veremos adelante, esto es una conclusión general que admite una sola excepción.

Modifiquemos el ejemplo, introduciendo un segundo comprador. Sin pérdida de generalidad, supongamos que su valoración es menor que la del primero (en caso contrario, sólo es necesario revertir sus nombres), como se representa en la figura 2. La aparición de un competidor para c_1 genera dos cambios importantes. En primer lugar, el rango de precios a los cuales la transacción se podría celebrar se achica, pasando de $[v_1, c_1]$ a $[c_2, c_1]$. Ello, porque ahora el vendedor siempre puede amenazar a c_1 con venderle a c_2, quien aceptaría eventualmente comprar a cualquier precio inferior a su valoración. Si c_1 quiere quedarse con el objeto, debe pagar al menos la valoración de c_2. Esto es, la competencia entre compradores mejora la posición negociadora del vendedor.

En segundo lugar, pese a que la torta no ha cambiado, sí cambió el aporte de c_1. En efecto, si él desapareciera, todavía habría un comprador y se podría hacer una torta (aunque de menor tamaño). Así, $a_{c_1} = (c_1 - v_1) - (c_2 - v_1) = c_1 - c_2$. Lo interesante es que, entonces, el aporte de cada individuo tiene quizás algo que ver con sus características personales (en esta economía, su valoración), pero mucho que ver con las características de los demás. c_1 puede ser "muy bueno" (en algún sentido) pero su aporte pequeño si hay algún sustituto cercano de él.

Por otro lado, sigue siendo cierto que la suma de los aportes es mayor que la torta misma. Diremos que en esta economía hay **apropiación incompleta** si la recompensa (excedente) de cada individuo es inferior a su aporte, esto es, si $\pi_i \leq a_i$ para todos, y con desigualdad estricta para al menos un individuo. En cambio, diremos que en la economía hay **apropiación completa** si $a_i = \pi_i$ para todos.

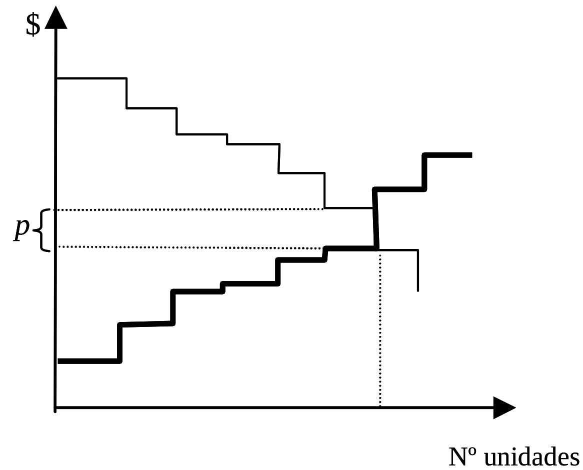


FIGURA 3. Varios compradores y vendedores, con apropiación incompleta

En el caso más general estas conclusiones se mantienen: la aparición de sustitutos empeora la posición negociadora para cada individuo y, recíprocamente, la aparición de competidores al otro lado del mercado la mejora; consecuentemente, mientras mayor competencia, más pequeño es el rango de precios a los que se podrían cerrar las transacciones. Por otro lado, en general se tiene apropiación incompleta: el excedente de cada participante es inferior a su aporte. Lo anterior se grafica en la figura 3.

Pero imagine una situación ligeramente distinta, en la que la transacción marginal se hace sin excedente, esto es, la valoración del comprador activo más pequeña coincide con la mayor valoración entre los vendedores activos, y en que además cada uno de estos individuos tiene un sustituto perfecto en el margen (esto es, existe alguien idéntico a cada uno de ellos), como se ilustra en la figura 4.

En este caso, el precio de venta está completamente determinado: ningún comprador puede conseguir un precio más bajo porque cualquier vendedor podría conseguir p vendiendo al comprador marginal. Ningún vendedor puede conseguir un precio mayor, porque todo comprador puede comprar a p del comprador marginal. La división de la torta, entonces, está completamente determinada, de manera que nadie tiene poder de negociación. Observe, en todo caso, que el número de unidades transadas está indeterminado toda vez que los individuos en el margen están indiferentes entre transar o no hacerlo.

En esta economía no sólo todos enfrentan ofertas y demandas perfectamente elásticas (en el sentido de que el precio no es negociable), sino que también cada individuo es recompensado exactamente en el valor de

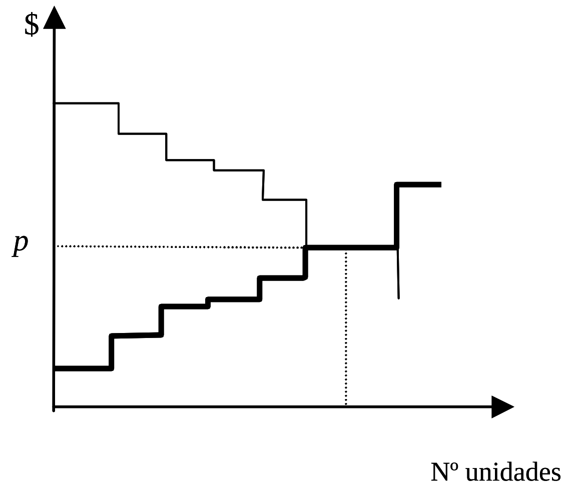


FIGURA 4. Varios compradores y vendedores, con apropiación completa

su aporte. El efecto de que un individuo se retire de la economía es una reducción en el excedente total igual a su excedente individual, de manera que hay apropiación completa. Entonces, las nociones de la completitud de la apropiación (esto es, la posibilidad de distribuir la torta de acuerdo a los aportes de cada individuo) y de la incapacidad de negociar las condiciones de la transacción están íntimamente ligadas. Cada vez que falla la condición de apropiación completa veremos que hay espacio para la negociación. Una economía en competencia perfecta es, entonces, no una en la que los individuos son tan pasivos que no se molestan en intentar mejorar las condiciones del intercambio en su favor, sino una en la que la configuración del mercado no deja espacio para que tales intentos sean fructíferos.

De lo anterior se desprende que no es necesario que exista un gran número de individuos para que haya competencia perfecta. Por ejemplo, si sólo existen dos compradores y un vendedor pero ambos compradores son idénticos, hay apropiación completa y por ende competencia perfecta, como se ilustra en la figura 5. En efecto, en este caso el precio es $p = c_1 = c_2$; ningún comprador estaría dispuesto a pagar un precio mayor, mientras que un precio menor no sería aceptado por el vendedor, que iría a ofrecerle el producto al otro comprador potencial. El vendedor tiene todo el poder de negociación porque su mejor opción alternativa es igual a la oferta que toma.

En este caso hay apropiación completa: $a_{c_1} = a_{c_2} = 0$ porque de no estar alguno de los compradores, el excedente total sería el mismo, y $a_{v_1} = f$, porque de no estar el vendedor no habría transacción. La suma de los aportes coincide con f. Cada aporte, además, coincide con el excedente de cada uno: $\pi_{c_1} = c_1 - p = 0$, $\pi_{c_2} = 0$ y $\pi_{v_1} = p - v_1 = f$.

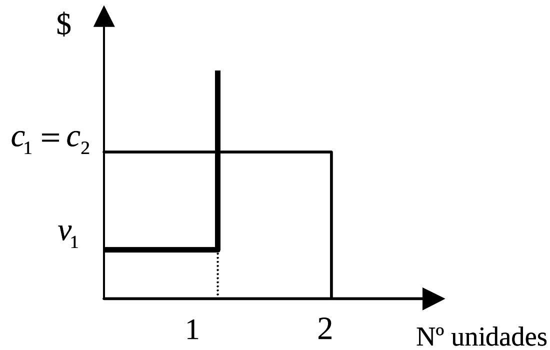


FIGURA 5. Dos compradores y un vendedor, con apropiación completa

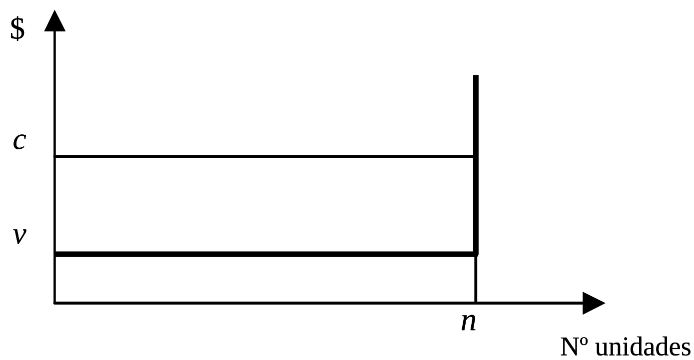


FIGURA 6. Muchos consumidores y compradores, con apropiación incompleta

Así, con tres individuos es posible que haya competencia perfecta. Por otro lado, también es posible que con un gran número de ellos no la haya, como ocurre en el ejemplo que se ilustra en la figura 6.En él, existe igual número (de tamaño arbitrario) de compradores y vendedores. Todos los compradores son iguales entre sí, y lo mismo ocurre con los vendedores. Desde el punto de vista de la determinación de las condiciones de la transacción y de la incompletitud de la apropiación esta situación es idéntica a la primera que analizamos, en que sólo había un individuo a cada lado del mercado.

Aunque un gran número de compradores y vendedores no es una condición ni necesaria ni suficiente para que la economía se encuentre en competencia perfecta, el último ejemplo nos da la pista de que en cierto modo es más "probable" que se de la competencia perfecta en mercados grandes. En efecto, si tenemos un gran número de compradores y vendedores heterogéneos, muy posiblemente la diferencia entre las valoraciones de los marginales va a ser pequeña, y además éstos van a tener sustitutos cercanos aunque tal vez no perfectos.

2. El equilibrio walrasiano

Veíamos que en una situación de competencia perfecta, existe un único precio al cual todos los individuos activos transan, y nadie de los que estarían dispuesto a hacerlo a ese precio está excluido del mercado. Esto implica que en el equilibrio de un mercado competitivo las cantidades ofrecidas y demandadas coinciden, puesto que de lo contrario existiría alguien que deseaba transar a ese precio y no consiguió hacerlo.

Entonces, si $x_1(p),\ x_2(p), ..., x_n(p)$ son las demandas de los n consumidores y $q_1(p),\ q_2(p), ..., q_m(p)$ las ofertas de los m productores o vendedores, en competencia tenemos que al precio al que se transa, p^*, se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(p^*) = \sum_{j=1}^{m} q_j(p^*) \tag{2.1}$$

Definición 17. *Se dice que un mercado está en* ***equilibrio walrasiano*** *si al precio p^* el exceso de demanda es nulo. Alternativamente, el* ***equilibrio walrasiano*** *de un mercado es un precio p^* y una asignación de cantidades consumidas $x_1,\ x_2, ..., x_n$ entre los n consumidores y de cantidades producidas $q_1,\ q_2, ..., q_m$ entre los m vendedores, con las propiedades de que las cantidad que cada participante recibe es la que querría comprar o vender al precio vigente, y que la suma de las cantidades consumidas coincide con la de las producidas.*

A la suma de las demandas se le conoce como **demanda agregada**, y similarmente a la de las ofertas como **oferta agregada** (no confundir con el significado que estos mismos términos reciben en macroeconomía):

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) \tag{2.2}$$

$$Q(p) = \sum_{j=1}^{m} q_j(p) \tag{2.3}$$

Su diferencia es la **función de exceso de demanda**:

$$E(p) = X(p) - Q(p)$$

En realidad, al escribir la función $X(p)$ omitimos una serie de variables que la afectan. Por ejemplo, en el modelo simple del consumidor que estudiamos en el capítulo 2 habíamos establecido que la demanda individual depende de los precios de todos los bienes que puede comprar (no sólo de aquél cuya demanda estudiamos) y además del ingreso. Se sigue, entonces, que la suma de esas demandas depende de los ingresos de cada consumidor y de los precios del resto de los bienes. Entonces, si hay dos bienes y n consumidores, tenemos:

$$X_1 = X_1 (p_1, p_2, m_1, ..., m_n) \tag{2.4}$$

Llama la atención el hecho de que no sólo el ingreso sino también su distribución afectan a la demanda agregada. En efecto, no podemos escribir en general:

$$X_1 = X_1 (p_1, p_2, M)$$

con $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, salvo en circunstancias muy particulares. Una mera redistribución del mismo ingreso entre los consumidores en general cambia la cantidad demandada total, de manera que cuando M cambia no podemos anticipar el cambio en la demanda agregada a menos que además sepamos cómo se distribuye ese cambio entre los consumidores.

Similarmente, la función $Q(p)$ también depende de otros factores, que afectan al costo marginal de producción de cada empresa. En general, tenemos:

$$Q(p) = Q(p, w_L, w_K) \tag{2.5}$$

de manera que el precio de equilibrio p^*, digamos del mercado del bien 1, se obtiene de:

$$X_1 (p_1, p_2, m_1, ..., m_n) - Q_1 (p_1, w_L, w_K) = 0 \tag{2.6}$$

Le llamamos análisis de **equilibrio parcial** al estudio del equilibrio de un mercado, sin prestar atención a lo que ocurre en otros mercados por la vía del "hechizo *ceteris paribus*", esto es, imaginando que los otros precios no cambian. Sin embargo, es claro que si los precios de los otros bienes afectan a la demanda de cada uno, y si los precios de los insumos afectan a la oferta de cada bien, no puede ser literalmente cierto que un cambio en un mercado no tendrá alguna manifestación en otro. Por ejemplo, un cambio en el mercado laboral va a afectar el nivel y la distribución del ingreso y por tanto la estructura completa de demandas.

En cambio, decimos que **una economía** está en equilibrio si los excesos de demanda de **todos y cada uno de los mercados** (tanto de bienes finales como de insumos) son nulos. Ello, porque sólo en ese caso no hay fuerzas que muevan los precios en alguna dirección. Cuando el análisis toma este hecho en consideración, decimos que es de **equilibrio general**.

Consideremos primero el caso de una **economía de intercambio puro**, esto es, una en la que no hay producción. Cada consumidor está dotado de una determinada canasta de bienes $(\overline{x}_{1i}, \overline{x}_{2i})$ o servicios, que puede intercambiar en mercados perfectamente competitivos. El valor de esa dotación a los precios (p_1, p_2) es $m_i = p_1\overline{x}_{1i} + p_2\overline{x}_{2i}$, por lo que el consumidor i puede comprar canastas que cuesten menos, esto es, cualquier (x_{1i}, x_{2i}) con la propiedad que $p_1 x_{1i} + p_2 x_{2i} \leq m_i$. Observe que en esta descripción el ingreso de los consumidores ya no es exógeno, sino el resultado de la escasez relativa de su dotación. Sea (x_{1i}^*, x_{2i}^*) la canasta que i escoge, esto es:

$$\{(x_{1i}^*, x_{2i}^*)\} = \arg \max_{(x_{1i}, x_{2i})} \{u_i(x_{1i}, x_{2i}) \mid \; p_1 x_{1i} + p_2 x_{2i} \leq p_1 \overline{x}_{1i} + p_2 \overline{x}_{2i}\}$$

Observe que para cada bien, la cantidad demandada depende de los precios de ambos bienes. La cantidad demandada de un bien ℓ por un consumidor i puede diferir de su dotación inicial de ese bien: cuando la supera, decimos que i es un demandante neto del bien ℓ, y en caso contrario decimos que es un oferente neto de dicho bien. El exceso de demanda por el bien ℓ se define como la diferencia entre la cantidad total demandada y la dotación total de dicho bien: $E_\ell(p_1, p_2; \overline{x}_{\ell 1,\ldots}, \overline{x}_{\ell n}) = \sum_{i=1}^n x_{\ell i}^*(p_1, p_2) - \sum_{i=1}^n \overline{x}_{\ell i}$.

Definición 18. *Se dice que una economía de intercambio está en un* ***equilibrio walrasiano*** *si a los precios (p_1^*, p_2^*) los excesos de demanda son nulos. Alternativamente, el* ***equilibrio walrasiano*** *de una economía es una lista de precios (p_1^*, p_2^*) y una asignación de cantidades consumidas $\{(x_{1i}^*, x_{2i}^*)\}$ para cada uno de los n consumidores con la propiedad que las cantidades demandadas totales de cada bien son las que cada consumidor querría comprar a los precios vigentes, y que la suma de las cantidades consumidas coincide con la de las dotaciones, esto es: $\sum_{i=1}^n x_{1i}^*(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^n \overline{x}_{1i}$ y $\sum_{i=1}^n x_{2i}^*(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^n \overline{x}_{2i}$.*

León Walras observó lo siguiente: como la canasta que demanda cada consumidor está en la frontera de posibilidades, ésta satisface:

$$p_1 x_{1i}^*(p_1, p_2) + p_2 x_{2i}^*(p_1, p_2) = p_1 \overline{x}_{1i} + p_2 \overline{x}_{2i}$$

Pero esto es cierto para todo i, por lo que si sumamos sobre i a ambos lados tenemos:

$$p_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^*(p_1, p_2) + p_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^*(p_1, p_2) = p_1 \sum_{i=1}^n \overline{x}_{1i} + p_2 \sum_{i=1}^n \overline{x}_{2i}$$

Arreglando:

$$p_1 \left(\sum_{i=1}^n x_{1i}^*(p_1, p_2) - \sum_{i=1}^n \overline{x}_{1i} \right) + p_2 \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^*(p_1, p_2) - \sum_{i=1}^n \overline{x}_{2i} \right) = 0$$

Esto es, la suma ponderada de los excesos de demanda de cada mercado debe ser nula, donde los precios son los ponderadores. Este hecho es conocido como **Ley de Walras**. Ella implica que si un mercado está en equilibrio, el otro también debe estarlo; en general, si existen k mercados y todos salvo uno están en equilibrio, entonces el $k-$ésimo también debe estarlo. La importancia de este resultado reside en que nos facilita el análisis significativamente. Si sólo hay dos bienes, el análisis de equilibrio parcial equivale al de equilibrio general. Si hay k bienes, necesitamos mirar $k-1$ mercados para entender el equilibrio general de la economía.

La Ley de Walras nos indica que al resolver el sistema de ecuaciones para encontrar los precios de equilibrio, habrán sólo $k-1$ ecuaciones linealmente independientes[1]. Luego, sólo podremos resolver para $k-1$ incógnitas: los precios relativos de los bienes. En el caso de dos bienes, encontraremos $p \equiv \frac{p_1}{p_2}$, pero nunca p_1 y p_2 por separado.

En una **economía con producción**, el equilibrio walrasiano igualmente exige que los excesos de demanda sean nulos, y la Ley de Walras se satisface del mismo modo. Existe una sola complejidad adicional en términos de su definición: necesitamos explicitar quiénes son los dueños de las empresas, puesto que por ejemplo mayores ganancias de una empresa se deben traducir últimamente en mayor ingreso del dueño de la empresa en su calidad de consumidor. Lo propio ocurre con los insumos.

Digamos que el consumidor i tiene derechos sobre una fracción α_{ij} de las ganancias de la empresa j, y que posee $\overline{K}_i \geq 0$ unidades de capital y $\overline{L}_i \geq 0$ unidades de trabajo. Entonces, el consumidor i escoge:

$$\begin{aligned} & \max_{x_{1i},x_{2i}} u\left(x_{1i},x_{2i}\right) \quad \text{sujeto a} \\ x_{1i}p_1 + x_{2i}p_2 \quad \leq \quad & \overline{x}_{1i}p_1 + \overline{x}_{2i}p_2 + w_L\overline{L}_i + w_K\overline{K}_i \\ & + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\pi_j^*\left(p, w_L, w_K\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

El valor de la canasta que compre no puede exceder el valor de los recursos de que dispone: su dotación de bienes, su dotación de insumos y las ganancias de las empresas en las que tiene participación. Las empresas, por su parte, en cada mercado resuelven:

$$\begin{aligned} & \max_{q_j,L_j,K_j} \pi_j = pq_j - \left(w_L L_j + w_K K_j\right) \quad \text{sujeto a} \\ & 0 \leq q_j \leq f_j\left(L_j, K_j\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Entonces, una economía se encuentra en un equilibrio walrasiano si a los precios de bienes (p_1^*, p_2^*) y de insumos (w_L, w_K) los excesos de demanda en

[1] Recuerde que n funciones $f_1(x)$, $..., f_n(x)$ son linealmente independientes si la ecuación

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + ... + \lambda_n f_n(x) = 0$$

se satisface para todo x sólo si $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

todos los mercados (de bienes y de insumos) son 0, esto es:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^{*} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{1i} + \sum_{j=1}^{m} q_{1j}^{*} \tag{2.9a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^{*} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{2i} + \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^{*} \tag{2.9b}$$

$$\sum_{j=1}^{m} L_{j}^{*} = \sum_{i=1}^{n} \overline{L}_{i} \tag{2.9c}$$

$$\sum_{j=1}^{m} K_{j}^{*} = \sum_{i=1}^{n} \overline{K}_{i} \tag{2.9d}$$

Las primeras dos ecuaciones señalan que la cantidad total que se consuma de cada bien tiene que coincidir con la que hay, que proviene de dos fuentes: dotaciones y producción. Las últimas dos señalan que se deben ocupar todos los recursos de que la economía dispone: la cantidad total demandada de insumos por parte de las empresas coincide con la suma de las dotaciones.

Definición 19. *Se dice que una economía con producción está en un* ***equilibrio walrasiano*** *si a los precios* (p_1^*, p_2^*, w_L, w_K) *los excesos de demanda son nulos. Alternativamente, el* ***equilibrio walrasiano*** *de una economía es una lista de precios* (p_1^*, p_2^*, w_L, w_K) *y una asignación de cantidades consumidas de bienes* $\{(x_{1i}^*, x_{2i}^*)\}$ *y vendidas de insumos* $\{(\overline{L}_i, \overline{K}_i)\}$ *para cada uno de los* n *consumidores, y cantidades producidas de bienes y contratadas de insumos por cada una de las empresas* $\left\{\left(q_{1j}^*, q_{2j}^*, L_j^*, K_j^*\right)\right\}$ *con la propiedad de que las cantidades demandadas totales de cada bien son las que cada consumidor querría comprar a los precios vigentes, que las cantidades totales de cada insumo son las que las empresas querrían comprar a los precios vigentes, y que la suma de las cantidades consumidas coincide con la suma de la de las dotaciones y de las producidas.*

Observe, por otro lado, que si sumamos las restricciones presupuestarias (que en el óptimo se satisfacen con igualdad) de los n consumidores obtenemos:

$$\begin{aligned} p_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + p_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} &= p_1 \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{1i} + p_2 \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{2i} + w_L \sum_{i=1}^{n} \overline{L}_i + w_K \sum_{i=1}^{n} \overline{K}_i \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \pi_j^* \left(p, w_L, w_K\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pero recordando que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$ para cada j, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\pi_j^*(p, w_L, w_K) &= \sum_{j=1}^{m} \pi_j^*(p, w_L, w_K) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(p_1 q_{1j}^* + p_2 q_{2j}^* - w_L L_j^* - w_K K_j^*\right)
\end{aligned}$$

De modo que al reemplazar lo anterior y reordenar la ecuación 2.10 obtenemos:

$$\begin{aligned}
p_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i} - \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{1i} - \sum_{j=1}^{m} q_{1j}^*\right) + p_2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i} - \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{2i} - \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^*\right) \\
+ w_L \left(\sum_{j=1}^{m} L_j^* - \sum_{i=1}^{n} \overline{L}_i\right) + w_K \left(\sum_{j=1}^{m} K_j^* - \sum_{i=1}^{n} \overline{K}_i\right) = 0 \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Es claro, entonces, que la ley de Walras se satisface: si tres de los cuatro mercados mencionados están en equilibrio, el cuarto también debe estarlo.

3. Convergencia al equilibrio

Decíamos que un mercado está en equilibrio al precio p^* cuando a ese precio el exceso de demanda es nulo, esto es, cuando $X(p^*) - Q(p^*) = 0$. Imaginemos que la economía se encuentra en alguna fecha t en una situación de desequilibrio. Digamos que la cantidad demandada sobrepasó a la producción, esto es, $X(p_t) - Q(p_t) > 0$. ¿Qué esperaríamos que ocurriera en las fechas siguientes? Observemos que algunos consumidores quedaron frustrados en t al no poder comprar; si algunos de ellos se hubieran topado con un productor que cobra un precio mayor que el resto, es posible que le hubiese comprado de todos modos. En otras palabras, si un productor sigue en $t+1$ la política de desviarse del resto y cobrar más caro, es posible que venda toda su producción y gane más que si no lo hace. En este período de ajuste, entonces, ya no es necesariamente cierto que todos cobran el mismo precio. Para retener la simplicidad, sin embargo, supongamos que existe un único precio en toda fecha. Aunque no sabemos su cuantía, sí sabemos que un exceso de demanda impulsa el precio al alza, y un exceso de oferta a la baja. Esto es:

$$X(p_t) - Q(p_t) > 0 \Rightarrow p_{t+1} > p_t \quad (3.1a)$$

$$X(p_t) - Q(p_t) < 0 \Rightarrow p_{t+1} < p_t \quad (3.1b)$$

Entonces, el precio no cambiará sólo en caso que no existan excesos de demanda (positivos o negativos) que lo impulsen a cambiar. Ésa es la noción de

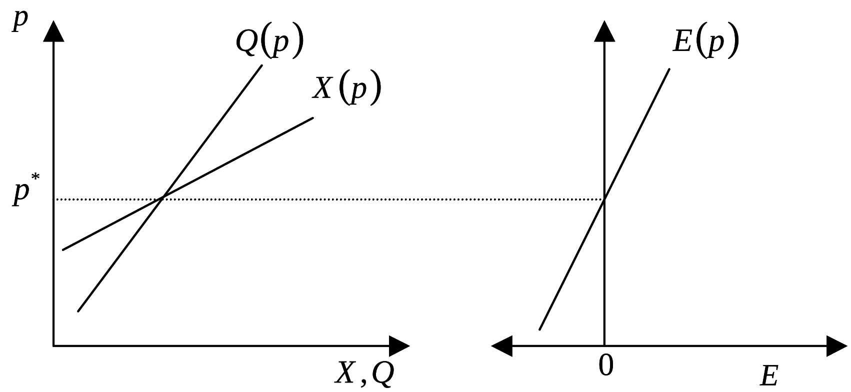


Figura 7. Equilibrio inestable: el caso del bien Giffen.

equilibrio walrasiano: una situación en la cual no hay fuerzas que provoquen un cambio en la economía (en nuestro caso, en el precio del bien).

Observe, sin embargo, que el pensar en esta motivación del equilibrio walrasiano invita a exigir más que lo que se enuncia en la definición. En efecto, imagine un mercado inicialmente en equilibrio, en el que por algún motivo la demanda aumenta. Este aumento en la demanda provoca un exceso de demanda, y el exceso de demanda lleva a que el precio suba. Pero, ¿disminuye esa alza en el precio el exceso de demanda, o lo aumenta? La respuesta no es completamente clara: si la demanda tuviese pendiente positiva (lo que ocurriría si para un número suficientemente grande de consumidores fuese un bien Giffen) y menor que la curva de oferta, como se ilustra en la figura 7, en realidad el exceso de demanda se agravaría, conduciendo a un aumento perpetuo en el precio de acuerdo al razonamiento anterior. Esto ocurre cada vez que la función de exceso de demanda, $E(p)$, tiene pendiente positiva. Esto es, si el equilibrio es un punto de reposo de un sistema dinámico, entonces predecir que una economía llegará a ese punto supone preocuparse de que el sistema de hecho converja a él. En otras palabras, de que el equilibrio sea estable.

Ahora bien, este ejemplo tiene una característica incómoda (además de recurrir a la idea del bien Giffen): en la zona en que la cantidad ofrecida es menor que la demandada, ocurre que la disposición a pagar por cada unidad (medida por la altura de la curva de demanda) es siempre inferior que su costo de producción (medido por la altura de la curva de oferta). Desde esta perspectiva, la predicción de que el precio va a subir es absurda, y mucho más que lo vaya a hacer a perpetuidad. En cambio, la predicción de que eventualmente la cantidad volverá al punto que se corresponda con p^* parece del todo razonable: no se producirán unidades que no son valoradas por los consumidores, y todas las unidades por las que alguien está dispuesto a pagar más que su costo de producción será producida. Si $P(X)$ y $P(Q)$ son las inversas de las funciones de demanda y oferta respectivamente, la predicción sobre el cambio fuera del equilibrio debería enunciarse como:

$$P(X_t) > P(Q_t) \Rightarrow Q_{t+1} > Q_t \tag{3.2a}$$
$$P(X_t) < P(Q_t) \Rightarrow Q_{t+1} < Q_t \tag{3.2b}$$

Ésta última de hecho corresponde al análisis marshalliano que enfatiza las brechas entre disposición a pagar y costo como fuerzas de cambio en el mercado, en contraposición con el análisis walrasiano, que enfatiza los excesos de demanda o de oferta como fuerzas de cambio. Es por Alfred Marshall y su manera de entender la naturaleza del (des)equilibrio que dibujamos habitualmente las inversas de las curvas de oferta y de demanda y no las primitivas, como el análisis de León Walras sugeriría. No obstante, debe observarse que:

1. Ambos criterios coinciden con curvas de demanda y de oferta "bien comportadas", esto es, con demanda con pendiente negativa y oferta con pendiente positiva. Entonces, en el caso común no sería necesario distinguir entre "equilibrio walrasiano" y "equilibrio marshalliano" aún cuando acuñáramos el segundo concepto.
2. Cuando queramos analizar el equilibrio de dos o más mercados simultáneamente, el enfoque de Marshall va a ser inviable. De hecho, mientras Marshall es considerado el mayor promotor del análisis de equilibrio parcial (esto es, el estudio de mercados en aislación), Walras es considerado el padre del análisis de equilibrio general.

Finalmente, debe enfatizarse que la teoría del comportamiento del mercado como un todo es una teoría de equilibrio. Si bien detrás de toda teoría de equilibrio existe una historia sobre qué pasaría fuera del equilibrio que lo justifica, como la que recién discutimos, ese movimiento en el desequilibrio no es una parte formal de la teoría. Recuerde, por ejemplo, nuestra insinuación de que la ley de un solo precio no tendría por qué cumplirse en un mercado en desequilibrio. Por otro lado, las mismas curvas (funciones) de oferta y demanda responden a la pregunta de qué harían productores y consumidores si no pudieran afectar los precios (lo que ocurre sólo en equilibrio) y suponiendo que a esos precios puedan vender o comprar lo que quieran (lo que es cierto sólo en equilibrio), sin jamás haber una expectativa frustrada (lo que ocurre frecuentemente en desequilibrio).

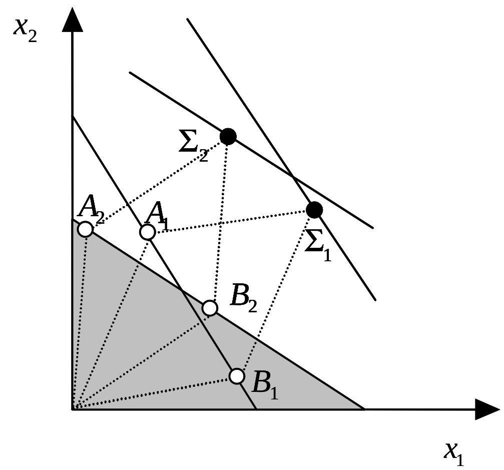


FIGURA 8. Agregación y Axioma Débil

4. El problema de la agregación

4.1. Agregación de preferencias: agente representativo. En muchas aplicaciones en que se juzga como adecuada la descripción de la economía como un grupo de consumidores y productores interactuando a través del sistema de precios, surge la pregunta de si es posible imaginar al grupo de consumidores como teniendo una determinada preferencia o función de utilidad. Esto es, si las demandas agregadas pueden pensarse como el resultado de:

$$\max_{X_1, X_2} U(X_1, X_2)$$
$$\text{s/a} \quad X_1 p_1 + X_2 p_2 \leq M$$

En caso afirmativo, el análisis se simplifica considerablemente puesto que se hace posible trabajar sólo con las variables agregadas. Este tipo de simplificación es usada comúnmente, por ejemplo, en macroeconomía para entender los efectos de las fluctuaciones de la producción agregada, y en finanzas para entender los determinantes de los precios de los activos.

Desafortunadamente, sin embargo, la respuesta es en general negativa. Una manera sencilla de ver por qué es la siguiente: en la sección de preferencias reveladas llegábamos a la conclusión que la demanda del consumidor puede pensarse como el resultado de la maximización de una función de utilidad si y sólo si el comportamiento satisface los axiomas débil y fuerte de preferencias reveladas. Pues bien, aún cuando las demandas de dos individuos los satisfagan, la suma de sus demandas no necesariamente lo hace, como se muestra en la figura 8. Los puntos A_1 y B_1 representan las elecciones iniciales de los consumidores A y B, respectivamente. La suma de las canastas demandadas (esto es, la canasta que demandan en conjunto) es Σ_1. Luego de un cambio en los precios e ingresos, sus decisiones son revisadas a A_2 y B_2, respectivamente, cuya suma corresponde a Σ_2. Observe las decisiones individuales: cuando A escogió A_2, A_1 no era alcanzable por lo que su decisión es compatible con el axioma débil de preferencias reveladas. Lo mismo ocurre con B. Sin embargo, en el agregado no: cuando Σ_1 fue escogida, Σ_2 era alcanzable (por lo que Σ_1 se revela directamente preferida sobre Σ_2), pero cuando Σ_2 fue escogida, Σ_1 también era alcanzable (por lo que Σ_2 se revela directamente preferida sobre Σ_1), violando el axioma débil.

El impedimento fundamental para construir un agente representativo de la economía como un todo son los efectos ingreso. Cada consumidor toma decisiones coherentes con una preferencia, pero la decisión agregada es una suma ponderada de las decisiones individuales. Cuando cambian los precios, o cuando cambia la distribución del ingreso monetario, cambian los ponderadores asociados a cada consumidor, por lo que al agregar se pierde la coherencia presente en las decisiones individuales.

Salvo, por cierto, que el efecto ingreso sea el mismo para todos, o que no lo haya. Por ejemplo, si todos los consumidores tuvieran preferencias Cobb Douglas, con una función de utilidad de la forma

$$u\left(x_1, x_2\right) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

sus demandas serían:

$$x_{1i}^* = \alpha_i \frac{m_i}{p_1}, \quad x_{2i}^* = \left(1 - \alpha_i\right) \frac{m_i}{p_2}$$

y las agregadas:

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{m_i}{p_1}, \quad X_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \alpha_i\right) \frac{m_i}{p_2}$$

En particular, si todos gastaran las mismas proporciones en cada bien, tendríamos:

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{p_1} = \alpha \frac{M}{p_1}, \\ X_2 &= (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{p_2} = (1 - \alpha) \frac{M}{p_2} \end{aligned}$$

por lo que la demanda agregada sí puede imaginarse como proviniendo del agente representativo con preferencias $X_1^{\alpha} X_2^{(1-\alpha)}$. Sin embargo, si todos gastaran fracciones distintas de su ingreso en cada bien, una redistribución del ingreso crearía un cambio en las demandas agregadas, creciendo aquella del producto favorito de quienes ven aumentado su ingreso y cayendo la otra.

En cambio, si todos tuvieran preferencias cuasilineales respecto de un numerario, la demanda agregada por el bien cuya demanda es independiente del ingreso (que llamaremos bien 2) evidentemente no depende de la distribución del ingreso:

$$X_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^* (p_1, p_2)$$

A su vez, las demandas individuales del numerario (que llamaremos bien 1) toman la forma:

$$x_{1i}^* = \frac{m_i}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} x_{2i}^* (p_1, p_2)$$

por lo que al agregar tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^* &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{m_i}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} x_{2i}^* (p_1, p_2) \right] \\ &= \frac{M}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} X_2 (p_1, p_2) \end{aligned}$$

Luego, también es posible representar las demandas agregadas como proviniendo de la maximización de una función de utilidad cuasilineal, del agente representativo.

EJERCICIO 20. *Mostrar que en el ejemplo de preferencias cuasilineales del capítulo 2,* $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2^{0,5}$*, la demanda agregada de* N *consumidores con idénticas preferencias pero cuyo ingreso difiere (y denotamos por* m_i*), se puede obtener a partir de la maximización de la utilidad* $U(X_1, X_2) = X_1 + (NX_2)^{0,5}$

4.2. Agregación de tecnologías: la función de producción agregada. La pregunta paralela a la de la existencia de un consumidor representativo es la de la existencia de una función de producción agregada, esto es, ¿será posible resumir el comportamiento de una industria compuesta por un grupo de empresas perfectamente competitivas en una función de producción o tecnología grupal? Tal como en el caso de la demanda, para muchos propósitos eso permitiría simplificar el análisis del mercado, puesto que la oferta agregada se obtendría de la curva de costo marginal que la función de producción agregada produce.

A diferencia del caso de la demanda, en que los efectos ingreso complican considerablemente el análisis, las ofertas sí son agregables (salvo por problemas de discontinuidades, que por el momento obviamos). En efecto, si la oferta agregada se interpreta como un costo marginal agregado, su integral nos da la función de costo total de la industria. Entonces, existe una función de producción agregada si podemos encontrar una función de producción o tecnología para la cual la manera más barata de producir cada nivel de producto coincida con la función de costo total de la industria. Formalmente, si $C(Q)$ es el costo total de la industria (obtenido de integrar el costo marginal agregado), entonces $C(Q)$ es la solución de:

$$\begin{aligned} &\min_{\{K,L\}} w_L L + w_K K \\ &\text{s/a} \quad F(L,K) = Q \end{aligned}$$

donde $L = \sum_{j=1}^{N} L_j$ y $K = \sum_{j=1}^{N} K_j$.

Observe que desde la perspectiva de la industria, la pregunta de cuál es la manera más barata de producir Q unidades de producto se podría formular como:

$$\begin{aligned} &\min_{\{K_1,\ldots,K_N,L_1,\ldots,L_N\}} w_L \sum_{j=1}^{N} L_j + w_K \sum_{j=1}^{N} K_j \\ &\text{s/a} \qquad Q = \sum_{j=1}^{N} q_j \\ &0 \leq q_j \leq f^j(K_j, L_j) \quad j = 1, ..., N \end{aligned}$$

donde $q_j = f^j(K_j, L_j)$ denota la función de producción de la empresa j.

Formando un lagrangeano, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\left(w_L \sum_{j=1}^{N} L_j + w_K \sum_{j=1}^{N} K_j\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \theta_j \left(f^j(K_j, L_j) - q_j\right) + \lambda \left(\sum_{j=1}^{N} q_j - Q\right) \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden de este problema son para todo j:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_j} &= -w_L + \theta_j \frac{\partial f^j}{\partial L_j} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_j} &= -w_K + \theta_j \frac{\partial f^j}{\partial K_j} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_j} &= f^j(K_j, L_j) - q_j = 0 \end{aligned}$$

donde θ_j es el multiplicador lagrangeano asociado a la tecnología de la empresa j. Observe que estas condiciones implican lo que sabíamos que cada empresa hace, a saber, producir al mínimo costo posible dada su tecnología:

para cada j tenemos $\theta_j f_L^j = w_L$ y $\theta_j f_K^j = w_K$, por lo que en el óptimo se iguala $\frac{f_L^j}{f_K^j}$ a $\frac{w_L}{w_K}$.

Además, tenemos para cada j la CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\theta_j + \lambda = 0$$

Por el teorema de la envolvente sabemos que λ es el costo marginal de producción de la industria (el efecto que un aumento de Q en 1 tendría sobre el costo total) y que θ_j es el costo marginal de producción de la empresa (el efecto que un aumento de q_j en 1 tendría sobre el costo total). Luego, la manera más barata para la industria de producir Q unidades de producto requiere que cada empresa produzca al mínimo costo de producción que su tecnología le permite (lo que la empresa con fines de lucro hace) y que cada empresa produzca hasta que su costo marginal se iguale al de todas las otras (lo que ocurre si operan en un mercado perfectamente competitivo). Es decir, se replican las mismas condiciones que habíamos obtenido antes. Observe que estas son las mismas reglas que un empresario con muchas plantas $j = 1, ..., N$ seguiría si quisiera maximizar sus ganancias.

Concluimos, entonces, que sí tiene sentido resumir lo que ocurre en una industria planteando el problema como si existiera una función de producción agregada $F(L, K)$. Esta función se podría obtener indirectamente de saber que $C(Q)$ es la solución de:

$$\begin{aligned} &\min_{\{K,L\}} w_L L + w_K K \\ &\text{s/a} \;\; F(L, K) = Q \end{aligned}$$

Luego, si queremos analizar qué ocurre con la producción y/o la contratación de factores agregada en una industria al cambiar un precio, podemos altenativamente preguntarnos qué ocurre en cada empresa particular (de acuerdo a su función de producción $f^j(L_i, K_i)$ y su función de costos particular) y luego agregar, o bien preguntarnos qué ocurriría si fuera una gran empresa tomadora de precios y con tecnología $F(L, K)$ la que enfrentara este cambio en el precio. Por ambas vías llegaremos a la misma respuesta, ya que $F(L, K)$ se construye justamente de modo que así ocurra.

Un aspecto interesante de $F(L, K)$ es que no tiene por qué parecerse a alguna de las funciones $f^j(L_j, K_j)$ que la "conforman". Por ejemplo, suponga que todas las funciones de producción de las empresas son iguales entre sí, y más aún, que tienen retornos crecientes a escala en un tramo inicial de producción y decreciente después. Llámele q^* al nivel de producto en que los retornos crecientes se han agotado, esto es, donde el costo medio de producción es mínimo e igual al costo marginal, como se ilustra en la figura 9. A partir de ese punto, cada empresa individualmente tiene retornos

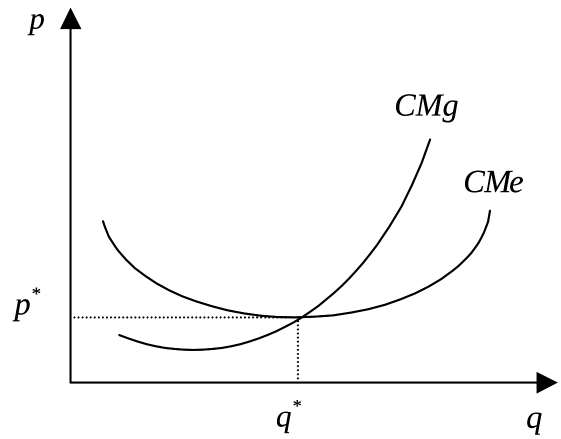


FIGURA 9. Costo medio mínimo

decrecientes a escala. Sin embargo, eso no es cierto para la industria: la manera más barata de producir $Q = q^*$ unidades de producto es haciendo que una empresa produzca ese volumen y todo el resto 0; similarmente, la manera más barata de producir $Q = nq^*$ es haciendo que n empresas produzcan q^* cada una, y 0 todo el resto, y así sucesivamente. Pero el costo medio en todos estos casos es el mismo. Luego, si N es el número (fijo) de empresas en la industria, para volúmenes de producción inferiores a Nq^* la tecnología agregada es de retornos constantes a escala, mientras que para aumentar la producción a niveles más altos que Nq^* la tecnología agregada es de retornos decrecientes a escala (dado que todas las empresas estaban produciendo q^*, por lo que nuevos aumentos en la producción fuerzan a cada empresa a producir más, con mayor costo medio).

Luego, si en esta industria hay libertad de entrada de nuevas empresas la tecnología agregada es de retornos constantes a escala para cualquier nivel de producción (en rigor, para niveles que sean múltiplos de q^*). La contraparte a nivel de las empresas individuales es que, si por un momento aumenta el precio por sobre p^*, entran nuevas empresas y vuelve a bajar el precio, de modo que la producción aumenta pero el precio no cambia. Es decir, a nivel de la industria el costo medio de producir cualquier múltiplo de q^* es el mismo.

Entonces, en una industria con estas características en que no hay un límite al número de empresas y en que la tecnología puede ser copiada por cualquier persona sin costo alguno, decimos que **la tecnología agregada es de retornos constantes a escala** o que la función de producción agregada es homogénea de grado 1, aun cuando toda empresa individualmente tenga retornos decrecientes que le hagan inconveniente aumentar su tamaño.

5. Bienestar social

El análisis del equilibrio nos entrega una predicción de cómo se comportará el agregado. Tal como en el caso del consumidor, nos interesa no sólo saber qué ocurrirá, o entender por qué algo ocurrió, sino también quisiéramos saber si la sociedad está mejor o peor como consecuencia del cambio.

Qué es el bienestar social (esto es, colectivo, o de un grupo de individuos), qué objetivos debería perseguir una sociedad, o qué estándares deberíamos exigir de las políticas públicas son preguntas al menos tan difíciles como la del bienestar de un individuo. ¿Es distinto el bienestar del grupo del de la suma de los individuos que lo componen? O incluso anterior, ¿es importante el bienestar de un individuo para el bienestar del grupo? Este tipo de preguntas han y siguen ocupando un lugar central en filosofía, y no tienen respuestas indiscutibles. Sin embargo, hay ciertas respuestas de relativo consenso entre economistas, que, aunque insatisfactorias en muchos aspectos, han permitido una discusión relativamente ordenada al interior de la profesión.

El punto de partida es que la sociedad no es independiente del grupo de individuos que la componen, de manera que cualquier noción de bienestar grupal debe considerar el bienestar de cada uno de sus miembros, el que entendemos, de acuerdo al axioma 0, bien representado por su función de utilidad.

Pensamos en la existencia de un conjunto de posibilidades para la sociedad como un todo, X, y nos referimos a cada alternativa x como una "decisión colectiva". Por el momento no nos pronunciamos sobre el **método** con que la sociedad escoge (si democráticamente, si a través de un dictador, si consensualmente, si a través de un delegado, si de manera completamente centralizada). Cualquiera sea el método, por el momento sólo nos preocupa cuál es la decisión alcanzada.

Existen dos nociones básicas que van a ser centrales en nuestro análisis. Ambas nociones están íntimamente conectadas, pero no son iguales, y entender la diferencia resulta muy importante.

DEFINICIÓN 20 (Orden de Pareto). *Si x y x' son dos decisiones colectivas factibles, entonces la decisión colectiva x es **mejor en el sentido de Pareto** que x' (o x es una **mejora paretiana** de x') si x deja a algún individuo estrictamente mejor que x', y a nadie peor.*

Observe que el orden de Pareto no necesariamente permite comparar todas las decisiones colectivas de X entre sí, sino en general sólo algunas de ellas porque es perfectamente posible que una acción beneficie a algunos pero perjudique a otros. Por eso decimos que es un orden incompleto aunque transitivo.

Definición 21 (Óptimo de Pareto). *Si X es un conjunto de decisiones colectivas factibles, entonces la decisión colectiva x es* ***óptima en el sentido de Pareto*** *(o* ***eficiente****) si no admite mejoras paretianas, es decir, no existe otra acción factible que le dé un nivel de bienestar mayor o igual a cada uno de los individuos, y estrictamente mayor a al menos uno.*

En términos formales, x es óptima en el sentido de Pareto si $\nexists x' \in X$:

$$\begin{array}{rcll} \forall i & \in & I: & u_i\left(x'\right) \geq u_i\left(x\right) \\ \wedge\ \exists i & \in & I: & u_i\left(x'\right) > u_i\left(x\right) \end{array}$$

Definición 22. *El* ***criterio de Pareto*** *sugiere que en las decisiones públicas se debe escoger de entre las mejores (en el sentido de Pareto) alternativas disponibles, es decir, óptimos paretianos.*

El criterio de Pareto recoge la condición mínima de considerar el bienestar de todos los miembros de la sociedad a que nos referíamos antes.

La idea de mejora paretiana es esencial para entender un óptimo paretiano: una situación es óptima si no admite mejoras paretianas. Decíamos, sin embargo, que es común confundir estas nociones. El error más común es, de hecho, pensar que el paso de una situación ineficiente a otra eficiente comporta necesariamente una mejora paretiana. Esto no es así: decir que una situación es eficiente sólo dice que no admite mejoras paretianas, pero no que esa situación es una mejora paretiana de cualquier otra, aunque sea ineficiente. En la figura 10 podemos apreciar que el paso del punto C al punto B deja peor al individuo 2, por lo que no es una mejora paretiana (de hecho, los puntos B y C no son comparables bajo el orden de Pareto, porque un individuo gana y el otro pierde), y no obstante el punto C es ineficiente y el B eficiente.

Por esta razón, una acción subóptima en el sentido de Pareto, puede ser preferible a otra que sea óptima en el sentido de Pareto, de acuerdo con algún criterio de bienestar. Esto ocurre porque la definición de optimalidad paretiana no tiene un *statu quo* de referencia, que sí está implícito en las decisiones públicas. Por ejemplo, en la situación descrita en la figura 10, si una sociedad de dos individuos pudiera tomar decisiones que resultaran en niveles de utilidad para cada uno como los atrapados debajo de la curva, sería *ineficiente* que se contentara con la situación A, puesto que es posible mejorar el bienestar de ambos en un punto como B. Un cambio de A a B, entonces, debiera recibir apoyo unánime –es una mejora paretiana–.

No obstante, ello no implica que no exista otro punto como C que, de acuerdo a algún criterio de bienestar social, sea superior a B. Observe que C no es un óptimo paretiano, y sin embargo puede ser mejor, bajo algún criterio, que el óptimo paretiano B. El significado de la frase “C no es un óptimo paretiano” no puede ser entendido como C no puede ser mejor que

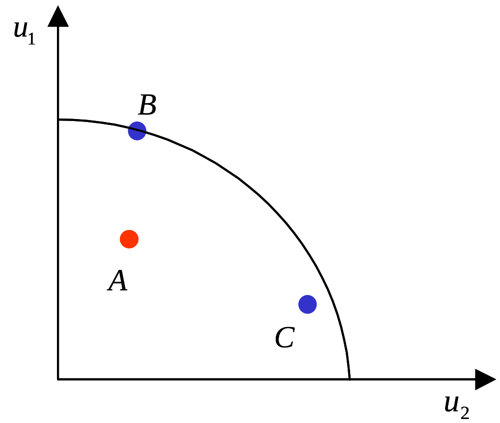


Figura 10. Optimalidad en el sentido de Pareto

un óptimo paretiano, sino sólo como que existe otra posibilidad, llamémosle D, que sería unánimemente apoyada en reemplazo de C: arriba y a la derecha de C hay posibilidades mejores para ambas personas.

El orden de Pareto, entonces, juzga como mejor una decisión que deja a todos mejor. Como tal, puede ser visto como una condición mínima de racionalidad de la sociedad, puesto que sólo exige no desaprovechar las oportunidades obvias, no controvertidas, de mejora. Adicionalmente al hecho que el cambio de un subóptimo a un óptimo paretiano puede comportar una pérdida de bienestar para algunos miembros de la sociedad, hay dos aspectos de este criterio que también pueden resultar controvertidos.

En primer lugar, como mencionáramos en el capítulo 1, es posible que aún cuando la sociedad valore el bienestar de cada uno de sus miembros, no esté dispuesta a satisfacer toda clase de preferencias, por juzgarlas, por ejemplo, indignas de consideración, inmorales, aberrantes o contrarias al bienestar del individuo. ¿Debería la sociedad validar, por ejemplo, las preferencias del drogadicto o del ladrón? Observe que se podría argumentar que este ejemplo no es válido, por cuanto en estos casos las preferencias del drogadicto y del ladrón están en conflicto con las de otros –sus víctimas–, por lo que el criterio de Pareto no validaría sus conductas. Sin embargo, este criterio sí exigiría que un determinado pueblo aceptara una donación externa de drogas ilimitadas para sus drogadictos, en tanto con ello los drogadictos dejarían de robar para satisfacer sus preferencias, y el resto de los miembros de la comunidad quedarían mejor porque dejarían de ser víctimas de robos y ahorrarían en rehabilitación.

En segundo lugar, algunos autores sostienen que aún cuando el bienestar de la sociedad está ligado de alguna forma al de sus miembros, también lo está a la virtud del respeto de una serie de valores, respeto que debiera ser anterior a la búsqueda de la satisfacción de las preferencias de sus miembros. Así, un liberal "puro" sostendría que la sociedad debe velar por el respeto de la libertad del ser humano, aún al costo de la insatisfacción de las preferencias. Por ejemplo, aún cuando la prohibición de la prostitución pudiera mejorar el bienestar de los demandantes de servicios sexuales al eliminar una tentación que les cause remordimiento posterior y contagio de enfermedades, tal medida supondría una reducción del valor superior de la libertad individual, valor que, por lo demás, comporta la libertad de hacer el bien pero también el mal (según lo defina alguna noción moral), de equivocarse.

Observe que la primera crítica, que el bienestar de una persona puede estar disasociado de sus preferencias, es devastadora para un utilitarista, que piensa que el bienestar social es la unión o suma de bienestares individuales. El utilitarista apoya la libertad si piensa que ella conduce a decisiones sociales óptimas en el sentido de Pareto, pero la rechaza con igual fuerza si piensa lo contrario. En cambio, el liberal apoya la libertad individual independientemente de si su ejercicio conduce o no a un óptimo paretiano, por lo que la primera crítica no lo afecta.

La profesión, si bien no es un conjunto monolítico, ha adoptado casi unánimemente el axioma 0 respecto del bienestar individual, y el orden de Pareto como estándar de bienestar social. Pese a sus críticas, este criterio parece ser en la mayor parte de las aplicaciones en economía una condición mínima de racionalidad en las decisiones sociales. De hecho, en una gran cantidad de aplicaciones, se trata de una condición tan mínima que prácticamente no dice nada. En efecto, en la mayor parte de las decisiones colectivas existe un grado no despreciable de conflicto entre los individuos: casi toda acción deja a algunos mejor y a otros peor, de manera que el criterio de Pareto, basado en un orden incompleto, no permite jerarquizar esas alternativas. El **criterio de Kaldor**, en cambio, sí lo hace.

DEFINICIÓN 23. *Si X es un conjunto de acciones colectivas factibles, y $m_i(x, x')$ es la disposición a pagar del individuo i por adoptar la decisión x' en lugar de la x en caso de ser positiva, o la pérdida en caso de ser negativa, entonces x' es preferible para la sociedad (da un mayor nivel de bienestar social) de acuerdo al **criterio de Kaldor** si y sólo si:*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x', x\right) \geq 0$$

Esto es, si los que ganan podrían compensar a los que pierden.

Se podría pensar que el criterio de Kaldor es una extensión natural del criterio de Pareto. Después de todo, si quienes ganan compensan a los que pierden por su pérdida, estos últimos estarían indiferentes entre ambas situaciones; si después de pagar las compensaciones, los que ganan todavía tuvieran algún excedente, entonces ellos estarían mejor, y el cambio sería una mejora paretiana. Pero no lo es en la medida en que las compensaciones no se realicen. En efecto, el criterio de Kaldor juzga mejor una decisión en que, de complementarse con compensaciones hipotéticas, se lograría una mejora paretiana, *independientemente* de si esas compensaciones se realizan o no.

La idea intuitiva es que si el beneficio es mayor que el costo, entonces la sociedad gana tomando la medida, pero donde las ganancias y las pérdidas son ponderadas de la misma forma. Por ejemplo, si un tratado de libre comercio beneficia a todos los consumidores pero perjudica a los agricultores de una determinada región, el criterio de Pareto no entrega una respuesta sobre la conveniencia de suscribirlo, mientras que el de Kaldor lo recomienda si y sólo si la ganancia de los consumidores es mayor que la pérdida de los agricultores de esa región. Pero sin duda esos agricultores están peor.

La ventaja de este criterio es que permite juzgar toda decisión en que sea posible medir ganancias y pérdidas en términos monetarios, esto es, ordena completamente a los elementos de X. Tiene la desventaja, sin embargo, de que es sensible al *statu quo*, por lo que secuencias de decisiones pueden no ser transitivas aún cuando cada una lo sea. Por ejemplo, si la existencia de un puente aumenta la riqueza de los habitantes de un pueblo, entonces es posible que si se destruye convenga reconstruirlo, pero si nunca existió no convenga construirlo. Ello, porque la disposición a pagar de los habitantes del pueblo depende de su riqueza inicial (recuerde la diferencia entre variación equivalente y variación compensatoria). De esta forma, la adopción del criterio de Kaldor de alguna forma supone una legitimación del *statu quo*, que evidentemente puede ser controvertida.

Una manifestación común de la disconformidad con el *statu quo* se verifica en la discusiones relativas a la distribución del ingreso. El criterio de Kaldor considera irrelevantes las transferencias entre individuos. En efecto, muchos autores sostienen, por ejemplo, que \$1 en manos de una persona que padece de hambre debiera considerarse más importante para la sociedad que \$1 en manos de un rico. Ello, quizás porque la sociedad debiera procurar a cada persona una canasta básica de derechos y libertades, y entre ellos el derecho a la vida, o el derecho a una vida digna. Frente a una decisión que mejorara a un rico en \$1.100 y empeorara a un pobre en \$1.000, el criterio de Pareto diría que no son comparables; el criterio de Kaldor recomendaría llevarla a cabo; y, sin embargo, muchos pensadores quizás considerarían natural que no se hiciera –por ejemplo, Rawls, Sen o Harsanyi–. La profesión típicamente revisaría las opciones con cuidado: si la medida se puede acompañar de un subsidio que compense al pobre por su pérdida, entonces sería de toda racionalidad no desaprovechar la oportunidad de darle \$100 a un miembro de la sociedad. Pero, ¿y si es costoso mantener una política de subsidios, ya sea porque es difícil encontrar al verdadero afectado por la medida y se deben entregar subsidios por \$15.000 en lugar de \$1.000, o si el costo administrativo es muy alto? Existen infinidad de razones por las cuales las compensaciones pueden ser impracticables. Enfrentado a esto, el criterio de Kaldor recomienda llevar a cabo la medida para que el conjunto de individuos obtenga la ganancia neta de \$100, mientras que otros criterios la considerarían una pérdida social.

En términos formales, si todos los individuos tuvieran preferencias cuasilineales, entonces el criterio de decisión pública de Kaldor podría escribirse como:

$$\max_{x \in X} W(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \tag{5.1}$$

En efecto, la utilidad cuasilineal implica que (previa normalización) la utilidad marginal del ingreso para todos es de 1 y, por tanto, corresponde a la unidad de cuenta. El que \$1 en manos de cualquier persona valga lo mismo equivale a decir que la utilidad marginal de todos vale lo mismo.

Observe que se trata de una preferencia lineal. La discusión sobre las ponderaciones que reciba el bienestar de cada individuo se puede expresar en lo apropiado de establecer una función de utilidad social lineal; en general, acaso se quisiera plantear un criterio de la forma:

$$W(x) = W(u_1(x), ..., u_I(x)) \tag{5.2}$$

Por ejemplo, una función como:

$$W(x) = \ln u_1(x) + ... + \ln u_n(x) \tag{5.3}$$

asigna una ponderación implícita creciente a una persona cada vez que su nivel de consumo sea menor, por lo que el pobre tendría más peso que el rico y, en el ejemplo anterior, en caso de ser suficientemente grande la brecha entre ambos, podría recomendar no tomar la medida en caso de no ser viable la compensación. Una función W de este estilo, entonces, definiría una tasa marginal de sustitución entre bienestar de un individuo y otro.

El atractivo de pensar en el bienestar social en estos términos es evidente. Sin embargo, existe una pregunta anterior: ¿existen funciones $W(x)$ que respeten el principio de Pareto (esto es, que juzguen mejor una acción que todos los individuos consideran mejor), y que comparen las acciones x y x' sólo considerando las evaluaciones que los individuos hagan de ellas (y no, por ejemplo, qué otras posibilidades hay)?

Arrow (1963) entrega una respuesta en gran medida negativa a esta pregunta, conocida con el nombre de Teorema de Imposibilidad de Arrow: cualquier función $W(u_1(x), ..., u_n(x))$ que satisfaga esas condiciones es dictatorial, en el sentido de coincidir con el ordenamiento que un solo individuo hace de las opciones.

Quizás por esto, o por la dificultad en establecer ponderaciones diferenciadas a los distintos miembros de la sociedad, la profesión ha adoptado como estándar de política pública la búsqueda de la eficiencia, esto es, la preferencia por acciones óptimas en el sentido de Pareto. Al no considerar la situación inicial, este criterio es *de facto* muy cercano al de Kaldor.

6. Bienestar en un equilibrio walrasiano

El equilibrio walrasiano produce una determinada asignación (final) de recursos. Es inmediato preguntarse si esa asignación tiene o no la propiedad mínima de ser eficiente u óptima en el sentido de Pareto.

Consideremos primero el caso de un mercado en aislación (equilibrio parcial). La asignación de cantidades consumidas entre consumidores y de cantidades producidas entre empresas sería eficiente (u óptima en el sentido de Pareto) si no existiera alguna reasignación que se pudiera hacer y que dejara a nadie peor y a al menos un individuo mejor (ya sea consumidor o productor).

Observe que si rebajáramos el precio, todos los consumidores estarían mejor (tendrían más utilidad) pero todos los productores estarían peor (tendrían menores ganancias). Por otro lado, si se disminuyera la producción, los consumidores que dejan de recibir esas unidades pierden parte de su excedente, y los productores que dejan de vender esas unidades dejan de percibir las ganancias de esas unidades. Esto lo sabemos porque sólo la última unidad se transó en indiferencia; todas las demás generaban excedentes. Finalmente, si se aumentara la producción, como las unidades adicionales se producirían a un costo mayor que la disposición a pagar de los consumidores, alguien necesariamente perdería: perderían los consumidores si se los obligara a comprar esas unidades al precio vigente, y perderían los productores si se les obligara a vender a ese precio. Concluimos entonces que la asignación de equilibrio es eficiente.

Consideremos el caso de la economía como un todo. En un equilibrio walrasiano, todos los consumidores escogen canastas en la frontera de sus posibilidades. Por esto, la única forma de que uno de ellos esté mejor es dándole una canasta que actualmente no puede comprar. Pero en una economía de intercambio puro en equilibrio se distribuye la dotación completa, por lo que no es posible mejorar la canasta de ese consumidor sin quitarle a otro. Esto se podría hacer sin que el que es expropiado quedara peor si hubiese alguna manera más barata de que consiguiera su actual nivel de bienestar. Pero sabemos que la canasta que escoge es la más preferida dentro de las que puede comprar, y el dual de esto es que la canasta que escoge es de hecho la más barata de las que le permiten alcanzar su actual nivel de bienestar. Concluimos entonces que no es posible conseguir con una redistribución de recursos en una economía de intercambio que alguien mejore sin que otro consumidor empeore, por lo que la asignación de recursos que se alcanza en el equilibrio walrasiano es eficiente, u óptima en el sentido de Pareto.

En una economía con producción ocurre algo similar. Recuerde que en nuestra discusión de la existencia de una función de producción agregada establecíamos que en un equilibrio walrasiano, el conjunto de empresas como un todo producía al menor costo posible, esto es, sin desperdiciar recursos. Entonces, producir más de algún bien para mejorar la canasta de un consumidor requeriría producir menos de algún otro, vale decir, empeorar la canasta de algún otro individuo, quien estaría peor.

Tenemos entonces el siguiente resultado general:

TEOREMA 2 (Primer Teorema del Bienestar). *La asignación de recursos que se alcanza en un equilibrio walrasiano es eficiente u óptima en el sentido de Pareto.*

Este teorema también es conocido con el nombre de Teorema de Adam Smith, puesto que en buena medida retrata la esencia de la idea de este pensador sobre el funcionamiento de una economía de mercado: aún cuando un conjunto de individuos actuara motivado por intereses egoístas, en la medida en que todas las decisiones que les atañieran directamente a cada uno debieran respetar su voluntad, su actuar produciría un resultado colectivo deseable, esto es, una asignación óptima en el sentido de Pareto.

Ejercicios

1. (*) ¿Bajo qué circunstancias es razonable predecir que un mercado se estabilizará en un equilibrio walrasiano? En particular:
   a) ¿Se requiere un gran número de participantes en el mercado?
   b) ¿Se requiere que a precios mayores al de equilibrio haya un exceso de oferta, y a precios inferiores un exceso de demanda?
2. (*) Considere el mercado de un bien indivisible, del que cada individuo quisiera comprar o vender sólo una unidad. Imagine, en particular, que las valoraciones de los dos compradores potenciales están dadas por $C = \{10, 6\}$ mientras que las de los tres vendedores potenciales por $V = \{2, 5, 10\}$.
   a) Determine qué transacciones se van a hacer, y a qué precio (o rango de precios). Determine los aportes de cada individuo al excedente total. ¿Existe apropiación completa o incompleta?
   b) Considere, en cambio, una situación en que los compradores son los mismos, pero los vendedores tienen valoraciones de $V = \{2, 6, 10\}$. Responda lo mismo que en (a).
   c) Explique, entonces, la noción de competencia perfecta, relacionándola con la idea de apropiación completa.
3. (*) Valeria, Víctor y Valentín tienen cada uno un reloj TEMPO ZX de 16mm, último modelo, que valoran respectivamente en 5.000, 35.000 y 12.000. Carola, Constanza y Carlos no tienen reloj, y quisieran comprar uno; sus valoraciones respectivas son 42.000,

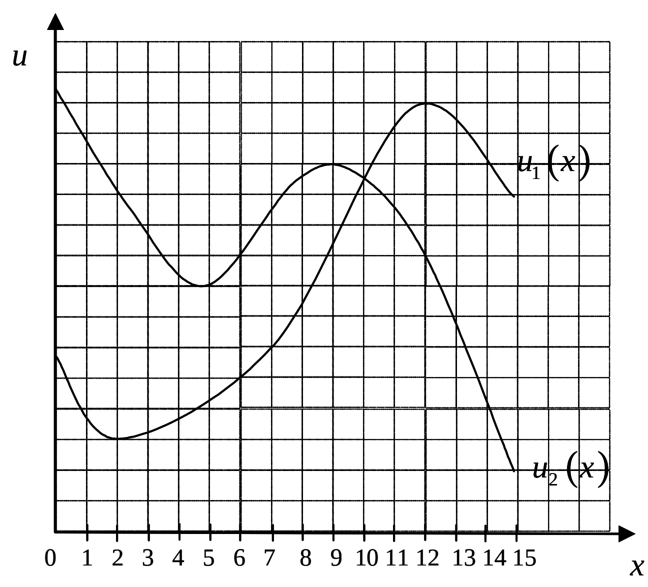
13.000 y 8.000. Todos ellos se reúnen un lunes, después de su clase favorita, a discutir la(s) posible(s) compraventa(s) de relojes.

a) Prediga en qué resulta este proceso de negociación, en términos de precio y número de transacciones. Explique claramente.

b) Encuentre el excedente total generado y su descomposición en excedentes individuales. Encuentre los aportes de cada persona al excedente total. ¿Qué relación existe entre el aporte de cada persona y su excedente?

c) ¿Qué ocurriría si Valentín revisa su valoración, pasando de 12.000 a 13.000?

4. (***) Una sociedad de dos personas debe tomar una decisión colectiva, escogiendo un valor para x dentro del intervalo cerrado $X = [0, 15]$. Si gusta, puede pensar en x como un bien público. Por ejemplo, x puede ser el número de hectáreas de parques que se desea construir en una comuna, o el número de horas por día que dos vecinos contratan conjuntamente de patrullaje de una empresa de seguridad. Lo importante es que sólo pueden escoger un valor para x. Todos los beneficios y costos de cada posibilidad para cada individuo están resumidos en sus respectivas funciones de utilidad, $u_1(x)$ y $u_2(x)$, respectivamente, según se muestra en el siguiente dibujo:



Determine el conjunto de asignaciones eficientes (u óptimas en el sentido de Pareto). Explique claramente su razonamiento.

CAPíTULO 9

Equilibrio parcial

Cuando hacemos un análisis de equilibrio parcial nos concentramos en el mercado de un solo bien, que llamaremos genéricamente x en este capítulo, suponiendo que los precios de los demás bienes están constantes (la condición *ceteris paribus*). Además, tradicionalmente en el análisis de equilibrio parcial se utiliza el excedente del consumidor de Marshall (ECM) para analizar cambios en el bienestar de los consumidores. Ese análisis resulta más atractivo cuando consideramos un bien cuyo mercado representa una proporción muy pequeña de la economía como un todo –de modo que el efecto de los cambios en este mercado sobre los precios de los demás bienes es presumiblemente muy pequeño–, y que representa una proporción muy pequeña del presupuesto de las familias –ya que en dicho caso el efecto ingreso es muy bajo, por lo que el ECM resulta una buena aproximación de otras medidas de bienestar–. En este caso, podemos tratar el problema agrupando a los otros bienes como un bien compuesto, que sería el numerario en el contexto de preferencias cuasilineales (en cuyo caso el bien x sería neutro). La ley de Walras indica que si hay dos mercados, basta que uno de ellos esté en equilibrio para saber que el otro también lo está, lo que nos permite concentrarnos solamente en el bien x.

En el contexto de equilibrio parcial el equilibrio competitivo se define entonces como un precio p_x^* y una asignación de cantidades consumidas entre los n consumidores y de cantidades producidas entre los m productores, con las siguientes propiedades: la cantidad que cada participante consume o produce es la que querría consumir o producir al precio vigente, y la suma de las cantidades producidas coincide con la de las consumidas. Es decir, la demanda agregada al precio p_x^* es igual a la oferta agregada a dicho precio.

En este contexto, entonces, si queremos analizar el efecto que tiene un cambio en algún parámetro sobre las asignaciones de equilibrio, debemos estudiar la demanda y la oferta agregadas.

1. Elasticidad de la demanda y la oferta agregada

1.1. La demanda agregada. En el modelo simple del consumidor que estudiamos en el capítulo 2 habíamos establecido que la demanda individual depende de los precios de todos los bienes que puede comprar (no sólo de aquél cuya demanda estudiamos) y además del ingreso. Denotaremos el precio de los otros bienes distintos de x como p_{OB}. Se sigue, entonces, que la suma de esas demandas depende de los ingresos de cada consumidor y de los precios del resto de los bienes. Entonces, si hay dos bienes y n consumidores, tenemos:

$$X = X\left(p_x, p_{OB}, m_1, ..., m_n\right) \tag{1.1}$$

Como vimos en el capítulo anterior, en general no sólo el ingreso total (o agregado) sino también su distribución afectan a la demanda agregada, de modo que **no** podemos escribir:

$$X = X\left(p_x, p_{OB}, M\right) \tag{1.2}$$

con $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, salvo en circunstancias muy particulares. Supongamos que el ingreso del grupo de consumidores aumenta en $\mathrm{d}M$, y que ese aumento significa un cambio en el ingreso de cada consumidor de $\mathrm{d}m_i$ donde $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}m_i = \mathrm{d}M$. ¿Cómo afecta ésto a la demanda agregada? Tenemos:

$$\mathrm{d}X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i\left(p_x, p_{OB}, m_i\right)}{\partial m_i} \mathrm{d}m_i \tag{1.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i\left(p_x, p_{OB}, m_i\right)}{\partial m_i} \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}M} \tag{1.4}$$

Luego, podemos formar la **elasticidad ingreso agregado de la demanda agregada** como:

$$\begin{aligned} \eta_{X,M} &= \frac{M}{X}\frac{dX}{dM} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial m_i}\frac{m_i}{x_i}\right)\left(\frac{x_i}{X}\right)\left(\frac{M}{m_i}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}M}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \eta^{i}_{x,m}\left(\frac{x_i}{X}\right)\left(\frac{M}{m_i}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}M}\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

La última expresión establece que la elasticidad ingreso agregado de la demanda agregada (con respecto a esta redistribución particular) es un promedio ponderado de las elasticidades ingreso de las demandas individuales, donde la ponderación está dada por la importancia de cada consumidor en el mercado (medido por la fracción de la producción total que consume, $\frac{x_i}{X}$) y por la elasticidad del ingreso individual respecto del agregado. Observe que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}m_i &= \mathrm{d}M \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dM} = 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ahora bien, si todas las demandas individuales tuvieran la misma elasticidad ingreso $\eta_{x,m} = \frac{\partial x_i}{\partial m_i}\frac{m_i}{x_i}$ y la misma participación en el ingreso $\alpha = \frac{p_x x_i}{m_i} = \frac{p_x X}{M}$, la distribución del ingreso sería irrelevante:

$$\begin{aligned}
\eta_{X,M} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial m_i}\frac{m_i}{x_i}\right)\left(\frac{p_x x_i}{m_i}\right)\left(\frac{M}{p_x X}\right)\left(\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}M}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\eta_{x,m}\alpha\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}M}\right) \\
&= \eta_{x,m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}M} = \eta_{x,m} \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Respecto del efecto de los precios sobre la cantidad demandada, tenemos:

$$\frac{\partial X}{\partial p_x} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i\left(p_x, p_{OB}, m_i\right)}{\partial p_x}$$

$$\Rightarrow \eta_{X,p_X} = \frac{\partial X}{\partial p_x}\frac{p_x}{X} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_x}\frac{p_x}{x_i}\right)\left(\frac{x_i}{X}\right) = \sum_{i=1}^{n}\eta^{i}_{x,p_x}\left(\frac{x_i}{X}\right) \qquad (1.8)$$

de manera que la **elasticidad precio de la demanda agregada** es un promedio ponderado de las elasticidades de las demandas individuales, donde nuevamente la ponderación corresponde a la importancia de cada consumidor en el consumo total.

Es claro entonces que si todas las demandas individuales tuvieran la misma elasticidad precio η_{x,p_x}, entonces la elasticidad precio de la demanda agregada coincidiría con la primera:

$$\eta_{X,p_X} = \eta_{x,p_x}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{X}\right) = \eta_{x,p_x} \qquad (1.9)$$

1.2. La oferta agregada.

1.2.1. Sin efectos externos. Consideremos una industria compuesta por N empresas competitivas, cada una con una función de oferta que llamamos $q_j = q_j^*\left(p_x\right)$. Dado que $Q = \sum_{j=1}^{N} q_j^*\left(p_x\right)$, obtenemos:

$$\frac{dQ}{dp_x} = \sum\nolimits_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial q_j^*}{\partial p_x}\right) \qquad (1.10)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Q,p_x} &= \frac{dQ}{dp_x}\frac{p_x}{Q} \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{N} \frac{q_j}{q_j}\left(\frac{\partial q_j^*}{\partial p_x}\right)\frac{p_x}{Q} \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{N} \left(\frac{q_j}{Q}\right)\left(\frac{\partial q_j^*}{\partial p_x}\frac{p_x}{q_j}\right) \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,p_x} \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

donde $r_j = \frac{q_j}{Q}$ es la participación de mercado de la empresa j (por lo que $\sum_{j=1}^{N} r_j = 1$). Luego, la elasticidad de la curva de oferta agregada corresponde a la suma de las elasticidades individuales ponderada por la participación de cada empresa, r_j. Si todas las empresas son iguales, de modo que la elasticidad de la oferta de cada una de ellas es la misma, $\varepsilon_{q_j,p_x} = \varepsilon_{q,p_x}$,entonces la elasticidad de la oferta agregada coincide con ellas: $\varepsilon_{Q,p_x} = \varepsilon_{q,p_x} \sum_{j=1}^{N} r_j = \varepsilon_{q,p_x}$.

1.2.2. Efectos externos a la empresa (pero internos en la industria). En general decimos que CMg depende de q_j, la cantidad producida por la empresa j (y también depende de precios de factores). Es posible que para cada empresa, la función CMg también dependa de Q, esto es, de la cantidad producida en total en la industria, caso en el cual decimos que existen **efectos externos** en la industria.

Existen diversos caminos por los que se podría dar esta conexión, y dependiendo del caso pueden producir un resultado positivo o negativo sobre la oferta de la empresa. Un camino es a través de los precios de los insumos. En efecto, si bien en equilibrio cada empresa es incapaz de modificar los precios de insumos o producto, la industria como un todo sí podría tener el tamaño suficiente como para hacerlo. En este caso, un aumento en la producción de la industria puede aumentar los precios de algunos insumos y por esa vía, los costos de cada empresa. Alternativamente, un crecimiento de la industria puede mejorar su influencia en el Parlamento o provocar desarrollos tecnológicos que de otra forma hubiesen sido inviables. Aunque cada una de estas situaciones es de naturaleza muy distinta, lo común a todas ellas es que si bien la oferta agregada es la suma simple de las ofertas individuales, su pendiente no coincide con una simple suma de las pendientes de cada oferta individual.

Consideremos una industria compuesta por N empresas competitivas, cada una con una función de oferta que se deriva de igualar precio a costo marginal (a partir del punto de costo medio mínimo):

$$p_x = CMg\,(q_j, Q) \qquad (1.12)$$

En efecto, despejando q_j en la expresión anterior, obtenemos q_j en función de p_x y de Q. A dicha función la llamaremos $q_j^* (p_x, Q)$:

$$q_j = q_j^* (p_x, Q) \tag{1.13}$$

Pero $Q = \sum_{j=1}^{N} q_j = \sum_{j=1}^{N} q_j^* (p_x, Q)$, por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dp_x} &= \sum\nolimits_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial p_x} + \frac{\partial q_j^*}{\partial Q} \frac{dQ}{dp_x} \right) \\ &= \sum\nolimits_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial p_x} \right) + \frac{dQ}{dp_x} \sum\nolimits_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial Q} \right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Despejando $\frac{dQ}{dp_x}$ obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dp_x} \left(1 - \sum\nolimits_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial Q} \right) \right) &= \sum\nolimits_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial p_x} \right) \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dp_x} &= \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial p_x} \right)}{1 - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial Q} \right)} \end{aligned} \tag{1.15}$$

De esta expresión podemos obtener la elasticidad de la curva de oferta, definiendo $\varepsilon_{q_j,Q} = \frac{\partial q_j^*}{\partial Q} \frac{Q}{q_j}$ (que mide la intensidad de los efectos externos).

Entonces,

$$\varepsilon_{Q,p_x} = \frac{dQ}{dp_x} \frac{p_x}{Q} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial p_x} \frac{p_x}{q_j} \right) \left(\frac{q_j}{Q} \right)}{1 - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q_j^*}{\partial Q} \frac{Q}{q_j} \right) \left(\frac{q_j}{Q} \right)} = \frac{\sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,p_x}}{1 - \sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,Q}} \tag{1.16}$$

Resumiendo, obtenemos lo siguiente:

1. Si hay efectos externos negativos: al aumentar el precio con el consecuente aumento en Q, aumenta el costo marginal de cada empresa, disminuyendo q_j respecto del caso sin efectos externos. Entonces $\varepsilon_{q_j,Q} < 0$ por lo que $\left(1 - \sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,Q}\right) > 1$, de modo que $0 \leq \varepsilon_{Q,p_x} < \sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,p_x}$. Es decir, la elasticidad de la oferta agregada es menor que la suma ponderada de elasticidades individuales, pero positiva. Esto último implica que, aun cuando el aumento de costos en cada empresa lleva a que cada una produzca algo menos que con los costos iniciales, no es posible que la cantidad finalmente producida en total en la industria sea menor que la inicial, simplemente porque en dicho caso el aumento de costos nunca hubiera ocurrido.

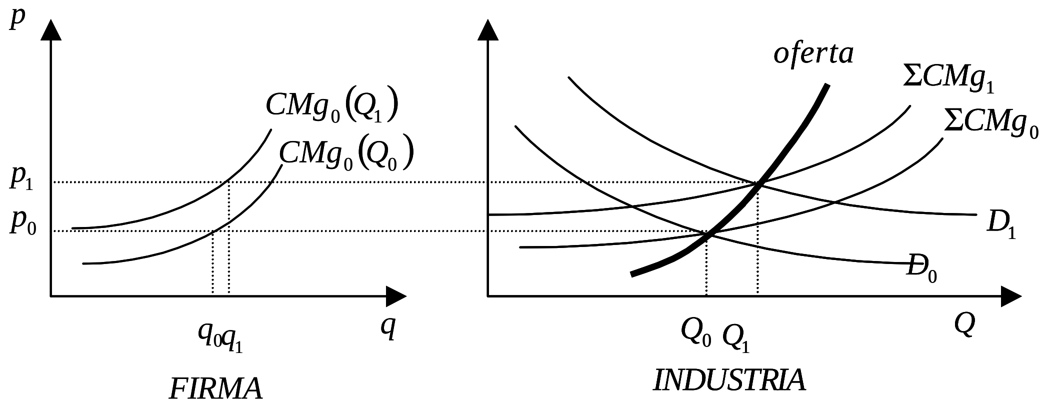


Figura 1. El caso de los efectos externos negativos

En la figura 1 se ilustra un ejemplo de efectos externos negativos: al aumentar la demanda, el precio aumenta (inicialmente a través de la curva ΣCMg_0, que denota la suma horizontal de costos marginales iniciales), aumentando la producción de cada empresa. Pero ello provoca un aumento en Q, con el consiguiente aumento en el costo marginal, y el consiguiente desplazamiento de ΣCMg, lo que obliga a que aumente más aún el precio y se reduzca la cantidad demandada (a través de la demanda nueva D_1). Finalmente, la producción en la industria aumentó desde Q_0 a Q_1, y el precio aumentó desde p_0 a p_1.

2. Si hay efectos externos positivos: al aumentar Q cae el costo marginal de cada empresa, aumentando q_j a cada precio dado. Entonces $\varepsilon_{q_j,Q} > 0$ por lo que $1 - \sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,Q} < 1$, de modo que $\varepsilon_{Q,p_x} > \sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,p_x}$ si $1 - \sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,Q} > 0$ (es decir, si $\sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,Q} < 1$), y $\varepsilon_{Q,p_x} < 0$ si $1 - \sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,Q} < 0$ (es decir, si $\sum_{j=1}^{N} r_j \varepsilon_{q_j,Q} > 1$). Luego, en el primer caso tenemos que la elasticidad de la oferta agregada es mayor que la suma ponderada de las elasticidades individuales, mientras que en el segundo la elasticidad de la oferta agregada es negativa. Este último caso se explica porque al aumentar la demanda por el bien y aumentar la producción de cada empresa, el efecto externo positivo es de tal magnitud que la reducción de costos lleva a que el nuevo precio de equilibrio sea menor que el original.

Ejercicio 21. *Representе gráficamente los dos casos posibles de efectos externos positivos (uno con elasticidad de oferta agregada positiva y el otro negativa), tal como se hizo en la figura 1 para los efectos externos negativos.*

1.3. Aplicación: la incidencia de un impuesto. Al introducir un impuesto de monto t sobre la producción o el consumo del bien x, el precio que enfrentarán los demandantes será distinto del recibido por los oferentes. Si llamamos p_x^p al precio recibido por los productores y p_x^c al precio pagado por los consumidores, tenemos:

$$\begin{aligned} p_x^c &= p_x^p + t \\ &\Rightarrow dp_x^c = dp_x^p + dt \end{aligned} \tag{1.17}$$

Con y sin impuesto, en equilibrio la cantidad ofrecida debe ser igual a la demandada. Luego, al introducir el impuesto el cambio en la cantidad producida debe ser igual al cambio en la cantidad demandada:

$$dX\left(p_x^c\right) = dQ\left(p_x^p\right) \tag{1.18}$$

Utilizando las definiciones de las elasticidades de la demanda y de la oferta agregadas podemos reescribir lo anterior como:

$$\left(\frac{dX\left(p_x^c\right)}{dp_x^c}\frac{p_x^c}{X}\right)\frac{X}{p_x^c}dp_x^c = \left(\frac{dQ\left(p_x^p\right)}{dp_x^p}\frac{p_x^p}{Q}\right)\frac{Q}{p_x^p}dp_x^p$$

$$\eta_{X,p_x}\frac{X}{p_x^c}dp_x^c = \varepsilon_{Q,p_x}\frac{Q}{p_x^p}dp_x^p$$

$$\Rightarrow \eta_{X,p_x}\frac{X}{p_x^c}\left(dp_x^p + dt\right) = \varepsilon_{Q,p_x}\frac{Q}{p_x^p}dp_x^p \tag{1.19}$$

Reordenando y evaluando en $t = 0$, obtenemos:

$$\frac{dp_x^p}{dt} = \frac{\eta_{X,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} < 0 \tag{1.20a}$$

$$\frac{dp_x^c}{dt} = \frac{\varepsilon_{Q,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} > 0 \tag{1.20b}$$

Es decir, partiendo de una situación con $t = 0$ en que $p_x^c = p_x^p = p_x^*$, si se incorpora un impuesto de monto $t > 0$ el precio de oferta disminuye y el precio de demanda aumenta, en magnitudes que dependen de la elasticidad de la oferta y la demanda agregada. Así, por ejemplo, si la demanda agregada es completamente elástica, el precio de demanda no cambia (de modo que el impuesto es pagado íntegramente por los productores), mientras que si la demanda es completamente inelástica, el precio de oferta no cambia (y el impuesto es pagado por los consumidores).

Ahora bien, el cambio en bienestar de consumidores puede ser evaluado directamente en las demandas ordinarias, mediante el excedente del consumidor marshalliano (suponiendo que x es un bien neutro), mientras que el cambio en bienestar de los productores lo evaluamos en la oferta. Al poner un impuesto el bienestar de ambos cae: los consumidores deben pagar

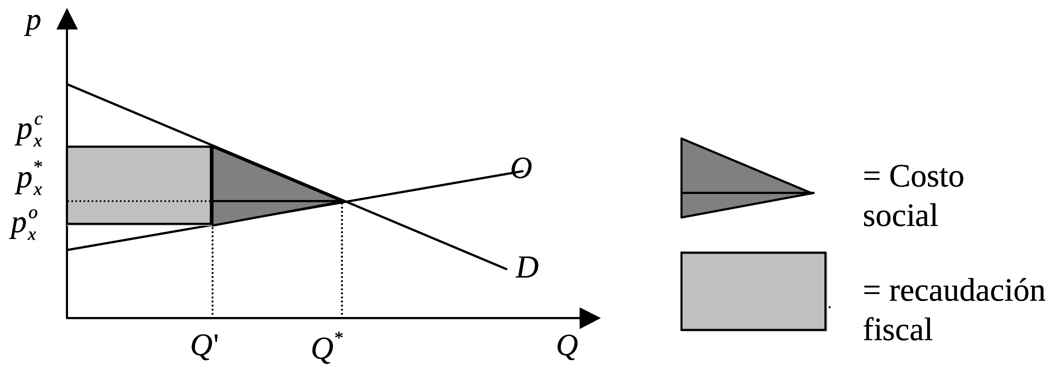


FIGURA 2. Costo social de un impuesto sobre x

un precio más alto, y los productores reciben (neto de impuesto) un precio menor que el inicial.

Sólo una parte de la pérdida de bienestar de consumidores y productores corresponde a la ganancia del fisco (lo recaudado con este impuesto), mientras que otra parte no es "recuperable". Dicha pérdida de bienestar que no es compensada por la ganancia del fisco corresponde al **costo social** del impuesto. Así, aún si el fisco decidiera devolver a los consumidores y productores lo que ellos contribuyeron con su pago del impuesto (definiendo esta contribución como $(p_x^c - p_x^*)\,dQ$ en el caso de los consumidores y $(p_x^* - p_x^p)\,dQ$ para los productores), el bienestar de ellos seguiría siendo más bajo que el inicial, como se ilustra en la figura 2.

Las magnitudes del costo social que genera un impuesto de monto t (respecto de una situación sin impuesto, de modo que $dt = t$) atribuible a los consumidores (CSC) y a los productores (CSP) respectivamente corresponden aproximadamente[1] a:

$$\begin{aligned} CSC &= 0{,}5 dp_x^c dQ \\ &= 0{,}5 dp_x^c \left(\frac{dQ}{dp_x^c} \frac{p_x}{Q} \frac{Q}{p_x} dp_x^c \right) \\ &= 0{,}5 \frac{Q}{p_x} \eta_{X,p_x} \left(dp_x^c\right)^2 \\ &= 0{,}5 \frac{Qt^2}{p_x} \eta_{X,p_x} \left(\frac{\varepsilon_{Q,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} \right)^2 \qquad (1.21) \end{aligned}$$

[1]Las magnitudes corresponden a las integrales de las diferencias entre demanda y oferta con el precio original. Su cálculo exacto requeriría conocer estas funciones. La aproximación que adoptamos aquí supone que ambas funciones son lineales.

$$\begin{aligned} CSP &= -0{,}5dp_x^p dQ \\ &= -0{,}5dp_x^p \left(\frac{dQ}{dp_x^p} \frac{p_x}{Q} \frac{Q}{p_x} dp_x^p \right) \\ &= -0{,}5 \frac{Q}{p_x} \varepsilon_{Q,p_x} \left(dp_x^p \right)^2 \\ &= -0{,}5 \frac{Qt^2}{p_x} \varepsilon_{Q,p_x} \left(\frac{\eta_{X,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} \right)^2 \end{aligned} \tag{1.22}$$

de manera que la suma de ambos es el costo social total (CS), que corresponde aproximadamente a:

$$\begin{aligned} CS &= CSC + CSP \\ &= 0{,}5 \frac{Qt^2}{p_x} \left(\frac{\eta_{X,p_x} \left(\varepsilon_{Q,p_x} \right)^2 - \varepsilon_{Q,p_x} \left(\eta_{X,p_x} \right)^2}{\left(\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x} \right)^2} \right) \\ &= 0{,}5 \frac{Qt^2}{p_x} \left(\frac{\eta_{X,p_x} \varepsilon_{Q,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} \right) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Entonces, la distribución del costo social entre consumidores y productores también depende de las elasticidades de las curvas de oferta y demanda agregadas. Así, por ejemplo, si la oferta agregada es completamente inelástica el bienestar de los consumidores no cambia y todo el costo es asumido por los productores, mientras que si la demanda es completamente inelástica, el bienestar de los productores no cambia y toda la pérdida es asumida por los consumidores. Más aún, en estos dos casos el costo social es nulo, debido a que el impuesto no afecta la asignación de recursos. Ello, independientemente de si se trata de un impuesto cobrado a consumidores o a productores.

Sin embargo, la distribución de dicho costo entre los distintos consumidores depende de la elasticidad de la demanda individual: dado un cambio en el precio que es común para todos los consumidores, la respuesta de cada uno depende la elasticidad de su propia demanda. Así, si denotamos como CSC_i al costo social atribuible al consumidor i, tenemos:

$$\begin{aligned} CSC_i &= 0{,}5dp_x^c dx_i \\ &= 0{,}5dp_x^c \left(\frac{dx_i}{dp_x^c} \frac{p_x}{x_i} \frac{x_i}{p_x} dp_x^c \right) \\ &= 0{,}5 \frac{x_i}{p_x} \eta_{x,p_x}^i \left(dp_x^c \right)^2 \\ &= 0{,}5 \frac{x_i t^2}{p_x} \eta_{x,p_x}^i \left(\frac{\varepsilon_{Q,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} \right)^2 \end{aligned} \tag{1.24}$$

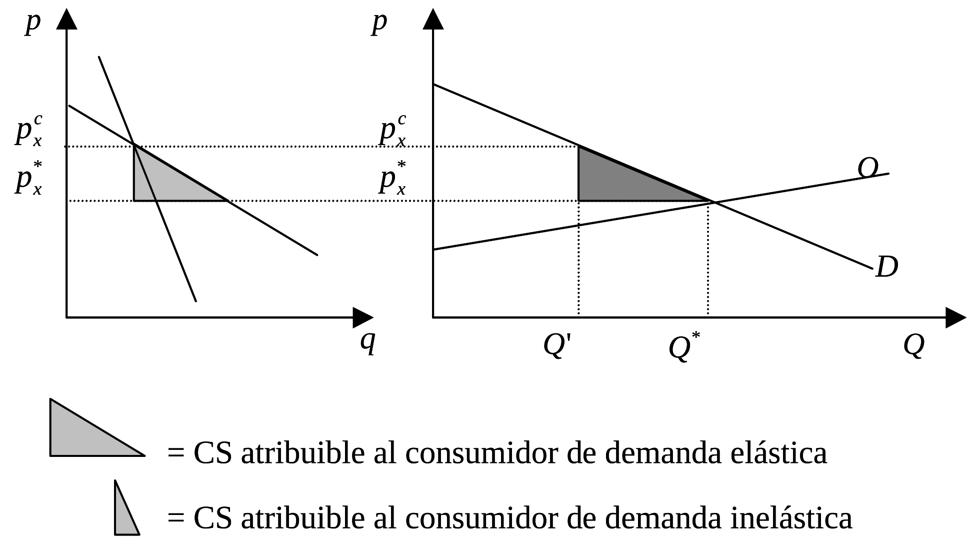


FIGURA 3. Distribución del costo social (CS) en el caso de dos consumidores distintos

De modo que la suma de CSC_i corresponde a CSC :

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{i=1}^{n} CSC_i &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} 0{,}5 \frac{x_i t^2}{p_x} \eta_{x,p_x}^i \left(\frac{\varepsilon_{Q,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} \right)^2 \\ &= 0{,}5 \left(\frac{\varepsilon_{Q,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} \right)^2 \frac{Qt^2}{p_x} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{X} \right) \eta_{x,p_x}^i \\ &= 0{,}5 \left(\frac{\varepsilon_{Q,p_x}}{\varepsilon_{Q,p_x} - \eta_{X,p_x}} \right)^2 \frac{Qt^2}{p_x} \eta_{X,p_x} = CSC \qquad (1.25)\end{aligned}$$

Luego, si los consumidores son heterogéneos, el costo social de un impuesto se distribuye de manera asimétrica entre los distintos consumidores: para aquellos cuya demanda es completamente inelástica, CSC_i es nulo, mientras que para aquellos cuya demanda es elástica CSC_i es positivo. Es decir, aún si el fisco devolviera a cada uno su contribución a la recaudación total mediante un subsidio de monto fijo (no anticipado), algunos de ellos no verían disminuido su bienestar (aquellos cuya demanda es inelástica), mientras que otros se verían fuertemente afectados (los consumidores de demanda más elástica). Lo anterior se representa en la figura 3.

2. Libre entrada: equilibrio de largo plazo

Hasta ahora hemos supuesto que el número de empresas que componen la industria es fijo, lo que es razonable en un plazo corto de tiempo. Por ejemplo, para entrar en la industria puede ser necesario construir una nueva planta, formar un equipo de profesionales, desarrollar una nueva tecnología, etc., todo lo cual toma tiempo. Sin embargo, en un horizonte más largo nuevos competidores podrían cumplir estas etapas y entrar a la industria –a menos que existan restricciones legales, como patentes comerciales, o de alguna otra índole–. Si hay libertad para que entren nuevas empresas a la industria, éstas entrarán en tanto obtengan ganancias. Entonces, al definir el equilibrio de largo plazo de la industria se debe agregar una nueva condición.

Si la tecnología puede ser gratuitamente copiada por cualquier persona, el equilibrio de largo plazo se define como sigue:

Definición 24. *Dada una demanda agregada $X(p)$ y una función de costos de cada empresa $C(y)$, con $C(0) = 0$ y oferta $q(p)$, entonces una asignación de producción y consumo, un precio p^* y un número de empresas J^* constituyen un equilibrio competitivo de largo plazo si satisfacen: i) exceso de demanda nulo: $X(p^*) = J^* q(p^*)$; ii) condición de libre entrada: $p^* q(p^*) - C(q(p^*)) = 0$.*

En este caso, entonces, la oferta de largo plazo de la industria es completamente elástica (sin considerar discontinuidades) en el nivel en que el costo medio es mínimo, como se ilustra en la figura 4. Esto se debe a que la condición de libre entrada implica que la ganancia de la empresa es nula, por lo que el precio debe ser igual al costo medio de producción. Y dado que la producción se escoge de modo que el costo marginal se iguale al precio, lo que se requiere es que el costo marginal coincida con el costo medio, lo que ocurre cuando el costo medio es mínimo. Resumiendo, si definimos $q^* = q(p^*)$:

$$\left.\begin{array}{c} p^* = \frac{C(q(p^*))}{q^*} = CMe(q^*) \\ p^* = CMg(q^*) \end{array}\right\} \Rightarrow p^* = CMe_{\text{mínimo}}$$

Es importante enfatizar que en equilibrio de largo plazo la empresa sigue maximizando ganancias al elegir un nivel de producción en que **se iguala el costo marginal de producción al precio de venta**. Dado que el precio de equilibrio corresponde ahora al costo medio mínimo de producción, resulta además que la empresa estará escogiendo un nivel de producción en que **se iguala el costo medio mínimo al precio de venta**. Pero es importante diferenciar la parte de este resultado que se desprende de la condición de óptimo de la empresa (precio igual a costo marginal), de la parte que se desprende de la condición de equilibrio de largo plazo con libre entrada (precio igual a costo medio mínimo). Entonces, es la existencia de ganancias en el corto plazo, sumada a la posibilidad de entrada de nuevas empresas con la misma estructura de costos a la industria, lo que resulta en equilibrio en una caída del precio hasta el nivel del costo medio mínimo, y la causa de que la oferta de largo plazo de la industria sea completamente elástica en dicho nivel.

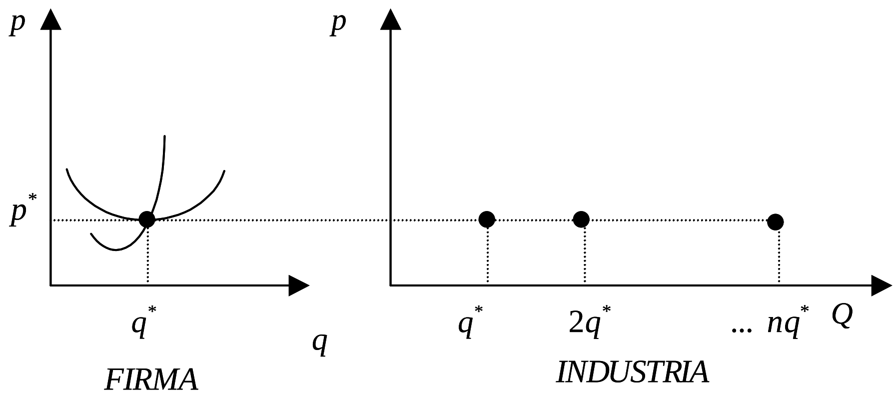


FIGURA 4. Oferta de la industria de largo plazo con libertad de entrada y tecnología replicable

Si la tecnología no puede ser copiada sin costo, de modo que las potenciales entrantes tienen costos más altos de producción, van a seguir entrando nuevas empresas a la industria mientras la empresa marginal obtenga una ganancia positiva. Luego, en la definición del equilibrio de largo plazo hay que modificar la condición de libre entrada correspondientemente. En este caso, si las nuevas entrantes tienen un costo medio mínimo más alto que las existentes, la oferta de largo plazo no será completamente elástica. Esto implica que aún en el largo plazo de la industria algunas empresas obtendrán ganancias (aquellas que tienen el recurso escaso y no replicable que es el responsable de sus menores costos: buenos investigadores, ubicación geográfica, etc.). Esta ganancia de largo plazo recibe el nombre de **renta ricardiana**. Dado que es el factor escaso que permite reducir costos el causante de la renta ricardiana, es esperable que dicha renta se refleje en el precio del recurso (el salario de los ejecutivos, costo del terreno, etc.), por lo que finalmente son los dueños de dicho factor escaso quienes reciben la renta.

Ejercicios

1. (*) Preguntas cortas
   a) La curva de oferta agregada corresponde a la suma horizontal de curvas de costo marginal. Comente.
   b) Si en una industria todos los productores operan con retornos decrecientes a escala, entonces la tecnología agregada también será de retornos decrecientes. Comente.
   c) Una empresa que desee maximizar sus ganancias debe necesariamente minimizar sus costos de producción. Comente.
   d) Explique por qué una empresa que opera en un mercado perfectamente competitivo se comporta como amante del riesgo

frente a la incertidumbre respecto del precio al cual podrá vender el bien.

e) Explique por qué una industria con retornos crecientes no puede ser perfectamente competitiva.

2. (*) Considere una industria compuesta por N empresas competitivas e idénticas, cada una con una función de producción de la forma:

$$q = aK^{1/4}L^{1/4}$$

Donde a es un parámetro que mide la tecnología disponible para la empresa. Sea p el precio del producto final, y w_K y w_L los precios de los factores K y L respectivamente.

a) Derive la curva de oferta de cada empresa si puede elegir libremente la cantidad de factores a contratar (*largo plazo de la empresa*), y calcule su elasticidad precio $\varepsilon_{q,p}$.

b) Derive la curva de oferta de cada empresa si el capital está fijo en un nivel $\overline{K}$ (*corto plazo de la empresa*), y calcule su elasticidad precio $\varepsilon_{q,p}$. Compare con su resultado en *a*) y explique por qué son diferentes ambas elasticidades (intuición).

c) Suponga ahora que, si produce, la empresa debe pagar una patente de monto $F = 100$ (fijo). Encuentre la curva de oferta de la empresa, e indique cuál será el precio que prevalecerá en el *largo plazo de la industria* (en que pueden entrar libremente nuevas empresas a la industria, y salir de ella). En su respuesta suponga que todos los factores son variables, y que $a = 1 = w_L = w_K$. Justifique claramente su respuesta.

3. (*) Considere una industria compuesta por empresas competitivas e idénticas. Suponga que el costo total de producción de cada empresa es de la forma: $C^* = 25 + 100q + q^2$.

a) Describa la oferta de la industria de corto plazo (con N empresas operando), y de largo plazo (con libertad de entrada de nuevas empresas). En la descripción debe dar una expresión algebraica para la oferta de corto y largo plazo de la industria, y comparar sus elasticidades (pero no es necesario calcular elasticidades, basta con discutir por qué una elasticidad es más alta que la otra).

b) Considere el caso en que la demanda de mercado es de la forma: $Q = 2200 - 10p$.

1) Si inicialmente hay 100 empresas operando, ¿cuánto produce cada una? ¿a qué precio venden? ¿a cuànto asciende la ganancia que obtiene cada empresa?

2) Si se permite la libre entrada de nuevas empresas, ¿cuántas empresas entrarán, y cómo cambiará su respuesta a las tres preguntas anteriores?

4. (*) Considere a la empresa Pierdeteúna, que con una tecnología $q = \sqrt{(K+L)}$ produce 25 unidades del bien cuando los precios son $(p, w, r) = (50, 1, 5)$.
   a) Explique por qué los trabajadores alegan que el dueño de la empresa no es leal con ellos: apenas piden aumento de sueldo, quiere despedirlos a todos. (Alternativamente, caracterice las demandas por insumos).
   b) Encuentre la función de oferta de la empresa.
   c) Encuentre la función de oferta de la industria cuando hay 10 empresas idénticas a Pierdeteúna.
   d) Encuentre el equilibrio walrasiano cuando la demanda es $P = 100 - Q$. Explique por qué ese equilibrio no se sostiene en el largo plazo.
5. (*) En ausencia de cualquier tipo de subsidios o impuestos, el mercado de la leche se encuentra en equilibrio con un precio P_0 y una cantidad Q_0. El gobierno está considerando otorgar un subsidio a la leche equivalente a un 15 % del precio actual. Suponiendo que la elasticidad de la oferta es 0.8 y la de la demanda es -0.2, determine el efecto de este subsidio en el precio de la leche.
6. (**) Considere el caso de una industria compuesta por 500 empresas competitivas e idénticas, todas con una función de producción del tipo

$$q = aK^{1/4}L^{1/4}$$

   Donde a es un parámetro que mide la tecnología disponible para la empresa. Sea p el precio del producto final, y w_K y w_L los precios de los factores K y L respectivamente.
   a) Derive la curva de oferta de cada empresa, y calcule su elasticidad precio $\varepsilon_{q,p}$.
   b) La empresa individualmente no es capaz de afectar el parámetro a. Pero suponga que a medida que **la industria como un todo** aumenta su producción, la tecnología va mejorando, de manera que a va aumentando. En particular, suponga que la relación entre a y Q, donde Q es la producción de la industria, es de la forma:

$$a = Q^{1/4}$$

   ¿Esperaría que la elasticidad de la oferta de la industria $\varepsilon_{Q,p}$ fuera mayor o menor que la de cada empresa individual $(\varepsilon_{q,p})$? Responda esta pregunta **sin calcular** la elasticidad $\varepsilon_{Q,p}$, sólo explicando la intuición.
   c) Derive la oferta de la industria y calcule su elasticidad precio $\varepsilon_{Q,p}$.

d) Calcule $\varepsilon_{q,Q}$ e interprete su significado. Demuestre que para este caso particular se cumple la fórmula general:

$$\varepsilon_{Q,p} = \frac{\sum_{i=1}^{N} r_i \varepsilon_{q_i,p}}{1 - \sum_{i=1}^{N} r_i \varepsilon_{q_i,Q}}$$

7. (**) Considere una industria compuesta por J empresas idénticas, con funciones de producción de la forma $q = AK^{1/4}L^{1/4}$, donde A es un parámetro que la empresa no puede afectar, q es la cantidad producida por la empresa (y Q la cantidad producida por la industria). Los precios de los factores K y L son $w_K = w_L = 1$. Si produce, la empresa debe pagar una patente de monto 50 (es decir, este es un costo fijo evitable). La empresa enfrenta un precio p por el producto.
   a) Derive la curva de oferta de la empresa cuando K y L son variables, y grafíquela. En su respuesta debe expresar la oferta como q en función del precio p.
   b) Suponga que $A = 2$. Describa y grafique la curva de oferta de la industria cuando hay libertad de entrada y salida de empresas a la industria (largo plazo de la industria).
   c) Suponga ahora que $A = Q$ (es decir, hay efectos externos). Explique cómo debería ser la oferta de la industria de largo plazo en este caso, y por qué. Derive esta curva de oferta de largo plazo de la industria, y compare con la de *b*).
8. (**) En un mercado competitivo, el costo de la empresa k está dado por:
   $$C(q_k) = 200 + 10q_k + 2q_k^2$$
   La demanda inicialmente es:
   $$P = 100 - \frac{1}{8}Q$$
   Inicialmente, existen 40 empresas, cada una de las cuales produce 10 unidades, que son vendidas a un precio unitario de \$50. Determine qué ocurrirá si la demanda, producto de un aumento en el ingreso se desplaza hasta
   $$P = 200 - \frac{1}{8}Q$$
   En su respuesta, distinga claramente entre efectos inmediatos sobre precio y cantidades, y efectos a largo plazo (con entrada).

CAPíTULO 10

Equilibrio General: Intercambio

En este capítulo comenzamos a estudiar las propiedades del equilibrio competitivo para todos los mercados en forma simultánea, esto es, en equilibrio general, pero en una situación muy particular: el de una economía de intercambio puro. Una economía de intercambio puro es una economía en que no hay producción, sino que los individuos tienen dotaciones iniciales de bienes, que pueden intercambiar entre ellos, para luego consumir. La ventaja de comenzar el estudio del equilibrio general con este caso, es que nos permite entender algunos resultados importantes sin necesidad de complicar el análisis incorporando producción. Aunque la habilidad de dibujar ofertas y demandas de la manera convencional se pierde al trabajar con todos los mercados en forma simultánea, existe otra herramienta analítica muy útil que las sustituye: la caja de Edgeworth.

1. Caja de Edgeworth

Para facilitar el análisis gráfico consideraremos el caso de una economía de intercambio de dos consumidores y dos bienes, que puede ser representado gráficamente en una caja de Edgeworth.

Consideremos el caso de dos consumidores (o dos grupos de consumidores, donde todos los consumidores son idénticos entre sí al interior de cada grupo) que tienen dotaciones iniciales de los dos bienes x_1 y x_2, y cuyas preferencias pueden ser representadas mediante una función de utilidad cuasicóncava (con mapa de curvas de indiferencia convexas, caso que denominamos "preferencias convexas"). La canasta de consumo final del consumidor i se denota $x^i = (x_{1i}, x_{2i})$, y su dotación inicial se denota $\overline{x}^i = (\overline{x}_{1i}, \overline{x}_{2i})$. Suponemos que los consumidores son precio aceptantes, y enfrentan precios p_1 y p_2 por los bienes 1 y 2 respectivamente.

Definición 25. *Decimos que una* ***asignación*** $\left(x^1, x^2\right)$ *es* ***factible*** *si* $x_{11} + x_{12} \leq \overline{x}_{11} + \overline{x}_{12}$ *y* $x_{21} + x_{22} \leq \overline{x}_{21} + \overline{x}_{22}$.

Cuando consideramos asignaciones factibles que satisfacen las condiciones anteriores con igualdad (no hay desperdicio), podemos representarlas

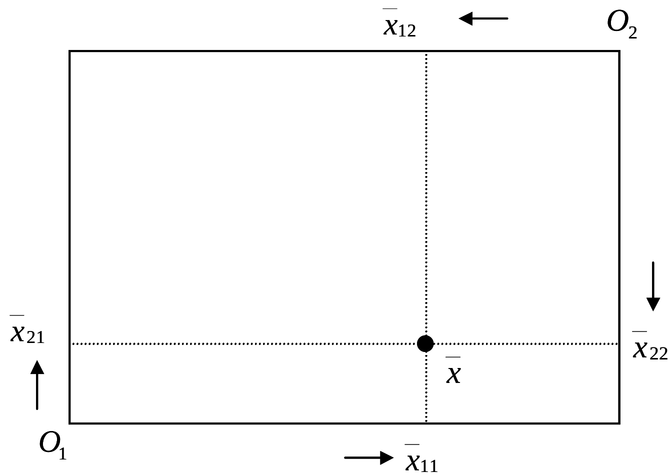


FIGURA 1. Caja de Edgeworth

por medio de la caja de Edgeworth, en que medimos la asignación del consumidor 1 en la esquina sur-oeste (como siempre), y la asignación del consumidor 2 en la esquina nor-este. En el eje horizontal medimos las cantidades del bien 1, y en el vertical medimos las cantidades del bien 2. Las dotaciones totales de ambos bienes determinan el tamaño de la caja de Edgeworth, como se representa en la figura 1.

2. Precios y asignación de equilibrio

Incorporemos ahora los precios p_1 y p_2, con $\frac{p_1}{p_2} \equiv p$. A partir de las dotaciones iniciales y de los precios podemos definir las restricciones presupuestarias de ambos consumidores (tal como lo hacíamos en el capítulo 1, cuando considerábamos el caso de un consumidor dotado de una canasta). En la caja de Edgeworth, las restricciones presupuestarias de ambos consumidores están sobrepuestas, ya que ambas pasan por el punto de la dotación inicial, y ambas tienen la misma pendiente (lo que se verifica constatando que se trata de ángulos alternos internos). Una vez definidas las preferencias y el conjunto de posibilidades de cada consumidor, se obtienen las demandas individuales de ambos bienes. Una propiedad importante de estas demandas es que son homogéneas de grado cero en precios p_1 y p_2. Esto se debe a que podemos reescribir la restricción presupuestaria como $p\,(x_{1i} - \overline{x}_{1i}) + (x_{2i} - \overline{x}_{2i}) = 0$. Luego, si ambos precios cambian en igual proporción, la restricción presupuestaria no se ve afectada, por lo que la cantidad demandada no puede cambiar. En este caso, entonces, podemos escribir las demandas individuales como $x_{\ell i}^{*} = x_{\ell i}\,(p)$. Luego, en este contexto lo único que importa (y lo único que podemos determinar), es el precio relativo.

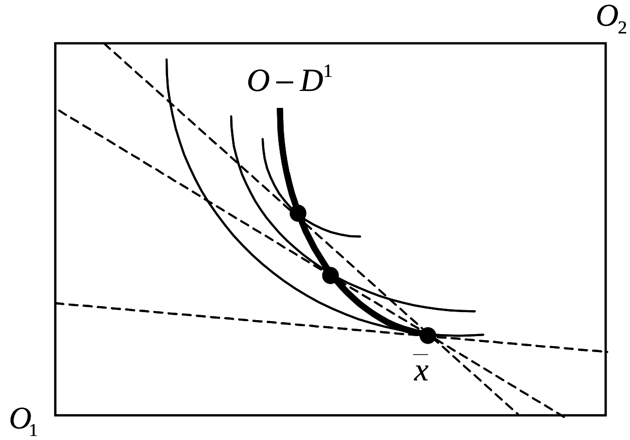


FIGURA 2. La curva oferta-demanda del consumidor 1

Si partimos de la dotación inicial y trazamos ahora una curva que une las cantidades que cada consumidor querría consumir a cada precio relativo $\frac{p_1}{p_2}$, se define la **curva de oferta-demanda (O-D)**. Le llamamos curva de oferta-demanda, ya que para ciertos precios relativos el consumidor querrá consumir una mayor cantidad que su dotación en el bien 1 (será un demandante neto de este bien), mientras que para otros precios querrá consumir menos que su dotación inicial del bien 1 (será un oferente neto de este bien). Esta curva estará siempre por sobre la curva de indiferencia asociada a la dotación inicial, ya que sólo va a intercambiar si le resulta beneficioso[1].

En la figura 2 se ilustra parte de la curva de oferta-demanda para el consumidor 1. Las líneas punteadas representan restricciones presupuestarias para el consumidor 1 (partiendo desde el origen O_1) para distintos precios relativos; a medida que aumenta el precio relativo del bien 1, la cantidad demandada de dicho bien disminuye en la medida que el efecto sustitución domina al efecto ingreso. En el caso ilustrado en la figura, el consumidor 1 es un vendedor neto del bien 1, por lo que al aumentar $\frac{p_1}{p_2}$ el efecto sustitución tiene el signo opuesto al efecto ingreso si el bien es normal: por efecto sustitución cae la cantidad consumida de dicho bien, mientras que por efecto ingreso ella aumenta.

Tal como adelantáramos en el capítulo 8, en una economía de intercambio definimos el **equilibrio walrasiano** como una lista de precios (p_1^*, p_2^*) o un precio relativo p^* y una asignación de cantidades consumidas $\{(x_{1i}^*, x_{2i}^*)\}$

[1]Además, dado el supuesto de convexidad de las preferencias, si la curva de oferta-demanda tiene pendiente negativa, esta pendiente es decreciente (ver contraejemplo gráficamente).

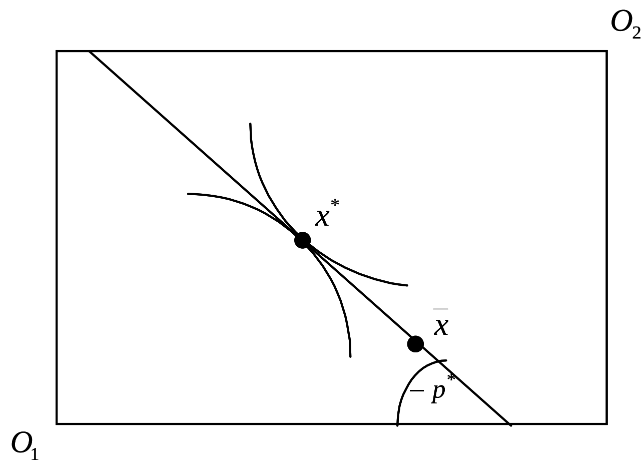


FIGURA 3. Equilibrio walrasiano en una economía de intercambio

para cada uno de los n consumidores que satisfacen: i) las cantidades asignadas totales de cada bien son las que cada consumidor querría comprar a los precios vigentes (es decir, $x_{\ell i}^* = x_{\ell i}(p^*)$), y ii) que la suma de las cantidades consumidas coincida con la de las dotaciones, esto es: $\sum_{i=1}^{n} x_{\ell i}(p^*) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{\ell i}$.

Notemos ahora que todas las asignaciones en la caja de Edgeworth cumplen con las condiciones $x_{11} + x_{12} = \overline{x}_{11} + \overline{x}_{12}$ y $x_{21} + x_{22} = \overline{x}_{21} + \overline{x}_{22}$. Luego, las asignaciones en la caja de Edgeworth cumplen con la condición ii). Esto implica que, si tomamos una asignación en la caja, sabemos que si uno de los consumidores es un demandante neto del bien ℓ (quiere consumir más que su dotación inicial de ese bien), el otro consumidor será un oferente neto de ℓ (y ofrecerá justamente la misma cantidad que el otro demanda). Por lo tanto, el equilibrio walrasiano se puede definir en este caso simplemente como una asignación de consumo x^* perteneciente a la caja de Edgeworth, y precio relativo p^*, tal que las cantidades establecidas en x^* son las que cada consumidor querría comprar a los precios vigentes. Lo anterior se representa en la figura 3 (para una solución interior).

De la definición de las curvas de oferta-demanda sabemos además que el equilibrio walrasiano ocurre al precio $\frac{p_1}{p_2} \equiv p$ en que las curvas O-D de ambos consumidores se intersectan en la caja, como se ilustra en la figura 4. Si ambas curvas O-D tienen siempre pendiente negativa, es claro que tendremos un sólo equilibrio walrasiano (dado que la pendiente de ambas curvas es negativa y decreciente, cuando se cruzan ya no se pueden volver a cruzar otra vez). Si el efecto ingreso es mayor que el efecto sustitución, la pendiente de la curva O-D puede pasar a ser positiva a partir de un determinado punto. Si las curvas O-D de ambos individuos tienen esta

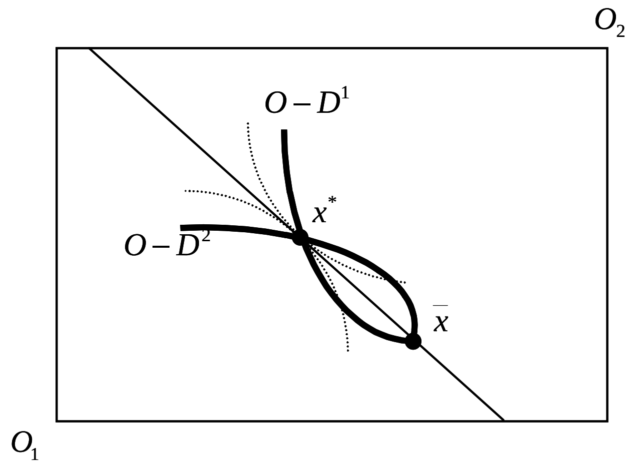


FIGURA 4. Equilibrio walrasiano y curvas de oferta-demanda

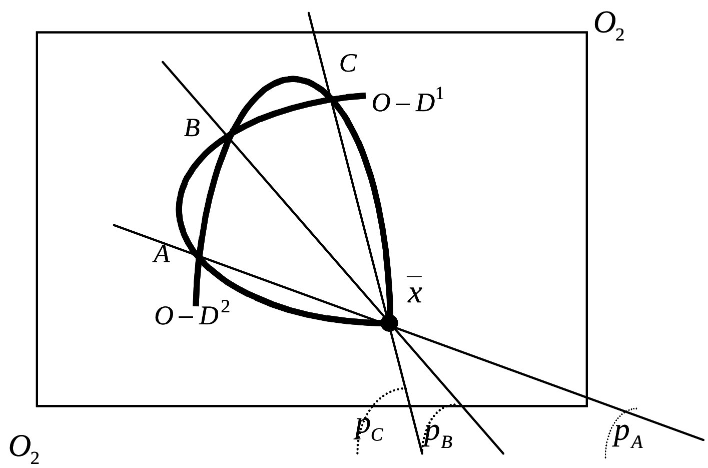


FIGURA 5. Un ejemplo de equilibrios múltiples

propiedad, entonces podemos tener más de un equilibrio walrasiano, como se muestra en la figura 5.

Para que exista (al menos) un equilibrio walrasiano, basta que la función de utilidad sea continua, cuasicóncava y fuertemente monótona (no saciedad: si aumenta el consumo de al menos un bien sin disminuir el de ningún otro, el individuo prefiere la nueva canasta), y que la dotación agregada de todos los bienes sea positiva. La intuición detrás de estas condiciones es la siguiente: si consideramos solamente el bien 1 (recordando que cuando éste mercado está en equilibrio, el mercado del bien 2 también lo está por ley de Walras), sabemos que hay algún precio como p_{alto} en que hay exceso de oferta (por

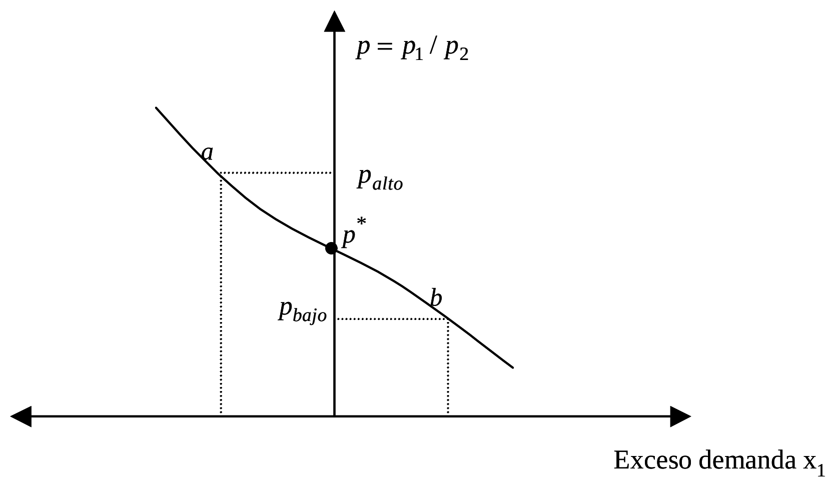


FIGURA 6. Existencia de un equilibrio walrasiano

ejemplo podemos considerar el precio que corresponde a la TMS más alta entre TMS^1 y TMS^2 en la dotación inicial); asimismo, debe haber un precio como p_{bajo} en que hay exceso de demanda (por ejemplo el menor entre TMS^1 y TMS^2 en la dotación inicial). Esta situación se representa en la figura 6.

La continuidad y cuasiconcavidad de la función de utilidad asegura que las demandas son continuas, y ello permite imaginar que al unir los puntos a y b en el gráfico anterior, lo haremos mediante una función continua, y que por lo tanto debe cruzar al eje vertical en algún punto (el punto en que lo cruza es el precio p^* de equilibrio). En el caso en que hay más de un equilibrio walrasiano, como el que veíamos antes, vamos a tener que al unir puntos como el a y el b mediante una función continua, ésta cruza al eje vertical más de una vez: en el ejemplo anterior lo cruzaba en tres puntos, como se refleja en la figura 7.

¿Qué propiedades tienen los tres equilibrios walrasianos encontrados en las figuras 5 y 7? Consideremos el punto B. En el gráfico se aprecia claramente que si consideramos un precio relativo $p_A < p < p_B$, tendremos un exceso de oferta por el bien 1, de modo que $\frac{p_1}{p_2}$ tenderá a bajar más aún. Si consideramos un precio $p_B < p < p_C$, tendremos un exceso de demanda por el bien 1, de modo que $\frac{p_1}{p_2}$ tenderá a subir más aún Luego, B es un equilibrio inestable. Lo contrario ocurre con los puntos A y C, que sí son estables (para verificarlo, tome precios menores que p_A y precios mayores que p_C, y verifique que el precio tiende al del equilibrio inicialmente considerado). Se verifica entonces que los precios de equilibrio que se encuentran en tramos en que la función de exceso de demanda tiene pendiente negativa son estables, mientras que aquellos que se encuentra en el tramo en que la función de exceso de demanda tiene pendiente positiva, son inestables.

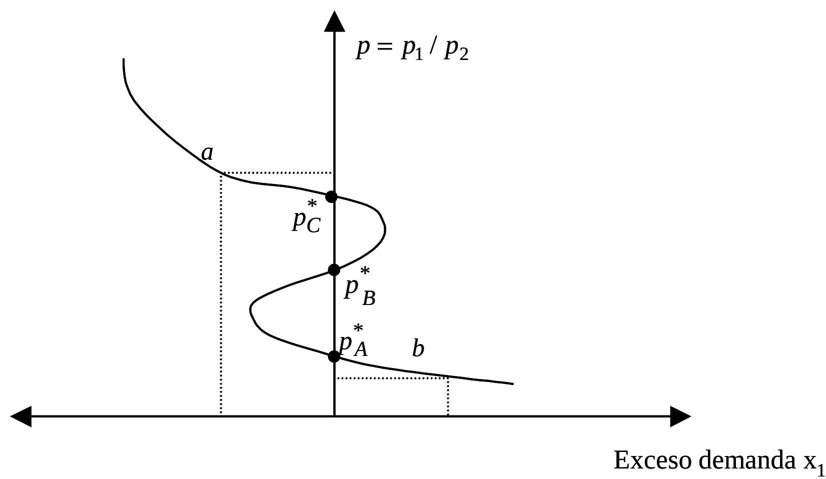


FIGURA 7. Existencia de tres precios de equilibrio

3. Primer teorema del bienestar

Una propiedad sumamente importante de la asignación de recursos que se alcanza en un equilibrio walrasiano es su eficiencia, esto es, su optimalidad en el sentido de Pareto, como viéramos en el capítulo 8. En el caso de una economía de intercambio, esta propiedad se puede apreciar en la caja de Edgeworth.

DEFINICIÓN 26. *El* ***conjunto de Pareto*** *o* ***curva de contrato*** *es el conjunto de todas la asignaciones factibles que son óptimas en el sentido de Pareto.*

Bajo el supuesto de convexidad de las preferencias, este conjunto es el lugar geométrico de todos los puntos de tangencia entre curvas de indiferencia en las soluciones interiores, como se ilustra con la línea gruesa en la figura 8. Cualquier asignación interior en que la tasa marginal de sustitución de los dos consumidores difiere, es una asignación que no es óptima en el sentido de Pareto.

EJERCICIO 22. *Considere una economía compuesta por dos consumidores, A y B, con preferencias representadas por: $u^A = \left(x_1^A\right)^\alpha \left(x_2^A\right)^{1-\alpha}$ y $u^B = \left(x_1^B\right)^\beta \left(x_2^B\right)^{1-\beta}$. Derive la curva de contrato, expresándola como una función de la forma $x_2^A = f\left(x_1^A\right)$. Muestre que la curva de contrato tiene la forma descrita en la figura 8 si $\alpha > \beta$.*

Al subconjunto compuesto por todas las asignaciones en la curva de contrato en que ninguno de los dos consumidores obtienen un nivel de utilidad

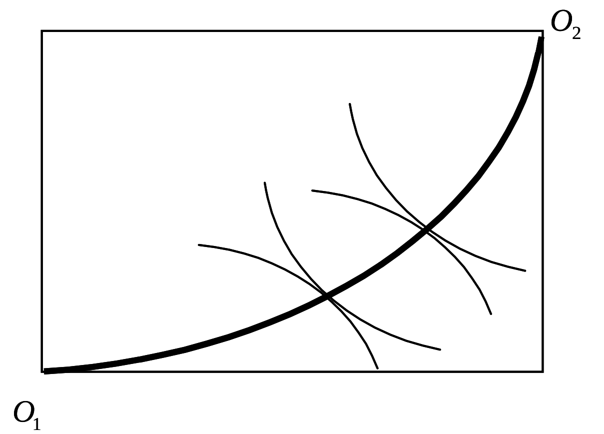


FIGURA 8. Curva de contrato

menor que el inicial (antes de intercambiar), le llamaremos **curva de contrato restringida**. Es claro que luego del intercambio voluntario que acabe con todas las posibilidades mutuamente beneficiosas, quedaremos en algún punto de la curva de contrato restringida. Eso es precisamente lo que ocurre en un equilibrio walrasiano, resultado que se enuncia en el Primer Teorema del Bienestar. Para obtener este resultado basta notar que en equilibrio walrasiano, la asignación de consumo de cada individuo es la que él demanda a los precios de equilibrio, y por lo tanto, la que le permite alcanzar el máximo nivel de utilidad posible (o bienestar, según el axioma 0). Es decir, en la asignación de equilibrio ambos consumidores están en la frontera de su conjunto de posibilidades de consumo. Luego, cualquier canasta de consumo que deje a un consumidor estrictamente mejor, se encuentra fuera de su conjunto de posibilidades de consumo. Pero asignar a este consumidor una canasta que lo deje fuera de su conjunto de posibilidades de consumo, implica necesariamente asignar al otro individuo una canasta que lo deje bajo la frontera de su conjunto de posibilidades de consumo, es decir, en una peor situación. En conclusión, cualquier asignación de consumo mejor en el sentido de Pareto a la de equilibrio, no es factible.

Ejercicios

1. (*) Considere una economía en la que hay 50 unidades del bien 1 y 100 del bien 2 para repartir entre las personas A y B, cuyas preferencias están dadas por:

$$\begin{aligned} u^A &= \min\left\{x_1^A, x_2^A\right\} \\ u^B &= x_1^B + \ln x_2^B \end{aligned}$$

a) Encuentre el conjunto de asignaciones eficientes, o curva de contrato (un gráfico ayuda).

b) Verifique que si las dotaciones iniciales son

	x_1	x_2
A	0	100
B	50	0

se alcanza un equilibrio walrasiano a los precios $\frac{p_1}{p_2} = 99$. Es decir, verifique que si A y B enfrentan dichos precios, al maximizar cada uno su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria, se encontrará que la cantidad *total* demandada de x_1 será 50, y la cantidad *total* demandada de x_2 será 100. ¿Es un óptimo paretiano?

2. (*) Francisca usa un lápiz (L) y una hoja (H) para hacer cada dibujo, mientras que Benjamín prefiere tirar cosas a sus compañeros en lugar de dibujar —por cierto, cualquier cosa es igualmente buena para eso—. Así, sus preferencias están dadas por $U^F = \text{mín}\,\{L, H\}$ y $U^B = L + H$, respectivamente. La profesora tiene 10 hojas y 5 lápices para repartir.

   a) Encuentre todas las asignaciones eficientes, y dibújelas en una caja de Edgeworth. AYUDA: más vale pensar que calcular.

   b) Suponga que la profesora se "equivoca" —después de todo, ella no tomó este curso— y le entrega 7 hojas y 4 lápices a Benjamín, y el resto a Francisca. Determine todos los trueques posibles que dejarían a ambos mejor.

   c) Compruebe que si la relación de precios es $\frac{P_H}{P_L} = 1$, se obtiene un equilibrio. Compruebe, asimismo, que la asignación de recursos resultante es óptima en el sentido de Pareto. ¿Significa esto que, en este simplificado mundo sin costos de transacción, da lo mismo la distribución inicial de recursos, puesto que el intercambio siempre la llevará a un punto eficiente?

3. (*) Juan Fernando y Chileó son dos islas cercanas, cada una ocupada por un único habitante. En Juan Fernando sólo hay langostas, mientras que en Chileó sólo papas. En un mes, el fernandino atrapa 100 langostas, mientras el chileoeño cosecha 500 papas. Curiosamente, ambas personas tienen idénticas preferencias por langostas (x_1) y papas (x_2), dadas por:

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

   Imagine por simplicidad que no existen costos de transacción ni de transporte entre ambas personas/lugares.

   a) Encuentre la curva de contrato, esto es, el conjunto de asignaciones eficientes. Explique su procedimiento. Grafique.

   b) Encuentre el núcleo de esta economía. Explique.

   c) Encuentre el equilibrio walrasiano de esta economía.

d) Verifique que la asignación encontrada en (c) es eficiente, esto es, corresponde a un punto de la curva de contrato. ¿Es esto una particularidad de este ejemplo?

e) ¿Es el equilibrio walrasiano una predicción razonable de lo que suce-derá en esta situación? ¿Cambia su respuesta si en lugar de uno, cada isla tiene un millón de habitantes idénticos?

4. (**) Imagine una economía de intercambio compuesta por dos (tipos de) individuos, A y B. Las preferencias de A y B se representan mediante las siguientes funciones de utilidad: $u^A = x_1^A \left(x_2^A\right)^{1/2}$; $u^B = \left(x_1^B\right)^{1/2} x_2^B$.

   Las dotaciones (denotadas por $\omega^i = \left(\omega_1^i, \omega_2^i\right)$) de A y B son respectivamente: $\omega^A = (100, 0)$; $\omega^B = (0, 150)$

   a) Encuentre y caracterice lo más posible el conjunto de Pareto o curva de contrato de esta economía.

   b) Encuentre el equilibrio walrasiano de esta economía, dadas las dotaciones iniciales indicadas en el enunciado. Muestre (algebraicamente) que la asignación encontrada pertenece al conjunto de Pareto (Primer Teorema del Bienestar).

   c) Escoja cualquier otro punto del conjunto de Pareto, e indique una forma de llegar a él a través del equilibrio competitivo, proponiendo transferencias entre los individuos que lo hagan posible (Segundo Teorema del Bienestar).

5. (**) En una economía existen sólo dos consumidores, A y B, con las siguientes dotaciones iniciales de X e Y: $\omega^A = (10, 20)\,; \omega^B = (5, 5)$

   La funciones de utilidad de A y B son de la forma:

$$
\begin{aligned}
u^A &= (x^A)^{0,5}(x^A)^{0,5} \\
u^B &= (x^B)^{0,5}(y^B)^{0,5}
\end{aligned}
$$

   El Gobierno de este país deja que los consumidores A y B intercambien voluntariamente X e Y entre sí, pero quiere tomar la siguiente medida: redistribuir ingresos quitando 5 unidades de Y al individuo A (de su dotación inicial), entregándoselas al individuo B.

   SE PIDE:

   Analice cómo cambia el equilibrio final con la aplicación de esta medida, comparando con el equilibrio final que se alcanzaría sin aplicarla. Muestre en un gráfico y justifique claramente su respuesta.

6. (**) En una isla sureña, en la que sólo hay dos bienes: trigo (x_1) y pasas (x_2), viven dos personas: alfa y beta. Ambas personas son homotéticas, con preferencias dadas por:

$$
\begin{aligned}
u_\alpha(x_1, x_2) &= \frac{1}{4}\ln x_1 + \frac{1}{4}\ln x_2 \\
u_\beta(x_1, x_2) &= x_1^3 x_2^3
\end{aligned}
$$

a) Si alfa y beta contaran en total (es decir, entre ambos) con 100 unidades de x_1 y 200 de x_2, ¿cuáles serían las asignaciones eficientes (en el sentido de Pareto) de pasas y trigo? Explique claramente. Grafique.

b) Si la asignación (dotación) original de recursos fuera:

	Alfa	Beta
Trigo (x_1)	90	10
Pasas (x_2)	20	180

¿Cuál sería el conjunto de asignaciones a las que no se podría llegar a través de un proceso de negociación voluntario entre alfa y beta? Explique claramente. Grafique.

c) Encuentre las demandas (netas) de trigo y pasas para cada persona, en función de los precios p_1 y p_2, asociadas a la dotación descrita en (b).

d) Encuentre el equilibrio (walrasiano) asociado a la dotación descrita en (b). Grafíquelo.

e) Compruebe que la asignación encontrada en (d) es una de las encontradas en (a). ¿Por qué esto le sorprende (o no le sorprende)?

f) ¿Le parece que su respuesta a (d) es una predicción razonable de lo que va a ocurrir en la isla? ¿Puede imaginar alguna otra predicción, quizás igualmente razonable? Explique claramente.

7. (**) Considere una economía de intercambio (esto es, sin producción) compuesta de dos personas, A y B, que valoran el consumo de dos bienes, x_1 y x_2. A tiene 200 unidades del bien 1 y 600 del bien 2; B tiene 600 unidades del bien 1 y 600 del 2. Ambos tienen preferencias representables por medio de la función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$$

a) Encuentre el conjunto de mejoras paretianas respecto de la dotación inicial. Ilústrelo en una caja de Edgeworth. Explique.

b) Encuentre el conjunto de asignaciones eficientes. Ilústrelo en una caja de Edgeworth. Explique.

c) De acuerdo al Primer Teorema del Bienestar, ¿qué asignaciones no se pueden conseguir en un equilibrio walrasiano?

d) Encuentre el conjunto de equilibrios walrasianos (Ayuda: son muchos equilibrios; el camino del razonamiento debiera ser superior al del cálculo mecánico para encontrarlos). Ilústrelo en una caja de Edgeworth. Explique.

e) ¿Tiene sentido usar al equilibrio walrasiano como noción de equilibrio en este contexto?

f) Si en lugar de transar en mercados anónimos a precios dados, A le hiciera una oferta a B del estilo "tómalo o déjalo", y si B tuviera buenas razones para creer que no hay posibilidades de futuras negociaciones, ¿cuál cree que será el resultado? Es decir, ¿qué oferta hará A? ¿La aceptará B?

8. (***) Considere una economía compuesta por dos (tipos de) consumidores, A y B. Las preferencias de estos consumidores se pueden representar mediante las siguientes funciones de utilidad:

$$\begin{aligned} u^A &= \min\left\{x_1^A, x_2^A\right\} \\ u^B &= x_1^B\left(x_2^B\right)^2 \end{aligned}$$

Las dotaciones iniciales de ambos individuos son las siguientes: $\omega^A = (80, 20)$ y $\omega^B = (20, 80)$

a) Dibuje en la caja de Edgeworth la curva de oferta-demanda del consumidor A (recuerde que la curva de oferta-demanda muestra la cantidad consumida del consumidor para cada precio $p \equiv \frac{p_1}{p_2}$, dada la dotación inicial). ¿Cómo será entonces la asignación en el equilibrio walrasiano?, ¿puede ser de equilibrio una solución en que $x_1^A \neq x_2^A$? Justifique.

b) Encuentre la asignación y precio p de equilibrio walrasiano. Explique su procedimiento.

CAPíTULO 11

Equilibrio General: Producción

En este capítulo analizamos el equilibrio general en una economía con producción. En la primera parte nos abstraemos del problema de la asignación de consumo para centrarnos en producción. Para ello, tomamos el precio de los bienes como exógeno, y analizamos las propiedades del equilibrio walrasiano, para estudiar luego cómo se ve afectado éste ante cambios en los parámetros del problema, y sus consecuencias sobre la distribución funcional del ingreso y el bienestar de los dueños del capital y del trabajo. En la segunda parte del capítulo dejamos el supuesto de precios de bienes determinados exógenamente, y reconsideramos los ejercicios previos en este nuevo escenario en que los precios de los bienes también se determinan internamente. Entonces, la primera parte puede entenderse como el análisis de equilibrio en una economía abierta al comercio de bienes, en que los precios se determinan en el mercado internacional, mientras la segunda correspondería a una economía cerrada.

1. Producción sin consumo explícito

1.1. Modelo de un sector y dos factores. En esta subsección analizamos una economía en que hay un solo sector o industria que produce el bien x utilizando dos factores, K y L. En este análisis vamos a considerar el caso de una industria (o sector) compuesto por empresas competitivas, y con una tecnología agregada de retornos constantes a escala. Como se discutió en el capítulo 8, el supuesto de tecnología agregada de retornos constantes es consistente con dos situaciones diferentes: una en que la función de producción de cada empresa individual es homogénea de grado 1, y otra en que las empresas individuales tienen una tecnología que no es de retornos constantes a escala, pero la oferta agregada es horizontal (en el nivel de costo medio mínimo de cada empresa, lo que corresponde a la oferta de largo plazo de una industria con tecnología perfectamente replicable y en que no hay límite a la entrada de nuevas empresas).

Luego, podemos utilizar la función de producción agregada $F(K, L)$ para caracterizar el comportamiento de la industria. Dado el supuesto de retornos constates a escala (homogeneidad de grado 1 de F), podemos escribir la función de producción agregada como:

$$Q = F(L, K) = LG\left(\tfrac{K}{L}\right)$$

Podemos utilizar todas las propiedades que ya habíamos derivado para las funciones homogéneas de grado 1. En particular, nos interesan ahora las siguientes propiedades especialmente:

1. La tasa marginal de sustitución técnica entre factores (o la razón de productividades marginales) depende sólo de la razón de uso de factores K/L. De hecho, en el caso de la función de producción homogénea de grado 1, *la productividad marginal de cada factor por separado depende sólo de la razón de uso*:

$$\begin{aligned} F_L &= G\left(\tfrac{K}{L}\right) - \frac{K}{L}G'\left(\tfrac{K}{L}\right) \\ F_K &= G'\left(\tfrac{K}{L}\right) \end{aligned}$$

   Además sabemos que $\frac{\partial F_L}{\partial(K/L)} > 0$ y que $\frac{\partial F_K}{\partial(K/L)} < 0$. Esto, dado que la concavidad de F nos asegura que $0 > \frac{\partial F_K}{\partial K} = \frac{\partial F_K}{\partial(K/L)}\frac{\partial(K/L)}{\partial K} = \frac{1}{L}\frac{\partial F_K}{\partial(K/L)}$, de modo que $G''\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\partial F_K}{\partial(K/L)} < 0$.
2. *El pago a los factores agota el producto.* Para obtener este resultado basta recordar que en este caso la ganancia de la empresa es nula. Pero más formalmente, sabemos por Euler que:

$$\begin{gathered} F_L L + F_K K = Q \\ \Leftrightarrow pF_L L + pF_K K = pQ \end{gathered}$$

   Luego, si a cada factor se le paga el valor de su producto marginal (de modo que $w_i = pF_i$), obtenemos:

$$w_L L + w_K K = pQ$$

Entonces, podemos graficar la productividad marginal del capital y del trabajo a nivel de la industria como en los gráficos de la figura 1.

1.2. Precios y asignación de equilibrio. La función de producción agregada caracteriza el comportamiento agregado de las empresas que componen la industria. Luego, la maximización de ganancias de cada empresa en la industria implica que en equilibrio la remuneración real para los factores K y L debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \frac{w_L}{p} &= F_L\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right) \\ \frac{w_K}{p} &= F_K\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right) \end{aligned}$$

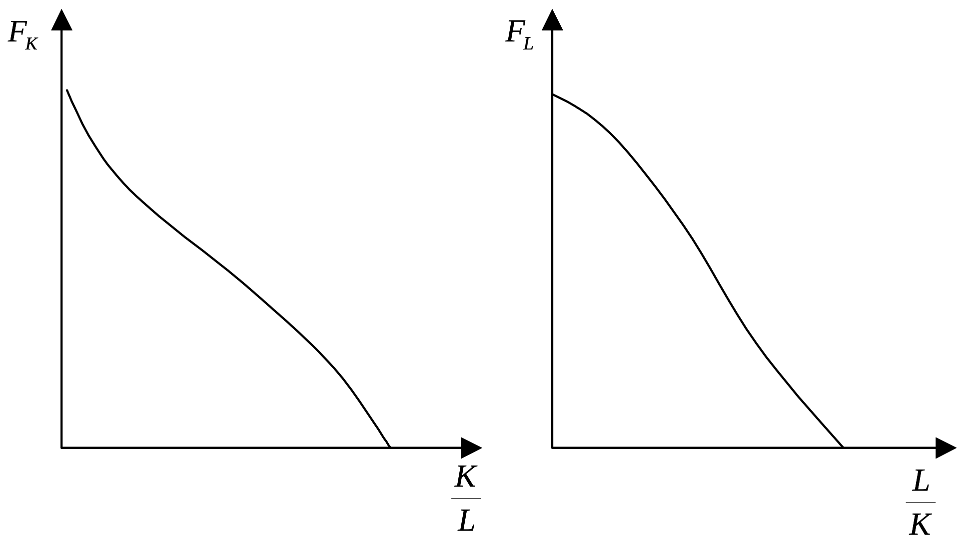


FIGURA 1. Productividad marginal del capital y del trabajo

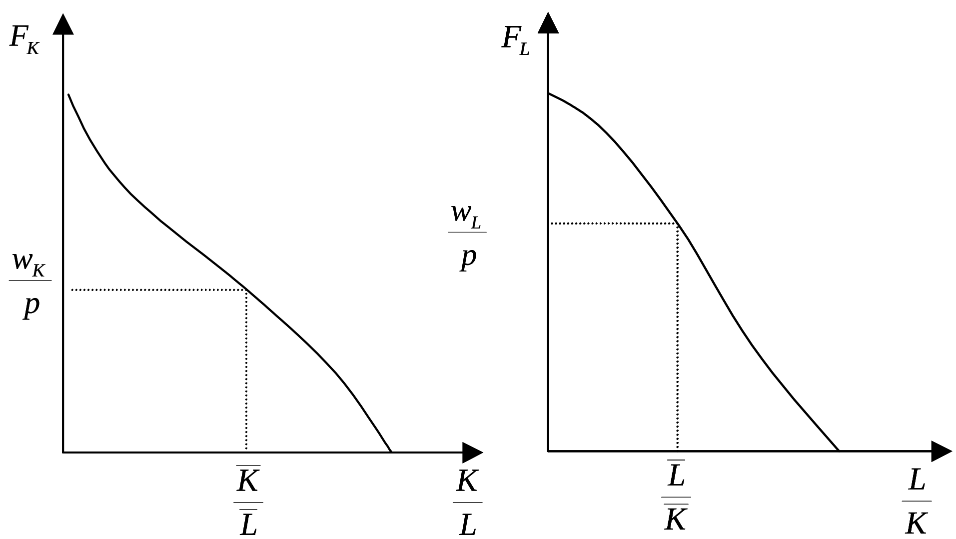


FIGURA 2. Salarios reales de equilibrio

Pero $F_L\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)$ y $F_K\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)$ están determinados una vez que se determina la dotación total de factores en la economía. Luego, las remuneraciones reales de equilibrio $\frac{w_L}{p}$ y $\frac{w_K}{p}$ son únicas, como se observa en los gráficos de la figura 2.

Para verificar que estas son las remuneraciones reales de equilibrio, note en la figura que si $\frac{w_L}{p}$ fuera mayor que $F_L\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)$ existiría un exceso de oferta de trabajo relativo: las empresas querrían contratar una razón K/L más alta que $\overline{K}/\overline{L}$, por lo que existiría un exceso de demanda relativo por K, y un exceso de oferta relativo por L. Asimismo, si $\frac{w_L}{p}$ fuera menor que $F_L\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)$ existiría un exceso de demanda de trabajo (y análogamente si $\frac{w_K}{p} > F_K\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)$ o $\frac{w_K}{p} < F_K\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)$ en el mercado del capital).

Es importante tener en cuenta tres consideraciones en este análisis:

i) Si las remuneraciones reales $\frac{w_L}{p}$ y $\frac{w_K}{p}$ son $F_L\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)$ y $F_K\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)$ respectivamente, entonces tenemos que la tasa marginal de sustitución de mercado será $\frac{F_L\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)}{F_K\left(\frac{\overline{K}}{\overline{L}}\right)}$, que es exactamente igual a la tasa marginal de sustitución técnica evaluada en $\overline{K}/\overline{L}$. Luego, si pensamos el problema de optimización desde la perspectiva de la minimización de costos directamente, evidentemente estas remuneraciones reales siguen siendo de equilibrio, en el sentido de que en el agregado las empresas contratan la razón de uso $\overline{K}/\overline{L}$ (por lo que no hay exceso de oferta ni demanda relativa de factores).

ii) Cuando pensamos el problema desde la perspectiva de la maximización de utilidad, dados los rendimientos constantes a escala, sabemos que la cantidad óptima a contratar de factores K y L (por separado) queda indeterminada. Por esa razón, tenemos que hablar de excesos de demanda o de oferta "relativos" de factores: nos referimos a la razón K/L, y no a cada factor por separado.

Ejercicio 23. *Demostrar que si la función de producción es de la forma* $y = L^{0,5}K^{0,5}$*, la cantidad óptima de* K *y* L *por separado queda indeterminada para unas remuneraciones reales* $\frac{w_L}{p}$ *y* $\frac{w_K}{p}$ *dadas, pero la razón de uso no queda indeterminada.*

iii) Dado que hay un sólo bien en esta economía, el hecho de concentrarnos sólo en producción no tiene ninguna consecuencia respecto de la determinación del equilibrio: los consumidores no tienen más decisión que tomar que cuánto consumir del único bien existente, por lo que bajo el supuesto de no saciedad, consumen todo su ingreso en x: es decir, los dueños de una unidad de trabajo consumen $\frac{w_L}{p}$ unidades de x, y los dueños de una unidad de capital consumen $\frac{w_K}{p}$ unidades de x. El mismo hecho que el pago de los factores agote el producto indica que la cantidad producida de x es igual a la cantidad demandada en total:

$$\frac{w_L}{p}L + \frac{w_K}{p}K = Q$$

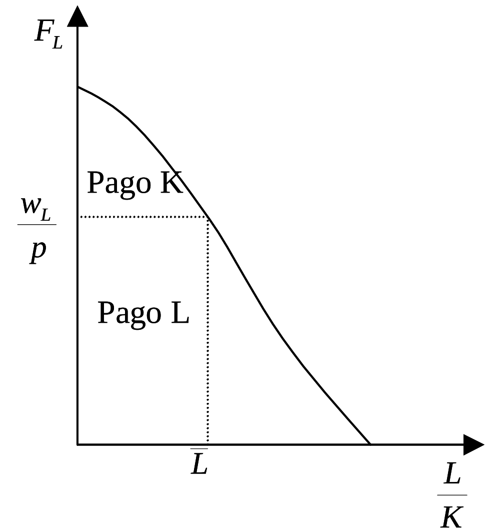


Figura 3. Pago total a los factores

1.2.1. Distribución funcional del ingreso. A partir de las figuras anteriores podemos encontrar el pago real total al trabajo y al capital en esta economía.

Por ejemplo, si definimos las unidades de capital de modo que $\overline{K} = 1$, sabemos que el área bajo la curva F_L hasta $L = \overline{L}$ corresponde a la producción total Q (es la integral de la función de producto marginal). El pago total real al trabajo corresponde a $\dfrac{w_L\overline{L}}{p}$. Por último, recordando que

$$\frac{w_L}{p}L + \frac{w_K}{p}K = Q$$

encontramos el pago total real al capital $\dfrac{w_K\overline{K}}{p}$ como la diferencia entre el producto total y el pago real total al trabajo, como se muestra en la figura 3.

Análogamente, podríamos definir las unidades de L de modo que $\overline{L} = 1$, y obtendríamos algo similar a partir de la curva de productividad marginal de K, F_K.

1.2.2. Efecto de un cambio en la dotación de factores en la economía. ¿Cómo cambia entonces el pago real de los factores y el bienestar de los dueños de factores ante un cambio en la dotación de ellos? Supongamos por ejemplo que se produce una inmigración de trabajadores (todos ofreciendo una unidad de L). Entonces, dado que $\overline{L}/\overline{K}$ ha aumentando, debe ser cierto

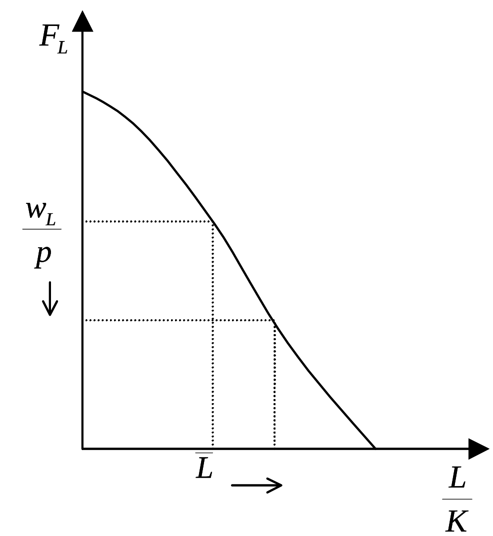


FIGURA 4. Efecto de un cambio en la dotación de trabajo

que $\dfrac{w_L}{p}$ cae, por lo que el pago real de cada trabajador cae (y cae por lo tanto el bienestar individual de los dueños de trabajo que originalmente residían en este país). La producción total aumenta y el pago total real al capital también aumenta (ya que aumenta el pago a cada unidad de capital, $\dfrac{w_K}{p}$, por lo que aumenta también el bienestar de los dueños del capital). Esto se aprecia en la figura , definiendo las unidades de K de modo que $\overline{K} = 1$.

Sin embargo, no es claro lo que ocurre con el pago total real al trabajo, ni lo que ocurre con la razón $\frac{w_L\overline{L}}{w_k\overline{K}} = \frac{F_L\overline{L}}{F_k\overline{K}}$: mientras el denominador claramente aumenta, el numerador puede aumentar o disminuir, dependiendo de si es más fuerte la caída en $\dfrac{w_L}{p}$ o el aumento en $\overline{L}$.

Visto de otra forma, podemos escribir $\frac{F_L\overline{L}}{F_k\overline{K}} = \frac{F_L/F_K}{\overline{K}/\overline{L}}$. Sabemos que producto del aumento en $\overline{L}$ la razón F_L/F_K cae, así como también cae la razón $\overline{K}/\overline{L}$, razón por la cual no podemos decir a priori si $\frac{F_L\overline{L}}{F_k\overline{K}} = \frac{F_L/F_K}{\overline{K}/\overline{L}}$ aumenta o disminuye. Si embargo, si conocemos la elasticidad de sustitución directa, podemos saber cuál de los dos cambios es más grande: si la elasticidad de sustitución $\sigma = \frac{\triangle\%(K/L)}{\triangle\%(F_L/F_K)}$ es mayor que uno, sabemos que el cambio porcentual en $\overline{K}/\overline{L}$ es mayor que el cambio porcentual en F_L/F_K, por lo que $\frac{F_L\overline{L}}{F_k\overline{K}} = \frac{F_L/F_K}{\overline{K}/\overline{L}}$ aumenta (ya que el denominador cae más que el numerador), y viceversa. La intuición de este resultado es que mientras más sustitución hay entre capital y trabajo, menor es el cambio en el precio relativo de los

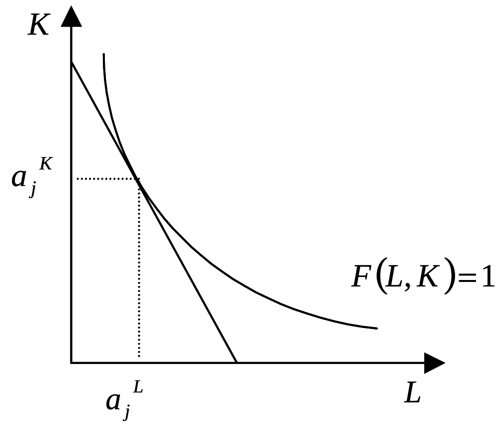


FIGURA 5. La isocuanta unitaria

factores necesario para que aumente el uso de trabajo, adecuándose a la mayor oferta existente.

1.3. Modelo 2×2: dos sectores y dos factores. En esta sección consideramos un modelo un poco más complejo: ahora hay dos sectores o industrias, que utilizan los dos factores K y L para producir los bienes x e y (con tecnologías de producción distintas). Suponemos perfecta movilidad de factores entre sectores, lo que asegura que la remuneración a los factores es igual en ambos sectores. Mantenemos el supuesto de rendimientos constantes a escala (con la función de producción correspondiente a la función de producción agregada correspondiente).

La homogeneidad de grado 1 asegura que, independientemente del nivel de producción (o de la cantidad utilizada de K y L por separado), la tasa marginal de sustitución técnica (TMST) es idéntica si nos movemos a través de una misma razón uso (la senda de expansión es una línea recta que parte del origen). Luego, podemos concentrarnos en la "isocuanta unitaria" en el análisis (que es la isocuanta correspondiente al nivel de producción $x = 1$ ó $y = 1$, dependiendo de qué sector estamos considerando).

Como es usual, suponemos convexidad de las isocuantas, por lo que dado un precio relativo de factores $w \equiv \frac{w_L}{w_K}$, la razón de uso óptima es única. La cantidad de trabajo y capital que se contrataría para producir una unidad dado el precio relativo de factores w está determinada entonces por la combinación de L y K en que la TMST es igual a w en la isocuanta unitaria. Denotamos estas cantidades por $a_j^L(w_L, w_K)$ y $a_j^K(w_L, w_K)$, como se muestra en la figura 5 (donde j denota el sector, y la curva de nivel con $F(L,K) = 1$ denota la isocuanta unitaria).

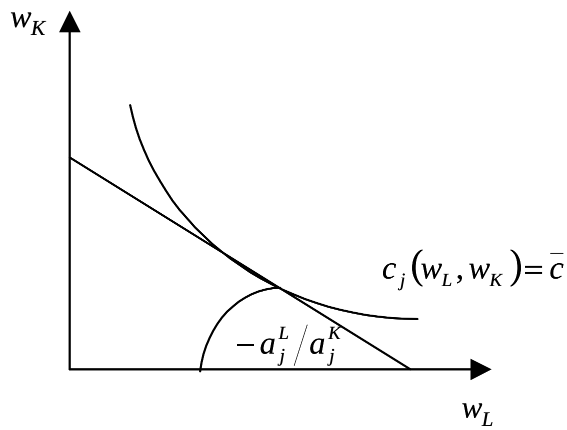


Figura 6. Curva de costo unitario

A su vez, denotamos como $c_j(w_L, w_K)$ el costo unitario, es decir, al costo asociado a producir una unidad en el sector j. Dado el supuesto de homogeneidad de grado 1 de la función de producción, sabemos que el costo medio y marginal es constante, por lo que $c_j(w_L, w_K) = CMe_j = CMg_j$.

Por otra parte, por Lema de Shephard (teorema de la envolvente) sabemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_j(w_L, w_K)}{\partial w_L} &= a_j^L(w_L, w_K) \\ \frac{\partial c_j(w_L, w_K)}{\partial w_K} &= a_j^K(w_L, w_K)\end{aligned}$$

Si tomamos todas las combinaciones de w_L y w_K tales que se obtiene el mismo costo unitario $\bar{c}$, podemos formar una curva de nivel como en la figura 6. Como se indica en la figura, la pendiente de esta curva es $-\frac{a_j^L(w_L, w_K)}{a_j^K(w_L, w_K)}$, lo que se obtiene a partir del lema de Shephard:

$$\begin{gathered}c_j(w_L, w_K) = \bar{c} \\ \Rightarrow \frac{\partial c_j(w_L, w_K)}{\partial w_L} dw_L + \frac{\partial c_j(w_L, w_K)}{\partial w_K} dw_K = d\bar{c} = 0 \\ \Rightarrow \frac{dw_K}{dw_L} = -\frac{\left(\frac{\partial c_j(w_L, w_K)}{\partial w_L}\right)}{\left(\frac{\partial c_j(w_L, w_K)}{\partial w_K}\right)} = -\frac{a_j^L(w_L, w_K)}{a_j^K(w_L, w_K)}\end{gathered}$$

Claramente la pendiente de esta curva de nivel es negativa. Además, la curva de nivel es convexa: al movernos a través de la curva de nivel en la dirección sur-este, aumenta w_L/w_K, y por lo tanto disminuye la razón

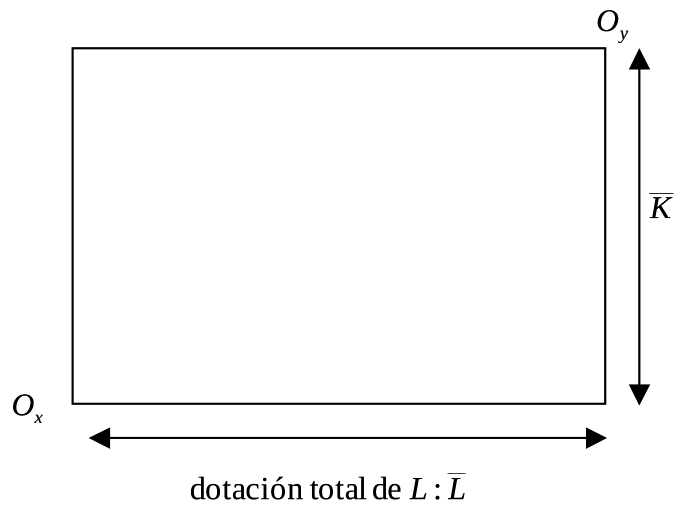


FIGURA 7. Caja de Edgeworth de producción

$\frac{a_j^L(w_L,w_K)}{a_j^K(w_L,w_K)}$ (se usa relativamente menos trabajo y más capital para producir una unidad del bien: esto se debe a la convexidad de la isocuanta, que asegura que el efecto sustitución es siempre negativo).

Nuevamente suponemos que hay una dotación (fija) de trabajo y capital en la economía, $\overline{L}$ y $\overline{K}$ respectivamente. A partir de ello podemos construir una caja de Edgeworth para producción cuyas dimensiones son $\overline{L}$ y $\overline{K}$. Si situamos a la empresa x en el origen sur-oeste, y a la empresa y en el nor-este, obtenemos la caja que se muestra en la figura 7. Cualquier punto dentro de esta caja es una asignación factible. Dada una asignación factores, el (máximo) nivel de producción de cada sector viene determinado por la función de producción correspondiente. Luego, si tomamos cualquier asignación en la caja, el nivel de producción en cada sector es el indicado por la isocuanta que pasa por el punto que representa dicha asignación, como se muestra en la figura 8.

Pero la asignación que se muestra en la figura 8 no puede ser parte del equilibrio, ya que, dado un precio relativo de factores, vemos que no puede ser cierto que ambas empresas estén contratando una combinación de factores que minimiza costos (no pueden estar ambas empresas igualando la TMST a la misma tasa marginal de sustitución de mercado $\frac{w_L}{w_K}$, ya que las dos TMST difieren entre sí en la asignación considerada). Más aún, vemos que la asignación tampoco es eficiente, en el sentido que es posible aumentar la producción de al menos uno de los dos bienes sin disminuir la producción del otro. El lugar geométrico de todas las asignaciones en la caja tales que nos es posible aumentar la producción de un bien sin disminuir la del otro

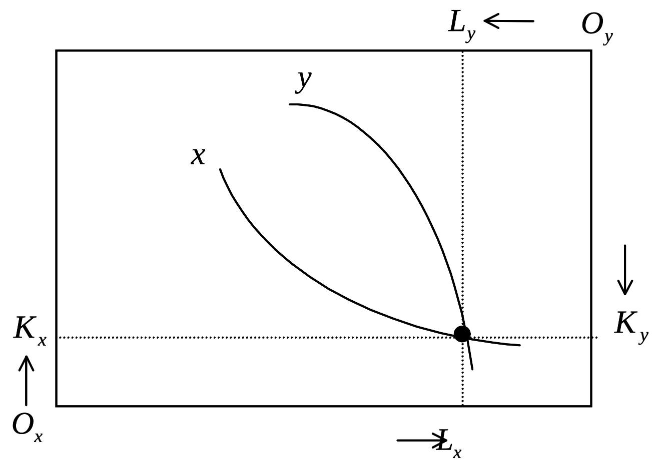


FIGURA 8. Nivel de producción determinado por asignación de factores a cada sector

se denomina **curva de contrato** o **conjunto de Pareto** (ya que contiene todas las asignaciones que son Pareto-óptimas). Dado el supuesto de convexidad de las isocuantas, la curva de contrato coincide con el conjunto de todas las asignaciones tales que la TMST de ambas empresas se igualan entre sí. Es decir, en este caso particular, vemos que las asignaciones que pueden formar parte de un equilibrio walrasiano son siempre Pareto-óptimas, concepto que retomaremos después al referirnos al primer teorema del bienestar.

Ahora bien, dado el supuesto de homogeneidad de grado 1 en las funciones de producción de ambas empresas, sabemos además que la curva de contrato siempre debe estar sobre la diagonal de la caja o bajo la diagonal, pero nunca la puede cruzar (excepto cuando coincide con la diagonal misma). Esto se debe a que, si las isocuantas fueran tangentes entre sí en algún punto de la diagonal, sabemos que deben ser tangentes también en toda la diagonal (ya que sigue siendo la misma razón de uso, por lo que se mantienen iguales las TMST para ambas empresas).

Para saber qué forma tiene la curva de contrato, debemos definir cuál de los dos sectores utiliza en mayor intensidad el factor trabajo. Para ello definimos que la producción del bien x es **relativamente más intensiva en el uso del factor** L que la producción del bien y, si se cumple que

$$\frac{a_x^L(w_L,w_K)}{a_x^K(w_L,w_K)} > \frac{a_y^L(w_L,w_K)}{a_y^K(w_L,w_K)} \qquad \text{para todo par } (w_L,w_K)$$

Es decir, decimos que el sector x es relativamente más intensivo en trabajo si para cualquier par de precios de factores, es cierto que en el sector x se utiliza una razón de uso L/K más alta, o una razón K/L más baja.

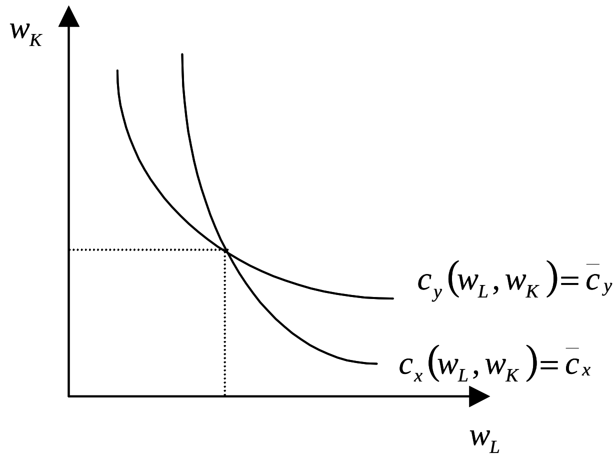


FIGURA 9. Intensidad de uso relativa de factores y pendiente curvas de costo unitario

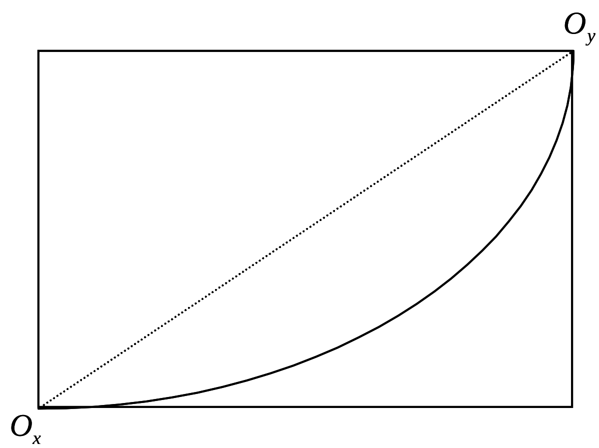


FIGURA 10. Curva de Contrato

Durante esta sección mantendremos siempre el supuesto de que x es relativamente más intensivo en trabajo. Entonces, para cualquier par (w_L, w_K), la curva de nivel para el costo unitario de la empresa x será más inclinada que la de la empresa y, ya que $\frac{dw_K}{dw_L} = -\frac{a_j^L(w_L,w_K)}{a_j^K(w_L,w_K)}$ será mayor en valor absoluto. Lo anterior se muestra en la figura 9. A su vez, la curva de contrato estará siempre por debajo de la diagonal, como en la figura 10.

En este caso además sabemos que la curva de transformación, o frontera de posibilidades de producción, será cóncava. Gráficamente, verificamos lo anterior notando que si consideramos el máximo nivel de producción de x que es posible alcanzar en esta economía (utilizando la dotación total de L

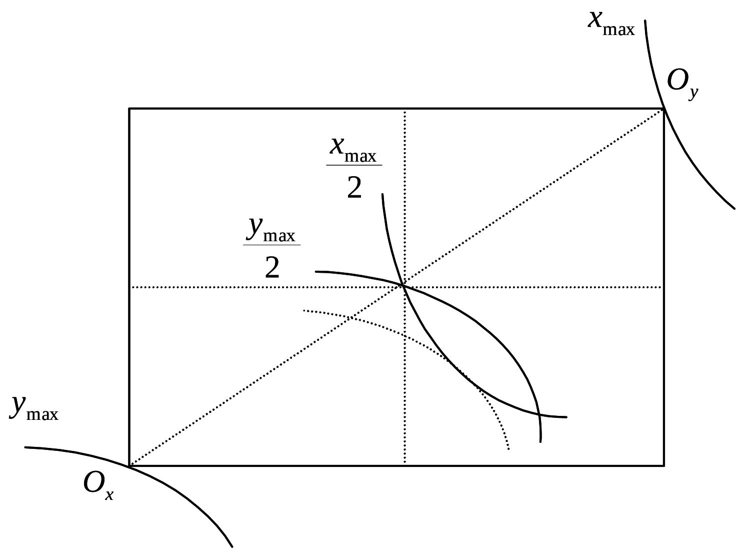


FIGURA 11. Derivación gráfica de la concavidad de la frontera de posibilidades de producción

y K en la producción de x), que denotamos $x_{\text{máx}}$, al reducir ambos factores en igual proporción en este sector la producción se reduce a $\frac{x_{\text{máx}}}{2}$; asimismo, si consideramos el máximo nivel de producción de y que es posible alcanzar en esta economía, $y_{\text{máx}}$, al reducir ambos factores en igual proporción en este sector la producción se reduce a $\frac{y_{\text{máx}}}{2}$. Pero cuando se utiliza la mitad de los factores en el sector x y la otra mitad en el sector y, vemos que es posible alcanzar una asignación de producción distinta de $\frac{x_{\text{máx}}}{2}$, $\frac{y_{\text{máx}}}{2}$, con la producción de al menos uno de ellos más alta, como se observa en la figura 11. Luego, la frontera de posibilidades de producción no es lineal, sino cóncava, como en la figura 12.

Para encontrar la pendiente de la curva de transformación, $\frac{dy}{dx}$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
dy &= y_L dL_y + y_K dK_y \\
dx &= x_L dL_x + x_K dK_x
\end{aligned}
$$

donde y_L, y_K, x_L y x_K corresponden a las productividades marginales de los factores L y K en los sectores x e y. Pero sabemos que $L_x + L_y = \overline{L}$ (constante) y $K_x + K_y = \overline{K}$ (constante), por lo que podemos escribir $\frac{dy}{dx}$

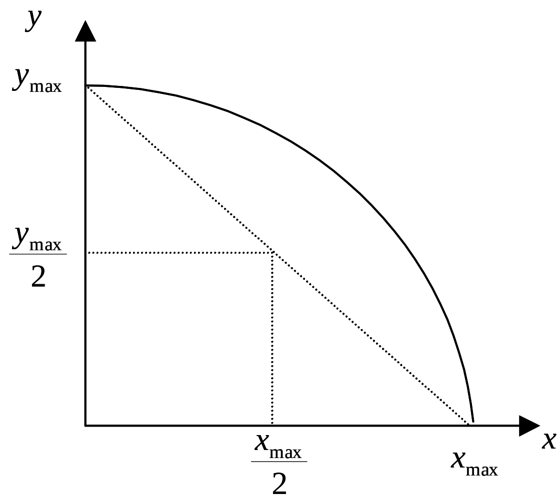


FIGURA 12. Curva de Transformación o Frontera de Posoibilidades de Producción

como:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y_L dL_y + y_K dK_y}{x_L dL_x + x_K dK_x} \\ &= -\frac{y_L dL_y + y_K dK_y}{x_L dL_y + x_K dK_y}\end{aligned}$$

(ocupando la condición $dL_x = -dL_y$ y $dK_x = -dK_y$).

La expresión anterior es una expresión general para la pendiente de la curva de transformación, cuyo valor absoluto corresponde a la **Tasa Marginal de Transformación**, que denotaremos TMT. La movilidad de factores entre sectores (y dado que no hemos incorporado distorsiones) asegura que ambos sectores enfrentan los mismos precios de factores, por lo que en equilibrio se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}p_x x_L &= w_L = p_y y_L \\ p_x x_K &= w_K = p_y y_K\end{aligned}$$

Luego, en este caso podemos escribir la TMTcomo:

$$\begin{aligned} TMT &= \frac{y_L dL_y + y_K dK_y}{x_L dL_y + x_K dK_y} \\ &= \frac{\frac{w_L}{p_y} dL_y + \frac{w_K}{p_y} dK_y}{\frac{w_L}{p_x} dL_y + \frac{w_K}{p_x} dK_y} \\ &= \frac{p_x}{p_y}\left(\frac{w_L dL_y + w_K dK_y}{w_L dL_y + w_K dK_y}\right) \\ &= \frac{p_x}{p_y} = \frac{CMg_x}{CMg_y} \end{aligned}$$

1.3.1. Precios y asignación de equilibrio. Para poder hablar de equilibrio Walrasiano sin tomar en cuenta a los consumidores, debemos suponemos en esta sección que los precios de los bienes p_x y p_y son fijos: por ejemplo, x e y son bienes transables internacionalmente, y su precio internacional no se ve afectado por la producción de esta economía. Entonces, la producción de x e y se vende en el mercado internacional (y los dueños de factores compran bienes en el mercado internacional también). Los factores K y L, sin embargo, no son transables internacionalmente (y se encuentran en dotaciones fijas), por lo que su precio se determina internamente. Supondremos que hay un equilibrio interior (es decir, en que se produce algo de ambos bienes, la economía no se especializa en la producción).

En este caso, vemos que una condición necesaria para que un par de precios de factores (w_L^*, w_K^*) forme parte de un equilibrio interior, es que el costo unitario (o costo marginal) sea igual al precio:

$$\begin{aligned} c_x\left(w_L^*, w_K^*\right) &= p_x^* \\ c_y\left(w_L^*, w_K^*\right) &= p_y^* \end{aligned}$$

Esta condición surge de que si $c_j\left(w_L^*, w_K^*\right) > p_j^*$, tendríamos que el nivel óptimo de producción de j es cero, mientras que si $c_j\left(w_L^*, w_K^*\right) < p_j^*$ las empresas querían seguir aumentando su producción en forma indefinida.

Entonces, para encontrar los precios de factores que forman parte del equilibrio walrasiano, basta buscar las curvas de nivel para el costo unitario en los niveles p_x^* y p_y^* para los sectores x e y respectivamente, y encontrar los precios de factores (w_L^*, w_K^*) en que ellas se intersectan, como se muestra en la figura 13.

Más aún, estos precios de factores de equilibrio son únicos, ya que las curvas de nivel no se pueden cruzar más de una vez. Para verificar que estos precios (w_L^*, w_K^*) son los únicos precios que pueden formar parte de un equilibrio interior, basta notar que a cualquier otro par (w_L, w_K) que siga formando parte de la curva de nivel p_x^* para la empresa x, ya no forma parte de la curva de nivel p_y^* para la empresa y.

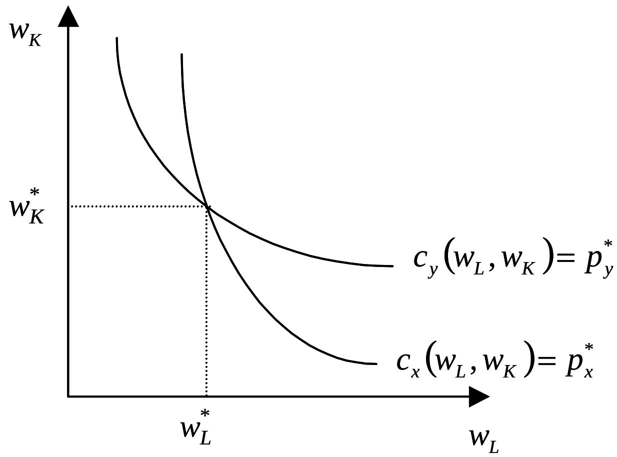


FIGURA 13. Precios de equilibrio en modelo 2×2

Ahora bien, para que estos precios (w_L^*, w_K^*) efectivamente formen parte de un equilibrio interior, debe ser cierto las razones de uso resultantes son factibles, dada la dotación de factores. Es decir, debe ser cierto que

$$\frac{a_x^L(w_L^*, w_K^*)}{a_x^K(w_L^*, w_K^*)} > \frac{\overline{L}}{\overline{K}} > \frac{a_y^L(w_L^*, w_K^*)}{a_y^K(w_L^*, w_K^*)}$$

Esto, ya que si ambas razones de uso fueran mayores que $\frac{\overline{L}}{\overline{K}}$, existiría un exceso de demanda por L, y viceversa. Es decir, la dotación de factores sólo es importante en la determinación de los precios de factores de equilibrio en la medida que determinan si hay o no un equilibrio interior; pero si este equilibrio existe, los precios de factores de equilibrio dependen sólo de las tecnologías (que determinan la forma de las curvas de nivel para el costo unitario) y de los precios de los bienes, pero no de las dotaciones de factores.

La cantidad producida de x e y se determina al encontrar el único punto perteneciente a la curva de contrato en que las razones de uso de los bienes coinciden con $\frac{a_x^L(w_L^*, w_K^*)}{a_x^K(w_L^*, w_K^*)}$ y $\frac{a_y^L(w_L^*, w_K^*)}{a_y^K(w_L^*, w_K^*)}$ respectivamente. En la caja de Edgeworth de la figura 14 vemos que hay un único punto perteneciente a la curva de contrato en que las razones de uso en el sector x e y coinciden con $\frac{a_x^L(w_L^*, w_K^*)}{a_x^K(w_L^*, w_K^*)}$ y $\frac{a_y^L(w_L^*, w_K^*)}{a_y^K(w_L^*, w_K^*)}$ respectivamente; el nivel de producción de x e y para las isocuantas que pasan por dicho punto es el nivel de producción de equilibrio.

1.3.2. Efecto del cambio en el precio de un bien. Al aumentar el precio de un bien, va a cambiar la producción de x e y y con ello se deben ajustar los precios de factores y el nivel de uso de factores en ambos sectores. En

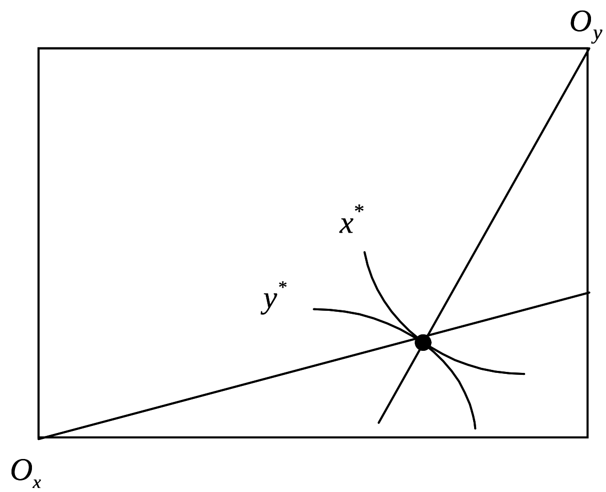


FIGURA 14. Producción de equilibrio

primer lugar, revisemos intuitivamente qué ocurriría si aumenta el precio del bien x: si se mantienen los precios de factores originales las empresas querrán producir más x que antes (ya que tendremos que $c_x(w_L, w_K) < p'_x$), por lo que querrán contratar más de ambos factores. Para ello el sector y debe liberar factores. Sin embargo, dado que el sector x es más intensivo en trabajo, requiere relativamente más trabajo del que usa el sector y. Entonces, debe ocurrir que los nuevos precios de factores de equilibrio lleven a que disminuya el uso relativo de trabajo en ambas industrias: en x debe caer $\frac{a_x^L(w_L^*, w_K^*)}{a_x^K(w_L^*, w_K^*)}$ para que no requiera tanto más trabajo del que y libera, y en y la razón $\frac{a_y^L(w_L^*, w_K^*)}{a_y^K(w_L^*, w_K^*)}$ también debe caer, dado que y libera relativamente más trabajo del que estaba usando. Pero para que ambas empresas quieran reducir el uso relativo de trabajo, debe ser cierto que el precio relativo de este factor aumenta. Más aún, dado que p_y no ha cambiado, para que en el sector y se siga produciendo debe ser cierto que ese aumento en $\frac{w_L}{w_K}$ se realiza con un aumento en w_L y una reducción en w_K.

A continuación se enuncia el Teorema de Stolper-Samuelson, que formaliza el resultado señalado:

TEOREMA 3 (de Stolper-Samuelson). *En el modelo de* 2×2*, un aumento en el precio del bien* j *lleva a que el precio de equilibrio del factor utilizado más intensivamente en el sector* j *aumente, y que el precio del otro factor caiga (suponiendo equilibrio interior antes y después del cambio).*

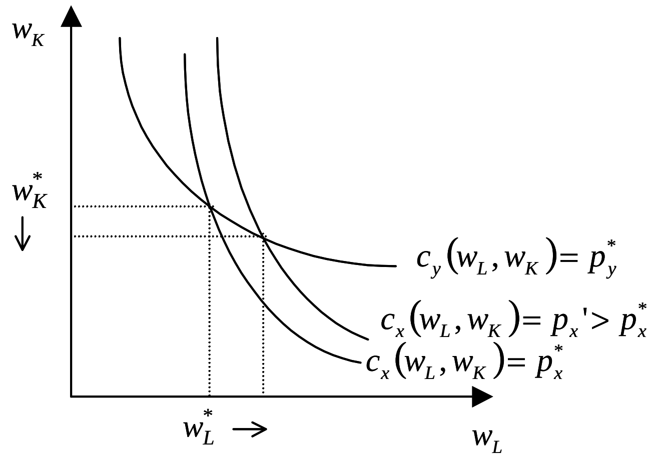


FIGURA 15. Aumento en w_L/w_K producto del aumento en p_x

Gráficamente, el teorema anterior se verifica notando que al aumentar p_x por ejemplo, si x es relativamente más intensivo en trabajo debe aumentar w_L y caer w_K, como se observa en la figura 15.

Nuevamente el producto se determina en la caja de Edgewroth, notando que en el nuevo equilibrio ambos sectores usan relativamente menos trabajo que en el equilibrio inicial: $\frac{a_x^L(w_L^*, w_K^*)}{a_x^K(w_L^*, w_K^*)}$ y $\frac{a_y^L(w_L^*, w_K^*)}{a_y^K(w_L^*, w_K^*)}$ caen (esto se debe a que aumenta el precio relativo del trabajo, por lo que el efecto sustitución lleva a que se reduzca su uso relativo). Tal como se observa en la figura 16, la producción de x aumenta y la de y cae, como era esperable dado el aumento en p_x. Este resultado es además consistente con la concavidad de la curva de transformación: un aumento en $\frac{p_x}{p_y}$ (que corresponde a la TMT) es consistente con un aumento en x y una caída en y, como se muestra en la figura 17.

Formalmente, este resultado se puede demostrar de la siguiente forma:

Las condiciones para el equilibrio son:

$$\begin{aligned} c_x(w_L, w_K) &= p_x \\ c_y(w_L, w_K) &= p_y \end{aligned}$$

Diferenciando estas condiciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_x(w_L, w_K)}{\partial w_L} dw_L + \frac{\partial c_x(w_L, w_K)}{\partial w_K} dw_K &= dp_x \\ \frac{\partial c_y(w_L, w_K)}{\partial w_L} dw_L + \frac{\partial c_y(w_L, w_K)}{\partial w_K} dw_K &= dp_y \end{aligned}$$

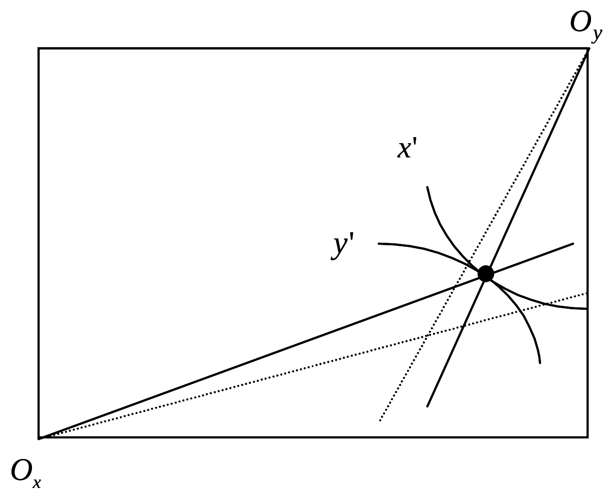


FIGURA 16. Efecto sobre el nivel de producción de un aumento en p_x

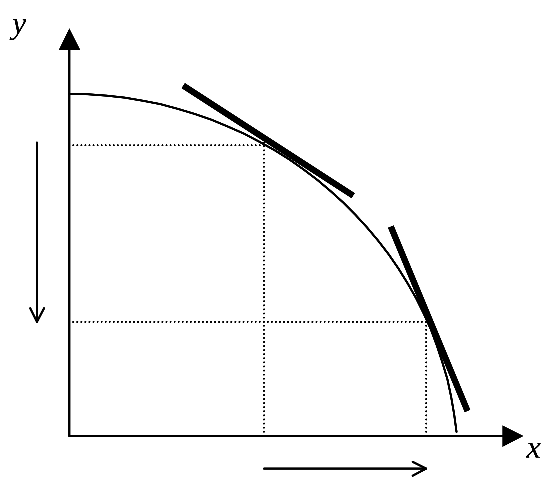


FIGURA 17. Efecto sobre el nivel de producción de un aumento en p_x en curva de transformación

Pero aplicando el Lema de Shephard, podemos reescribir estas nuevas condiciones como:

$$\begin{aligned} a_x^L dw_L + a_x^K dw_K &= dp_x \\ a_y^L dw_L + a_y^K dw_K &= dp_y \end{aligned}$$

Luego, si aumenta p_x, manteniendo p_y constante, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dw_L}{dp_x} &= \frac{a_y^K}{a_x^L a_y^K - a_x^K a_y^L} \\ \frac{dw_K}{dp_x} &= -\frac{a_y^L}{a_x^L a_y^K - a_x^K a_y^L}\end{aligned}$$

pero dado el supuesto que hemos hecho acerca de las intensidades de uso: $\frac{a_x^L(w_L,w_K)}{a_x^K(w_L,w_K)} > \frac{a_y^L(w_L,w_K)}{a_y^K(w_L,w_K)}$, sabemos que $a_x^L a_y^K - a_x^K a_y^L > 0$. Luego, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dw_L}{dp_x} &= \frac{a_y^K}{a_x^L a_y^K - a_x^K a_y^L} > 0 \\ \frac{dw_K}{dp_x} &= -\frac{a_y^L}{a_x^L a_y^K - a_x^K a_y^L} < 0\end{aligned}$$

Es decir, si aumenta p_x, aumenta w_L y cae w_K, mientras que si cae p_x, cae w_L y aumenta w_K (y análogamente si hubiera aumentado p_y: tendríamos un aumento en w_K y una disminución en w_L; demostrar).

Otra manera de representar gráficamente los resultados previos es la siguiente: hemos verificado que al aumentar el precio relativo del bien x aumenta el precio relativo del trabajo (o en general, del factor en que éste es intensivo). Esta relación positiva entre precio relativo de bienes y de factores se refleja en el diagrama de la derecha en la figura 18 Además, sabemos (por convexidad de isocuantas) que al aumentar el precio relativo del trabajo disminuye el uso relativo de trabajo en ambas industrias, o aumenta la razón K/L en ambos sectores. Esta relación entre precio relativo y uso relativo de factores se representa en el diagrama de la izquierda en la figura 18.

Efecto sobre el bienestar de los dueños de trabajo y capital. Para analizar el efecto que tiene un cambio en el precio de un bien sobre el bienestar de los dueños del trabajo y del capital en principio necesitaríamos conocer sus preferencias. Sin embargo, en ciertos casos basta con saber que no ha saciedad: si la restricción presupuestaria se desplaza inambiguamente hacia adentro sabemos que el bienestar cayó, mientras que si se desplaza inambiguamente hacia afuera sabemos que el bienestar aumentó. Para saber que la restricción se mueve inambiguamente hacia adentro, basta que la capacidad de compra de ambos bienes ($\frac{w}{p_x}$ y $\frac{w}{p_y}$ respectivamente) disminuya. Asimismo, para saber que la restricción se mueve inambiguamente hacia afuera, basta que la capacidad de compra de ambos bienes haya aumentado.

El efecto que tiene este cambio sobre el bienestar de los dueños del capital es claro: por un lado cae la remuneración al capital, w_K, y por otro lado aumenta el precio de un bien y se mantiene constante el precio del otro bien, de modo que la capacidad de compra de ambos bienes cayó. Luego,

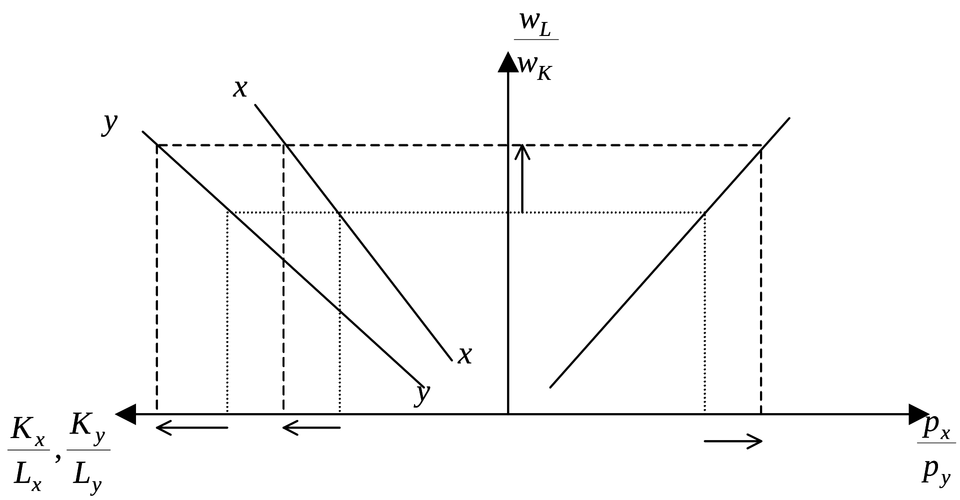


FIGURA 18. Representación de Teorema de Stolper Samuelson

debe ser cierto que el bienestar de los dueños del capital se reduce debido al aumento en el precio del bien x.

El efecto que tiene este cambio sobre el bienestar de los dueños del trabajo depende de si es más fuerte el aumento en w_L o en p_x. Verificaremos que el aumento en el precio del factor es proporcionalmente mayor que el aumento en p_x, por lo que el bienestar de los dueños del trabajo aumenta: tanto $\frac{w_L}{p_x}$ como $\frac{w_L}{p_y}$ aumentan, por lo que aumenta su capacidad de compra.

Para verificar que el aumento en w_L es proporcionalmente más alto que el aumento en p_x, basta notar que el uso relativo del trabajo cayó en el sector x, por lo que la productividad marginal del trabajo debe haber aumentado. Luego, para mantener la condición de óptimo de la empresa

$$\frac{w_L}{p_x} = F_L\left(L/K\right)$$

debe ser cierto que $\frac{w_L}{p_x}$ aumentó. Es decir, debe ser cierto que w_L aumentó proporcionalmente más que p_x.

1.3.3. Efecto del cambio en la dotación de un factor. Al aumentar la dotación de un factor, se debe ajustar el uso de factores en ambos sectores. En una economía en que los precios de los bienes están fijos (como es el caso de economía abierta que hemos estado considerando), en solución interior sabemos que el precio relativo de los factores depende sólo de la tecnología y de los precios de los bienes, y no de la dotación de factores. Luego, en este caso el aumento en la dotación de un factor no altera el precio relativo de los factores, sino que el exceso de oferta de dicho factor que inicialmente se podría generar se absorbe aumentando el tamaño del sector que es intensivo en el uso de dicho factor. A continuación se enuncia el Teorema de Rybcszynski, que establece formalmente este resultado:

TEOREMA 4 (de Rybcszynski). *En el modelo de* 2×2 *con precios de los bienes fijos, un aumento en la dotación de un factor lleva a que aumente la producción del bien que utiliza más intensivamente dicho factor, y caiga la producción del bien que lo utiliza menos intensivamente (suponiendo equilibrio interior antes y después del cambio).*

Para obtener este resultado basta notar que, dado que no han cambiado los precios de los bienes ni la tecnología, el equilibrio se sigue dando con los mismos precios de factores y las mismas razones de uso del equilibrio inicial. Supongamos que lo que ha aumentado es la dotación de trabajo. Luego, para absorber la mayor cantidad de trabajo en la economía manteniendo las mismas razones de uso en cada industria, debe ser cierto que se expande la industria que usa relativamente más trabajo, y se contrae la que utiliza relativamente menos trabajo. Notamos que podemos escribir:

$$\overline{L} = L_x + L_y$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{L}}{\overline{K}} = \left(\frac{L_x}{K_x}\right)\left(\frac{K_x}{\overline{K}}\right) + \left(\frac{L_y}{K_y}\right)\left(\frac{K_y}{\overline{K}}\right)$$

La única manera de que $\frac{L_x}{K_x}$ y $\frac{L_y}{K_y}$ se mantengan constantes a pesar de el aumento en $\frac{\overline{L}}{\overline{K}}$, es que aumente el peso que se da a $\frac{L_x}{K_x}$: dado que $\frac{L_x}{K_x} > \frac{L_y}{K_y}$, un mayor peso a la primera lleva a que aumente el promedio ponderado de ambas (que es justamente $\frac{\overline{L}}{\overline{K}}$).

$$\frac{\overline{L}}{\overline{K}}\Big\uparrow = \left(\frac{L_x}{K_x}\right)\left(\frac{K_x}{\overline{K}}\Big\uparrow\right) + \left(\frac{L_y}{K_y}\right)\left(\frac{K_y}{\overline{K}}\Big\downarrow\right)$$

En términos gráficos, lo anterior se representa en la figura 19.

2. Producción y consumo

En economía abierta el análisis anterior es completo, por cuanto los precios se determinan externamente, por lo que se pueden suponer constantes, y el consumo se determina separadamente de la producción. Sin embargo, para hablar del equilibrio walrasiano en economía cerrada, en que los precios de los bienes se determinan endógenamente, tenemos que referirnos a las preferencias de los consumidores, para así verificar la inexistencia de excesos de oferta o demanda en el mercado de bienes. Luego, en esta sección nos concentraremos en revisar los resultados anteriores para el caso de una economía cerrada, con precios determinados internamente.

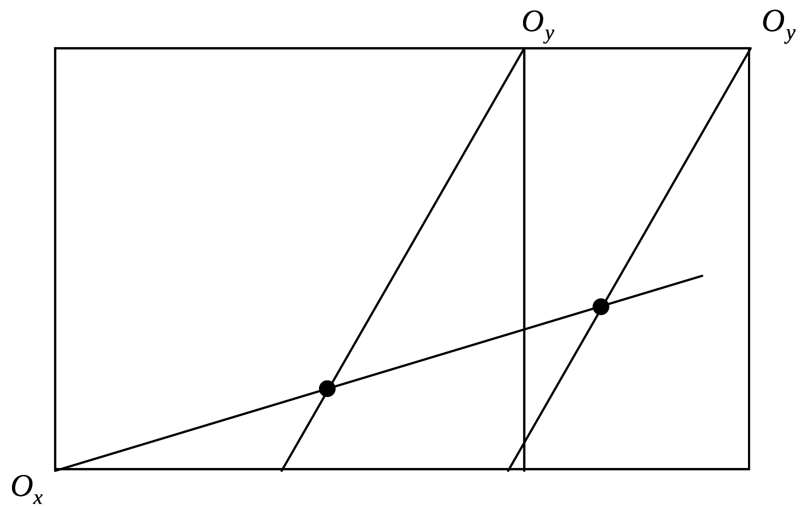


FIGURA 19. Ilustración gráfica del Teorema de Rybcszynski

2.1. Modelo $2 \times 2 \times 2$: dos sectores, dos factores y dos consumidores. En este caso suponemos que tenemos además dos (tipos de) consumidores, los dueños del capital y los dueños del trabajo. En primer lugar revisaremos cómo cambian los dos teoremas que enunciamos anteriormente para el caso de la economía abierta al introducir estos cambios.

2.1.1. Equilibrio walrasiano. Para determinar los precios de equilibrio en una economía cerrada ya no basta con las curvas de costo unitario, ya que los precios de los bienes no vienen determinados exógenamente. Ahora es necesario conocer las preferencias de los consumidores para encontrar los precios de bienes y factores de equilibrio. Aún así, sigue siendo cierto que los precios de factores de equilibrio deben satisfacer la condición de igualdad del costo unitario con el precio del bien, por lo que una vez determinados los precios de los bienes de equilibrio, la determinación gráfica de los precios de factores de la figura 13 sigue siendo válida. Lo que no se ve en dicho gráfico es cómo se determinan los precios de los bienes.

Para ilustrar una situación de equilibrio en economía cerrada, utilizaremos la caja de Edgeworth de consumo en conjunto con la curva de transformación. Para ello separaremos a los consumidores entre los dueños de trabajo y los dueños del capital, y ubicando a los dueños del capital en el origen sur-oeste (O^K) y los dueños del trabajo en el origen nor-este (O^L). Las dimensiones de la caja de Edgeworth de consumo ahora no vienen determinadas por dotaciones iniciales de x e y (que suponemos son nulas), sino por la producción total de x e y que se determina en la curva de transformación, como se muestra en la figura 20.

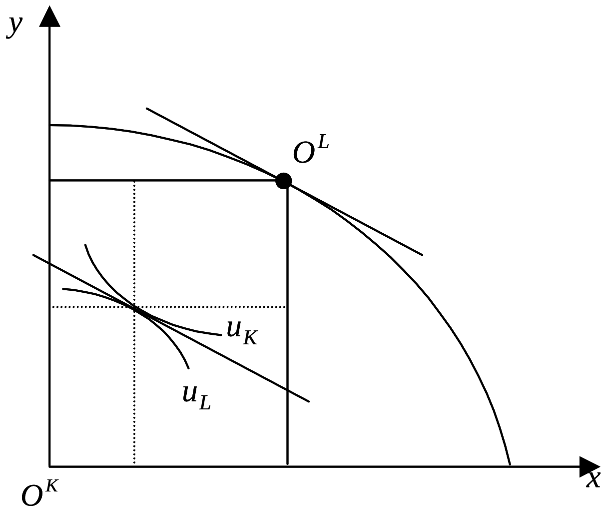


FIGURA 20. Equilibrio Walrasiano en una economía cerrada

Para que el precio relativo de los bienes sea de equilibrio, debe ser cierto que a dicho precio la cantidad total consumida es igual a la cantidad total producida en ambos sectores. La cantidad total producida, dado un precio relativo $\frac{p_1}{p_2} \equiv p$ se determina en la curva de transformación. La cantidad total consumida se determina en la caja de Edgeworth de consumo, donde las restricciones presupuestarias de los consumidores se determinan de acuerdo a su capacidad de compra de los dos bienes, es decir, de acuerdo a $\frac{w_L}{p_x}$ y $\frac{w_L}{p_y}$ en el caso de los dueños del trabajo, y $\frac{w_K}{p_x}$ y $\frac{w_K}{p_y}$ en el caso de los dueños del capital. Dado que el pago de los factores agota el producto, y que todos los consumidores enfrentan el mismo precio p, una vez determinada la restricción presupuestaria de los dueños del capital queda inmediatamente determinada la restricción presupuestaria de los dueños del trabajo, y viceversa.

2.1.2. Efecto del cambio en el precio de un bien. El análisis previo del Teorema de Stolper-Samuelson se realizó suponiendo que los precios de los bienes estaban determinados exógenamente, lo que no ocurre en este caso. Pero aún sigue siendo cierto que, para que p_x^*, p_y^*, w_L^* y w_K^* formen parte de un equilibrio walrasiano, se deben cumplir las dos condiciones que enunciábamos anteriormente:

$$\begin{aligned} c_x\left(w_L^*, w_K^*\right) &= p_x^* \\ c_y\left(w_L^*, w_K^*\right) &= p_y^* \end{aligned}$$

Luego, la única diferencia respecto del caso anterior es que p_x^* y p_y^* ya no son fijos, sino determinados internamente. Ahora bien, si partimos de una lista de precios de equilibrio, y (por alguna razón no especificada) se produce un alza en el precio del bien x, llegamos exactamente a la misma conclusión anterior: w_L debe aumentar, w_K debe caer, y el bienestar de los dueños del trabajo sube mientras que el de los dueños del capital aumenta. El análisis gráfico es exactamente el mismo.

Pero dado que los precios de los bienes no están fijos, además ahora podemos ir también en la otra dirección: si aumenta el precio relativo de L, debe aumentar el precio relativo de x (o en general, del bien cuya producción es relativamente más intensiva en L). Es decir, el cambio porcentual en p_x/p_y ante un determinado cambio porcentual en w_L/w_K es positivo. Para verificar esto, escribimos el cambio porcentual en p_x/p_y y en w_L/w_K como:

$$\begin{aligned}\Delta\,\%\left(\frac{p_x}{p_y}\right) &= \Delta\,\%p_x - \Delta\,\%p_y = \frac{dp_x}{p_x} - \frac{dp_y}{p_y}\\ \Delta\,\%\left(\frac{w_L}{w_K}\right) &= \Delta\,\%w_L - \Delta\,\%w_K = \frac{dw_L}{w_L} - \frac{dw_K}{w_K}\end{aligned}$$

Pero dada la homogeneidad de grado 1 en las funciones de producción a ambos sectores, sabemos que p_x y p_y, que deben ser iguales al costo marginal de x e y respectivamente, dependen sólo de los precios de factores. Luego, tenemos (derivando la condición de óptimo $p_j = c_j\left(w_L, w_K\right)$, tal como hicimos antes):

$$dp_j = \frac{\partial c_j\left(w_L, w_K\right)}{\partial w_L} dw_L + \frac{\partial c_j\left(w_L, w_K\right)}{\partial w_K} dw_K$$

donde j nuevamente puede corresponder a x o a y. Pero por Lema de Shephard podemos reescribir lo anterior como:

$$\begin{aligned}dp_x &= a_x^L dw_L + a_x^K dw_K\\ dp_y &= a_y^L dw_L + a_y^K dw_K\end{aligned}$$

de modo que al dividir por p_x y p_y respectivamente obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dp_x}{p_x} &= \frac{w_L a_x^L}{p_x}\frac{dw_L}{w_L} + \frac{w_K a_x^K}{p_x}\frac{dw_K}{w_K}\\ \frac{dp_y}{p_y} &= \frac{w_L a_y^L}{p_y}\frac{dw_L}{w_L} + \frac{w_K a_y^K}{p_y}\frac{dw_K}{w_K}\end{aligned}$$

Luego, al hacer la diferencia entre ambas, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dp_x}{p_x} - \frac{dp_y}{p_y} &= \frac{w_L a_x^L}{p_x}\frac{dw_L}{w_L} + \frac{w_K a_x^K}{p_x}\frac{dw_K}{w_K} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\frac{dw_L}{w_L} - \frac{w_K a_y^K}{p_y}\frac{dw_K}{w_K}\\ &= \frac{dw_L}{w_L}\left(\frac{w_L a_x^L}{p_x} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right) + \frac{dw_K}{w_K}\left(\frac{w_K a_x^K}{p_x} - \frac{w_K a_y^K}{p_y}\right)\end{aligned}$$

Pero sabemos que $\frac{w_L a_x^L}{p_x} + \frac{w_K a_x^K}{p_x} = 1$ y $\frac{w_L a_y^L}{p_y} + \frac{w_K a_y^K}{p_y} = 1$ (el pago a los factores agota el producto), por lo que podemos escribir lo anterior como:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_x}{p_x} - \frac{dp_y}{p_y} &= \frac{dw_L}{w_L}\left(\frac{w_L a_x^L}{p_x} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right) + \frac{dw_K}{w_K}\left(\left(1 - \frac{w_L a_x^L}{p_x}\right) - \left(1 - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right)\right) \\
&= \frac{dw_L}{w_L}\left(\frac{w_L a_x^L}{p_x} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right) - \frac{dw_K}{w_K}\left(\frac{w_L a_x^L}{p_x} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right) \\
&= \left(\frac{dw_L}{w_L} - \frac{dw_K}{w_K}\right)\left(\frac{w_L a_x^L}{p_x} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right)
\end{aligned}$$

Por último, dado que suponemos que x es más intensivo en trabajo $\left(\frac{w_L a_x^L}{p_x} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right) > 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_x^L(w_L, w_K)}{a_x^K(w_L, w_K)} > \frac{a_y^L(w_L, w_K)}{a_y^K(w_L, w_K)} \qquad \text{para todo par } (w_L, w_K) \\
&\quad \Rightarrow \frac{\frac{w_L}{p_x} a_x^L(w_L, w_K)}{\frac{w_K}{p_x} a_x^K(w_L, w_K)} > \frac{\frac{w_L}{p_y} a_y^L(w_L, w_K)}{\frac{w_K}{p_y} a_y^K(w_L, w_K)} \\
&\quad \Rightarrow \frac{\frac{w_L}{p_x} a_x^L(w_L, w_K)}{\left(1 - \frac{w_L}{p_x} a_x^L(w_L, w_K)\right)} > \frac{\frac{w_L}{p_y} a_y^L(w_L, w_K)}{\left(1 - \frac{w_L}{p_y} a_y^L(w_L, w_K)\right)} \\
&\quad \Rightarrow \frac{w_L}{p_x} a_x^L(w_L, w_K) > \frac{w_L}{p_y} a_y^L(w_L, w_K) \qquad \text{para todo par } (w_L, w_K)
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos:

$$\frac{dp_x}{p_x} - \frac{dp_y}{p_y} = \left(\frac{dw_L}{w_L} - \frac{dw_K}{w_K}\right)\left(\frac{w_L a_x^L}{p_x} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right)$$

con $\left(\frac{w_L a_x^L}{p_x} - \frac{w_L a_y^L}{p_y}\right) > 0$.

Luego, si $\left(\frac{dw_L}{w_L} - \frac{dw_K}{w_K}\right) > 0$ (es decir, si aumenta el precio relativo de L), entonces $\left(\frac{dp_x}{p_x} - \frac{dp_y}{p_y}\right) > 0$ (aumenta p_x/p_y). Concluyendo entonces, sabemos que un aumento en el precio relativo de un factor lleva a un aumento en el precio relativo del bien cuya producción es relativamente más intensiva en dicho factor, y viceversa.

2.1.3. Efecto del cambio en la dotación de un factor. El Teorema de Rybcszynski se refiere al cambio en la producción asociado al cambio en la dotación de un factor, manteniendo precios constantes. Luego, como primera etapa del análisis, el teorema de Rybcszynski es perfectamente correcto en el caso de una economía cerrada. La diferencia respecto del caso de una economía abierta, es que ahora debemos continuar el análisis, preguntándonos si los precios de los bienes efectivamente deberían mantenerse constantes en equilibrio.

Para responder esta pregunta en forma exacta, necesitamos conocer las preferencias de los consumidores. Pero para entender la dirección del cambio basta con suponer que los trabajadores que han inmigrado demandan de ambos bienes. Dado que con los precios antiguos encontramos que la producción de x aumentaba y la de y disminuía, se infiere que debe existir un exceso de demanda por el bien y a estos precios. Luego, el precio relativo $\frac{p_x}{p_y}$ debe caer. Pero ya sabemos que esto provoca una caída en el precio relativo del factor en que x es relativamente más intensivo. Entonces, debe aumentar el uso relativo de trabajo en ambos sectores, disminuyendo por esa razón la productividad marginal del trabajo y su salario real, y aumentando la productividad marginal del capital y su remuneración real. Es decir, el bienestar de los dueños del trabajo que originalmente residían en este país disminuye, y el de los dueños del capital aumenta, tal como encontrábamos en el modelo de 1 sector y dos factores.

2.1.4. Ajuste hacia el equilibrio. Finalmente, para cerrar el análisis, describiremos cómo se ajustan los desequilibrios en una economía como la descrita. Para ello necesitamos realizar algún supuesto acerca de las preferencias de los consumidores. Vamos a suponer que los dos bienes son normales para todos los consumidores.

Si partimos de una situación en que $p \equiv \frac{p_x}{p_y}$ es demasiado bajo, vamos a tener un exceso de demanda por x (y un exceso de oferta por y, por ley de Walras). Luego, en un modelo con puro consumo diríamos que el precio p tiende a aumentar, lo que lleva a una reducción en la demanda por x y aumento en la demanda por y (suponiendo que el efecto sustitución domina al efecto ingreso). Al agregar producción, sabemos que el aumento en p lleva además a que aumente la producción de x y que disminuya la producción de y, aumentando la capacidad de compra de los dueños del trabajo y reduciendo la capacidad de compra de los dueños del capital (por teorema de Stolper-Samuelson). Este cambio en la producción ayuda también a que se reduzca el exceso de demanda por x (y se reduzca también el exceso de oferta por y). La única complicación es que ahora los dueños del trabajo tienen un efecto ingreso positivo, ya que aumentó su capacidad de compra, lo que los lleva a aumentar algo su consumo de x; pero por otra parte, los dueños del capital tienen un efecto ingreso negativo, ya que se redujo su capacidad de compra, por lo que disminuyen su consumo de x. Finalmente, entonces, con un aumento en p se lograría llegar a un equilibrio walrasiano (en que los excesos de demanda y oferta son nulos).

Ejercicios

1. (*) Considere una economía con un sector de producción (X), en que e utilizan dos factores (K y L). Las dotaciones de K y L en la economía son fijas. El sector X está compuesto por empresas competitivas e idénticas, con funciones de producción homogéneas de grado 1, con $\sigma > 1$ (siendo σ la elasticidad de sustitución) y productividad marginal de los factores positiva y decreciente. Si disminuye la dotación de trabajo en la economía (con la dotación de K constante); ¿qué ocurre con la producción total de X, el pago real a cada unidad de trabajo y capital, el pago total al trabajo y el pago total al capital? Fundamente claramente cada una de sus respuestas.
2. (*) Considere una economía cerrada, compuesta por dos sectores (X e Y) y dos factores de producción (K y L). Suponga que ambos sectores están compuestos por empresas competitivas e idénticas, existe perfecta movilidad de factores entre sectores, y no hay impuestos ni subsidios. Las funciones de producción en cada uno de estos dos sectores se pueden escribir como:

$$X = K_X^{3/4} L_X^{1/4}; \qquad Y = K_Y^{2/3} L_Y^{1/3}$$

Si se produce un aumento en la dotación de L, el bienestar de los trabajadores no puede aumentar. Comente, fundamentando claramente su respuesta, y apoyando su respuesta con gráficos.

3. (**) Considere una economía caracterizada por un sector, compuesto por empresas competitivas e idénticas que producen x con una función de producción de la forma $x = \left(K^{1/2} + L^{1/2}\right)^2$. Las dotaciones totales de factores en esta economía es $\overline{L} = 400$ y $\overline{K} = 100$.
   a) Encuentre las remuneraciones reales *de equilibrio*, $\frac{w_L}{p}$ y $\frac{w_K}{p}$, y la cantidad total producida *en equilibrio*
   b) Encuentre la elasticidad de sustitución entre factores, σ, y a partir de ella indique qué esperaría usted que ocurriera con el pago total real al trabajo y al capital si aumentara la dotación de K en esta economía. Fundamente.
4. (**) Considere una economía con dos sectores de producción que producen x e y respectivamente, utilizando dos factores, K, y L. Las empresas (que son competitivas) producen con funciones de producción de la forma: $x = K^{1/4}L^{3/4}$ en el sector x, e $y = K^{3/4}L^{1/4}$ en el sector y. Las dotaciones de factores son $\overline{L} = 100$ y $\overline{K} = 100$
   a) Demuestre que para cualquier precio relativo de factores $\frac{w_L}{w_K}$ la razón de uso K/L es más alta en el sector y que en el sector x.
   b) Derive los costos unitarios en cada sector. Represente **en un sólo gráfico** (en el plano $w_L - w_K$) las curvas de nivel del costo

unitario de los sectores x e y (para niveles cualquiera, como por ejemplo los que se alcanzan con $w_L = w_K = 1$). No es necesario que el gráfico sea exacto, pero sí debe ser cuidadoso en que la forma de las curvas represente correctamente la situación descrita (indicando a qué sector corresponde cada curva de nivel y por qué).

c) Suponga que producto de una catástrofe natural se destruye parte importante del capital en esta economía, de modo que ahora $\overline{K} = 50$. Si la economía enfrenta precios internacionales por los bienes x e y, discuta qué ocurrirá con los precios de equilibrio de ambos factores, con la razón de uso K/L de equilibrio en cada sector, y con el bienestar de los dueños del trabajo y los dueños del capital. Discuta también qué ocurrirá con la cantidad producida de x e y, apoyando su respuesta en gráficos. En su respuesta suponga que hay un equilibrio interior antes y después del cambio en la dotación.

5. (***) Considere una economía con dos sectores de producción que producen x e y respectivamente, utilizando los factores K y L. Las empresas son tomadoras de precios. Los precios de los bienes se determinan en el mercado internacional. Las funciones de producción en los sectores x e y son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= K^{0,25}L^{0,75} \\ y &= K^{0,75}L^{0,25} \end{aligned}$$

a) Derive el costo marginal o unitario de producción en ambos sectores.

b) Demuestre que si el precio internacional de x es el doble del precio de y (es decir, si $p_x = 2p_y$), entonces en el equilibrio debe ser cierto que w_L es cuatro veces mayor que w_K.

c) Muestre que la razón de costos marginales $\frac{CMg_x}{CMg_y}$ depende únicamente de los precios relativos de factores $\left(\frac{w_L}{w_K}\right)$, y relacione este resultado con el Teorema de Stolper Samuelson. Al relacionar este resultado con el teorema, debe indicar explícitamente qué dice el teorema, y cómo este resultado lo confirma o no.

6. (***) Considere un modelo de dos sectores (X e Y) y dos factores de producción (K y L). Suponga que ambos sectores están compuestos por empresas competitivas e idénticas, existe perfecta movilidad de factores entre sectores, y no hay impuestos ni subsidios. Las funciones de producción en cada uno de estos dos sectores se pueden escribir como:

$$X = K_X^{1/2}L_X^{1/2}; \qquad Y = K_Y^{2/3}L_Y^{1/3}$$

Las dotaciones de K y L en la economía son fijas, y corresponden a $\overline{K} = 300$ y $\overline{L} = 100$.

a) Encuentre el precio relativo del trabajo (w_L/w_K) mínimo y máximo consistente con la tecnología y dotaciones de factores descritas.

b) Si el precio relativo del trabajo (w_L/w_K) es 2; ¿cuántas unidades de K y L se estarán contratando en el sector X e Y respectivamente?

c) Si aumenta el precio relativo del trabajo a 3; ¿qué ocurrirá con la cantidad contratada de K y L en ambos sectores, con la producción de X e Y, y con el bienestar de trabajadores y capitalistas? Explique claramente la intuición de cada una de sus respuestas.

Parte 3

Competencia Imperfecta y Equilibrio de Nash

En la sección anterior estudiamos el equilibrio competitivo, en que la interrelación entre los distintos individuos que componen la economía se produce en forma anónima, en que ninguno de ellos tiene la capacidad de modificar los precios a los que venden o compran bienes e insumos. Un primer caso en que dicha representación no es adecuada es el de un monopolio, en que hay un único vendedor que puede escoger el precio al cual vender (o comprar, en el caso de un único comprador o monopsonio). Este caso se estudia en cierto detalle en el capítulo 12. El caso de un oligopolio, en que hay unos pocos productores, es un ejemplo de una situación en que el comportamiento de un individuo está directamente conectado al comportamiento de otros: si bien en este caso los productores no enfrentan una demanda completamente elástica, la ganancia asociada a las distintas acciones posibles está fuertemente afectada por la elección que hagan sus competidores. En situaciones como estas, la teoría del equilibrio debe hacerse cargo explícitamente de la **interacción estratégica** entre los distintos individuos. La rama de la teoría de equilibrio que lidia con estas situaciones es la teoría de juegos, que el capítulo 13 introduce. En este capítulo se define la noción de equilibrio más común en presencia de interacción estratégica, el Equilibrio de Nash, y algunos de sus refinamientos. En el capítulo siguiente se utilizan esos instrumentos para analizar el caso del oligopolio.

CAPíTULO 12

Monopolio y Monopsonio

1. Introducción

Cuando hablamos del monopolio, nos referimos al caso en que hay un único vendedor del bien en cuestión. Hablamos del monopsonio cuando hay un único comprador. En ambos casos ya no suponemos que son tomadores de precios en el mercado correspondiente, puesto que los precios a los cuales puedan transar dependen directamente de las cantidades que decidan comprar o vender. En consecuencia, debemos revisar en este nuevo contexto las implicancias del supuesto del objetivo de lucro.

Consideremos primero el caso de una empresa que compra insumos en mercados perfectamente competitivos, pero es monopolista en el mercado del producto final. Denotamos por $p(q)$ al precio al cual los consumidores comprarían q unidades del producto, esto es, a la inversa de la función de demanda. De la maximización de utilidad obtenemos:

$$\begin{aligned} \max_q \pi &= p(q)\, q - C(q) \qquad (1.1) \\ CPO &: \frac{\partial \pi}{\partial q} = p + q\frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial C}{\partial q} = 0 \\ &\Leftrightarrow IMg = CMg \end{aligned}$$

El primer término en la derivada corresponde al ingreso marginal (IMg), es decir, al cambio en el ingreso total que produce la venta de una unidad adicional. Este ingreso marginal tiene dos partes:

- p : el precio unitario, que la empresa consigue por la venta de la última unidad, y
- $q\frac{\partial p}{\partial q}$: la caída en los ingresos por ventas debido a que, para vender la unidad adicional, hubo que reducir el precio de venta de todas las unidades. Este segundo término marca la diferencia con el competidor perfecto: un competidor perfecto es tomador de precios, esto es, puede vender la cantidad que desee al precio vigente. El monopolista, al haber "topado" en la curva de demanda, necesita rebajar el precio para vender más.

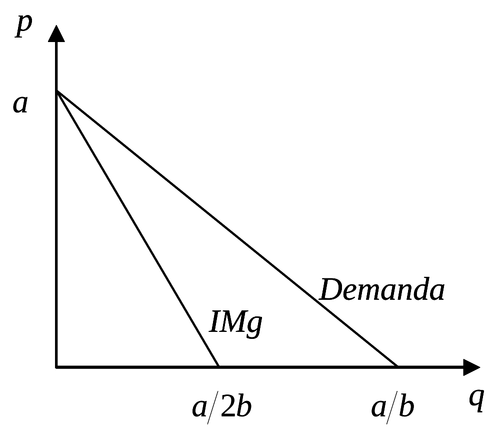


FIGURA 1. Ingreso marginal con demanda lineal

El IMg puede reescribirse de la siguiente forma:

$$IMg = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{\partial p}{\partial q}\right) = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \tag{1.2}$$

donde η es la elasticidad de la curva de demanda. Si la demanda fuera infinitamente elástica, entonces la empresa no necesitaría rebajar el precio para vender más –ése es precisamente el caso del competidor perfecto–. Observe que en el caso general, la elasticidad de la demanda es negativa, por lo que el IMg es siempre inferior al precio. Observe también que, como todas y cada una de las unidades se venden a p, entonces p es el ingreso promedio. Si la demanda es decreciente en la cantidad, entonces el ingreso medio es decreciente; que el ingreso medio sea decreciente, por otro lado, significa que el ingreso marginal debe ser inferior a éste. En la figura 1 se ilustra esta relación para el caso en que la demanda es lineal, esto es, de la forma $p = a - bq$.

Volviendo a la CPO, vemos que la recomendación consiste en una condición de indiferencia en el margen: la empresa debe estar indiferente entre vender o no una unidad más. Si IMg $>$ CMg (produciendo una cantidad menor que q^M en la figura 2), entonces la empresa aumentaría sus ganancias si aumentara su producción, toda vez que el margen de ganancias es en el margen la diferencia IMg -CMg. Lo contrario ocurriría si IMg $<$ CMg.

Revisemos la CSO:

$$CSO \quad : \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = \frac{\partial IMg}{\partial q} - \frac{\partial CMg}{\partial q} < 0 \tag{1.3}$$

$$\iff \quad -\frac{\partial CMg}{\partial q} < -\frac{\partial IMg}{\partial q} \tag{1.4}$$

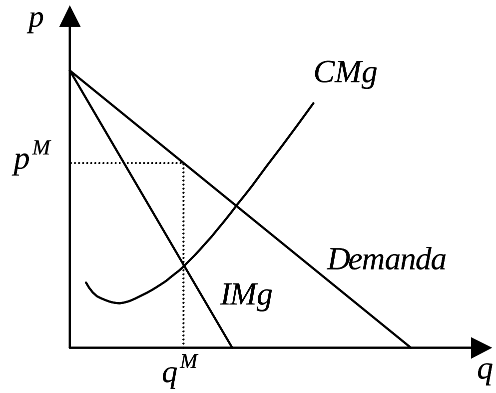


FIGURA 2. Cantidad producida y precio cobrado por el monopolista

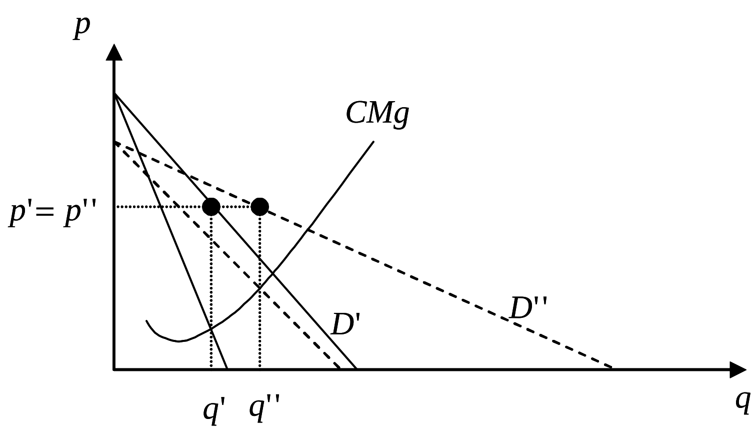


FIGURA 3. La inexistencia de la oferta del monopolio

La concavidad de la función objetivo se obtiene, por ejemplo, si el IMg es decreciente y el CMg creciente. Pero esto no es necesario. Esta condición se puede cumplir aún si el CMg es decreciente; en tal caso, sólo pedimos que el IMg corte al CMg desde arriba. En ese caso, menores niveles de producción le reportan a la empresa una caída en el ingreso mayor que el ahorro en costos, por lo que no le conviene. Similarmente, un aumento en la producción genera un aumento en el ingreso por ventas menor que el aumento en los costos, por lo que tampoco le conviene.

Así, de la regla $IMg = CMg$ deducimos la decisión del monopolista. Notamos, eso sí, que en el caso del monopolio no podemos encontrar una *función de oferta*: no hay una relación única entre precio y cantidad, como se muestra en la figura 3, en que el mismo precio es consistente con dos cantidades distintas.

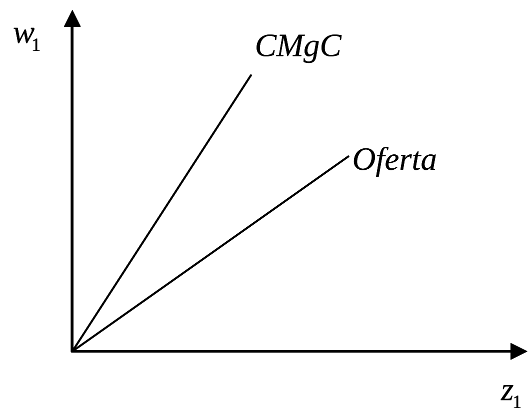


FIGURA 4. Oferta y costo marginal de contratación del monopsonista

La asignación de recursos en este mercado es ineficiente, puesto que existen unidades del bien que no se producen y para las cuales hay consumidores dispuestos a pagar más que su costo marginal de producción. En efecto, en la figura 2 observamos que para niveles de producción mayores que q^M aún quedan unidades cuyo precio de demanda es mayor que su costo marginal. Observe también que en este mercado hay apropiación incompleta: el que los consumidores se queden con parte del excedente total significa que el monopolista consigue menos que su aporte. Ambos hechos están relacionados: si al monopolista se le pagara por cada unidad producida la disposición a pagar del consumidor que más valora el bien, entonces su IMg coincidiría con el precio –precio que, bajo las condiciones anteriores correspondía al IMe–. De haberse apropiado de todo el excedente, entonces, habría escogido un nivel de producción eficiente. La ineficiencia del mercado monopólico proviene, entonces, de un problema de apropiación.

Similarmente, si una empresa es tomadora de precios en el mercado de bienes, pero es monopsonista en el mercado de uno de los factores que utiliza (digamos z_1), de la maximización de utilidad obtenemos:

$$\begin{aligned}
\max_{z_1,z_2} \pi &= pf(z_1,z_2) - w_1(z_1)\,z_1 - w_2 z_2 \\
CPO &: \frac{\partial \pi}{\partial z_1} = p\frac{\partial f_1}{\partial z_1} - w_L - z_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0 \\
&\Rightarrow VPMg_1 = pf_1 = w_1\left(1 + \frac{z_1}{w_1}\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) = w_1\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{11}}\right) = CMgC_1
\end{aligned}$$

Dado que la elasticidad de oferta del insumo ε_{11} es positiva, el costo marginal de contratarlo ($CMgC_L$) es mayor que el precio del factor, lo que se explica porque para contratar una unidad adicional se debe pagar más por las unidades anteriores también. Esto se ilustra en la figura 4.

La CPO indica que a la empresa le conviene contratar este insumo hasta que el valor de su producto marginal sea igual al costo marginal de contratarlo. Paralelamente al caso del monopolista, en este caso vemos que no es posible trazar una curva de demanda por el factor.

2. Fuentes de monopolio

En la sección anterior vimos el problema de decisión de un empresario que por sí mismo debe abastecer al mercado completo, y enfatizamos sus diferencias con el problema de decisión del mismo empresario puesto en un ambiente perfectamente competitivo. Nuestro punto de partida, sin embargo, fue la suposición de que no existían competidores. El empresario simplemente era monopolista, y su poder no estaba amenazado por terceros. El origen de este poder era absolutamente inexplicado: se trataba de un monopolista por "pura suerte". En esta sección nos preguntamos, en cambio, bajo qué condiciones es razonable esperar que un mercado tenga una estructura monopólica. Como veremos, el tomar en cuenta la existencia de competidores potenciales puede revertir algunas de las conclusiones que obtuvimos en la sección anterior. Ello, por cuanto la existencia de competidores potenciales restringe el poder de negociación del empresario aún cuando éste se mantenga como el único productor activo.

Existen diversas razones que podemos imaginar para la existencia de monopolios. Por ejemplo, una empresa puede haber creado un producto o servicio; esta empresa será la única que lo venda hasta que otras empresas logren desarrollarlo o copiarlo. Este período puede verse extendido por una protección legal, como es el caso de las patentes La ley de propiedad intelectual busca precisamente crear monopolios. En casos como este decimos que se trata de un **monopolio legal**: el productor del bien protegido por esta ley cuenta con la ayuda del Estado para combatir a sus competidores potenciales.

Existe también la posibilidad de que alguna característica particular de la empresa no sólo le permita producir con costos más bajos que otros, sino además que esa característica no sea reproducible, de modo que la ventaja sea permanente. Este sería el caso, por ejemplo de una empresa cuyo dueño la administre con un talento especial, ya sea formando equipos o motivando a sus colaboradores; o el de una empresa que posea derechos exclusivos sobre algún recurso natural, etc. La ventaja de costos, sin embargo, no implica necesariamente la posesión de un poder de mercado como el descrito en la sección anterior. Si el precio que quisiera fijar el productor de menores costos, p^*, fuese suficiente para inducir a otras empresas a entrar al mercado, entonces el problema de decisión está mal descrito por (1.1). Por ejemplo, si el resto de los productores potenciales tuviera costos medios constantes e iguales a $\overline{p}$, entonces el productor aventajado podría cobrar un precio

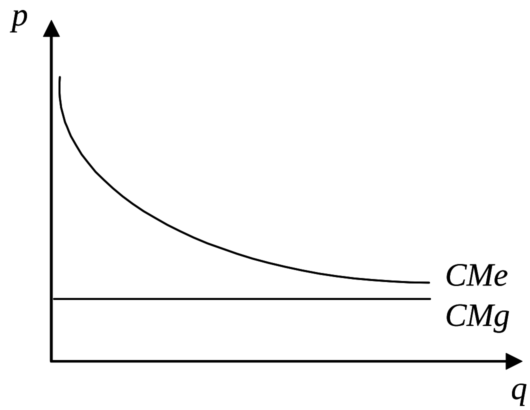


FIGURA 5. Costos de un monopolio natural

monopólico siempre y cuando no supere esa barrera. Su problema sería entonces el de un monopolista, pero restringido a que el precio no puede superar el precio al cual el resto entraría al mercado:

$$\max_{q} \pi = p(q)\,q - C(q) + \lambda\left[\overline{p} - p(q)\right] \tag{2.1}$$

Si la restricción se satisface con holgura, el problema es el mismo que (1.1). Si no, entonces el monopolista cobraría $\overline{p}$, el precio que evita la entrada de los competidores, que evidentemente significan menores ganancias. Su poder de mercado está restringido por la amenaza de los competidores. Un mercado con estas características se dice que es "contestable".

Es también posible imaginar que un productor tenga ventajas de costos no porque distintas empresas tengan funciones de costos distintas, sino porque la tecnología sea de rendimientos crecientes a escala, y su escala de producción sea mayor. Por ejemplo, si el costo marginal de producción fuese constante, pero hubiera un costo fijo inicial muy fuerte, tendríamos una estructura de costos como la que se ilustra en la figura 5. A mayor escala, menor costo medio. Empresas de mayor tamaño podrían cobrar precios menores, y por esa vía, eventualmente monopolizar el mercado. En este caso decimos que se trata de un **monopolio natural**. La fuente del monopolio es tecnológica. La existencia de un monopolio, sin embargo, tampoco en este caso es suficiente para establecer que el poder monopólico sea completo. Si muchos tienen acceso a la misma tecnología, entonces precios muy altos atraerían entrada. De hecho, la razón por la que pensamos que sólo una empresa va a sobrevivir, es que siempre la empresa de mayor tamaño puede cobrar precios que sus competidores no pueden igualar. En este caso, aún cuando no podamos dar una forma precisa a la restricción que genera la posibilidad de la entrada de competidores, sabemos que la amenaza de entrada también puede restringir las decisiones del monopolista.

Finalmente, en los casos en que la protección legal puede conseguirse con trabajo y recursos (por ejemplo, en *lobby*), o en que las capacidades especiales se pueden cultivar (invertir en educación, gastar tiempo pensando, etc.), es razonable pensar que parte de las ganancias del monopolista serán invertidas en estas actividades de protección del poder monopólico. En la medida en que esas actividades generan redistribuciones de un excedente, pero no ayudan a crearlo, deben no sólo considerarse costos privados sino también sociales. Esos costos no sólo nos dicen que las ganancias del monopolista están sobrestimadas en los problemas de optimización que revisamos en este capítulo, sino también que el costo social o ineficiencia del monopolio están subestimados.

3. Discriminación de precios

Hasta aquí hemos caracterizado a la decisión del monopolista como una de escala de producción, donde el precio resultante depende de esa escala. El supuesto implícito es que debe cobrar el mismo precio a todos los consumidores. En el caso de competencia perfecta, este supuesto es en realidad un resultado: si un vendedor quisiera cobrar más caro a un consumidor que el precio de mercado, entonces éste rehusaría la transacción. Por otro lado, no le convendría cobrar más barato, porque al precio de mercado puede vender la cantidad que quiera. Luego, todos los consumidores pagan el mismo precio.

En el caso del monopolista esto no tiene por qué ser así. Siendo el único vendedor, el cliente al que se le cobre un precio mayor no tiene la alternativa de comprarle a otro; si rehusa la transacción, se queda sin el bien. En ese contexto, un monopolista que conozca su demanda cobrará un precio distinto por cada unidad, siguiendo la curva de demanda de cada consumidor (en el supuesto de que no existan efectos ingreso). En este caso hablamos de **discriminación perfecta** de precios, o de **primer grado**. Al cobrar un precio distinto por cada unidad, el discriminador perfecto tiene un IMg que coincide con la curva de demanda, como se ilustra en la figura 6. Su problema de optimización es entonces:

$$\begin{aligned} \max_q \pi &= \int_0^q p(x)\,dx - C(q) \qquad (3.1) \\ \text{CPO:} \qquad & p(q) = \frac{\partial C}{\partial q} \end{aligned}$$

Su óptimo ocurre en la intersección del CMg y la demanda (su IMg). Observe que el nivel de producción asociado es eficiente: al cobrar a cada consumidor su disposición a pagar por el bien, el monopolista se apropia del excedente completo. Su excedente coincide, entonces, con su aporte.[1].

[1]Los consumidores, sin embargo, aportan más que el excedente que reciben –no hay, naturalmente, competencia perfecta–.

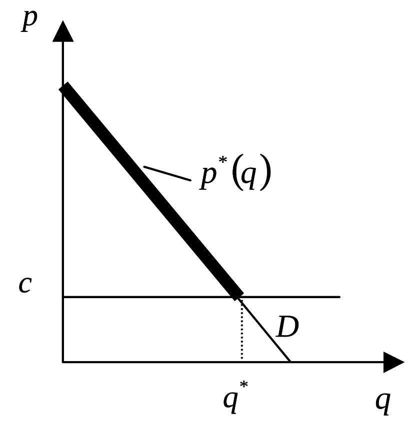


FIGURA 6. Discriminación de primer grado

El supuesto implícito en este ejercicio, además de la información completa del monopolista respecto de la disposición a pagar de cada consumidor, es que la reventa del bien o servicio es imposible, o de mayor costo que las diferencias de precio. En efecto, si la reventa del bien o servicio fuera posible y no tuviera costos asociados, entonces cada consumidor debería pagar el mismo precio por cada unidad comprada, y el mismo que cada uno del resto de los consumidores. De no ser así, los consumidores que accedan a los menores precios podrían comprar más que lo que quieren consumir, y revender el exceso a un precio superior al que él paga pero inferior al que el monopolista le cobra a otros consumidores. Cualquier diferencia de precios crea en este ambiente oportunidades de arbitraje. Si el costo de la reventa es nulo, entonces, no existen oportunidades de arbitraje sólo cuando el monopolista cobra un precio uniforme.

Un caso intermedio es el de la **discriminación de tercer grado**. Un ejemplo es el de un monopolista que vende en dos zonas geográficas distintas. Por simplicidad, imaginemos que al interior de cada zona no hay costos de transporte ni de otra índole que dificulten la reventa, de manera que al interior de cada zona deban haber precios uniformes. Sin embargo, cuesta $\$t$ transportar una unidad del bien de una zona a la otra. Sean A y B las zonas, y $p_A(q_A)$ y $p_B(q_B)$ las funciones de demanda inversa.

La posibilidad de la reventa, entonces, se introduce en el problema del monopolista a través de la restricción de que la diferencia de precios entre ambas zonas no puede superar al costo de transporte:

$$|p_A - p_B| \leq t \Leftrightarrow$$
$$(p_A - p_B)^2 \leq t^2$$

porque $t > 0$. Así, el monopolista puede discriminar precios entre zonas, pero restringido por la posibilidad de la reventa.

Su problema está dado por:

$$\begin{aligned}
\max_{q_A, q_B} \pi &= p_A(q_A)\, q_A + p_B(q_B)\, q_B - C(q_A + q_B) \\
&\quad + \lambda \left[t^2 - (p_A(q_A) - p_B(q_B))^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Las CPO son:

$$\frac{\partial p_A}{\partial q_A} q_A + p_A - \lambda 2 (p_A - p_B) \frac{\partial p_A}{\partial q_A} - \frac{\partial C}{\partial q_A} = 0 \tag{3.3a}$$

$$\frac{\partial p_B}{\partial q_B} q_B + p_B + \lambda 2 (p_A - p_B) \frac{\partial p_B}{\partial q_B} - \frac{\partial C}{\partial q_B} = 0 \tag{3.3b}$$

En realidad, debiéramos revisar las condiciones de Kuhn-Tucker, porque si una región tiene una demanda muy pequeña y la otra muy grande, es perfectamente posible que el monopolista prefiera no abastecer al mercado pequeño, porque el costo de hacerlo es mantener un precio bajo en la otra zona.

En el caso en que le convenga vender en ambas zonas y que la restricción sea activa, la CPO es una versión modificada de la usual regla $IMg = CMg$. Para vender una unidad más en un mercado, digamos el A, el precio debe rebajarse. Ahora hay dos situaciones posibles. En la primera, el mercado A es el de mayor precio ($p_A - p_B > 0$). Rebajar el precio comporta la caída de ingreso típica del monopolio regular, pero también el beneficio de relajar la restricción, permitiendo cobrar un precio menor en el mercado B. En la segunda, el mercado B es el de mayor precio ($p_A - p_B < 0$). Rebajar el precio del bien en el mercado A significa apretar aún más la restricción, obligando a una rebaja del precio también en el otro mercado, lo que es un costo. Entonces, en el caso del mercado de mayor precio, el beneficio marginal consiste en el IMg, más el beneficio de la mayor ganancia en el otro mercado. En el otro caso, del mercado de menor precio, el costo marginal incluye CMg y la caída en las ganancias del otro mercado.

Si la restricción no fuera activa (lo que ocurriría, por ejemplo, si el costo de transporte fuera muy alto), el monopolista simplemente cobraría el precio monopólico en cada mercado, como se ilustra en la figura 7. En esta figura, se muestra que el monopolista escoge las cantidades q_A y q_B de modo de igualar el IMg en cada mercado, y a su vez igualarlo al CMg asociado a la producción de $(q_A + q_B)$ unidades. Es por ello que en el gráfico de la derecha se señala la elección de cantidad donde el CMg se iguala a la suma horizontal de ingresos marginales de cada mercado (lo que se denota por ΣIMg).

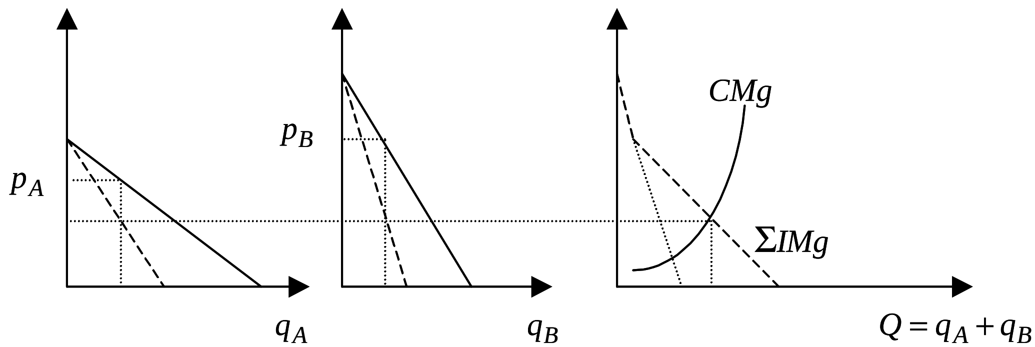


FIGURA 7. Discriminación de tercer grado

Existen otras formas, quizás más sutiles, de discriminación de precios. En esencia, siempre tenemos un monopolista intentando apropiarse del excedente de los consumidores. Qué logre hacer depende, como hemos visto, de lo que la tecnología y otras condiciones le permitan hacer. Una tercera forma de discriminación, conocida como **discriminación de segundo grado**, consiste en cobrar en función del volumen comprado. Los descuentos por volumen constituyen un ejemplo.

Un caso particularmente interesante es el cobro de tarifas en dos partes: un cargo fijo, más un cobro en función del consumo. Este tipo de cobros es común, por ejemplo, en los servicios como electricidad, teléfono y gas. Para entender cómo funciona, imaginemos una situación en que el monopolista enfrenta a n consumidores idénticos, cada uno de los cuales está dispuesto a pagar $T(q)$ en total por q unidades del bien. En ese caso, el problema del monopolista es:

$$\max_q n\,(T(q) - cq) \tag{3.4}$$

donde por simplicidad suponemos nuevamente que los costos medios son constantes, y que la disposición a pagar está bien medida por la demanda marshalliana. En este caso, $T(q) = \int_0^q p(x)\,dx$, y (3.4) equivale a (3.1), por lo que la cantidad por consumidor que maximiza las ganancias del monopolista, q^*, es la que iguala a la demanda con el CMg. Ahora bien, existen al menos tres formas equivalentes de recaudar $\$T(q^*)$ y entregarle q^* unidades del bien a cambio a cada comprador:

1. Ofrecer solamente el paquete: no se vende el bien por unidades, sino sólo en paquetes de q^* unidades, donde el precio del paquete es $\$T(q^*)$.
2. Cobrar un cargo fijo de $\$F = (T(q^*) - cq^*)$, y $\$c$ por unidad, como se muestra en la figura 8. En este caso, el consumidor quiere comprar q^* unidades si el precio es $\$c$. Sin cargo fijo, su excedente sería de $T(q^*) - cq^*$, la diferencia entre lo que estaba dispuesto a

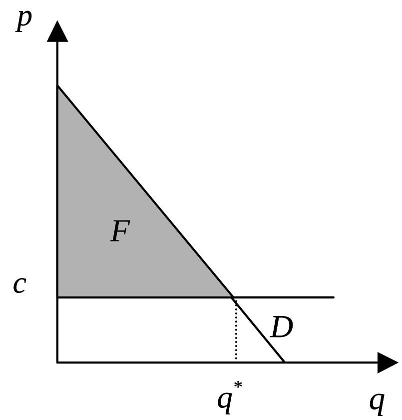


FIGURA 8. Discriminación de segundo grado

pagar y lo que pagó. Luego, si para acceder a la posibilidad de comprar este bien a ese precio debe pagar, a lo sumo pagaría su excedente (observe aquí el uso del supuesto de ausencia de efectos ingreso: sin él, deberíamos hablar de variación compensatoria y no de excedente). Se sigue que si el monopolista cobra un cargo fijo de ese monto, se habrá apropiado de todo el excedente del consumidor.

3. Cobrar $p(q)$ por cada unidad vendida, esto es, discriminar en primer grado.

El método (3) tiene, como decíamos, el problema que no es factible con posibilidades de reventa. En cambio, la venta por paquetes es inmune al arbitraje, porque todos pagan el mismo precio.

El caso de la tarifa en dos partes es ligeramente distinto: cada uno de los consumidores que pagó la tarifa puede comprar unidades adicionales al mismo precio, pero de hecho podrían comprar a $\$c$ y vender a un precio mayor a consumidores que no hayan pagado el cargo fijo, y que por tanto no transen con el monopolista. La efectividad de la tarifa en dos partes, entonces, también depende de que el arbitraje sea difícil o imposible, como por ejemplo en el caso de la electricidad, el gas de cañería, etc.

En el caso en que los consumidores son heterogéneos, pero separables en grupos de individuos distinguibles cuya demanda sea parecida –por ejemplo, niños y adultos, o mujeres y hombres, etc.– el cobro fijo puede ser distinto. Si no hay posibilidad de reventa, entonces la tarifa en dos partes es un método de extracción de excedente tan efectivo como la discriminación perfecta. Si, en cambio, no hay características que permitan diferenciar a los consumidores, entonces los métodos de discriminación de precios lograrán una apropiación incompleta del excedente del consumidor.

El mensaje central es que no es posible hacer un análisis cabal de las consecuencias económicas del monopolio sin una comprensión de sus posibilidades de apropiación, las que dependen de la capacidad de distinguir entre consumidores con diferentes disposiciones a pagar, de las características del producto, de la ubicación geográfica de los consumidores, entre otras variables.

Ejercicios

1. (*) Un monopolista tiene costos totales y demanda dados por:

$$\begin{aligned} C(q) &= 120q \\ P &= 800 - 2q \end{aligned}$$

   a) Encuentre la cantidad óptima a producir, el precio a cobrar y las utilidades del monopolista.
   b) Compare su resultado en términos de precio, cantidad y eficiencia, con una situación en la que hubiese competencia perfecta a los mismos costos.
   c) Imagine ahora que el monopolista es capaz de distinguir dos mercados claramente diferenciados dados por

$$\begin{aligned} P_A &= 1{,}000 - 4q_A \\ P_B &= 600 - 4q_B \end{aligned}$$

   Muestre que estas demandas son consistentes con la anterior.
   d) Determine el nuevo óptimo del productor bajo el supuesto de que no exista posibilidad de arbitrar entre ambos mercados.
   e) Calcule las ganancias del monopolista y el excedente total en ambos mercados. Compare ambos con las que se obtenía sin discriminar. Explique intuitivamente sus resultados.
   f) Explique en qué sentido la posibilidad de reventa limitaría las posibilidades de discriminar.
2. (**) Un monopolista con función de costos $C(q) = \frac{1}{2}q^2$ enfrenta a dos consumidores, uno con una demanda inversa de $p(q_1) = 10 - q_1$, y otro de $p(q_2) = 20 - 2q_2$. Determine los precios, cantidades a producir y vender, y las ganancias del monopolista en los siguientes casos:
   a) El bien puede ser revendido a costo cero entre los consumidores, y tecnológicamente es imposible venderlo en paquetes de más de una unidad.
   b) Ambas posibilidades existen: la de la reventa a costo cero y la del empaquetamiento en paquetes de tamaño arbitrario.
   c) La reventa es posible, pero a un costo t por unidad.
   d) El bien es de hecho un servicio: personal e intransferible.

e) Repita el análisis anterior, pero esta vez bajo el supuesto de que los costos están dados por $C(q) = q$ con la restricción de capacidad $q \leq 8$.

3. (**) Una empresa productora de y tiene la siguiente función de producción: $y = K^{1/4}L^{3/4}$, donde K y L son factores cuyos precios son w_K y w_L respectivamente. Si decide producir, esta empresa debe pagar un costo fijo $F = 650$.
   a) Encuentre la función de costo medio y marginal de la empresa.
   b) Suponga que los precios de los factores son $w_K = w_L = 1$. Además, esta empresa enfrenta una demanda agregada que en el tramo relevante es de la forma: $y = 400 - 40p$. ¿Cuánto produce la empresa? Fundamente su respuesta.
   c) Ahora suponga que la demanda de la pregunta b) está compuesta por dos tipos de consumidores:
   i) 10 consumidores tipo A, cuyas demandas *individuales* son: $y^A = 13 - p$
   ii) 10 consumidores tipo B, cuyas demandas *individuales* son: $y^B = 27 - 3p$
   Suponga que la empresa puede separar mercados (discriminación de precios de tercer grado). Encuentre el precio y cantidad óptimas para el monopolista en cada mercado. Compare sus resultados con los de b), explicando claramente por qué difieren o no difieren sus resultados, y la importancia que esto tiene desde el punto de vista del bienestar social.
4. (**) Gary Becker (1959) discute diversas medidas del poder monopólico de un sindicato. Una de ellas es la diferencia de salarios entre los miembros del sindicato y los trabajadores no afiliados, para el mismo grado de calificación. Aboga, sin embargo, por esta otra: el valor de la cuota de incorporación cobrada al trabajador. Discuta comparativamente la racionalidad económica de estas medidas.
5. (**) Una autopista responde completamente al estereotipo del monopolio natural: costos fijos muy altos (su construcción) y muy bajos costos marginales de operación. Sin embargo, Demsetz (1968) argumentaría que ello no es suficiente para concluir que no es posible conseguir un resultado competitivo. En efecto, si bien la estructura de costos le facilitaría al operador de la autopista la consecución de rentas monopólicas, el gobierno puede licitar el cargo de operador, induciendo competencia entre diversos operadores potenciales. Dependiendo de las reglas de la licitación, es posible que (1) el gobierno se apropie de las rentas monopólicas, o bien que (2) el gobierno induzca un resultado eficiente. Explique claramente cómo podría alcanzar estos objetivos.
6. (**) Discuta en los siguientes casos si encuentra fundamentos para presumir la existencia de rentas monopólicas:
   a) Conservador de bienes raíces.

   b) Notarías.
   c) Oftalmólogos.
7. (**) Un monopolista enfrenta la demanda $P = 10 - Q$. Sus costos dependen de cuántas plantas tenga en operación. En particular, cada planta está caracterizada por la función de producción

$$q_i = \sqrt{L_i}$$

   donde q_i y L_i son la cantidad de producto e insumo de la planta i. El monopolista enfrenta una oferta infinitamente elástica de trabajo al precio $w = 1$. Determine cuánto producirá, qué precio cobrará, y cuántas plantas tendrá en operación.

Referencias

1: Becker, Gary (1959) "Union Restrictions on Entry", en Bradley, Philip D. (ed.) *The Public Stake in Union Power,* University of Virginia Press.
2: Demsetz, Harold (1968), "Why Regulate Utilities?", *Journal of Law and Economics,* vol. XI.
3: Demsetz, Harold (1974), "Two Systems of Belief About Monopoly", en *Industrial Concentration, the New Learning,* editado por Goldschmid, Mann y Weston, Little Brown.

CAPíTULO 13

Elementos de Teoría de Juegos

1. Introducción

En este capítulo nos concentramos en el problema de la elección de un grupo de individuos, en el que cada uno de ellos debe decidir sobre algún aspecto del problema, pero en el que todos se ven afectados, directa o indirectamente, por las decisiones del resto de los miembros del grupo.

Consideremos una situación en la que intervienen $i = 1, 2, ..., n$ individuos. Cada uno de ellos tiene un problema de decisión, esto es, cada individuo i debe escoger un curso de acción a_i dentro de un conjunto de planes factibles A_i. En general, podemos pensar en dos clases de situación:

1. Las decisiones del resto afectan *directamente* las preferencias y/o el bienestar del individuo, esto es, cada individuo tiene preferencias definidas no sólo sobre la parte de la decisión que le compete directamente, sino también sobre las del resto. Formalmente, diríamos que tiene preferencias sobre las posibilidades de todos, esto es, $\succsim_i$ ordenaría a $A_1 \times ... \times A_i \times .... \times A_n$ y **no sólo** a A_i, aún cuando su decisión sólo se refiera a A_i. En el caso en que exista una función de utilidad que represente a esa preferencia, sería de la forma:

$$u_i (a_1, ..., a_i, ..., a_n)$$

Éste sería el caso, por ejemplo, de un condominio en que todos prefieren que las casas estén pintadas de colores armónicos, de la misma gama. Preferencias distintas sobre los colores serían una fuente de conflicto, pero probablemente existe un alto valor de cooperar para lograr la armonía. Decimos que situaciones de esta naturaleza, en que el bienestar de los individuos depende directamente de las decisiones de los otros, se caracterizan por la **interacción estratégica**, y su discusión es el tema de estudio de la Teoría de los Juegos.
2. Las decisiones del resto afectan *indirectamente* las preferencias y/o el bienestar del individuo, por la vía de alterar sus posibilidades. Formalmente, diríamos que aún cuando las preferencias de cada uno están definidas exclusivamente sobre el ámbito de su decisión, esto es, para cada $i \in I$ la función de utilidad es de la forma $u_i (a_i)$,

las posibilidades de cada individuo están determinadas por las decisiones del resto: $A_i = f(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_I)$. Este es el caso, por ejemplo, de una economía en competencia perfecta cuando no hay externalidades. Son decisiones ajenas, por ejemplo, el pavimentar o no una calle, o el llenarla de semáforos y lomos de toro o dejarla despejada. Aún cuando el bienestar de una persona dependa solamente del tiempo que se demore en ir de un punto a otro, cuánto tiempo sea factible que se demore depende de si la calle fue pavimentada, y de si está despejada o llena de obstáculos.

Aún cuando la línea divisoria entre ambos tipos de problema sea a veces difícil de trazar, al menos desde un punto de vista conceptual se diferencian en un aspecto crucial: la información. En el primer caso, el individuo necesita pronosticar qué harán los demás antes de tomar su propia decisión, toda vez que la consecuencia es el resultado conjunto de las decisiones de todos, y por lo mismo, también pronosticar el efecto que la propia decisión tendrá en el comportamiento ajeno. Esto es, el problema tiene una dimensión estratégica insoslayable. En cambio, en el segundo caso no hay nada que predecir, puesto que el conocimiento del problema comporta el conocimiento de las posibilidades. Como las decisiones ajenas afectaron las posibilidades, son conocidas, y no hay nada que el individuo pueda hacer para revertirlas. Por esta razón, en la primera clase de situaciones todas las decisiones se deben analizar en conjunto, mientras que en la segunda es posible analizar las decisiones individuales separadamente, para luego analizar su efecto agregado.

Esta diferencia es de hecho tan profunda desde la perspectiva analítica, que los conceptos de equilibrio son de naturaleza diferente. En el caso de situaciones sociales con interacción estratégica, la noción de equilibrio más común es la del Equilibrio de Nash y sus refinamientos; en el caso de situaciones sin interacción estratégica, la noción apropiada es la del Equilibrio de Walras (o Walrasiano).

Existen diversos modelos para representar y analizar situaciones con interacción estratégica. Los dos más importantes son la forma normal o estratégica, y la forma extensiva o dinámica.

2. Juegos en forma normal

La forma normal o estratégica de un juego supone que todo lo que se requiere para entender una situación social es saber quiénes intervienen en ella, cuáles son sus funciones de utilidad, y cuáles son sus acciones (o estrategias) disponibles. Esto es, un juego en forma normal consiste de:

1. Una lista de jugadores, $i = 1, ..., n$. [Quiénes juegan]
2. Sus espacios de acción o conjuntos de estrategias disponibles, $A_1, ..., A_n$. [Qué pueden hacer]

3. Sus funciones de utilidad: $u_i(a_1, ..., a_n)$ para cada $i = 1, ..., n$. [Qué prefieren]

Es esencial entender por qué la función de utilidad depende de las acciones de todos y no sólo las propias. Con ese fin, revisaremos a continuación algunos ejemplos.

El primero y más conocido es el **dilema del prisionero**. Existen diversas versiones, pero la descripción típica considera a dos prisioneros sospechosos de un crimen que son interrogados en celdas separadas. La policía no tiene evidencia suficiente para obtener una condena, por lo que necesita que confiesen. Basta que uno de los dos confiese para que ambos sean condenados. Sin embargo, si uno confiesa y el otro no, se le rebaja la condena a quien confesó en premio por su cooperación. Si ninguno confiesa, quedan libres. Esto se expresa en la siguiente matriz de pagos, que explicita la utilidad de cada jugador dependiendo de las acciones de ambos. La primera entrada es la del jugador 1 ($J1$), quien escoge la fila, y la segunda del jugador 2 ($J2$), que escoge columnas.

Juego 1: El dilema del prisionero

$J1 \backslash J2$	Confesar	No confesar
Confesar	$0, 0$	$15, -5$
No confesar	$-5, 15$	$10, 10$

En el ejemplo, claramente cada prisionero jerarquiza los escenarios de la siguiente forma: la situación más preferida es que el otro no confiese pero uno sí; la segunda en preferencia es que ninguno confiese, la tercera es que ambos confiesen, y lo peor que el otro confiese y uno no. La interacción estratégica se ve, entonces, en que la evaluación de cada acción depende de lo que haga el otro jugador, y eso es recíproco.

Un segundo ejemplo es la **batalla de los sexos**. Se trata de una pareja que por alguna razón no se puso de acuerdo en dónde ir el sábado en la noche, y no se puede comunicar. Cada uno quisiera encontrarse con el otro en alguno de los lugares que frecuentan, el boxeo y la ópera. Si de alguna manera pudieran asegurarse de que ambos van a ir al mismo lugar, ella preferiría que fuese en la ópera y él que fuese en el boxeo. Pese a esa diferencia en sus gustos, ambos prefieren estar con el otro a estar solos. Esta situación se resume en la siguiente matriz de pagos.

Juego 2: La batalla de los sexos

Él ($J1$) $\backslash$ *Ella* ($J2$)	Boxeo	Ópera
Boxeo	$2, 1$	$0, 0$
Ópera	$0, 0$	$1, 2$

En la batalla de los sexos, el problema es uno de coordinación: los intereses de ambos están más o menos alineados, y lo que necesitan es una manera de ponerse de acuerdo. En el dilema del prisionero, en cambio, la confesión beneficia a uno y daña al otro. Sin embargo, es posible también que ambos pierdan.

Una tercera situación de interés es el juego del cachipún. Este juego difiere de los anteriores en que es completamente competitivo, en el sentido de que no existe forma de que uno gane sin que el otro pierda. A situaciones de esta naturaleza se les llama **juegos de suma cero** o constate.

Juego 3: papel, piedra, tijeras (cachipún)

$J1 \backslash J2$	papel	piedra	tijeras
papel	$0,0$	$1,-1$	$-1,1$
piedra	$-1,1$	$0,0$	$1,-1$
tijeras	$1,-1$	$-1,1$	$0,0$

Ofrecemos un último ejemplo que será desarrollado en profundidad en el capítulo siguiente, fundamentalmente para no dejar la idea equivocada de que un juego es una matriz de pagos, o de que el análisis de los juegos es posible sólo cuando el conjunto de acciones disponible a cada jugador es reducido. En el **duopolio de Cournot**, dos empresas producen un bien homogéneo, que tiene una demanda total de $P = a - bQ$, donde Q es la producción total, es decir, $Q = q_1 + q_2$. El costo total de producción de cada jugador i es $C_i = cq_i$. Por alguna razón, no es posible para ninguno de ellos saber cuánto producirá el otro, sino que más bien cada uno tomará su producción y la "rematará" simultáneamente con el otro, obteniendo por unidad el precio indicado en la función de demanda. La utilidad de cada jugador es, entonces, su nivel de ganancias:

Juego 4: Duopolio de *Cournot*

$$u_i(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2) - c]\, q_i$$

La pregunta última que queremos responder es cómo van a actuar cada uno de estos individuos en cada una de estas situaciones, es decir, en cada situación queremos predecir el comportamiento del grupo.

3. Mejor respuesta y equilibrio de Nash

En todas estas situaciones, entonces, cómo le vaya a cada jugador depende de la decisión que tome su oponente. Siendo el actuar del oponente desconocido, podemos aplicar lo desarrollado en el capítulo 7 e imaginar que cada jugador enfrenta un problema de decisión bajo incertidumbre. Los estados de la naturaleza son las acciones de que dispone el oponente.

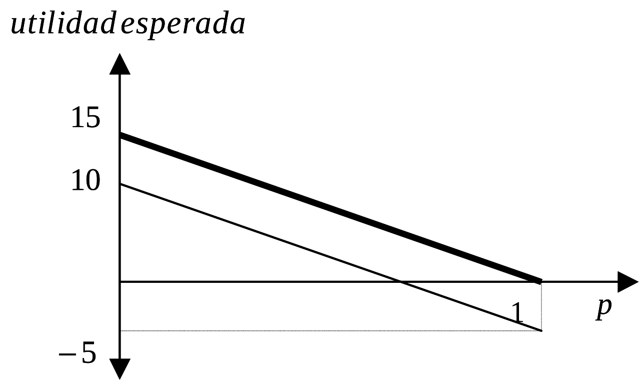


FIGURA 1. Utilidad esperada de confesar (línea gruesa) y de no confesar (línea delgada) en función de p

En el dilema del prisionero, por ejemplo, el jugador 1 puede atribuir una probabilidad p a que su oponente confiese, y $(1-p)$ a que no lo haga. La utilidad esperada de cada una de las acciones que tiene a su disposición, entonces, sería:

$$\begin{aligned}
U(\text{confesar}) &= p * 0 + (1-p) * 15 \\
&= 15 - 15p \\
U(\text{no confesar}) &= p * (-5) + (1-p) * 10 \\
&= -15p + 10
\end{aligned}$$

Un jugador que maximice utilidad esperada, entonces, escogerá confesar si:

$$\begin{aligned}
U(\text{confesar}) &\geq U(\text{no confesar}) \\
&\Leftrightarrow 15 - 15p \geq -15p + 10 \\
&\Leftrightarrow 5 \geq 0
\end{aligned}$$

lo que es una tautología. De esta forma, sin importar qué probabilidad le atribuye a que su oponente confiese, le conviene confesar, como se ilustra en la figura 1.

Esta es una característica distintiva del dilema del prisionero: ambos jugadores tienen una estrategia dominante y, por tanto, es claro cómo dos individuos racionales se comportarán.

DEFINICIÓN 27. *La **estrategia** a^* **es dominante** para el jugador 1 si $u_1(a^*, a_2) \geq u_1(a', a_2)$ para toda otra acción propia $a' \in A_1$, y para toda acción del oponente a_2.*

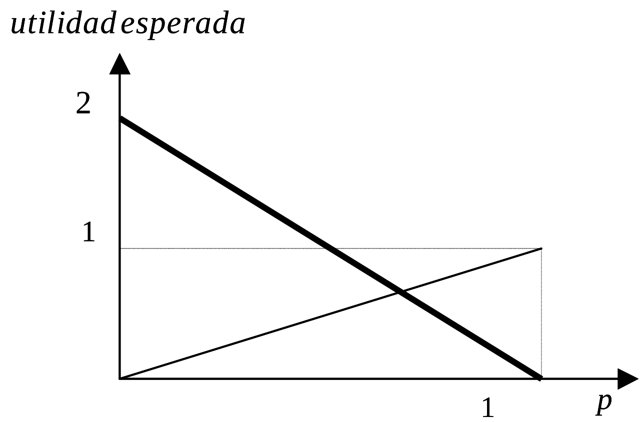


FIGURA 2. Utilidad esperada de ella si va al boxeo (línea delgada) y ópera (línea gruesa), en función de p.

Esto, sin embargo, no es muy frecuente. En la mayoría de las situaciones con interacción estratégica, lo que se crea que el oponente hará es un ingrediente importante de la decisión.

Por ejemplo, consideremos la batalla de los sexos, en particular la decisión de ella. Por cierto ella no sabe adonde va a ir él. Si ella le atribuye una probabilidad p a que él vaya al boxeo, entonces su evaluación de las opciones es como sigue:

$$\begin{array}{rcl} U_{Ella}(\text{boxeo}) & = & p * 1 + (1-p) * 0 = p \\ U_{Ella}(\text{ópera}) & = & p * 0 + (1-p) * 2 = 2 - 2p \end{array}$$

En la figura 2 vemos que la utilidad de ir al boxeo es mayor si le asocia una probabilidad mayor que $\frac{2}{3}$ de que él vaya también allá; de lo contrario, irá a la ópera.

DEFINICIÓN 28. *La **función de mejor respuesta** indica la estrategia que maximiza la utilidad esperada de un jugador en función de lo que piense que su oponente hará.*

Así, la mejor respuesta de ella está dada por:

$$a^*_{Ella}(p) = \left\{ \begin{array}{ccc} \text{boxeo} & si & p > \frac{2}{3} \\ \text{cualquiera} & si & p = \frac{2}{3} \\ \text{ópera} & si & p < \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Observe que en el caso en que $p = \frac{2}{3}$, ella está indiferente entre cualquiera de sus acciones. En consecuencia, también estaría indiferente entre, por ejemplo, ir al boxeo o tirar una moneda al aire y dejarlo en manos del azar. Pero la moneda no era parte del conjunto de acciones inicialmente disponible.

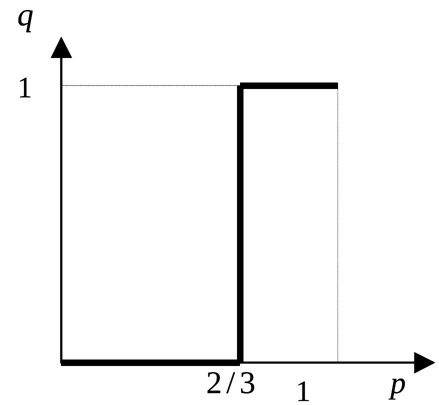


FIGURA 3. Mejor respuesta de ella en función de p

Por eso, necesitamos un nuevo término: **estrategia**. Por estrategia entenderemos un plan completo para el juego: qué hacer en cada momento en que se deba decidir algo. Diremos que el jugador emplea una **estrategia mixta** si su decisión es "aleatoria", esto es, si no decide directamente la acción sino una regla de azar. Diremos que escoge una **estrategia pura** si cada decisión corresponde a una acción particular.

Llamémosle q a la probabilidad de que ella vaya al boxeo. Entonces, como se ilustra en la figura 3, su mejor respuesta está dada por:

$$q^*(p) = \begin{cases} 1 & si \quad p > \frac{2}{3} \\ \text{cualquiera} & si \quad p = \frac{2}{3} \\ 0 & si \quad p < \frac{2}{3} \end{cases}$$

El mismo procedimiento muestra que la función de mejor respuesta de él (que se ilustra en la figura 4) es la siguiente:

$$p^*(q) = \begin{cases} 1 & si \quad q > \frac{1}{3} \\ \text{cualquiera} & si \quad p = \frac{1}{3} \\ 0 & si \quad p < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Si cada jugador es racional en el sentido de que hace lo mejor que puede basado en sus creencias (axioma 0), entonces es posible descartar la posibilidad de observar una cantidad enorme de pares o perfiles de estrategias (p, q). Más aún, si cada uno sabe que el otro es racional, entonces puede ocupar esa información para acotar sus dudas sobre lo que el otro hará.

El **equilibrio de Nash** es sin duda la principal noción de equilibrio en juegos como los descritos:

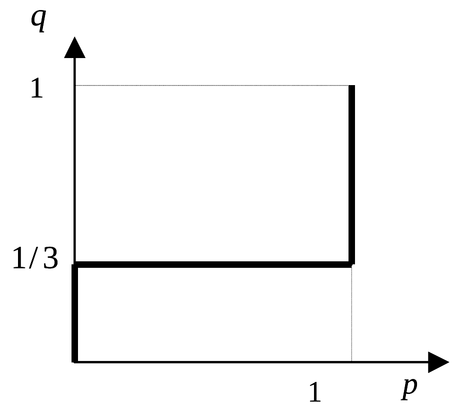


FIGURA 4. Mejor respuesta de él en función de q

DEFINICIÓN 29. *Un* ***Equilibrio de Nash*** *es un perfil de estrategias con la propiedad de que ningún jugador quiere cambiar unilateralmente su decisión, esto es, un par de estrategias (posiblemente mixtas)* (α_1^*, α_2^*) *tal que*

$$\begin{aligned} U_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) &\geq U_1(\alpha_1', \alpha_2^*) \qquad \forall \alpha_1' \\ U_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*) &\geq U_2(\alpha_1^*, \alpha_2') \qquad \forall \alpha_2' \end{aligned}$$

O equivalentemente,

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &\in \arg\max_{\alpha_1} U_1(\alpha_1, \alpha_2^*) \\ \alpha_2^* &\in \arg\max_{\alpha_2} U_2(\alpha_1^*, \alpha_2) \end{aligned}$$

La idea es que ningún jugador tenga incentivos a desviarse de lo que está haciendo, lo que ocurriría si su estrategia fuera subóptima. El equilibrio, entonces, encierra en cierto modo una noción de estabilidad. Observe que, de acuerdo a la definición, cada jugador debe jugar una mejor respuesta a la estrategia de su oponente.

Así, en la batalla de los sexos podemos identificar los equilibrios de Nash juntando los gráficos de las mejores respuestas, y viendo dónde coinciden, como se ilustra en la figura 5. Existen tres intersecciones: $(p, q) = (0, 0)$, esto es, ambos van al boxeo con probabilidad cero (y por lo tanto se encuentran en la ópera); $(p, q) = (1, 1)$, donde ambos van al boxeo con certeza, y $(p, q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, en que cada uno va a su lugar favorito con probabilidad dos tercios.

Los primeros dos equilibrios ocurren, entonces, en estrategias puras: en un equilibrio determinado, cada uno sabe adónde irá el otro y por lo tanto va al mismo lugar. Tanto ir a la ópera con probabilidad 1, como ir al boxeo con probabilidad 1, son equilibrios, porque dada la anticipación de lo que el

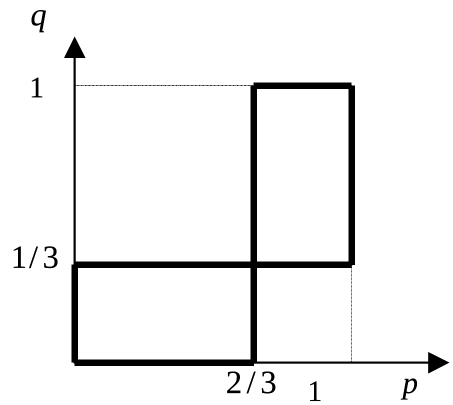


FIGURA 5. Equilibrio de Nash en batalla de los sexos

otro hará, cada jugador sólo puede perder probando una acción o estrategia diferente.

Que una situación sea de equilibrio, y por tanto que cada jugador juegue una mejor respuesta, no significa que tenga la mayor utilidad imaginable, sino sólo que no puede mejorarla sin que medie también una acción del otro jugador. Por ejemplo, cuando ambos van a la ópera, él desearía que hubiesen ido al boxeo. Pero para conseguirlo no bastaba que él decidiera ir al boxeo, sino que también necesitaba que ella lo hiciera.

El tercer equilibrio ocurre en estrategias mixtas. No está determinado de antemano qué harán; de hecho, nadie sabe ni siquiera adonde terminará yendo. Siguiendo esas estrategias, se encontrarán en el boxeo con probabilidad $\frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, en la ópera con probabilidad $\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, y con probabilidad $\frac{5}{9}$ no se encontrarán. Cada uno obtiene una utilidad esperada de:

$$\frac{2}{9} * 2 + \frac{2}{9} * 1 + \frac{5}{9} * 0 = \frac{2}{3},$$

la menor de los tres equilibrios. Por supuesto estarían de acuerdo en "cambiar de equilibrio", y sin embargo, este perfil de estrategias es un equilibrio porque ningún jugador puede, *unilateralmente*, conseguir algo mejor.

Una manera simple de encontrar equilibrios de Nash consiste en marcar en la matriz de pagos las mejores respuestas, como se indica abajo:

Juego 2: La batalla de los sexos

Él \ *Ella*	Boxeo	Ópera
Boxeo	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$
Ópera	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$

Cuando hay coincidencia en una casilla, el perfil de acciones al cual corresponde es un equilibrio de Nash en estrategias puras. Este método no permite, sin embargo, encontrar los equilibrios en estrategias mixtas. No obstante, entrega pistas. Ocurre que el número de equilibrios es típicamente (o para ser precisos, casi seguramente) impar, esto es, los ejemplos en que hay un número par de equilibrios son tremendamente raros. Entonces, al encontrar dos equilibrios en estrategias puras, (a_1, a_2) =(boxeo,boxeo) y (a_1, a_2) =(ópera,ópera), existe base para sospechar seriamente la existencia de un equilibrio más. En el dilema del prisionero, en cambio, no porque existe un solo equilibrio en estrategias puras.

Un resultado importante es que, cuando consideramos un juego estratégico finito (en que el número de acciones disponibles para cada jugador es finito), α^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego si y sólo si cada acción a las que se le asigna probabilidad positiva en α_i^* es una mejor respuesta a α_{-i}^*. La intuición de este resultado es bastante sencilla: si se le asigna probabilidad positiva a una acción que no es mejor respuesta para el jugador i dada la estrategia de los demás, entonces él podría asignarle una menor probabilidad a dicha acción y más a las que sí son mejores respuestas, y con eso aumentaría su utilidad, aún con las estrategias de los otros jugadores fijas, por lo que α_i^* no sería una mejor respuesta a α_{-i}^*. Esto significa que en un equilibrio de Nash en estrategias mixtas toda acción a la que se le asigna probabilidad positiva debe entregar el mismo nivel de utilidad (para una estrategia dada de los demás). Es por esto que, para buscar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, lo que hacemos es buscar probabilidades tales que cada jugador esté indiferente entre una acción y otra, dado lo que hacen los demás. Así por ejemplo, en la batalla de los sexos, donde p y q corresponden a la probabilidad de que él vaya al boxeo y ella vaya al boxeo respectivamente, encontramos el equilibrio de Nash en estrategias mixtas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U_{Ella}(\text{boxeo}) &= p = 2 - 2p = U_{Ella}(\text{ópera}) \\ &\Rightarrow p^* = \frac{2}{3} \\ U_{Él}(\text{boxeo}) &= 2q = 1 - q = U_{Él}(\text{ópera}) \\ &\Rightarrow q^* = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 24. *Utilizando los procedimientos antes descritos, encontrar el o los equilibrios de Nash en el Juego 3 (cachipún). Interprete el resultado obtenido: ¿cuál sería su predicción respecto de la frecuencia con que los jugadores escogerán piedra, papel y tijera en este juego? ¿existirá algún patrón sistemático en la elección? (por ejemplo, si un jugador ha jugado dos veces y eligió papel y piedra, ¿podría usted argumentar que la tercera escogerá tijera con seguridad?).*

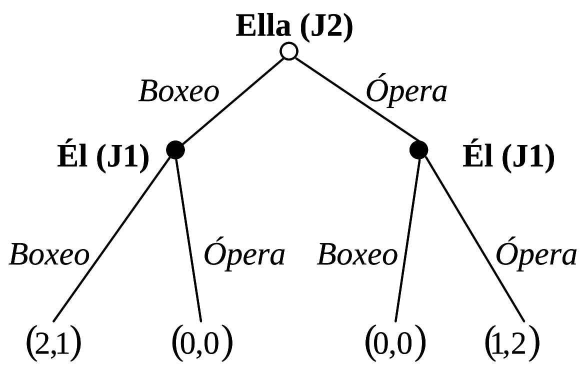


Figura 6. Forma extensiva del juego: batalla de los sexos

4. Juegos en forma extensiva

En muchas situaciones, las decisiones no son simultáneas, sino secuenciales. Como veremos a continuación, la secuencia o dinámica puede tener un efecto profundo en el equilibrio.

Por ejemplo, si en la batalla de los sexos ella pudiera mandar un recado al otro, avisándole adonde va a ir, entonces no es razonable pensar que ellos van a ir al boxeo, ni mucho menos que vayan a dudar hacia dónde ir. Esto, porque él prefiere ir adonde se encuentre con ella, y como no hay posibilidad de "discutir", sino que sólo recibe su recado, entonces *de facto* ella elige el lugar.

Una manera de representar esta situación es a través de la **forma extensiva del juego**, que considera no sólo la lista de participantes o jugadores, sus funciones de utilidad y sus conjuntos de acciones posibles, sino también la secuencia en que las decisiones se toman, ilustradas comúnmente en un árbol, como se ilustra en la figura 6.

El árbol del juego está compuesto de un **nodo inicial**, el círculo blanco, que denota el comienzo del juego, con una decisión de algún jugador (en el ejemplo, el 2); diversos **nodos**, los círculos negros, con las decisiones que el mismo u otros jugadores toman a continuación, y en conocimiento de las decisiones previas. El conjunto de **ramas** que nace de un nodo contiene a las acciones disponibles del jugador con el turno en ese momento. Al final de toda secuencia de ramas, se indica el **pago** o utilidad que recibe cada jugador bajo esa especificación de acciones tomadas, o historia del juego.

Observe que este ejemplo también se pudo haber escrito como un juego en forma estratégica. La diferencia con el juego simultáneo analizado antes radica en que él es ahora llamado a actuar en dos escenarios distintos: él debe escoger adonde ir sabiendo que ella irá a la ópera, o bien sabiendo que ella irá al boxeo. Como su decisión no necesita ser la misma en ambos casos, entonces él debe escoger de hecho una **estrategia**, es decir, un plan completo para el juego: qué hacer en cada momento en que se deba decidir algo. En esta caso, la estrategia debe contener una respuesta a "ella dice ópera" y otra a "ella dice boxeo".

De manera que si este juego lo analizamos en forma normal, ella escoge acciones o estrategias simples {boxeo,ópera}, y él escoge estrategias o planes de mayor complejidad, en respuesta a su acción: {(boxeo si ella dice boxeo, boxeo si ella dice ópera), (boxeo si ella dice boxeo, ópera si ella dice ópera), (ópera si ella dice boxeo, boxeo si ella dice ópera), (ópera si ella dice boxeo, ópera si ella dice ópera)}. Abreviando, $S_{Ella} = \{B, O\}$ y $S_{\acute{E}l} = \{bb, bo, ob, oo\}$, donde en cada par, la primera entrada se refiere a su respuesta a ella yendo al boxeo y la segunda a la ópera. La matriz de pagos entonces es:

Juego 2': La batalla de los sexos secuencial

Él \ *Ella*	B	O
bb	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$
bo	$\underline{2}, 1$	$\underline{1}, \underline{2}$
ob	$0, \underline{0}$	$0, \underline{0}$
oo	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$

Como se aprecia en la matriz de pagos, este juego tiene tres equilibrios de Nash en estrategias puras: (B,bb) , (O,bo) y (O,oo).

i) (B,bb) : Si ella anticipara que él irá al boxeo independientemente del lugar que ella le indique, ella preferiría también ir al boxeo. A su vez, si ella va al boxeo, él prefiere también ir al boxeo (y es irrelevante el anuncio de qué hubiera hecho si ella hubiera anunciado algo distinto).

ii) (O,bo) : Si ella anticipara que él iría adonde ella le diga, preferiría ir a la ópera. A su vez, si ella va a la ópera, él prefiere también ir a la ópera (y es irrelevante el anuncio de qué hubiera hecho si ella hubiera anunciado algo distinto).

iii) (O,oo) : Si ella anticipara que él iría a la ópera independientemente de lo que ella le diga, entonces ella preferiría ir a la ópera. A su vez, si ella va a la ópera, él prefiere también ir a la ópera (y es irrelevante el anuncio de qué hubiera hecho si ella hubiera anunciado algo distinto).

Observe que hay algo extraño en la justificación de estos equilibrios. Por ejemplo, en (B,bb) ella va al boxeo porque cree que él va a ir al boxeo independientemente de lo que ella haga. Ciertamente él puede prometerlo y tratar de convencerla de que así lo hará, pero ella debería entender que esa promesa no vale mucho[1]. En efecto, si ella no le hiciera caso y fuera a la ópera de todos modos, él tendría que escoger entre cumplir su palabra (e ir solo al boxeo) u olvidarse de su promesa y juntarse con ella en la ópera. Pero esta última alternativa es preferida. En otras palabras, la amenaza de ir al boxeo aunque ella vaya a la ópera no es creíble. Esto, por cierto, en un sentido retórico, puesto que la estrategia no es un conjunto de promesas o amenazas, sino una conjetura de un jugador sobre el comportamiento de otro. Un equilibrio de Nash pide que esta conjetura sea correcta, pero sólo en aquellas partes que en la trayectoria del equilibrio se comprueban. Por ejemplo, para el equilibrio (B,bb) notamos que en la trayectoria de equilibrio ella va al boxeo, por lo que la conjetura "él irá al boxeo si ella va al boxeo", que es la única que se comprueba en el equilibrio, es correcta. Por esa razón decimos que (B,bb) es un equilibrio de Nash. Sin embargo, si estuviéramos fuera de la trayectoria de equilibrio (es decir, si ella no fuera al boxeo), la conjetura "él irá al boxeo si ella va a la ópera" no sería correcta, lo que resulta extraño, puesto que el equilibrio se sostiene también en esta parte de la estrategia de él.

La noción del **equilibrio perfecto en subjuegos** recoge esta idea: un equilibrio perfecto en subjuegos es un conjunto de conjeturas sobre los planes completos del juego, donde todas las conjeturas son correctas, incluyendo aquellas que nunca se podrán comprobar porque están fuera de la trayectoria de equilibrio. Por ejemplo, el par de estrategias (B,bb) no es equilibrio perfecto en subjuegos, porque la conjetura "él irá al boxeo si ella va a la ópera" –que nunca se podrá comprobar si ella escoge B– no es correcta. Dicho de otro modo, un equilibrio perfecto en subjuegos es un equilibrio en que las "promesas" y "amenazas" implícitas en las estrategias son creíbles, por cuanto cada jugador preferiría actuar del modo especificado en ellas si fuese llamando a hacerlo.

DEFINICIÓN 30. *Un **equilibrio perfecto en subjuegos** es un perfil de estrategias con la propiedad de que ningún jugador quiere cambiar unilateralmente su estrategia, y en que **cada parte de cada estrategia es una mejor respuesta en su respectivo nodo**.*

En el ejemplo, de los tres equilibrios de Nash en estrategias puras, el único creíble es el (O,bo): él va a ir adonde ella le diga, y cualquier otra promesa o amenaza no debe ser creída.

Una forma de encontrar los equilibrios perfectos en subjuegos en la forma extensiva, consiste en empezar desde el último jugador (el que tiene el turno final), marcando su mejor respuesta a las posibles acciones de sus

[1]Se podría contraargumentar que tal interpretación supone que los jugadores no son personas honorables, que respeten su palabra. En tal sentido, es necesario recordar que la función de utilidad describe completamente al jugador: si faltar a su palabra le causa desutilidad, entonces esa pérdida ya está incorporada de manera implícita en los pagos.

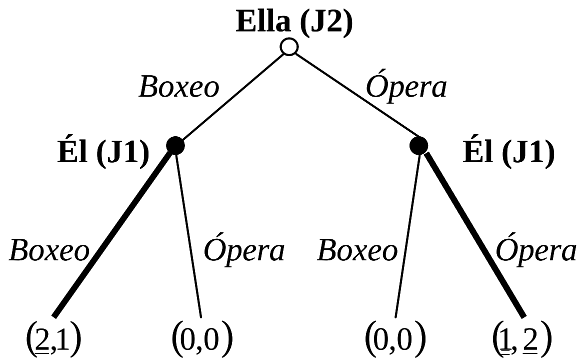


FIGURA 7. Equilibrio perfecto en subjuego por inducción hacia atrás

antecesores, y luego volver hacia atrás, al jugador cuyo turno es inmediatamente anterior. Para marcar la mejor respuesta del penúltimo jugador, tomamos en cuenta que él puede anticipar la respuesta del último jugador a cada una de sus acciones. Es decir, sólo debe comparar los pagos asociados a las acciones del último jugador que son una mejor respuesta a su propia acción. Y así sucesivamente, procedemos hasta llegar al primer jugador, al comienzo del juego. Este método se llama "inducción hacia atrás": partimos desde el último jugador revisando cuál es su mejor respuesta en cada nodo, y tomando en cuenta eso, vamos retrocediendo hacia atrás.

Así por ejemplo, en el juego de la batalla de los sexos secuencial, ilustrado en la figura 6, empezamos con el último jugador (él), y vemos cuál es su mejor respuesta: boxeo si ella dice boxeo, y ópera si no. Luego, para evaluar los pagos de ella y marcar su mejor respuesta, tomamos en cuenta que él escogerá boxeo si ella dice boxeo y ópera si no, y por lo tanto comparamos el pago de 1 (si ambos van al boxeo) y 2 (si ambos van a la ópera). Como era de esperar, en este caso ella escoge ópera. En la figura 7 se ilustra este procedimiento, en que se marca con una línea gruesa la acción que escogerá él ante las distintas acciones posibles de ella, de modo que ella evalúa los pagos asociados a esas dos líneas gruesas solamente para elegir su mejor respuesta.

El equilibrio perfecto en subjuegos es la noción más importante de equilibrio para juegos en forma extensiva, así como el equilibrio de Nash lo es para juegos estratégicos. Es claro que un equilibrio perfecto en subjuegos es un equilibrio de Nash, por lo que decimos que la noción de perfección en subjuegos refina a la de Nash. Cuál es la noción adecuada de equilibrio depende, sin embargo, en gran medida del juicio del analista enfrentado a un problema puntual.

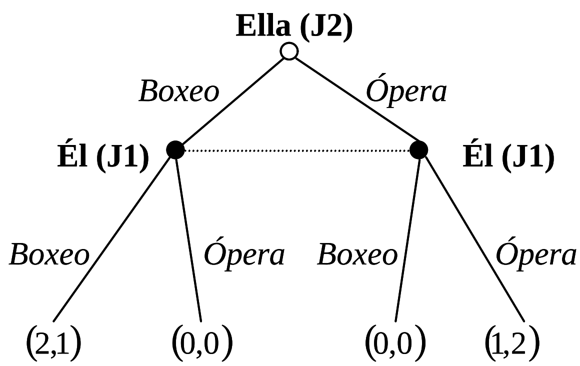


Figura 8. Forma extensiva para un juego no secuencial

Cabe resaltar que el juego en que la decisión es simultánea también se puede representar en la forma extensiva. Para ello, conectamos con una línea punteada todos los nodos en los cuales el jugador considera posible encontrarse, como se ilustra en la figura 8. Así, en la primera versión del juego, en que él no sabe adonde fue ella, los dos nodos en que él debe escoger le parecen uno solo: es el mismo **conjunto de información**. En todos los nodos dentro de un conjunto de información, el jugador sabe lo mismo y tiene las mismas acciones disponibles. El jugador sabe en qué conjunto de información se encuentra, pero no en qué nodo particular.

Así, las formas estratégica y extensiva de un juego son dos representaciones de una misma situación. Aunque la forma estratégica permite considerar la secuencia de las jugadas, y aunque la forma extensiva permite considerar juegos en que todas las decisiones son simultáneas o desinformadas de las decisiones ajenas, la forma extensiva enfatiza los aspectos dinámicos del juego de manera especial.

Para fundamentar esa aseveración recurrimos al juego de **negociación del ultimátum**. En su versión más simple, dos personas se reparten una torta. Las reglas establecen que el jugador 1 debe ofrecer la mitad al jugador 2, o nada. El jugador 2 decide si acepta o no la proposición. Si la acepta, entonces la torta se reparte de acuerdo a lo ofrecido. Si la rechaza, pierden la torta, como se ilustra en la forma extensiva del juego en la figura 9. La forma estratégica se ilustra a continuación.

Juego 3: Negociación del ultimátum

$J1\backslash J2$	aa	ar	ra	rr
Mitad	0.5,$\underline{0.5}$	$\underline{0.5}$,$\underline{0.5}$	0,0	$\underline{0}$,0
Nada	$\underline{1}$,$\underline{0}$	0,$\underline{0}$	$\underline{1}$,$\underline{0}$	$\underline{0}$,$\underline{0}$

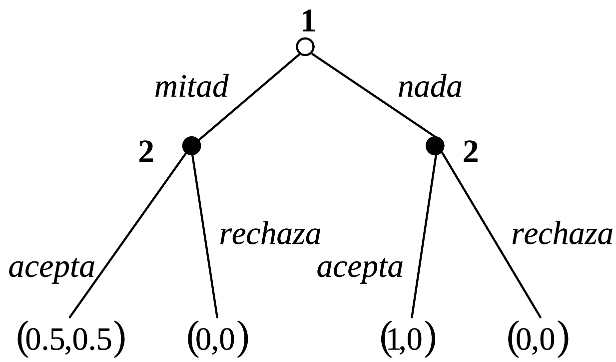


FIGURA 9. Forma extensiva: negociación del ultimátum

Este juego tiene cuatro equilibrios de Nash en estrategias puras. En uno de ellos, (Nada, rr) el jugador 2 promete que rechazará cualquier oferta, por lo cual el jugador 1 está indiferente entre todas sus opciones, lo que no parece razonable. Tampoco parece razonable, como se indica en (Nada, ra) , que el jugador 2 prometa que rechazará la oferta de media torta y aceptará la de nada. Ninguno de estos dos equilibrios es perfecto en subjuegos.

5. Juegos repetidos

Muchas situaciones se desarrollan repetidamente a lo largo del tiempo. Por ejemplo, la empresa produce periódicamente, algunos clientes tienen lealtad a la marca, el senador se presenta a la reelección, etc. Desde un punto de vista conceptual, estos casos corresponden a juegos dinámicos, toda vez que cada vez que la situación se repite existe una historia conocida de repeticiones anteriores. Lo interesante de esto es que las estrategias podrían tomar en cuenta esa historia, lo que abre un abanico inmenso de posibilidades para la manera en que los jugadores pueden interactuar. Por ejemplo, si la batalla de los sexos se repitiera indefinidamente, entonces quizás esa pareja podría ir al boxeo en las fechas pares y a la ópera en las fechas impares. O, quizás de mayor interés, el recuerdo de lo ocurrido permite que cada jugador amenace con represalias o con premios a su oponente en un intento por afectar su comportamiento.

Por ejemplo, si el dilema del prisionero se repitiera indefinidamente, quizás podrían ocupar una estrategia del siguiente tenor: yo no confesaré nunca, salvo que alguna vez tú lo hayas hecho. En ese caso, confesaré para siempre. Esta estrategia promete lealtad, condicional en que nunca se haya traicionado esa confianza. Pero si ambos usaran esa estrategia, ¿lograrían llegar a un óptimo paretiano?

En un equilibrio de Nash, cada jugador se pregunta qué es lo mejor que puede conseguir dada la estrategia del oponente. La evaluación de la utilidad requiere en este caso, sin embargo, explicitar la manera en que cada jugador evalúa la historia completa del juego, esto es, cómo agregar los pagos recibidos período a período. El camino más común es el de suponer una función de utilidad aditiva con descuento, de la forma:

$$U = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u_t$$

donde t indexa el tiempo, u_t es el pago en la repetición t y $\delta \in (0,1)$ es el factor de descuento. Observe que a mayor δ, más importante es el futuro.

Si el otro ocupara la estrategia descrita, entonces el prisionero compararía cómo le iría siguiendo esa estrategia o desviándose. Seguirla le entregaría una utilidad de:

$$(1-\delta)\left(10+\delta 10+\delta^2 10+...\right) = 10$$

porque si ambos son leales en cada oportunidad, nunca hay alguien confesando. En cambio, si por ejemplo un prisionero se desviara, y en lugar de mantenerse leal confesara, entonces tendría una ganancia de corto plazo pero un castigo eterno:

$$(1-\delta)(15+\delta * 0+...) = 15(1-\delta)$$

Luego, las estrategias en cuestión constituyen un equilibrio de Nash si:

$$\begin{aligned} 10 &\geq 15(1-\delta) \\ &\Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La repetición del juego abre, entonces, la oportunidad de la cooperación en este juego, cambiando dramáticamente el resultado –siempre y cuando los jugadores sean lo suficientemente pacientes–. Sin embargo, el equilibrio de Nash del juego de una ronda es también un equilibrio del juego repetido infinitas veces. Por ejemplo, si ambos ocupan la estrategia de confesar al comenzar el juego, y seguir confesando si en la ronda anterior el oponente confesó, entonces es sencillo verificar que ambos prefieren confesar cada vez que les toca decidir. Entonces, la repetición abre la posibilidad de la cooperación, pero no la fuerza.

Quizás más sorprendente es el siguiente resultado: en el juego repetido un número finito de veces el único equilibrio posible es la repetición del equilibrio del juego de una ronda, si suponemos que los jugadores no creen promesas que sus emisores no tienen incentivos a cumplir. Esto es, en el único equilibrio perfecto en subjuegos vemos una repetición de lo que ocurre en el juego de una ronda, sin importar cuántos períodos haya. Para verlo, observe que en la última repetición del juego no existe futuro, por lo que el comportamiento debe depender de los pagos del período y no sustentarse en promesas o amenazas. Esto a su vez implica que ninguna promesa de hacer algo distinto en el último período puede ser creíble en el antepenúltimo, de manera que también en el antepenúltimo período el resultado del juego no puede estar influenciado por lo que pudiera ocurrir a futuro. Es claro que el razonamiento se extiende hacia todos los períodos, incluyendo el primero.

Este resultado es paradójico; de hecho, se le conoce como la paradoja de la cadena de tiendas, puesto que fue enunciado en el contexto de la lucha de un monopolista (una cadena de tiendas) que enfrenta la amenaza de entrada secuencial de diversos competidores en cada una de las zonas geográficas en que opera. Aplicado a este contexto, el resultado anterior indica que no es creíble que el monopolista vaya a pelear por mantener el monopolio, puesto que independientemente de qué haya ocurrido en el resto de los territorios, cuando quede sólo uno por disputar preferirá no incurrir en el costo de la pelea. Sabiendo esto, el antepenúltimo competidor potencial entrará, y así sucesivamente. Observe, sin embargo, que este resultado paradójico descansa completamente en el supuesto de que la fecha de término del juego es conocida de antemano. En cambio, si se sabe que el juego acabará pero no se sabe exactamente cuándo, es posible imaginarlo como un juego infinitamente repetido en que la tasa de descuento considera la probabilidad de término. Por el argumento del párrafo anterior, en este caso la cadena de tiendas podría defender su monopolio.

6. Juegos de una población y equilibrio evolutivo

Los juegos son situaciones sociales, de grupos de individuos. Estos individuos no se limitan a los *homo sapiens*. Por ejemplo, en biología evolutiva interesa entender qué características de una especie perdurarán y cuáles cambiarán. Estas características se refieren tanto a la forma física de los individuos (su morfología) como a sus hábitos y costumbres. La visión es que distintas características producen distintas posibilidades de sobrevivencia y crecimiento de una determinada población, en un determinado medio. Si consideramos una población homogénea, por ejemplo interesa averiguar si el pavo real macho mantendrá su cola larga, o si ésta se achicará.

La manera de modelar estas situaciones es considerando la dinámica de la evolución de la población que sigue principios darwinianos. La población ensaya nuevas características a través de la mutación: los hijos se parecen a los padres, pero no son iguales. Las mutaciones exitosas son las que producen mayor bienestar (entendido como la capacidad de procrear), y generan mayor descendencia. Las características exitosas, entonces, son seleccionadas por el proceso evolutivo, a expensas de las otras características. Ya sea por la mayor capacidad reproductiva (en el caso de las características morfológicas) o por la vía de la imitación, las características exitosas crecen, hasta dominar la población. En este sentido, una característica o estrategia es

evolutivamente estable si la invasión de la población por parte de (un conjunto pequeño de) mutantes no amenaza la sobrevivencia de la característica. En cambio, la amenaza sería real si la mutación fuese exitosa.

Considere el siguiente ejemplo: dos pájaros de una misma especie se enfrentan a una presa. Pueden "ser amables", compartiéndola, actuando pacíficamente como palomas. Pueden también "ser prepotentes", luchando por la presa completa, como los halcones. Si una paloma se enfrenta a un halcón, no hay pelea y el halcón se lleva la presa. Pero si dos halcones se enfrentan, entonces luchan por la presa a un costo de c para cada uno, de acuerdo a la siguiente matriz:

Juego 4: halcón o paloma

$J1\backslash J2$	paloma	halcón
paloma	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	$0,1$
halcón	$1,0$	$\frac{1}{2}(1-c),\frac{1}{2}(1-c)$

Observe que ninguno de los dos pájaros, en esta interpretación, escoge nada. Cada individuo nace agresivo o nace pacífico; su comportamiento simplemente obedece a su naturaleza. La matriz de pagos no indica preferencias, sino capacidad de sobrevivencia del individuo dependiendo de sus características innatas. Si tuviéramos que representar el comportamiento de cada individuo, diríamos que el tipo paloma siempre prefiere no pelear, mientras que el tipo halcón siempre prefiere pelear. Esto es, a través de la evolución algunos individuos pueden desarrollar un gusto por la paz y otros un gusto por la agresión. Su "bienestar", medido por su capacidad de sobrevivencia, difiere de su "preferencia", violando el axioma 0. La pregunta es, entonces, si alguno de esos dos tipos de gusto tiene mayores posibilidades de sobrevivir.

Es claro que una estrategia que no es una mejor respuesta a sí misma no puede ser evolutivamente estable. En efecto, si todos los individuos en la población la usan, el que no sea una mejor respuesta significa que la mutación hacia la mejor respuesta será seleccionada. Se sigue, entonces, que un equilibrio evolutivo estable debe ser un equilibrio de Nash. En cambio, no todo equilibrio de Nash debe ser evolutivamente estable.

En el ejemplo, si $c < 1$, la única estrategia evolutivamente estable es la de halcón. En efecto, si una fracción ε de la población se desvía y escoge la estrategia "paloma", las utilidades esperadas asociadas a cada estrategia son:

$$\begin{aligned} &\text{Paloma:} && \varepsilon\frac{1}{2}+(1-\varepsilon)(0) \\ &\text{Halcón:} && \varepsilon 1+(1-\varepsilon)\frac{1}{2}(1-c) \end{aligned}$$

puesto que enfrentaría a una paloma con probabilidad ε (por simplicidad se supone que la población es de tamaño infinito). El halcón tiene una mayor utilidad si:

$$\begin{aligned} \varepsilon 1 + (1-\varepsilon)\frac{1}{2}(1-c) &> \varepsilon\frac{1}{2} + (1-\varepsilon)(0) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{(c-1)}{c} \end{aligned}$$

lo que ocurre de todos modos, porque $\varepsilon > 0$.

En cambio, si el costo de pelear es muy alto ($c > 1$), es posible que ambas estrategias sean estables, de modo que convivan en la población individuos de ambos tipos. En efecto, observe que si λ es la fracción de la población que usa la estrategia "paloma", entonces palomas y halcones tienen las mismas capacidades reproductivas (esto es, utilidad) si:

$$\begin{aligned} \lambda 1 + (1-\lambda)\frac{1}{2}(1-c) &= \lambda\frac{1}{2} + (1-\lambda)(0) \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 - \frac{1}{c} > 0 \end{aligned}$$

La teoría de la evolución, si bien tiene larga data en economía, se separa de ésta en algo sustancial: el axioma 0. En lugar de tomar como dadas las preferencias de los individuos, las explica como el resultado de un proceso continuo de ensayo y error de una sociedad, en que cada individuo se comporta como puede, con el carácter e inclinaciones con que nació, y en que ese comportamiento fijo determina, en el medio en que le tocó vivir, sus posibilidades de éxito.

Un ejemplo de ideas evolutivas en economía es la discusión sobre si las empresas maximizan o no sus ganancias. Un argumento de corte evolutivo sugiere que en el largo plazo deberían hacerlo, porque empresarios con tales inclinaciones causan empresas con mayores excedentes, y son los excedentes los que permiten la sobrevivencia de la empresa. Quienes "más" maximicen ganancias tendrían mayores posibilidades de sobrevivir, y se multiplicarían en la población.

Ejercicios

1. (*) En el juego "gallina", un representante de cada bando conduce un auto en dirección a su oponente. Si sólo uno se desvía antes de chocar, el que se mantuvo en el camino gana, obteniendo 7 utiles, mientras el perdedor 2. Si ambos se desvían, el juego se declara en empate, y ambos obtienen 6 utiles. Si ninguno se desvía también empatan, pero debido al costo del choque cada uno obtiene 0 utiles.
   a) Represente el juego en forma estratégica, y encuentre el (los) equilibrio(s) de Nash.

b) ¿Cuál le parece una predicción razonable del resultado de este juego. Explique intuitivamente su razonamiento.

c) ¿Cómo cambia esta predicción si uno de los equipos arregla el auto de manera que no tenga volante? Explique claramente.

2. (*) Considere la siguiente situación: hay dos cadenas de cines que se quieren instalar en la misma ciudad. La ciudad es suficientemente chica como para que, si se instala sólo una, ella obtiene ganancias (y la otra no gana nada), pero si se instalan ambas, las dos obtienen pérdidas. Si ninguna de las dos se instala, ninguna gana nada.

   a) Represente la situación descrita en una matriz de pagos (suponiendo que ambas eligen simultáneamente), con pagos de 100 para la que se instala sola, y de -20 si se instalan ambas.

   b) Encuentre el o los equilibrios de Nash de este juego, tanto en estrategias puras como mixtas, explicando brevemente su procedimiento (no es necesario que expliqué qué hizo, sino por qué).

3. (*) Imagine dos vecinos (don Juan y don José), cuyas casas son idénticas. La riqueza de ambos depende del valor de sus casas: inicialmente ambos tienen una riqueza de 100. Don Juan quiere aumentar el valor de su casa por la vía de aumentar el tamaño de su jardín, moviendo la reja que delimita ambos jardines para quitarle un pedazo a don José. Si don Juan mueve la reja y don José no hace nada para volver a ponerla en su lugar, el valor de la casa de don José disminuye a 90, y el de la casa de don Juan aumenta a 110, pero le cuesta 5 mover la reja, de modo que su riqueza queda en 105. Una vez que don Juan mueve la reja, a don José le cuesta mucho (15) volver a ponerla en su lugar original (ya que don Juan toma sus precauciones y la asegura con base de concreto), de modo que la riqueza de don José es de 85 si vuelve poner la reja en su lugar, y la riqueza de don Juan, de 100.

   a) Grafique este juego secuencial en forma extensiva (árbol de juego), y en un cuadro o matriz de resultados que contenga todas las posibles estrategias de don José. Encuentre todos los posibles equilibrios de Nash en la matriz de resultados (sean o no equilibrios prefectos).

   b) Don José amenaza a don Juan diciéndole: "si me mueve la reja del jardín, yo la volveré a poner en su lugar". ¿Es creíble dicha amenaza, por qué (explique)?

   c) Explique qué relación tiene su respuesta a la pregunta en b) con el concepto de equilibrio perfecto. ¿Cómo cambia su respuesta de a) si se descartan los equilibrios de Nash que entrañan amenazas no creíbles? Explique brevemente.

   d) Para evitar este tipo de conflictos entre vecinos, el municipio decide imponer una multa a quien mueva la reja para robar jardín a sus vecinos (don Juan en este caso). ¿Cuál es la mínima multa que debe cobrar la municipalidad para asegurar que don Juan prefiera no mover su reja? Explique.

4. (**) Dos países mantienen una disputa sobre un territorio cuyo valor es \$22, y están considerando iniciar una guerra. De iniciarse, cada país debe escoger cuántos recursos invertir en la guerra. Para ser concretos, imagine que el país Chico puede invertir \$0, \$10 ó \$20, mientras que el país Grande puede invertir \$0, \$10, \$20 ó \$30. El país que más invierta gana la guerra (y por ende el territorio), mientras que si invierten lo mismo, se lo reparten en partes iguales.
   a) Escriba la matriz de pagos de este juego.
   b) Encuentre los óptimos paretianos. Explique.
   c) Explique por qué ninguno de ellos es un equilibrio de Nash; es decir, por qué en este caso la paz es eficiente pero improbable. Más aún, explique por qué en este juego no puede haber un equilibrio en estrategias puras.
   d) Encuentre el equilibrio de Nash es estrategias mixtas. Explique claramente su procedimiento.
5. (**) Suponga que los criminales prefieren cometer más crímenes mientras menos carabineros hay patrullando, mientras que los carabineros prefieren patrullar más mientras más crímenes se han cometido. En particular, imagine que los carabineros deben decidir si patrullan o no, mientras los criminales potenciales deben decidir si cometen un crimen o no. Si los criminales cometen un crimen y los carabineros no patrullan, obtienen pagos de 4 y 1 respectivamente. Si cometen un crimen pero los carabineros patrullan, obtienen 1 y 2. Si no cometen un crimen, obtienen 3 y 4 si los carabineros no patrullaron, o 2 y 3 si sí patrullaron.
   a) Dibuje el juego en forma normal, donde los criminales escogen filas y los carabineros escogen columnas.
   b) Encuentre todos los equilibrios de Nash (en estrategias puras y mixtas). Explique.
   c) Imagine que se aumentan las penas a los criminales, de manera que en el caso que un criminal comete un crimen y los carabineros patrullan (y por tanto, lo capturan), los pagos cambian a 0 y 2 en lugar de 1 y 2. ¿Afecta esto la estrategia de los criminales? Explique.
6. (**) Cristóbal intenta persuadir a Isabel de financiar su proyecto. En efecto, le pide que le preste los \$100 que necesita, a cambio de la promesa de devolución de \$200 en dos años más. Argumenta que su proyecto convertirá los \$100 en \$500 en ese período, sin riesgo alguno. En lo que sigue, imagine que Cristóbal tiene razón en relación al proyecto, y que la tasa de descuento de ambos es 0.
   a) Plantee un juego en forma extensiva en que Isabel decide si presta o no, y Cristóbal decide si devuelve o no el préstamo. Encuentre la forma normal (estratégica) de ese juego.

b) Encuentre el equilibrio de Nash en la forma normal. ¿Es perfecto en subjuegos?
c) Explique por qué en esta situación no se puede conseguir el óptimo paretiano. ¿Cambia su conclusión si de alguna forma se introduce un castigo por incumplimiento de promesas? ¿Cuál es el mínimo castigo que permite conseguir el óptimo paretiano en equilibrio?

7. (**) María y Pedro participan en el siguiente experimento: existe una torta que se intenta distribuir entre ambos. A María se le pide que escriba en un papel qué porcentaje de la torta quiere para sí: un 50 % (la mitad) o un 80 % (cuatro quintos). A Pedro se le pide que escriba en un papel si acepta o no la propuesta de María. Ninguno conoce la respuesta del otro. Si Pedro acepta la propuesta, entonces la torta se reparte de acuerdo a lo que María propuso (ya sea 50 % para cada uno, o bien 20 % para Pedro y 80 % para ella). Si Pedro la rechaza, entonces ninguno consigue nada..
   a) Caracterice este juego en forma estratégica o normal, construyendo su matriz de pagos.
   b) Encuentre el (los) equilibrio(s) de Nash de este juego. Explique por qué ésa sería una predicción razonable de lo que ocurriría en esta situación.
   c) Suponga en cambio que a Pedro se le da a conocer la oferta de María antes de decidir si la acepta o rechaza. Imagine, más aún, que Pedro ocupa la siguiente estrategia: él aceptaría con certeza la oferta equitativa (50 %-50 %), pero aceptaría la oferta desigual (80 %-20 %) sólo con una probabilidad de 50 % (esto es, aceptaría si al tirar una moneda al aire saliera cara y rechazaría si saliera sello). ¿Qué oferta le conviene hacer a María si Pedro ocupa esa estrategia? ¿Cuál es el valor esperado del pedazo que le toca a cada uno?
   d) Dibuje la forma extensiva de este juego bajo la variante introducida en (c), esto es, cuando Pedro decide qué hacer sabiendo lo que María hizo. Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos.
   e) Compare los pagos que ambos jugadores consiguen empleando las estrategias de (c) con las del equilibrio perfecto en subjuegos encontrado en (d). ¿Por qué (c) no es una predicción razonable? Explique claramente.

8. (**) A un jugador le toca sacar, mientras el otro recibe. El jugador que sirve puede intentar colocar la pelota al derecho o al revés del que recibe. La probabilidad de que quien recibe gane el punto depende de si anticipa correctamente la posición del saque, de acuerdo

a la siguiente tabla:

Probabilidad de que el receptor gane el punto			
		Si el receptor se prepara para contestar	
		al derecho	al revés
Y el jugador que sirve	Derecho	80	20
coloca la pelota al:	Revés	30	60

Imagine que ambos jugadores le atribuyeran 100 utiles a ganar el punto.

a) Represente este juego mediante una matriz de pagos, en que el jugador que saca escoge la fila.

b) Encuentre los perfiles de acciones eficientes en el sentido de Pareto.

c) Explique por qué no hay un equilibrio de Nash en estrategias puras, esto es, para cada perfil de acciones posible, explique quién tiene incentivos a desviarse.

d) Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas. ¿Cómo se relaciona la probabilidad de contestar al derecho con el hecho que el derecho es mejor que el revés?

9. (***) Un cliente hambriento entra a un restorán en busca de buena comida y buena atención. Un mozo un tanto flojo quisiera descansar y recibir buenas propinas. El cliente puede dejar una propina generosa (G) o miserable (M). El mozo puede brindar una atención excelente (E) o lamentable (L). Sus preferencias se expresan en las siguientes jerarquías:

(a_1, a_2)	Cliente (jugador 1)	Mozo (jugador 2)
GE	2°	2°
GL	4°	1°
ME	1°	4°
ML	3°	3°

a) Construya dos funciones de utilidad, una para el cliente y otra para el mozo, que representen sus respectivas preferencias.

b) Explique por qué ambas pueden, de hecho, ser representadas por muchas otras funciones de utilidad. ¿Cuáles?

c) Construya una matriz de pagos que represente al juego estratégico en que ambos jugadores toman sus decisiones de manera simultánea. Utilice las funciones de utilidad que construyó en (a), llame al cliente "jugador 1" y al mozo "jugador 2", y ubique al jugador 1 de manera que escoja filas y al 2 de forma que escoja columnas en la matriz.

d) Encuentre todos los perfiles de acciones (a_1, a_2) eficientes. Explique.

e) Encuentre todos los equilibrios de Nash. Explique. En particular, ¿por qué no es de equilibrio tener una atención excelente y dejar una propina generosa?

f) Suponga que el mozo mueve primero, esto es, el cliente escoge qué propina dar des-pués de ver cómo lo atendió el mozo. ¿Cambia esto la conclusión anterior? Es decir, ¿toman decisiones distintas los jugadores en el equilibrio perfecto en subjuegos de este juego dinámico que en el equilibrio de Nash encontrado en (e)?

g) ¿Cambiaría su conclusión si el juego se repitiera infinitamente? En particular, suponga que el cliente vuelve al restorán con probabilidad π, que existen n mozos en el restorán de manera que la probabilidad de toparse con el mismo es $\frac{1}{n}$, y que la función de utilidad de cada jugador es de la forma:

$$U_i = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_{it}$$

donde δ es la probabilidad de jugar nuevamente el mismo juego, con el mismo mozo, en la ronda siguiente, esto es $\delta = \frac{\pi}{n}$.

1) ¿Para qué valores de δ se puede conseguir en un equilibrio de Nash del juego repetido infinitas veces que el mozo brinde una atención excelente (E) y que el cliente deje una propina generosa (G)?
2) Explique, entonces, por qué ese comportamiento es más probable en pueblos chicos y con restoranes pequeños.

h) Suponga, en cambio, que cada ronda corresponde a lo que ocurre en una generación. Existe en cada ronda un grupo de mozos interactuando con un grupo de clientes. Todos viven sólo un período, pero sus hijos y los hijos de sus hijos, etc., juegan eternamente el mismo juego. ¿Qué ocurriría si en una generación se produce una mutación, de acuerdo a la cual mozos y clientes valoran la reciprocidad? Esto es, los clientes gozan siendo generosos con mozos que atienden bien, y gozan castigando con propinas miserables a los que no, y por otro lado los mozos gozan atendiendo bien a clientes generosos, y atendiendo mal a clientes tacaños. Sin realizar cálculo alguno, ¿qué podría decir sobre las posibilidades de sobrevivencia (o estabilidad evolutiva) de estrategias como estas?

CAPíTULO 14

Oligopolio

Veíamos en el capítulo 9 que en una economía perfectamente competitiva, ningún consumidor ni ningún productor tiene poder de negociación, esencialmente porque existe un sustituto perfecto para cualquiera de los participantes en el mercado. En este capítulo estudiamos mercados en los que los productores tienen poder de mercado en algún grado, pero manteniendo la competencia perfecta entre demandantes.

La herramienta analítica básica es la noción de equilibrio de Nash. Los juegos que veremos a continuación intentan capturar aspectos esenciales de la interacción estratégica entre productores. Qué aspectos resulten de mayor importancia, como veremos, depende de hecho de cuál sea el detalle de la situación. No tenemos, entonces, una teoría del oligopolio, sino una colección de casos.

1. El modelo de Cournot

Probablemente el modelo de Cournot es simultáneamente el modelo de oligopolio más popular y el más antiguo. De hecho, data de la primera mitad del siglo XIX, precediendo en más de cien años al desarrollo de la teoría de juegos.

Su estructura es muy sencilla: se plantea un mercado con n empresas idénticas, cada una con costos totales proporcionales a su producción $C_i = cq_i$. La demanda total (que existe porque los consumidores son tomadores de precio) está dada por $P = a - bQ$. La producción total cuando existen n empresas es de $Q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i = nq$, siendo q el número promedio de unidades producidas por empresa.

Con esta descripción, deducimos que la función de pagos del oligopolista i está dada por:

$$u_i(q_1, ..., q_n) = \left[a - b \left(q_i + \sum_{j \neq i} q_j \right) - c \right] q_i \tag{1.1}$$

La interacción estratégica se aprecia en el hecho que las decisiones de los competidores afectan directamente las ganancias de cada empresa. La mejor decisión del empresario i depende de las decisiones tomadas por el resto.

En el juego planteado por Cournot, cada empresa escoge independientemente su producción, y la vende en el mercado. Implícitamente se supone que la fecha en que se decide la producción es anterior a la fecha en que se materializa la venta, de manera que al vender se "remata" el total de la producción, Q. Habiendo competencia perfecta entre consumidores, el precio de venta está dado por $a - bQ$ –el precio del equilibrio walrasiano–. La pregunta es, entonces, qué cantidad decidiría producir cada empresa. Observe que al momento de la venta, no podrá cambiar ni su producción ni la del resto, por lo que es intuitivo pensar que debería tomar como un dato la producción del resto. La mejor respuesta del jugador i cuando hay n jugadores se obtiene de:

$$\max_{q_i} u_i(q_1, ..., q_n) \tag{1.2}$$

La CPO del problema es:

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = a - 2bq_i - b\sum_{j\neq i} q_j - c = 0 \tag{1.3}$$

Es claro que la función de pagos es cóncava en q_i, por lo que la CPO es necesaria y suficiente para el óptimo. Rearreglando, conseguimos la función de mejor respuesta de i:

$$q_i^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} q_j \tag{1.4}$$

Consideremos el caso del duopolio (dos empresas). Las funciones de mejor respuesta de las empresa 1 y 2, que se observan en la figura 1, son de la forma:

$$q_i^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_j \tag{1.5}$$

En equilibrio ambas empresas deben estar produciendo su mejor respuesta, por lo que las cantidades de equilibrio corresponden al punto en que ambas curvas de mejor respuesta se intersectan en la figura 1. En otras palabras, en equilibrio debe ocurrir que la cantidad que produce la empresa 2 es la mejor respuesta a lo que produce la empresa 1, que a su vez es la mejor respuesta a lo que está produciendo la 2. Luego, las cantidades de equilibrio se pueden obtener fácilmente reemplazando q_i y q_j por q_i^* y q_j^* en

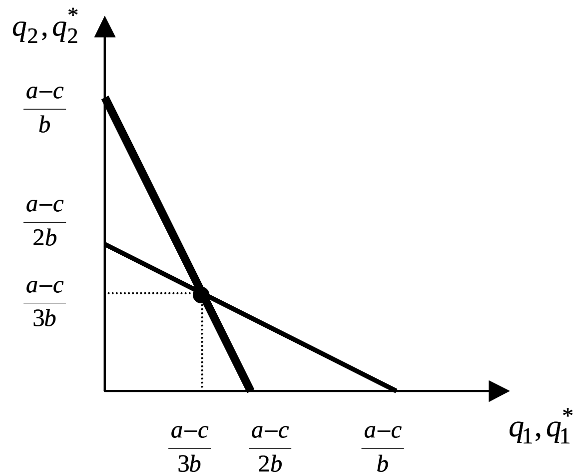


FIGURA 1. Función de mejor respuesta de la empresa 1 (línea gruesa) y 2 (línea delgada) y equilibrio de Nash en duopolio de Cournot

las funciones de mejor respuesta:

$$
\begin{aligned}
q_i^* &= \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i^*\right) \\
&\Rightarrow \quad q_i^* = \frac{a-c}{3b} \\
&\Rightarrow \quad Q = \frac{2}{3}\frac{a-c}{b} && (1.6a) \\
&\Rightarrow \quad P = \frac{a+2c}{3} && (1.6b)
\end{aligned}
$$

En el caso general con n empresas, el análisis es análogo al anterior. El equilibrio de Nash corresponde a la intersección de las funciones de mejor respuesta, esto el, al sistema de n ecuaciones de la forma de (1.4). Sumando sobre los individuos, tenemos que la producción de la industria es:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} q_i &= n\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} q_j \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} q_i = n\frac{a-c}{2b} - \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \\
&\Leftrightarrow Q_n = n\frac{a-c}{2b} - \frac{n-1}{2} Q_n \\
&\Leftrightarrow Q_n = \frac{n}{1+n}\frac{(a-c)}{b} \qquad (1.7a)\\
&\Rightarrow P_n = a - b\frac{n}{1+n}\frac{(a-c)}{b} = \frac{a+cn}{n+1} \qquad (1.7b)
\end{aligned}$$

En equilibrio, cada empresa produce $q_i^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\frac{n}{1+n}\frac{(a-c)}{b} = \frac{1}{n+1}\frac{a-c}{b}$ unidades, las que vende al precio P_n, obteniendo ganancias de:

$$\pi_i = \left(\frac{a+cn}{n+1} - c\right)\frac{1}{n+1}\frac{a-c}{b} = \frac{(a-c)^2}{b\,(n+1)^2} \qquad (1.8)$$

estrictamente positivas. Esto es, pese a ninguna empresa agrega nada especial a la industria –conocimientos, capacidad empresarial, etc.–, todas y cada una de ellas goza de una determinada renta. El precio se mantiene en equilibrio por sobre el costo medio de producción porque en esencia cada oligopolista goza de un pequeño monopolio, al enfrentar una demanda residual. En efecto, si examinamos la función de ganancias, vemos que podemos escribirla como:

$$u_i(q_1, ..., q_n) = \left[\left\{a - b\left(\sum_{j\neq i} q_j\right)\right\} - bq_i - c\right] q_i \qquad (1.9)$$

Esta es la misma función de pagos que tendría un monopolista que enfrentara la curva de demanda $P = \left\{a - b\left(\sum_{j\neq i} q_j\right)\right\} - bq_i$, donde el nivel de producción del resto de los oligopolistas está dado para cada uno.

La estática comparativa del modelo de Cournot es intuitiva: el equilibrio de un mercado oligopólico está a medio camino entre el monopólico y el perfectamente competitivo. La producción es mayor que la del monopolio, pero menor que la que habría bajo competencia perfecta. El precio es menor que el monopólico, pero aún está sobre el costo medio y marginal. El oligopolista obtiene ganancias, pero la suma de las ganancias es menor que la ganancia del monopolista. De hecho, observe que el modelo de Cournot nos entrega el resultado del monopolio cuando $n = 1$, y el de competencia perfecta cuando $n \to \infty$. En efecto:

$$\lim_{n\to 1} P_n = \frac{a+c}{2} \tag{1.10a}$$

$$\lim_{n\to 1} Q_n = \frac{1}{2}\frac{a-c}{b} \tag{1.10b}$$

$$\lim_{n\to 1} \pi_i = \frac{(a-c)^2}{4b} \tag{1.10c}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} P_n = c \tag{1.11a}$$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \frac{a-c}{b} \tag{1.11b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi_i = 0 \tag{1.11c}$$

En este modelo, entonces, el grado de competencia se puede medir directamente por el número de empresas que conforman la industria. Este modelo es de hecho una piedra angular del paradigma estructura-conducta-desempeño, que dominó a la disciplina de Organización Industrial en sus comienzos. En términos simples, este paradigma establece que la **estructura** del mercado (monopólica, oligopólica o competitiva) determina a la **conducta** de las empresas (cantidades producidas, precios cobrados), y éstas el **desempeño** del mercado en términos de eficiencia. Desde esta perspectiva, el análisis de una industria parte por medir su grado de concentración, esto es, cuántas empresas son responsables de la mayor parte de la producción. Indicadores comunes son la participación de mercado de las mayores 3 o 5 empresas, y el índice de Herfindahl, definido por:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

donde α_i es la participación de mercado –medida en puntos porcentuales, esto es, $\alpha_i \in [0, 100]$– del productor i. Por ejemplo, si hay dos productores idénticos, el índice alcanza un valor de $50^2 + 50^2 = 5000$. La máxima concentración, 100, está asociada a un índice de 10.000. En la legislación antimonopolios de EE.UU., por ejemplo, se considera preocupante un índice de concentración superior a 1.000.

2. El modelo de Bertrand

El libro de Augustin Cournot, Investigaciones sobre los Principios Matemáticos de la Teoría de la Riqueza, en que expone su modelo, fue publicado en 1838. No se le dio mayor importancia sino hasta después de que Joseph Bertrand, otro matemático francés, publicara en 1883 una crítica al trabajo de Leon Walras en que incluyó también una crítica al modelo de

Cournot y desarrolló una variante. Una caricatura de la crítica de Bertrand es la siguiente: todas las conclusiones del modelo de Cournot dependen de un supuesto injustificado, a saber, que las empresas escogen la cantidad que quieren vender. Si, en cambio, escogieran el precio de venta, entonces con dos productores sería suficiente para obtener el resultado perfectamente competitivo –lo que está, entre paréntesis, en completa sintonía con nuestra discusión del capítulo 9–.

En efecto, el modelo de Cournot tiene completo sentido sólo en la situación que describimos en su oportunidad, esto es, en que la producción se escoge antes que la venta, no cabiendo en el momento de la venta la posibilidad de reaccionar frente al comportamiento de los competidores. Más aún, habiendo incurrido en el costo de producción, no tiene incentivos a destruir parte de la producción para mejorar el precio, sino por el contrario, a ofrecerla inelásticamente.

Pensemos en una situación distinta. La producción no toma demasiado tiempo, de manera que cada empresa puede, dependiendo de las condiciones de comercialización, adaptar con facilidad su escala productiva. Simplificando, suponemos que el ajuste es de hecho instantáneo. Es perfectamente posible imaginar, en este contexto, un juego en que cada empresa anuncia un precio y ajusta su producción de manera de satisfacer su demanda. En ese caso, la elección del precio se obtiene de:

$$\max_{p_i} u_i(p_1, ..., p_n) \tag{2.1}$$

Por su parte, los consumidores comprarían al vendedor que ofreciera el menor precio. Luego, si la demanda está dada por $P = a - bQ$, entonces la cantidad vendida al precio P es $\frac{1}{b}(a-P)$, quedando:

$$u_i(p_1, ..., p_n) = \begin{cases} (p_i - c)\frac{1}{b}(a - p_i) & \text{si } p_i < \min\{p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_n\} \\ \frac{1}{n^*}(p_i - c)\frac{1}{b}(a - p_i) & p_i = \min\{p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_n\} \\ 0 & \text{si } p_i > \min\{p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_n\} \end{cases} \tag{2.2}$$

donde n^* es el número de oligopolistas vendiendo al precio mínimo. En la figura 2 se ilustra esta función de pagos para la empresa 1 en el caso del duopolio, donde π^M representa la gagancia que obtendría un monopolista cobrando el precio p_1. Observe que esta función de pagos es discontinua en p_i: si el empresario i cobra un precio estrictamente menor que todos sus competidores, se queda con el mercado completo. Si cobra el mismo precio que el más barato de sus competidores, empatándolo, entonces se divide el mercado en partes iguales. En cambio, si cobra un precio superior, no puede vender unidad alguna. Es sencillo entender entonces que cada oligopolista tiene un tremendo incentivo a vender más barato que el resto, porque cobrando un precio marginalmente menor que el de su competencia se queda con todo el mercado. Esto es cierto para cualquier precio que le de ganancias, esto es, para $p_i \geq c$. Este juego tiene, entonces, un único

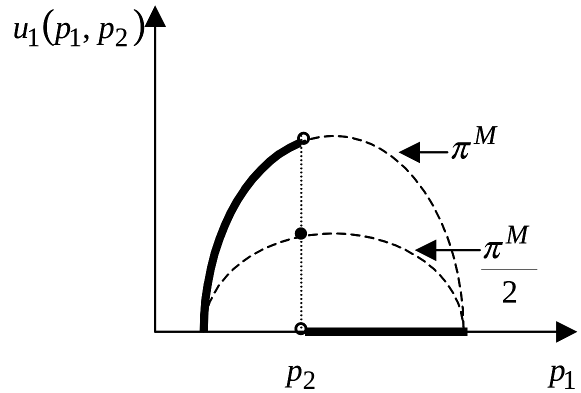


FIGURA 2. Función de pagos para la empresa 1 (línea gruesa) en duopolio de Bertrand.

equilibrio: todos los empresarios cobran c, esto es, el precio de competencia perfecta.

Consideremos nuevamente un duopolio, ahora en el contexto del modelo de Bertrand. Las funciones de mejor respuesta son en este caso de la forma:

$$p_i^* \begin{cases} = \frac{a+c}{2} & \text{si} \quad p_j > \frac{a+c}{2} \\ = p_j - \varepsilon & \text{si} \quad c < p_j \leq \frac{a+c}{2} \\ \in [c, \infty) & \text{si} \quad p_j \leq c \end{cases} \tag{2.3}$$

donde ε es el valor de la moneda de menor denominación (por ejemplo, \$1).

Si el precio que fija el competidor es mayor que el precio monopólico ($\frac{a+c}{2}$), la mejor respuesta es fijar el precio monopólico, quedándose con todo el mercado y obteniendo la mayor ganancia posible, $\frac{(a-c)^2}{4b}$. Si el precio que fija el competidor es mayor que el costo marginal, aunque menor que el precio de monopolio, de todos modos le conviene fijar un precio levemente inferior para quedarse con todo el mercado. Por último, si el competidor cobra un precio inferior o igual al costo marginal, ya no le conviene fijar un precio menor, por lo que está indiferente entre cobrar cualquier precio mayor o igual a c, obteniendo una ganancia nula. Estas curvas de mejor respuesta se muestran en la figura 3. Tal como se observa en la figura, el único equilibrio posible es cuando ambas empresas cobran $p_i^* = c$.

Este modelo es interesante por diversas razones. Una de ellas es que nos enseña claramente que los detalles de la situación —en particular, de las características del proceso productivo— pueden ser determinantes para entender la naturaleza del equilibrio. Esto significa que un razonamiento como el del paradigma estructura-conducta-desempeño no puede tener aplicabilidad universal. En este modelo, por ejemplo, bastan dos productores (esto es,

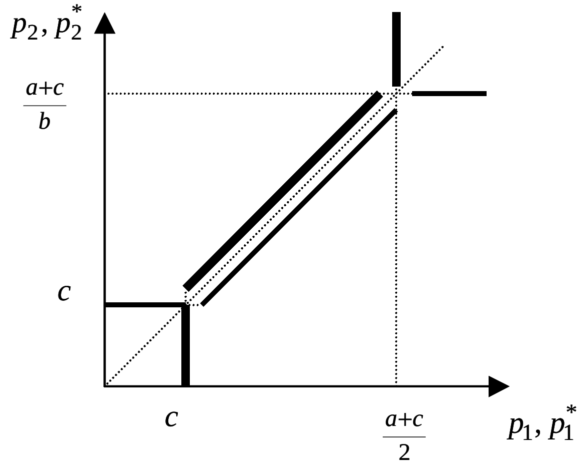


FIGURA 3. Función de mejor respuesta de la empresa 1 (línea gruesa) y 2 (línea delgada) y equilibrio de Nash en duopolio de Bertrand

una estructura duopolística) para conseguir un desempeño eficiente, rompiendo completamente la asociación entre número de productores y grado de competencia que era tan nítida en el modelo de Cournot.

Más aún, si modificamos el escenario anterior para considerar el caso en que hay dos competidores potenciales, pero en que uno de ellos tiene un menor costo, en equilibrio operará una sola empresa, pero acaso muy limitada en su capacidad para ejercer su poder monopólico. Supongamos por ejemplo que la empresa 1 tiene un menor costo, de modo que $c_1 < c_2$. Las funciones de mejor respuesta son las siguientes:

$$p_i^* \begin{cases} = \frac{a+c_i}{2} & \text{si} \quad p_j > \frac{a+c_i}{2} \\ = p_j - \varepsilon & \text{si} \quad c_i < p_j \leq \frac{a+c_i}{2} \\ \in [c_i, \infty) & \text{si} \quad p_j \leq c_i \end{cases} \tag{2.4}$$

Luego, si $c_2 < \frac{a+c_1}{2}$ en equilibrio la empresa 1 cobrará un precio levemente inferior a c_2, quedándose con todo el mercado, como se observa en la figura 4. Aunque en este mercado habrá un solo vendedor, éste no puede explotar su poder monopólico cobrando el precio monopólico[1].

[1]Compare con el ejemplo del monopolista con amenaza de entranda de la sección 1 del capítulo 12 (ecuación 2.1).

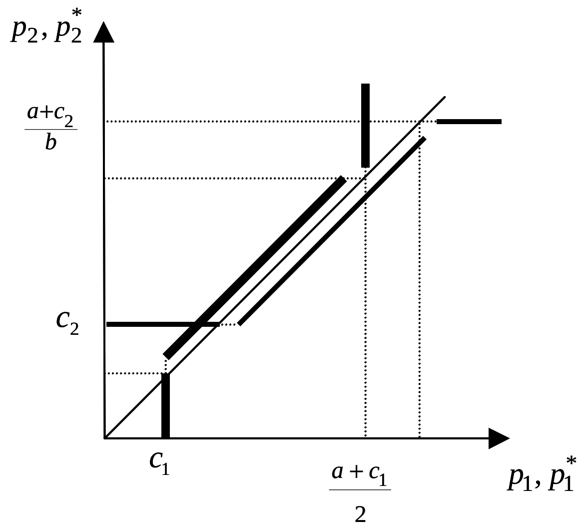


Figura 4. Función de mejor respuesta de la empresa 1 (línea gruesa) y 2 (linea delgada) y equilibrio de Nash en duopolio de Bertrand con costos diferentes

3. El modelo de Stackelberg

Heinrich von Stackelberg sugirió una variante del modelo de Cournot que, quizás sorpresivamente, tiene consecuencias importantes sobre el resultado. Formalmente el juego propuesto por Cournot es estático, esto es, todos los jugadores escogen al mismo tiempo la cantidad a producir. Stackelberg estudió el caso en que uno de los jugadores (al que llamamos líder) mueve primero, es decir, en que el juego es secuencial. Cuando el seguidor mueve, la cantidad del líder es a la vez conocida e inmutable. Sucede que en el equilibrio perfecto en subjuegos el líder goza de mayor participación de mercado y mayores utilidades, pese a que ambos tengan los mismos costos de producción y vendan al mismo precio.

En efecto, en esta situación se pierde la simetría del caso analizado por Cournot. Para fijar ideas, digamos que el jugador 1 es el líder y el 2 el seguidor. Cuando toca el turno de escoger la cantidad al seguidor, lo hace conociendo la cantidad escogida por el líder. El seguidor, entonces, debe naturalmente tomar como dada la situación en la que el líder lo pone, y juega su mejor respuesta a ella. Esto es, el seguidor reacciona de acuerdo a:

$$q_2^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_1 \tag{3.1}$$

Ahora bien, dado que el líder conoce la influencia que su decisión tendrá en el comportamiento de su competidor, al tomar su decisión puede anticipar la respuesta del seguidor. Es decir, el líder no toma la cantidad del jugador 2 como dada, sino como una función de la cantidad que él mismo escoja. Luego, su decisión no es como en el caso de Cournot una mejor respuesta a la cantidad del jugador 2, sino a su función de reacción:

$$\begin{aligned} \max_{q_1} u_1(q_1, q_2) &= [a - b(q_1 + q_2) - c]\, q_1 \\ \text{s/a} \qquad q_2^* &= \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2} q_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esto es:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = \left(a - b \left(q_1 + \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2} q_1 \right) - c \right) q_1 \tag{3.3}$$

De esta función objetivo obtenemos el óptimo:

$$a - b\left(2q_1 + \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2} 2q_1\right) - c = 0$$

$$\Rightarrow \quad q_1^* = \frac{1}{2} \frac{(a-c)}{b} \tag{3.4}$$

Entonces, en equilibrio el jugador 2 produce:

$$q_2^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{(a-c)}{b} = \frac{1}{4}\frac{(a-c)}{b} \tag{3.5}$$

que corresponde a la mitad que el líder. El líder, consecuentemente, gana el doble que el seguidor. La producción agregada y el precio de venta son respectivamente:

$$Q = \frac{1}{2}\frac{(a-c)}{b} + \frac{1}{4}\frac{(a-c)}{b} = \frac{3}{4b}(a-c) \tag{3.6}$$

$$p = a - b\left(\frac{3}{4b}(a-c)\right) = \frac{a+3c}{4} \tag{3.7}$$

Luego, la ganancia del líder y el seguidor corresponden a:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\frac{(a-c)}{b}\left(\frac{a+3c}{4} - c\right) = \frac{1}{8}\frac{(c-a)^2}{b} \\ u_2 &= \frac{1}{4}\frac{(a-c)}{b}\left(\frac{a+3c}{4} - c\right) = \frac{1}{16}\frac{(c-a)^2}{b} \end{aligned} \tag{3.8}$$

La ganancia que obtiene el líder en este caso es mayor que la que obtendría en el duopolio de Cournot, mientras que la ganancia del seguidor es menor. A su vez, la producción total es más alta y el precio es menor, por lo que los consumidores se ven beneficiados.

Para obtener este resultado, es fundamental suponer que en el momento en que el seguidor mueve, la cantidad del líder es conocida e inmutable. Si la producción aún no se ha llevado a cabo, este supuesto puede ser difícil de defender. Esto, debido a que el equilibrio encontrado no es un equilibrio de Nash del juego estático: si el líder pudiera modificar su cantidad al observar la cantidad escogida por el seguidor, querría disminuirla (es decir, la cantidad prometida por el líder en $t = 0$ no es una mejor respuesta a la cantidad escogida en $t = 1$ por el seguidor en el equilibrio de Stackelberg). El problema entonces para el líder es cómo hacer creíble que no va a modificar la cantidad escogida inicialmente. Un ejemplo en que la decisión de producción de hace creíble, es cuando el líder puede invertir en maquinarias con valor de reventa nulo en $t = 0$. En ese caso, en $t = 1$ el costo del capital es un costo hundido, por lo que el costo marginal de producción del líder cae, de modo que la producción escogida en $t = 0$ ahora sí es su mejor respuesta a la cantidad escogida por el seguidor en $t = 1$.

Entonces, en el juego dinámico no es la ubicación temporal de las movidas lo que en realidad importa, sino la información con que cuenta cada jugador, y la flexibilidad que la situación le confiere a cada uno para revisar sus decisiones. La ventaja del líder proviene de la posibilidad de anticiparse a su oponente, escogiendo de facto lo que éste hará (dentro del conjunto de decisiones descrito en su mejor respuesta). Esto es completamente asimétrico: cuando el seguidor escoge, ya la decisión del líder está tomada y es irrevocable ("los dados están echados"). El líder tiene, entonces, una ventaja estratégica crucial.

4. Colusión y carteles

En los modelos de Cournot, Bertrand y von Stackelberg, no se admite la posibilidad de que los empresarios actúen coordinadamente, ya sea por un acuerdo explícito o por algún otro mecanismo. Si fuese posible, por ejemplo, en el caso de un duopolio que los competidores se sentaran a conversar, dos cosas son absolutamente claras: (1) podrían aumentar sus ganancias si actuaran unidos, y (2) si uno de ellos coopera, el otro tendría incentivos a no cumplir su parte del acuerdo. Piénsese, por ejemplo, en un acuerdo para fijar cuotas máximas de producción. Si ambos las cumplen podrían elevar el precio, aumentando sus ganancias si las cuotas se han escogido juiciosamente. Sin embargo, el mayor margen unitario de ganancias es una tentación para vender más. La cooperación entre los duopolistas requeriría para funcionar, entonces, de algún mecanismo de control o monitoreo del cumplimiento de los acuerdos tomados.

La esencia del problema de la colusión es precisamente que se trata de un "dilema del prisionero": si bien ambos ganarían con el acuerdo, tienen incentivos a desviarse. Si ninguno cumple el acuerdo, entonces compiten entre ellos —por ejemplo, como en Cournot o como en Bertrand—. Por otro lado, el mejor acuerdo al que pueden llegar consiste en actuar como monopolio —por definición, en ese caso tendrían las máximas ganancias que son factibles—. En un duopolio simétrico, los productores acordarían cuotas de producción iguales a la mitad del producto del monopolio. En general, en un cartel simétrico cada miembro del cartel produciría un enésimo del producto del monopolio, consiguiendo un enésimo de las ganancias del monopolio cada uno. En el ejemplo de la demanda lineal y costos constantes, eso sería:

$$\pi_i^C = \frac{1}{n}\pi^M = \frac{1}{n}\frac{(a-c)^2}{4b} \tag{4.1}$$

Observe, sin embargo, que si sólo un productor se desvía, ganaría más que manteniéndose en el acuerdo. Por ejemplo, podría cobrar un precio menor y quedarse con todo el mercado, ganando aproximadamente las utilidades del monopolista por una fecha. Alternativamente, si todos reaccionan siempre para vender al mismo precio, podría jugar la mejor respuesta del modelo de Cournot, esto es:

$$q_i^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\frac{1}{2}\frac{a-c}{b}\right)$$

porque los miembros que siguen el acuerdo se atienen a la cuota de $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\frac{a-c}{b}\right)$. Cuál sea la mejor desviación depende, como hemos visto, del detalle de la industria que consideremos. El punto común es, sin embargo, que en cualquier caso conviene burlar el acuerdo si los demás lo respetan.

Por esta razón, la única forma de que el acuerdo colusivo sea viable es que los miembros del cartel tengan herramientas para castigar a los que no lo respeten. Una manera de modelar esta situación es a través de un juego infinitamente repetido. En un juego infinitamente repetido, existe la posibilidad de amenazar a los miembros del cartel con competir duramente si alguien se desvía, por ejemplo a través de una guerra de precios —Bertrand— . Si la amenaza es creída, entonces impone un costo a desviarse: no gozar de los privilegios de la colusión por algún período de tiempo. El peor castigo posible es, por supuesto, no cooperar nunca más.

En el caso de Bertrand esto significa conseguir ganancias de 0 en toda fecha posterior a la desviación. Así, cada miembro del cartel sopesaría la ganancia de corto plazo contra los privilegios perdidos por siempre. Por ejemplo, si δ es el factor de descuento, tendríamos que el acuerdo colusivo es viable si:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\frac{1}{n}\frac{(a-c)^2}{4b} &> \frac{(a-c)^2}{4b} + \sum_{t=1}^{\infty}\delta^t * 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1-\delta} > n \\ &\Leftrightarrow \delta > 1-\frac{1}{n} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Así, el cartel sería viable si sus miembros fuesen suficientemente pacientes. No ceder a la tentación de corto plazo es una inversión para conseguir la colaboración del resto en el futuro. La inversión es valiosa si el empresario no es demasiado cortoplacista. Observe, por otra parte, que a medida que más productores haya, más difícil es que se mantenga el cartel, toda vez que se requiere de un mayor grado de paciencia de parte de cada uno de ellos como para que el castigo de la fase competitiva sea lo suficientemente disuasivo.

Ejercicio 25. *Considere el caso de un cartel con n miembros, pero en que la ganancia en la fase de castigo (si alguno se desvía del acuerdo colusivo) es la del oligopolio de Cournot. ¿Cuál es el nivel crítico de δ a partir del cual el acuerdo se mantiene?, ¿es mayor o menor que el δ crítico para el caso de Bertrand, $\delta^* = 1 - \frac{1}{n}$?, ¿por qué?.*

5. Entrada

En la discusión de los modelos de las secciones previas hemos supuesto implícitamente que la entrada a la industria está bloqueada: bajo cualquier circunstancia hay n y sólo n competidores. Este supuesto es el que permitía en el modelo de Cournot que hubiesen rentas incluso en el largo plazo. Este supuesto es crucial también en el caso del cartel: si los productores actuales tienen éxito en explotar su poder de mercado, subiendo el precio de venta por encima de los costos, entonces es esperable que otros productores sean atraídos a la industria. En un escenario de libertad completa a la entrada, entonces, el cartel podría mantenerse sólo por un tiempo limitado. Más aún, la expectativa de la disolución eventual del cartel limita severamente las posibilidades de castigo a los que se desvían, dificultando todavía más su existencia.

Piénsese, por ejemplo, en un mercado con un único productor, y con una tecnología de rendimientos constantes a escala libremente disponible para cualquiera. ¿Tiene esa empresa algún poder de mercado? Si no existen costos de instalarse (lo que está implícito en la descripción de la tecnología), y no toma demasiado tiempo instalar una nueva planta, entonces la respuesta es negativa: aún siendo el único en el mercado, la amenaza de entrada es suficiente para obligarlo a mantener precios cercanos a los costos medios, puesto que en caso contrario atraería competidores. La empresa única, entonces, no necesariamente tiene poder de mercado. Nuevamente llegamos a la conclusión de que el grado de concentración de la industria no está directamente relacionado con su desempeño, puesto que la competencia potencial es de hecho suficiente en ciertos casos para obtener el resultado de competencia perfecta.

A la inversa, si la entrada está bloqueada, entonces aún cuando haya muchos productores es posible obtener un desempeño ineficiente. Un ejemplo clásico en la literatura es el de los taxis en la ciudad de Nueva York. El municipio otorga un número limitado de permisos transferibles (en la forma de medallones) para operar taxis en la ciudad. Cualquiera que quisiera operar un taxi podría hacerlo: sólo necesita comprar en el mercado secundario un medallón, o esperar una nueva venta primaria de medallones por parte de la municipalidad. ¿Se trata de una industria perfectamente competitiva? No, al menos en términos de su desempeño. Ponerle un costo a la entrada es limitarla parcialmente. De hecho, la municipalidad podría, escogiendo un número apropiado de medallones, replicar el resultado de un monopolio. Entre taxistas existe competencia perfecta; pero eso sólo asegura que la municipalidad no comparta con ellos sus rentas monopólicas. Ejemplos de este estilo abundan en el ejercicio de las profesiones: la prohibición de ejercer para médicos extranjeros, la prohibición de hacer clases en colegios a personas sin título de profesor, etc. Cada colegio profesional intenta –y muchas veces tiene éxito en– limitar la entrada en su industria.

Existen, asimismo, industrias con restricciones a la entrada impuestas por el Estado. El ejemplo de la ciudad de Nueva York es precisamente eso. La banca es otro ejemplo notable, en que en esencia lo que la autoridad económica busca es que las utilidades monopólicas que se consiguen al ejercer el poder de mercado sean un incentivo suficiente para que los banqueros eviten asumir riesgos excesivos, fomentando de esa manera la estabilidad de la industria.

En suma, el grado de concentración, o el número de competidores, pueden dar pistas del desempeño de una industria sólo cuando la entrada de nuevos competidores es, por alguna razón, imposible o difícil. Si la entrada es libre tanto desde la perspectiva legal como tecnológica, entonces el desempeño de la industria debiera ser cercano al competitivo.

Ejemplos distintos de barreras a la entrada, de origen tecnológico, son el de las restricciones de capacidad y el de las inversiones específicas.

Ejercicios

1. (*) Considere una industria compuesta por dos empresas, A y B, que producen un producto homogéneo. La empresa A tiene un costo marginal de producción de 10, y la empresa B tiene un costo marginal de producción de 15. La demanda de mercado por este producto es de la forma

   $$P = 100 - 2Q = 100 - 2\left(q_A + q_B\right)$$

   Encuentre las funciones de mejor respuesta de la empresa A y la B, y el equilibrio de Nash bajo los supuestos de Cournot. Compare sus resultados con los que obtendría si las empresas se comportaran bajo los supuestos de Bertrand (no es necesario encontrar el equilibrio en este último caso, basta plantear cuál es, y explicar cómo y por qué difieren).

2. (**) Dos productores operan en un mercado con demanda total

$$P = 20 - Q$$

Sus costos totales son 0, independientemente del volumen producido. Su variable de decisión es la cantidad a producir, y el precio resultante es el indicado por la función de demanda (supuesto de Cournot).

Suponga que ambos productores acuerdan limitar la producción de manera de aumentar sus ganancias conjuntas al máximo posible, repartiéndose el mercado en partes iguales (es decir, acuerdan producir $\frac{q^M}{2}$ cada uno, donde q^M es la cantidad monopólica).

a) Complete la siguiente matriz de pagos, en el que la estrategia "se desvía" se refiere a producir una cantidad distinta a la acordada (la mejor posible para quien se desvía).

		Duopolista 2	
		Mantiene acuerdo	Se desvía
Duopolista 1	Mantiene acuerdo	____,____	____,____
	Se desvía	____,____	____,____

b) Encuentre el (los) equilibrio(s) de Nash en estrategias puras. Discuta.

3. (**) Imagine dos empresas constructoras (1 y 2) que tienen dos terrenos adyacentes, en los que ambas quieren construir un edificio de iguales características. Ambas saben que enfrentan una demanda por sus departamentos con pendiente negativa: para vender más departamentos, deben cobrar un precio más bajo para atraer a un nuevo comprador. Suponga que esta demanda es de la forma $P = 1000 - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$ es la cantidad total de departamentos.

Ambas empresas son idénticas: el costo marginal (por cada nuevo departamento) es \$100, de modo que el costo total para la empresa i es: $C_i^* = 100q_i$.

Suponga que ambas empresas eligen simultáneamente la cantidad de departamentos a construir, y el precio se determina en la demanda.

a) Encuentre la mejor respuesta de cada una de estas empresas y el equilibrio de Nash resultante.

b) Suponga ahora que la construcción involucrara además un costo fijo F, suficientemente pequeño para que en el equilibrio encontrado en *a*) ambas empresas obtuvieran ganancias (aún después de pagar el costo fijo). Si ambas empresas producen, el costo fijo se duplica, lo que es costoso para la sociedad (sería más conveniente que una sola empresa construyera el doble de departamentos); sin embargo, si se deja a una sola empresa producir, se va a comportar como monopolio, lo que también tiene un costo para la sociedad.

Si usted fuera un ente regulador (gobierno), y debe determinar qué es más conveniente para la sociedad, y según eso decidir si dejar que produzca una sola empresa o ambas, ¿cómo lo haría?. Obtenga una respuesta explícita (en qué caso le conviene dejar a una o a las dos empresas), expresando su respuesta en términos de F.

4. (**) Dos empresas venden productos parecidos pero no idénticos, de manera que sus demandas están dadas por:

$$P_1 = A - q_1 - sq_2 \text{ y } P_2 = A - q_2 - sq_1$$

donde $s \in [0,1]$ es un "coeficiente de similaridad" constante. Por simplicidad, suponga que los costos de producción son 0 para cada empresa.

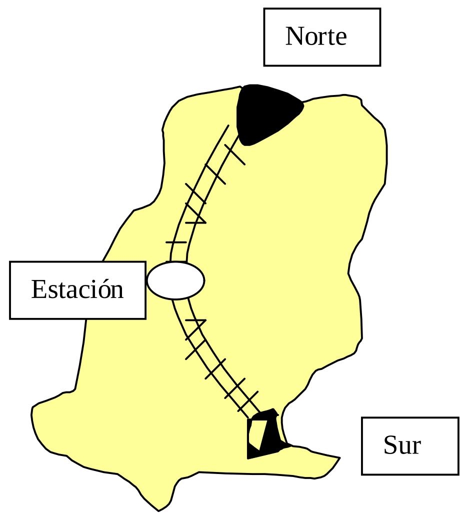
  a) Encuentre las funciones de reacción de cada empresa cuando toman como dada la cantidad producida por su rival. Grafique ambas funciones, primero suponiendo que $s = 0$ y luego que $s = 1$. Explique.

  b) Verifique que el único equilibrio de Cournot-Nash es:

$$q_1 = q_2 = \frac{A}{2+s}$$

  c) Explique intuitivamente el hecho de que el óptimo individual sea producir menos cuando los productos son más parecidos.

5. (**) En una isla hay dos pueblos, Norte y Sur, conectados a través de un tren. Como lo muestra el siguiente dibujo, a medio camino hay una estación.



Sin embargo, la línea está dividida en dos tramos. El tramo 1, que va desde Norte hasta la estación, pertenece al Sr. Norambuena, mientras que el tramo 2, desde la estación hasta Sur, pertenece a la Sra. Sureña. La demanda total por transporte en ambas direcciones está dada por $Q = a - b(P_1 + P_2)$, donde P_1 es el precio cobrado en el tramo 1 y P_2 en el 2. El costo marginal del transporte es 0.

a) Determine el equilibrio del mercado de transporte si el Sr. Norambuena toma como dado el precio cobrado por la Sra. Sureña, y viceversa.

b) Encuentre el equilibrio que se obtendría si ambos tramos fueran de propiedad de un solo dueño.

c) Compare sus respuestas en (a) y (b). ¿Corresponde su resultado a lo que habitualmente se obtiene en la teoría del oligopolio? ¿Por qué?

6. (**) Marco, un navegante genovés, y Polo, un navegante veneciano, planean viajar a la India a traer pimienta negra para abastecer el mercado italiano. Ambos saben de la existencia del otro, pero no observan sus decisiones. La demanda por pimienta negra en Italia está dada por

$$P_I = 600 - \frac{1}{2}Q_I$$

Marco tiene un barco con capacidad para 1.500 unidades, mientras Polo para 1.700. El costo total del viaje para cada uno es de \$9.000, independiente del volumen transportado; ellos consiguen la cantidad que quieran de pimienta al precio total (no unitario) de \$2.800.

a) Encuentre y caracterice las funciones de mejor respuesta, si cada uno toma como dado lo que traerá el otro. Grafique.

b) Encuentre el equilibrio de Cournot. Justifíquelo.

c) Imagine que Marco se asesora con Leonardo, un sabio que anticipa perfectamente lo que Polo hará. Suponga, más aún, que Polo sabe de ésto, y Marco sabe que Polo sabe, etc. ¿Cómo se altera el equilibrio como resultado de esto?

d) Encuentre un equilibrio de Bertrand. Explique.

e) ¿Cuál de estas nociones de equilibrio le parece más razonable en esta situación en particular? Explique claramente.

Imagine que en la situación anterior, Marco y Polo fusionan sus negocios para crear Marcopolo S.A., una sociedad con fines de lucro. La fusión no sólo los consagra como el monopolista en el mercado italiano, sino también en el mercado francés, caracterizado por una demanda

$$P_F = 300 - Q_F$$

El costo de transporte entre cualquier lugar de Italia y cualquier lugar de Francia es \$0 para Marcopolo, pero cualquier otra persona tendría un costo de \$$c$ por unidad

a) Determine lo máximo que Marcopolo podría ganar cobrando el mismo precio en todas partes.

b) Determine lo máximo que Marcopolo podría ganar discriminando precios. Explique claramente.

Apéndice Matemático

Apéndice Matemático

A. Concavidad y convexidad

A.1. Una variable. Decimos que una función real de una variable $f(x)$ es **cóncava** si todas las rectas tangentes a ella pasan por encima suyo; si, en cambio, todas pasan por debajo, decimos que es **convexa**. Por "encima" en realidad queremos decir "no por abajo"; cuando la función comparta sólo el punto de tangencia con su tangente diremos que es **estrictamente cóncava**. Lo mismo ocurre con la convexidad. Así, la recta es el límite entre ambas definiciones: la recta es cóncava y convexa a la vez (ella es su propia tangente, en todos los puntos), pero no estrictamente cóncava ni estrictamente convexa.

Consideremos un punto x^*. Si $f(x)$ es diferenciable en x^*,[2] entonces existe una única recta tangente a ella en x^*, cuya pendiente es $f'(x^*)$. La recta tangente a $f(x\ )$ en x^* tiene la ecuación:

$$T(x|x^*) = n + mx$$

donde:

$$\begin{aligned} m &= f'(x^*) \\ n &= f(x^*) - f'(x^*)\,x^* \end{aligned}$$

Por otro lado, la recta tangente a $f(x)$ en x^* está por encima de $f(x)$ en el punto x si $T(x|x^*) \geq f(x)$. Así, cuando $f(x)$ es diferenciable, decir

[2] $f(x)$ no es diferenciable en x^* cuando los límites de $f(x)$ al acercarce por la izquierda y la derecha de x^* difieren:

$$\lim_{x \to x^*_-} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \neq \lim_{x \to x^*_+} f \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$$

En ese caso, si le llamamos a al menor de esos límites y b al mayor, por definición sabemos que en la vecindad de x^*:

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \in [a, b]$$

El conjunto $[a, b]$ recibe el nombre de **subdiferencial** de f en x^*, y se denota por $\partial f(x^*)$. La función es diferenciable en el punto, por lo tanto, cuando el subdiferencial tiene un único elemento (es decir, es un singleton).

Si la función no es diferenciable, aún podemos decir que es cóncava si sus "tangentes" están por encima de ella, entendiendo por tangente cualquier recta con alguna pendiente $m \in [a, b]$.

que $f(x)$ es cóncava equivale a decir que para todo x^* se cumple que:

$$T(x|x^*) \geq f(x) \qquad \forall x \tag{A.1}$$

Reescribiendo, tenemos:

$$\begin{aligned} f(x^*) - f'(x^*)x^* + f'(x^*)x \geq f(x) \qquad \forall x, x^* \\ \Leftrightarrow f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) \geq f(x) \qquad \forall x, x^* \end{aligned}$$

Ahora bien, del Teorema de Taylor sabemos que toda función real puede ser aproximada mediante polinomios. En particular, de una expansión de Taylor de segundo orden en torno a un punto x^* tenemos:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(x - x^*)^2$$

Luego, f es cóncava si:

$$f(x^*)+f'(x^*)(x - x^*) \geq f(x^*)+f'(x^*)(x - x^*)+\frac{1}{2}f''(x^*)(x - x^*)^2 \qquad \forall x, x^*$$

esto es:

$$f''(x^*) \leq 0 \qquad \forall x^* \tag{A.2}$$

Tenemos entonces la siguiente caracterización de concavidad:

Teorema 5. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable dos veces es cóncava si y sólo si $\forall x^*$:*

$$f''(x^*) \leq 0.$$

La caracterización de la concavidad estricta es más intrincada. De la expansión de Taylor deducimos que si $f''(x^*) < 0$, entonces $f(x) < T(x|x^*)$ para todo $x \neq x^*$ en la vecindad. Sin embargo, esta condición no es necesaria. Por ejemplo, la función $f(x) = -x^4$ es estrictamente cóncava en $x = 0$ pese a que $f''(0) = 0$ (de hecho, sus tres primeras derivadas). Si consideráramos una expansión de cuarto orden, tendríamos:

$$\begin{aligned} f(x) \quad \approx \quad & f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(x - x^*)^2 \\ & +\frac{1}{6}f'''(x^*)(x - x^*)^3 + \frac{1}{24}f''''(x^*)(x - x^*)^4 \end{aligned}$$

Entonces, si $\frac{1}{2}f''(x^*)(x - x^*)^2+\frac{1}{6}f'''(x^*)(x - x^*)^3+\frac{1}{24}f^{(iv)}(x^*)(x - x^*)^4 < 0$, sabríamos que la función es estrictamente cóncava. En el ejemplo, $\frac{1}{2}0(x - 0)^2+\frac{1}{6}0(x - 0)^3 + \frac{1}{24}(-24)(x - 0)^4 = -(x - 0)^4 < 0$. Pero nuevamente se trata de una condición suficiente, por cuanto podemos encontrar ejemplos en que la concavidad estricta la podemos comprobar sólo con la sexta derivada, etc.

Otra caracterización útil surge de observar que si miramos una recta paralela a la tangente pero más baja, vemos que ésta está por debajo de todos los puntos comprendidos entre los que cortan a la recta.

En efecto, tomemos una recta $R(x|x^*) \equiv T(x|x^*) - c$, donde $c > 0$ es una constante. Sean $\bar{x}$ y $\hat{x}$ dos puntos tales que:

$$f(x) = R(x|x^*), \tag{A.3}$$

con $\bar{x} < \hat{x}$. Entonces, para todo $x \in (\bar{x}, \hat{x})$,

$$f(x) > R(x|x^*)$$

Observe que si $x \in [\bar{x}, \hat{x}]$, entonces existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $x = \lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}$. Luego, podemos escribir:

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}) \geq R(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}|x^*) \qquad \forall\lambda \in [0,1] \tag{A.4}$$

Pero:

$$\begin{aligned} R(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}|x^*) &= T(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}|x^*) - c \\ &= f(x^*) + f'(x^*)(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x} - x^*) - c \end{aligned}$$

que puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} R(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}|x^*) &= \lambda\big(f(x^*) + f'(x^*)(\bar{x} - x^*) - c\big) \\ &\quad + (1-\lambda)\big(f(x^*) + f'(x^*)(\hat{x} - x^*) - c\big) \end{aligned}$$

Ahora bien, $\bar{x}$ y $\hat{x}$ satisfacen (A.3), por lo que:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(x^*) + f'(x^*)(\bar{x} - x^*) - c \\ f(\hat{x}) &= f(x^*) + f'(x^*)(\hat{x} - x^*) - c \end{aligned}$$

Luego, la ecuación (A.4) puede escribirse como:

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}) \geq \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\hat{x}) \qquad \forall\lambda \in [0,1]$$

Resumiendo:

Teorema 6. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable una vez es cóncava si y sólo si $\forall\lambda \in [0,1]$ y $\forall\bar{x}, \hat{x}$:*

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}) \geq \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\hat{x}).$$

De hecho, esta caracterización es válida aún cuando f no es diferenciable (y por lo tanto es más general que la anterior). En ese caso, nuestra recta de referencia es cualquiera de la familia de tangentes en x^*, es decir, rectas cuya pendiente esté en el subdiferencial de f en x^*.

A.2. El caso multivariado. Cuando $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, decimos que la función es cóncava si los hiperplanos ("rectas" en n dimensiones) tangentes están por encima de ella. Si $f(x)$ es diferenciable en $\mathbf{x}^*$, el hiperplano tangente en $\mathbf{x}^*$ está dado por:

$$T(\mathbf{x}|\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*}(x_i - x_i^*)$$

A su vez, la expansión de Taylor de segundo orden de la función en torno al punto $\mathbf{x}^*$ está dada por:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*}(x_i - x_i^*) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial^2 x_i^*}(x_i - x_i^*)^2$$

Que en notación matricial queda:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{g}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)'\,\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &= T(\mathbf{x}|\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)'\,\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{g}$ es la **gradiente** de f en el punto $\mathbf{x}^*$ (el vector de primeras derivadas) y $\mathbf{H}$ el **hessiano** de f en $\mathbf{x}^*$ (la matriz de segundas derivadas). La función $f(x)$ está débilmente por debajo de su hiperplano tangente si $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)'\,\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq 0$.

Recordemos que:

DEFINICIÓN 31. *Si* $\mathbf{A}$ *una matriz simétrica de* $n \times n$*, entonces* $\mathbf{A}$ *se dice:*

- ***Definida negativa*** *si el producto* $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ *es negativo para cualquier* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- ***Semi-definida negativa*** *si el producto* $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ *es no positivo para cualquier* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- ***Semi-definida positiva*** *si el producto* $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ *es no negativo para cualquier* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- ***Definida positiva*** *si el producto* $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ *es positivo para cualquier* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- ***Indefinida*** *si no satisface ninguna de las condiciones anteriores.*

De esta forma, la condición de concavidad de f en $\mathbf{x}^*$ está atada a la definición negativa de su hessiano. Las siguientes caracterizaciones son muy útiles:

LEMA 1. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz de* $n \times n$*, sea* M_k *un menor principal de orden* k*, y* D_k *el* $k-$*ésimo menor principal líder*[3] $(k = 1, ..., n)$.

- $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es definida negativa si y sólo si* $(-1)^k D_k > 0$ *para* $k = 1, ..., n$.

---

[3]Un **menor** de orden k de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es el determinante de la matriz generada eliminando $(n-k)$ filas y columnas. Existen entonces $\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ menores de orde k.

El menor es **principal** si las filas y columnas eliminadas son las mismas; hay entonces $\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ menores principales. El menor principal es **líder** si las filas y columnas eliminadas son las últimas $(n-k)$; líder de orden k hay uno solo.

- $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es definida negativa si y sólo si todos sus valores propios son negativos.*
- $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es semi-definida negativa si y sólo si* $(-1)^k M_k \geq 0$ *para todo* M_k, *para* $k = 1, ..., n$.
- $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es semi-definida positiva si y sólo si* $M_k \geq 0$ *para todo* M_k, *para* $k = 1, ..., n$.
- $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es definida positiva si y sólo si* $D_k > 0$ *para* $k = 1, ..., n$.
- $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es definida positiva si y sólo si todos sus valores propios son positivos.*

Tal como en el caso univariado, que H sea negativa definida es una condición suficiente pero no necesaria para la concavidad estricta de f. Por ejemplo, la función $y = \sqrt{x_1 x_2}$ es estrictamente cóncava en $(1,1)$, toda vez que el hiperplano tangente es mayor que la función en cualquier punto $(x_1, x_2) \neq (1,1)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 x_2} &< \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 = \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, su hessiano es:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

con menores principales $D_1 = -\frac{1}{4} < 0$ y $-D_2 = 0$, por lo que no es definido negativo.

De igual forma, podemos caracterizar a f en términos de combinaciones convexas de dos puntos $\bar{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{x}}$:

$$f\left(\lambda \bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\hat{\mathbf{x}}\right) \geq \lambda f\left(\bar{\mathbf{x}}\right) + (1-\lambda) f\left(\hat{\mathbf{x}}\right) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Resumiendo, tenemos que f es **cóncava** en $\mathbf{x}^*$ si el hessiano $\mathbf{H}$ evaluado en $\mathbf{x}^*$ es semi-definido negativo. f es **cóncava** en $S\subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si:

1. f es cóncava en todo $\mathbf{x} \in S$, o equivalentemente,
2. $(\forall\lambda \in [0,1])\,(\forall\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in S)$ $\quad f(\lambda\bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\,\hat{\mathbf{x}}) \geq \lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda)\, f(\hat{\mathbf{x}})$

Una condición suficiente (aunque no necesaria) para que f sea **estrictamente cóncava** en $\mathbf{x}^*$ es que el hessiano $\mathbf{H}$ evaluado en $\mathbf{x}^*$ sea definido negativo. f es **estrictamente cóncava** en $S\subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si:

1. f es estrictamente cóncava en todo $\mathbf{x} \in S$, o equivalentemente,
2. $(\forall\lambda \in (0,1))\,(\forall\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in S)$ $\quad f(\lambda\bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\,\hat{\mathbf{x}}) > \lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda)\, f(\hat{\mathbf{x}})$

f es **convexa** en $\mathbf{x}^*$ si el hessiano $\mathbf{H}$ evaluado en $\mathbf{x}^*$ es semi-definido positivo. f es **convexa** en $S\subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si:

1. f es convexa en todo $\mathbf{x} \in S$, o equivalentemente,
2. $(\forall\lambda \in [0,1])\,(\forall\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in S)$ $\quad f(\lambda\bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\,\hat{\mathbf{x}}) \leq \lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda)\, f(\hat{\mathbf{x}})$

Una condición suficiente (aunque no necesaria) para que f sea **estrictamente convexa** en $\mathbf{x}^*$ es que el hessiano $\mathbf{H}$ evaluado en $\mathbf{x}^*$ sea definido positivo. f es **estrictamente convexa** en $S\subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si:

1. f es estrictamente convexa en todo $\mathbf{x} \in S$, o equivalentemente,
2. $(\forall\lambda \in (0,1))\,(\forall\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in S)$ $\quad f(\lambda\bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\,\hat{\mathbf{x}}) < \lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda)\, f(\hat{\mathbf{x}})$

A.3. Cuasiconcavidad. Veíamos que una característica de las funciones cóncavas es que al combinar dos puntos se "sube", en el sentido que la altura de la función es mayor que la altura promedio de esos puntos. Una noción más suave pide que la función crezca en el sentido que la altura de la mezcla sea mayor que la menor de las alturas de los puntos mezclados:

Definición 32. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es* ***cuasicóncava*** *si* $(\forall\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n)\,(\forall\lambda \in [0,1])$:

$$f(\lambda\bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\,\hat{\mathbf{x}}) \geq \text{mín}\,\{f(\bar{\mathbf{x}}), f(\hat{\mathbf{x}})\}$$

La cuasiconcavidad es ***estricta*** *si la desigualdad anterior es estricta.*

Observe que $\lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda)\, f(\hat{\mathbf{x}}) \geq \text{mín}\,\{f(\bar{\mathbf{x}}), f(\hat{\mathbf{x}})\}$, por lo que una función cóncava debe ser cuasicóncava.

Un resultado interesante es que cualquier transformación monótona creciente aplicada sobre una función cóncava resulta en una función cuasicóncava. Así, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y f es cóncava, entonces $h \equiv g \circ f$ es cuasicóncava (estricta si f es estrictamente cóncava). En efecto,

$$\begin{aligned} h(\lambda\bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\,\hat{\mathbf{x}}) &= g(f(\lambda\bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\,\hat{\mathbf{x}})) \\ &\geq g(\lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda)\, f(\hat{\mathbf{x}})) \end{aligned}$$

por concavidad de f. Suponga que $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\hat{\mathbf{x}})$, de modo que $\text{mín}\{f(\bar{\mathbf{x}}), f(\hat{\mathbf{x}})\} = f(\bar{\mathbf{x}})$. Asimismo, $\text{mín}\{h(\bar{\mathbf{x}}), h(\hat{\mathbf{x}})\} = h(\bar{\mathbf{x}})$ porque g es creciente. Entonces, $\lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda) f(\hat{\mathbf{x}}) \geq f(\bar{\mathbf{x}})$. Pero siendo g creciente, lo anterior implica que $g(\lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda) f(\hat{\mathbf{x}})) \geq g(f(\bar{\mathbf{x}})) = h(\bar{\mathbf{x}})$, por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} h(\lambda \bar{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\hat{\mathbf{x}}) &\geq g(\lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda) f(\hat{\mathbf{x}})) \\ &\geq g(f(\bar{\mathbf{x}})) = h(\bar{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Una función convexa, entonces, puede ser cuasicóncava. De hecho, son cuasicóncavas todas las funciones de una variable que son monótonas. En el caso de dos variables, son cuasicóncavas las funciones que tienen el mismo mapa de curvas de nivel que alguna cóncava.

B. Optimización

El problema general de optimización se refiere a la búsqueda de los valores más altos o más bajos que una función f alcanza en un determinado conjunto.

Es útil recordar que una función real $f : X \to Y$ es una relación que asocia a un valor $x \in X$ un único número real $y \in \mathbb{R}$. Se escribe $y = f(x)$. X es el dominio de la función e $Y \subset \mathbb{R}$ su recorrido.

El máximo[4] de una función es el elemento $f(x^*) \in \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

$$f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in X, \text{ con } x \neq x^*$$

En este caso, $x^* \in \mathbb{R}$ es el argumento de la maximización de f, denotado $x^* = \arg\text{máx} f(x)$.

El mínimo de una función, por su parte, es el elemento $f(x^\star) \in \mathbb{R}$ que satisface:

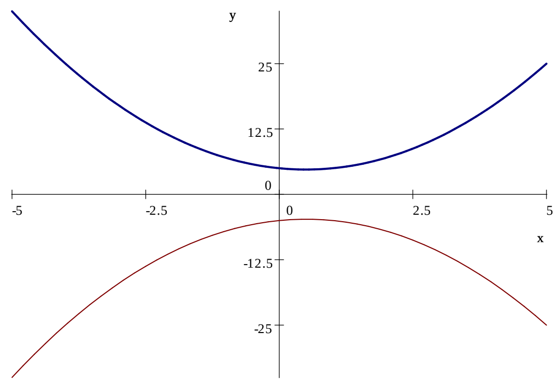
$$f(x^*) < f(x) \quad \forall x \in X, \text{ con } x \neq x^*$$

En este caso, $x^* \in \mathbb{R}$ es el argumento de la minimización de f, denotado $x^* = \arg\text{mín} f(x)$.

Es importante distinguir entre la función y su argumento. En un problema de optimización, la función recibe el nombre de objetivo.

Observe que $-f(x)$ es el "reflejo" de $f(x)$, donde la línea del agua está en el 0. Por ejemplo, a continuación se ilustran el gráfico de $f(x) = x^2 - x + 5$ (en azul) y su "reflejo" $-x^2 + x - 5$

[4]En general, es posible que exista más de un máximo o mínimo, por lo que correspondería hablar de "un" y no "el", y la condición se satisfaría con desigualdad débil y no estricta. Sin embargo, para efectos de esta exposición relajaremos el supuesto de unicidad sólo al final del capítulo.



Así, es inmediato verificar que si $x^* = \arg\min f(x)$, entonces $x^* = \arg\max \{-f(x)\}$. En virtud de ello, es posible concentrarse exclusivamente en la maximización.

En lo que sigue, supondremos que f es una función diferenciable.

B.1. Maximización sin restricciones. Empezamos analizando un problema del tipo:

$$\max_{x \in X} f(x)$$

Como mencionamos anteriormente, si $f(x^*)$ es el máximo, no puede haber otro $f(x)$ de mayor valor en ninguna parte. En particular, localmente, es decir, en la vecindad de x^*. Esto permite usar la derivada de la función para facilitar la búsqueda de máximos. El método de búsqueda de un máximo utilizando el cálculo explota esta observación de la siguiente forma: si x^* es un máximo, entonces cualquier movimiento infinitesimal en cualquier dirección debiera traer como consecuencia un menor valor de y.

En el caso más sencillo de una función de una variable, sabemos que y aumenta o disminuye en respuesta a una alteración marginal en x de acuerdo a:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx = f'(x) dx$$

Luego, resulta inmediato que un máximo debe satisfacer:

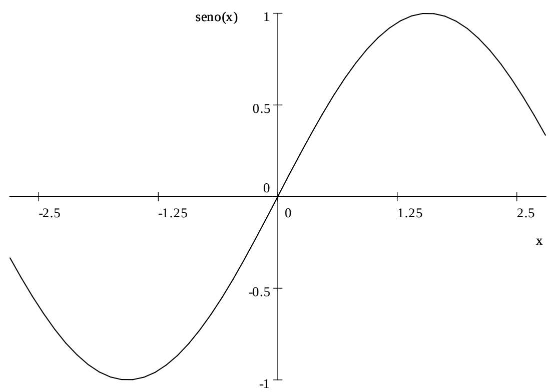
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = 0 \tag{B.1}$$

Si esto no fuese así, siempre podríamos encontrar al menos una dirección en la cual conseguiríamos aumentar y. En efecto,

$$dy > 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} dx > 0$$

de manera que si $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, con un movimiento a la derecha de x^* $(dx > 0)$ se consigue una mejora en el objetivo, y si $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$, basta con moverse infinitesimalmente a la izquierda de x^* $(dx < 0)$ para mejorar.

Pero por supuesto esto no es suficiente, porque la misma condición puede ser usada para evitar una caída de y $(dy < 0)$. Por ejemplo, la función $y = sen(x)$ tiene una primera derivada igual a 0 en $\frac{\pi}{2}$ y en $-\frac{\pi}{2}$, y obviamente -1 no es el máximo, como se aprecia en el gráfico:



Lo que falta es verificar que al moverse en cualquier dirección, el valor de y caiga. Aquí aparece la segunda observación crucial: la variación de y debe ocurrir a tasas decrecientes, es decir:

$$d^2y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 = f''(x)\,(dx)^2 < 0 \tag{B.2}$$

¿Por qué? Observe el gráfico de izquierda a derecha $(dx > 0)$ en el tramo en cuestión (para x alrededor de $-\frac{\pi}{2}$). Las diferenciales son negativas y decrecientes, luego positivas y crecientes. Esto tiene que ser así alrededor de un mínimo: a su izquierda deben haber valores mayores, luego la diferencial en cualquiera de esos puntos debe ser negativa; y a tasas decrecientes para hacer una transición "suave" hacia la diferencial positiva (de lo contrario, la función no sería diferenciable en el punto. Esta salvedad debiera dejar claro que este método no es útil en toda circunstancia). Es decir, alrededor de un mínimo la diferencial debe ir creciendo; en otras palabras, la segunda diferencial debe ser positiva. Simétricamente, al aproximarse a un máximo se tienen diferenciales positivas y decrecientes y luego negativas y crecientes: alrededor de un máximo la diferencial debe ir cayendo; en otras palabras, la segunda diferencial debe ser negativa. Así, podemos distinguier un mínimo de un máximo por el signo de la segunda diferencial en el punto.

Entonces, (1.1) es la condición de primer orden y (1.2) de segundo orden. La condición de primer orden es necesaria, pero no suficiente (recuerde que un mínimo también la satisface) para obtener un **máximo local interior**. Es suficiente para un máximo local interior que ambas se satisfagan simultáneamente.

Enfatizamos la palabra local porque la búsqueda se restringió a la vecindad del punto. Es posible que otros puntos satisfagan ambas condiciones; el máximo global en ese caso se obtiene por comparación directa de los valores de $f(x)$ entre los candidatos.

Enfatizamos también la palabra interior, porque es posible que el máximo en un dominio acotado ocurra en los extremos. Por ejemplo, el máximo de $3x^2+1$ en el intervalo $[0,1]$ ocurre en el punto $x=1$. En este punto no se cumplen ni la condición de primer orden ni la de segundo y sin embargo es un máximo, de lo que se desprende que estas condiciones no pueden considerarse necesarias ni suficientes en cualquier caso.

Con más de una variable, la intuición se mantiene. La única diferencia es que no basta con chequear una dimensión, sino que se hace necesario verificar movimientos en toda dirección posible. Así,

$$\begin{aligned}
y &= f(x_1,x_2,...,x_n) \\
dy &= \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{x_n}dx_n=0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i = 0 && \text{(B.3)} \\
d^2y &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(dx_1\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+...+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}dx_1dx_n \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial x_2\partial x_1}dx_2dx_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(dx_2\right)^2+...+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}dx_2dx_n+... \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial x_n\partial x_1}dx_ndx_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}dx_ndx_2+...+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\left(dx_n\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}dx_idx_j < 0 && \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

Como antes, un punto $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ (x en negrita denota un vector, y sin negrita un escalar) es un máximo de $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2,...,x_n)$ si desviaciones infinitesimales no cambian el valor del objetivo: $dy=0$. En la ecuación (1.3) vemos que esto se cumple al moverse en cualquier dirección si todas las primeras derivadas parciales de la función son 0, es decir, la condición de primer orden es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{x_n} &= 0 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Por su parte, la condición de segundo orden es ligeramente más compleja de verificar. Consideremos primero lo que ocurre al mover una variable a la vez. Como las direcciones aparecen en forma cuadrática (dx^2), es claro que la única forma de cumplir la condición es que las segundas derivadas propias sean negativas ($f_{ii} < 0$), como antes. Pero al considerar movimientos de dos o más variables a la vez, nos empezamos a encontrar con nuevas condiciones. Así, por ejemplo, en el caso de dos variables,

$$d^2y = f_{11}\left(dx_1\right)^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}\left(dx_2\right)^2 < 0$$

Esto debe cumplirse para cualquier dirección que escojamos, por ejemplo las siguientes:

$$\begin{aligned} dx_1 &= 0 \Rightarrow d^2y = f_{22}\left(dx_2\right)^2 < 0 \Rightarrow f_{22} < 0 \\ dx_2 &= 0 \Rightarrow d^2y = f_{11}\left(dx_1\right)^2 < 0 \Rightarrow f_{11} < 0 \\ dx_1 &= \sqrt{-f_{22}}, dx_2 = \sqrt{-f_{11}} \Rightarrow d^2y = -f_{11}f_{22} + 2f_{12}\sqrt{f_{11}f_{22}} - f_{22}f_{11} < 0 \\ &\Rightarrow f_{12} < \sqrt{f_{11}f_{22}} \end{aligned}$$

La forma arbitraria en que escogimos esta última dirección puede hacer dudar de si no hay más implicancias del requisito $d^2y < 0$; la verdad es que no. En efecto, consideremos primero las direcciones en que $dx_1dx_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_{12} &< \sqrt{f_{11}f_{22}} \Rightarrow \\ f_{11}\left(dx_1\right)^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}\left(dx_2\right)^2 &< f_{11}\left(dx_1\right)^2 + 2\sqrt{f_{11}f_{22}}dx_1dx_2 + f_{22}\left(dx_2\right)^2 \\ &= -\left(\sqrt{-f_{11}}dx_1 - \sqrt{-f_{22}}dx_2\right)^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, si $dx_1dx_2 < 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} f_{12} &< \sqrt{f_{11}f_{22}} \Rightarrow \\ f_{11}\left(dx_1\right)^2 - 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}\left(dx_2\right)^2 &< f_{11}\left(dx_1\right)^2 - 2\sqrt{f_{11}f_{22}}dx_1dx_2 + f_{22}\left(dx_2\right)^2 \\ &= -\left(\sqrt{-f_{11}}dx_1 + \sqrt{-f_{22}}dx_2\right)^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Una manera compacta de escribir la condición anterior es que la matriz de segundas derivadas (también conocida como el Hessiano de f) sea negativa definida:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad \text{neg. def.}$$

Recuerde que una matriz H es negativa definida si los determinantes de los menores alternan signo, empezando en negativo. Recuerde también que los menores son las matrices que se forman eliminando filas y columnas de la matriz principal. Partiendo del extremo superior izquierdo, el primer menor es la primera entrada. El segundo menor se forma agregando al primero la fila y la columna contiguas. El tercero de la misma forma, a partir del segundo, y así sucesivamente.

Por ejemplo, en el caso de dos variables, H negativa definida se traduce en:

$$\begin{aligned} |H_1| &= |f_{11}| < 0 \Leftrightarrow f_{11} < 0 \\ |H_2| &= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 > 0 \end{aligned}$$

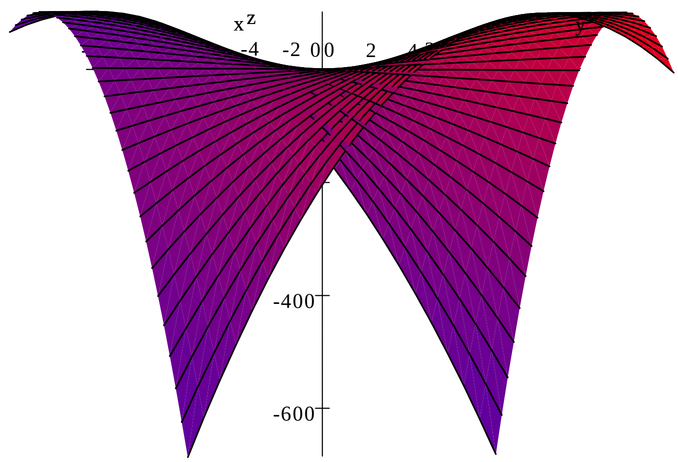
Observe que la condición $f_{22} < 0$ también se deduce de la condición anterior:

$$\begin{aligned} f_{11}f_{22} &> (f_{12})^2 \quad \wedge \quad f_{11} < 0 \\ &\Rightarrow \quad f_{22} < \frac{(f_{12})^2}{f_{11}} < 0 \end{aligned}$$

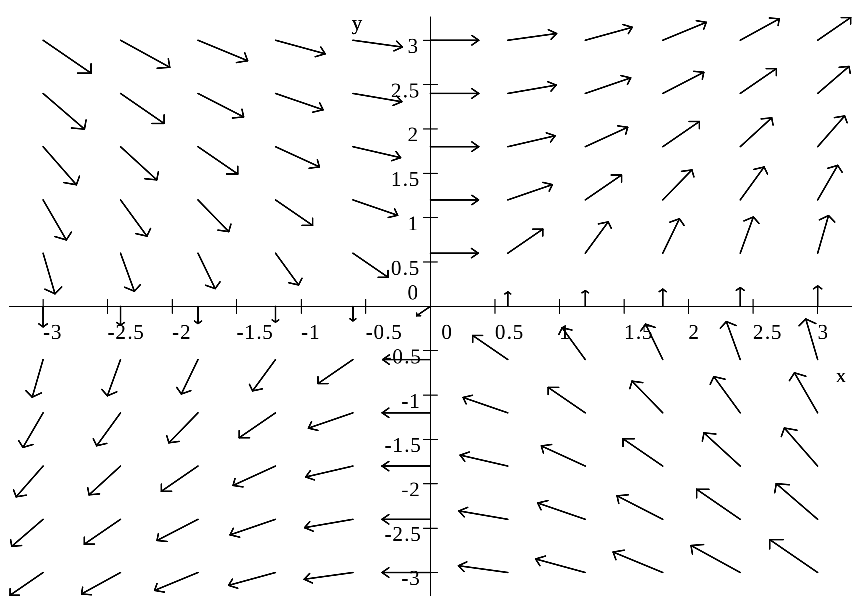
De manera que la expresión "H negativa definida" es una forma compacta de decir "$f_{11}, f_{22} < 0$ y $f_{12} < \sqrt{f_{11}f_{22}}$" en el caso de dos variables. En el caso general en que hay n variables, la condición de segundo orden es "H negativa definida", expresión que sintetiza una serie de requisitos sobre las derivadas cruzadas de f. Observe que $dy = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$ y $d^2y = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$. Como el problema de optimización se trata de "jugar" con los movimientos $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$ de modo de obtener una condición sobre y, es natural que la solución se exprese en términos de la gradiente $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ y el Hessiano $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$. En general, escribimos $dy = G'd\mathbf{x}$ y $d^2y = d\mathbf{x}'Hd\mathbf{x}$.

Resumen 1. *Para un máximo interior local, las condiciones necesarias y suficientes son:*
(1) Gradiente igual a 0
(2) Hessiano negativo definido.

EJEMPLO 11. *La función* $20x_1x_2 - x_1^2x_2^2$ *satisface la condición de primer orden en* $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ *y en* $\left\{x_1 = \frac{10}{x_2}, x_2 = x_2\right\}$. *El gráfico de la primera figura corresponde a* f *en sus tres dimensiones. El de la segunda figura corresponde a la gradiente de* f.



Función $f = 20x_1x_2 - x_1^2x_2^2$ *en tres dimensiones*



Gradiente de f

B.2. Maximización con restricciones. La maximización con restricciones se refiere al mismo problema anterior, con la salvedad de que la búsqueda se restringe a un subconjunto propio del dominio original de la función. Para facilitar la exposición, normalmente se distinguen dos clases de restricciones: de igualdad y de desigualdad. La restricción de desigualdad es la más general, y corresponde a acotar arbitrariamente el dominio de la función objetivo. La de igualdad es aquella en la que el conjunto de puntos en los que se permite buscar pueden expresarse por medio de una función del tipo $g(x_1, x_2, ..., x_n) = b$. Siguiendo la práctica común, comenzaremos por esta última.

B.2.1. Restricciones de igualdad. Para abordar este problema hay en general dos estrategias posibles; la elección se hace sencillamente por conveniencia.

La primera estrategia reduce la dimensión del problema. En efecto, el problema inicial

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ sujeto a} \\ b &= g(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \tag{B.6}$$

se transforma obteniendo de $b = g(x_1, x_2, ..., x_n)$ una expresión para alguna variable, digamos $x_2 = h(x_1, x_3, ..., x_n; b)$, y reemplazándola en la función objetivo para obtener:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, h(x_1, x_3, ..., x_n), ..., x_n) \tag{B.7}$$

El nuevo problema se trata como lo explica la sección anterior. Este método es sencillo, pero a veces puede resultar impracticable por la imposibilidad de despejar una variable de la restricción, o simplemente engorroso. En ocasiones, el segundo método es preferido porque entrega información adicional sobre las características del óptimo que es útil en determinadas aplicaciones.

La segunda estrategia, conocida como el **método de Lagrange**, de hecho aumenta la dimensión del problema al transformarlo en:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda\,[b - g(x_1, x_2, ..., x_n)] \tag{B.8}$$

donde el escalar λ es considerado como una variable más al obtener las condiciones de primer orden –pero no es una variable más, como veremos más adelante. Observe lo siguiente:

1. Si la restricción es de hecho satisfecha, la nueva función $\mathcal{L} = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda\,[b - g(x_1, x_2, ..., x_n)]$ alcanza el mismo máximo que el objetivo inicial.
2. Al considerar a λ como una variable de elección, la condición de primer orden va a exigir la satisfacción de la restricción: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} =$

$b - g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. De esta manera se fuerza que cualquier solución de la maximización de la nueva función (conocida como "el lagrangeano") pertenezca al conjunto de puntos admisible.

La condición de primer orden es la misma (y por las mismas razones) que en la sección anterior, vale decir, la gradiente de $\mathcal{L}$ debe ser cero pues de lo contrario podríamos encontrar formas de aumentar f. En el caso de dos variables, las CPO son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= f_1 - \lambda g_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= f_2 - \lambda g_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= b - g(x_1, x_2) = 0
\end{aligned}$$

de las dos primeras, obtenemos:

$$\lambda = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$$

La condición de segundo orden, en cambio, es diferente. La razón es que al restringir la búsqueda a los puntos que satisfagan $g(x_1, x_2, ..., x_n) = b$, de hecho nos ahorramos las restricciones asociadas a las direcciones que actualmente son inadmisibles.

Consideremos primero el caso de dos variables. Al añadir la restricción $g(x_1, x_2) = b$, reducimos la dimensión del problema en uno. Utilizando el primer método propuesto para resolver este problema de optimización, tendríamos que despejar de la restricción x_2 en función de x_1 (y del parámetro b, que omitiremos en la notación). Llamemos a la función implícita resultante h, de modo que despejando obtenemos la función $x_2 = h(x_1)$. Decíamos que podemos resolver el problema reemplazando $x_2 = h(x_1)$ en la función objetivo original, de modo que obtenemos $f(x_1, x_2) = f(x_1, h(x_1)) = F(x_1)$. Claramente, si queremos maximizar $F(x_1)$, obtenemos las siguientes condiciones de primer y segundo orden:

$$\begin{aligned}
CPO &: \frac{\partial F}{\partial x_1} = F_1 = 0 \\
CSO &: \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = F_{11} < 0
\end{aligned}$$

Pero recordando que $F(x_1) = f(x_1, h(x_1))$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= F_1 = f_1(x_1, h(x_1)) + f_2(x_1, h(x_1))\, h_1(x_1) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= F_{11} \\
&= f_{11} + f_{12}h_1 + f_{21}h_1 + f_{22}(h_1)^2 + f_2 h_{11} \\
&= f_{11} + 2f_{12}h_1 + f_{22}(h_1)^2 + f_2 h_{11}
\end{aligned}$$

Además, sabemos que $x_2 = h(x_1)$ cumple con la restricción $g(x_1, x_2) = b$, por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
g_1 dx_1 + g_2 dx_2 &= 0 \\
&\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} = h_1 = -\frac{g_1}{g_2}
\end{aligned}$$

Por último, dado que

$$h_1 = -\frac{g_1(x_1, x_2)}{g_2(x_1, x_2)} = -\frac{g_1(x_1, h(x_1))}{g_2(x_1, h(x_1))}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
h_{11} &= -\left[\frac{g_2(g_{11} + g_{12}h_1) - g_1(g_{21} + g_{22}h_1)}{(g_2)^2}\right] \\
&= -\left[\frac{g_2\left(g_{11} + g_{12}\left(-\frac{g_1}{g_2}\right)\right) - g_1\left(g_{21} + g_{22}\left(-\frac{g_1}{g_2}\right)\right)}{(g_2)^2}\right] \\
&= -\frac{1}{(g_2)^2}\left[g_2 g_{11} - g_{12}g_1 - g_1 g_{21} + \frac{g_{22}(g_1)^2}{g_2}\right] \\
&= -\frac{1}{(g_2)^2}\left[g_2 g_{11} - 2g_1 g_{12} + \frac{g_{22}(g_1)^2}{g_2}\right]
\end{aligned}$$

Entonces, la condición de segundo orden es:

$$
\begin{aligned}
F_{11} &= f_{11} + 2f_{12}h_1 + f_{22}\left(h_1\right)^2 + f_2 h_{11} \\
&= f_{11} + 2f_{12}\left(-\frac{g_1}{g_2}\right) + f_{22}\left(-\frac{g_1}{g_2}\right)^2 \\
&\quad -\frac{f_2}{\left(g_2\right)^2}\left[g_2 g_{11} - 2g_1 g_{12} + \frac{g_{22}\left(g_1\right)^2}{g_2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(g_2\right)^2}\left[f_{11}\left(g_2\right)^2 - 2g_1 g_2 f_{12} + f_{22}\left(g_1\right)^2 - f_2 g_2 g_{11} + 2f_2 g_1 g_{12} - \frac{f_2 g_{22}\left(g_1\right)^2}{g_2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(g_2\right)^2}\left[f_{11}\left(g_2\right)^2 - 2g_1 g_2 f_{12} + f_{22}\left(g_1\right)^2 - \lambda g_{11}\left(g_2\right)^2 + 2\lambda g_{12} g_1 g_2 - \lambda g_{22}\left(g_1\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\left(g_2\right)^2}\left[\left(g_2\right)^2\left(f_{11} - \lambda g_{11}\right) - 2g_1 g_2\left(f_{12} - \lambda g_{12}\right) + \left(g_1\right)^2\left(f_{22} - \lambda g_{22}\right)\right] < 0
\end{aligned}
$$

lo que corresponde a pedir exclusivamente $\left|\overline{H}\right| > 0$, donde

$$
\overline{H} \equiv \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} - \lambda g_{11} & f_{12} - \lambda g_{12} \\ g_2 & f_{12} - \lambda g_{12} & f_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix}
$$

es el hessiano orlado (o con bordes) de $\mathcal{L}$, puesto que se construye agregándole un "borde" al hessiano de f.

Así, en el caso de dos variables hay una sola condición de segundo orden puesto que la búsqueda se reduce a una línea, tal como en el caso de optimización sin restricciones en una variable.

Ahora bien, con más de dos variables (o en general, si m es el número de restricciones, con $n - m \geq 2$), el problema obviamente se complica porque ya no se busca en una línea sino en conjuntos más complicados y surgen restricciones adicionales. En general, entonces, tenemos:

Resumen 2. *Resumen de Optimización con Restricciones de Igualdad El problema*

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_1,\ldots,x_n} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \quad \textit{sujeto a} \\
b_1 &= g_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\
&\vdots \\
b_m &= g_m\left(x_1, \ldots, x_n\right)
\end{aligned}
$$

con el lagrangeano asociado

$$
\mathcal{L} = f\left(x_1, \ldots, x_n\right) + \sum_{j=1}^{m}\left[b_j - g_j\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right]
$$

tiene como solución:

(1) (CPO) gradiente de $\mathcal{L}$ igual a 0.

(2) (CSO) La secuencia de los determinantes de los últimos $(n-m)$ menores principales del Hessiano orlado alternan signo, empezando con el signo de $(-1)^{m+1}$.[5]

El Hessiano orlado, para el caso de n variables y m restricciones, corresponde a:

$$\begin{aligned}\overline{H} &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g^m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0)_{m\times m} & \left(\dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)_{m\times n} \\ \left(\dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}'\right)_{n\times m} & \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_{ii'}^2}\right)_{n\times n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ejemplo 12. *Considere el caso en que $n = 3$ y $m = 1$. Entonces, el Hessiano Orlado (en notación más compacta) es:*

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ g_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ g_3 & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{pmatrix}$$

y los menores principales (empezando por el primero) son:

$$\begin{aligned}\overline{H}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} \end{pmatrix}, \quad \overline{H}_3 = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}, \\ \overline{H}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ g_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ g_3 & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En este caso, entonces, la CSO exige que la secuencia de los determinantes de los últimos 2 menores principales del Hessiano orlado alternen signo, empezando con signo positivo. Esto es, $\left|\overline{H}_3\right| > 0$ y $\left|\overline{H}_4\right| < 0$.

[5] Es decir, si hay una restricción, el primer determinante es positivo; si hay dos, el primero es negativo, y así sucesivamente.

Es importante notar que el multiplicador de Lagrange tiene la interpretación del aporte de una unidad del recurso restringido al objetivo. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}(\mathbf{x}^*)}{db} &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial b} + \lambda - \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial b} \right] \\
&= \lambda + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^*}{\partial b} \left[\left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}^*} - \lambda \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}^*} \right] \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

donde el último paso surge de observar que en $\mathbf{x}^*$ la condición de primer orden se satisface. De manera que el valor del multiplicador nos entrega información sobre qué tan valioso es el recurso limitante.

Cabe resaltar que el método de Lagrange no transforma un problema de optimización de n variables en otro problema normal de optimización de $n+m$ variables. En efecto, λ **no es** una variable regular en la optimización. Observe que si lo fuera, se podría hacer crecer ilimitadamente el valor de $\mathcal{L}$ simplemente escogiendo valores de $\mathbf{x}$ que dieran $[b - g(x_1, ..., x_n)] > 0$ para luego hacer $\lambda \to \infty$. Es decir, si λ fuese una variable de decisión, el problema no tendría solución. El lagrangeano es simplemente una manera conveniente de recopilar la información.

B.2.2. Restricciones de desigualdad. Finalmente, analizamos el problema de la forma:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ sujeto a} \\
b^1 &\geq g^1(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\vdots \\
b^m &\geq g^m(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}
$$

en que el conjunto de restricciones nuevamente reduce el dominio de la función, pero no limitadas a funciones sino que ahora permitiendo la delimitación de áreas (o volúmenes, o lo que corresponda de acuerdo a la dimensión del problema).

Consideremos primero el caso de una restricción. En general, dos cosas pueden suceder: o la restricción se cumple con igualdad, o lo hace con desigualdad estricta. Si el óptimo irrestricto se encuentra dentro del área encerrada por la restricción, entonces decimos que la restricción se satisface “con holgura”, y el hecho de que exista no altera en absoluto el problema. Ahora bien, si el óptimo irrestricto se encuentra fuera de lo permitido por las restricciones, entonces lo natural es que la restricción se satisfaga con igualdad.

Lo anterior está estrechamente relacionado con el valor del multiplicador de Lagrange: si la restricción se satisface con holgura, entonces un pequeño aumento en la restricción no afecta en absoluto el máximo valor alcanzable (pues de hecho "ya sobraba"), de manera que el multiplicador es 0. Si no se satisface con holgura, ese hecho debiera reflejarse en el valor de λ.

Esta idea se puede expresar complementando el método de Lagrange. El problema:

$$\mathcal{L} = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \left[b^j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n)\right]$$

tiene como condición de primer orden lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= f_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_i^j = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} &= b^j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \quad \text{con holgura complementaria } \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \end{aligned}$$

La condición de holgura complementaria resume lo señalado anteriormente: o $\lambda_j = 0$, es decir, la restricción no es operativa, en cuyo caso es perfectamente posible que $b^j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$, o bien $\lambda_j > 0$, vale decir, la restricción afecta el máximo valor alcanzable del objetivo y, por tanto, debe satisfacerse con igualdad. Observe que si todas las restricciones se satisfacen con holgura, obtenemos la misma condición de gradiente nula que en un problema de optimización sin restricciones.

Este conjunto de condiciones se conoce como **condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**.

Respecto de las condiciones de segundo orden, baste decir que dependen de si las restricciones se satisfacen con o sin holgura y, por tanto, se prosigue como se describe en las secciones anteriores.

Ocurre que en general las condiciones de KKT no son ni necesarias ni suficientes para la obtención de un máximo. Sin embargo, las excepciones son tremendamente inusuales y pueden ser identificadas por no satisfacer la siguiente condición:

$$dg(x^*) \leq 0$$

De manera que si esto se cumple, las condiciones son necesarias. Si además la función objetivo es cóncava y el conjunto de posibilidades es convexo, entonces son también suficientes.

Una restricción que es muy frecuente en aplicaciones en economía es la de no negatividad de las variables de elección:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ sujeto a} \\ 0 \quad \leq \quad & x_1, x_2, ..., x_n \end{aligned}$$

Éste es un caso particular del anterior, pero su forma simple permite una solución que prescinde de los multiplicadores, usando la siguiente condición de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0 \quad \text{con holgura complementaria } x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

Si ambas clases de restricciones se dan simultáneamente, tenemos que el problema:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ sujeto a} \\ b^1 \quad \geq \quad & g^1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ & \vdots \\ b^m \quad \geq \quad & g^m(x_1, x_2, ..., x_n) \\ 0 \quad \leq \quad & x_1, x_2, ..., x_n \end{aligned}$$

tiene asociado el lagrangeano:

$$\mathcal{L} = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \left[b^j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \right]$$

que tiene como condición de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= f_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_i^j \leq 0 \quad \text{con holgura complementaria } x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} &= b^j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \quad \text{con holgura complementaria } \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \end{aligned}$$

B.3. Estática comparativa. El problema que abordamos a continuación es preguntarnos qué ocurre tanto con el punto óptimo como con el valor maximizado del objetivo cuando alguno de los parámetros del objetivo se modifica.

En efecto, sea

$$\begin{pmatrix} x_1^*(a) \\ \vdots \\ x_n^*(a) \end{pmatrix} = \arg\max f(x_1, ..., x_n; a)$$

y el óptimo $y^* = f(x_1^*, ..., x_n^*; a) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_n; a)$, vale decir, el valor maximizado de f para un nivel dado de a.

Nos preguntamos:

1. ¿Cómo cambian las variables óptimas al cambiar el parámetro?
2. ¿Cómo cambia el nivel del objetivo alcanzado?

La primera pregunta es lo que tradicionalmente se entiende por estática comparativa, y se centra en el signo (y ocasionalmente magnitud) de funciones de la forma:

$$\frac{\partial x_i^*(a)}{\partial a}$$

La segunda pregunta se refiere al máximo. Sobre el particular, usaremos intensivamente el siguiente resultado:

Teorema 7 (de la envolvente).

$$\frac{\partial y^*}{\partial a} = \frac{\partial f(x_1^*, ..., x_n^*; a)}{\partial a}$$

En efecto,

$$\frac{\partial y^*}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, ..., x_n^*; a)}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial a} + \frac{\partial f(x_1^*, ..., x_n^*; a)}{\partial a}$$

pero por condiciones de primer orden,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1^*, ..., x_n^*; a)}{\partial x_i^*} &= 0 \quad \forall i = 1, ..., n \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial y^*}{\partial a} = \frac{\partial f(x_1^*, ..., x_n^*; a)}{\partial a} \end{aligned}$$

Este resultado es tremendamente importante porque permite simplificar notoriamente el análisis de las características del óptimo. En particular, nos dice que todos los efectos secundarios que el cambio en el parámetro provoca sobre la elección del óptimo son cero (puesto que de lo contrario no nos encontraríamos en el óptimo en primera instacia). Observe que ya usamos previamente esta idea para interpretar el multiplicador lagrangeano.

Ejercicio 26. *Demuestre que en un problema de maximización con restricciones, el teorema de la envolvente indica que*

$$\frac{\partial y^*}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{L}(x_1^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*; a)}{\partial a}$$

donde a corresponde a un parámetro del problema.

C. Funciones homogéneas

Una función $f(x_1, ..., x_n)$ se dice **homogénea de grado** r si satisface:

$$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, ..., x_n)$$

Este tipo de funciones presentan una serie de propiedades especiales, como la que se enuncia en el siguiente teorema:

TEOREMA 8 (Euler). *Si la función $y = f(x_1, ..., x_n)$ es homogénea de grado r, entonces $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} x_i = ry$.*

DEMOSTRACIÓN. Derivando respecto de λ la expresión:

$$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, ..., x_n)$$

obtenemos:

$$\frac{\partial f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_1)} x_1 + ... + \frac{\partial f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_n)} x_n = r\lambda^{r-1} f(x_1, ..., x_n)$$

Evaluando en $\lambda = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} x_i = rf(x_1, ..., x_n) = ry$$

□

A continuación se presenta otra demostración del teorema, para el caso de una función con dos argumentos, que enfatiza la relación que hay entre derivadas parciales y razón de uso (x_2/x_1) en el caso de las funciones homogéneas.

Sabemos que en este caso la definición de homogeneidad implica que $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^r f(x_1, x_2)$; si tomamos $\lambda = \frac{1}{x_1}$, obtenemos que $f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) = \left(\frac{1}{x_1}\right)^r f(x_1, x_2)$, de lo que se desprende lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^r f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) \equiv x_1^r g\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &\Rightarrow \ f_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = r x_1^{r-1} g\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - x_2 x_1^{r-2} g'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &\Rightarrow \ f_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1^{r-1} g'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{aligned}$$

Luego, si computamos $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_2 = f_1x_1 + f_2x_2$ obtenemos lo enunciado en el teorema:

$$\begin{aligned} f_1x_1 + f_2x_2 &= rx_1^r g\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - x_2x_1^{r-1}g'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + x_2x_1^{r-1}g'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &= rx_1^r g\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &= rf\left(x_1,x_2\right) = ry \end{aligned}$$

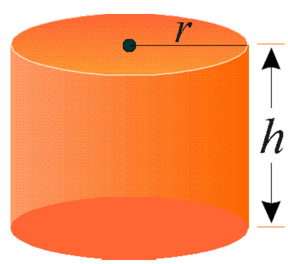
Otra propiedad interesante de este tipo de funciones es que la razón de los aportes marginales de x_1 y x_2 depende sólo de su uso relativo, y no del nivel de cada uno por separado (es decir, $\frac{f_1}{f_2}$ depende sólo de $\frac{x_1}{x_2}$ y no de x_1 ó x_2 individualmente). En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_2} &= \frac{rx_1^{r-1}g\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - x_2x_1^{r-2}g'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{x_1^{r-1}g'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \\ &= \frac{rg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{g'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} - \left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{aligned}$$

Esta propiedad se presenta en un conjunto más amplio de funciones, que incluye a las funciones homogéneas y cualquier transformación creciente de una función homogénea. Estas funciones se denominan **funciones homotéticas**.

Ejercicios

1. *El vaso:*
   Usted desea construir un vaso de papel, sin tapa, de forma cilíndrica (en el gráfico, de radio r y altura h).

   Para ello cuenta con una hoja de papel de 20 por 20 centímetros, de la que debe recortar la base (un círculo de diámetro $2r$) y el lado (un rectángulo, uno de cuyos lados envuelve la base, mientras el otro lado da la altura). Su objetivo es diseñar el vaso con **mayor volumen** posible. Recuerde que el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, donde h es su altura y r el radio.

a) Plantee el problema a resolver. Explique.
b) Resuélvalo por el método de Kuhn-Tucker. Sea claro en explicar su procedimiento, y no olvide condiciones de segundo orden.
c) ¿Cuánto aumentaría el volumen del vaso si tuviera un pedazo de papel de 21×20 centímetros? ¿Y si fuera de 20×21 centímetros?

2. *Optimización restringida*
Considere el problema

$$\begin{gathered} \max 4x_1 + x_2 - x_1^2 \\ s/a \;\; 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

a) Muestre en un gráfico el conjunto en el que se puede buscar, esto es, los puntos que satisfacen las desigualdades.
b) Dibuje curvas de nivel de la función objetivo.
c) Basado en lo anterior, ¿en qué parte(s) del conjunto de posibilidades cree usted que es más probable que se encuentre el óptimo? Explique su razonamiento.
d) Resuelva el problema por el método de Kuhn-Tucker (pero sin olvidar su razonamiento anterior).

3. Considere el problema:

$$\begin{gathered} \max_{x_1,x_2} (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 \\ \text{sujeto a } x_1 + x_2 \leq L \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

donde $L > 0$.
a) Plantee las condiciones de Kuhn-Tucker.
b) Encuentre los puntos que las satisfacen.
c) Verifique el cumplimiento de las condiciones de segundo orden que corresponda, y determine el (los) máximo(s) global(es).

4. Las siguientes ecuaciones corresponden a la demanda y oferta internas de paltas:

$$\begin{aligned} P_d &= 200 - 2Q_d \\ P_o &= 2Q_o \end{aligned}$$

El precio internacional es P^*. Plantee para cada una de las siguientes preguntas, un problema de optimización tal que su solución sea la respuesta. Especifique claramente todas las restricciones que corresponda.
a) ¿Qué tarifa a las importaciones maximiza la recaudación fiscal?
b) ¿Qué tarifa a las importaciones maximiza el excedente total?

   c) ¿Qué tarifa a las importaciones maximiza el excedente de los productores locales?

5. Considere el problema:

$$\max_{x_1,x_2} y = x_1^3 x_2 \sqrt{\frac{4}{3}} - x_2^2 - x_1^2$$

   a) Plantee las condiciones de primer orden.
   b) Encuentre los puntos que las satisfacen.
   c) Utilice las condiciones de segundo orden para escoger el máximo.
   PARA PENSAR: ¿Es el máximo encontrado un máximo global?

6. Considere el problema:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} y &= x_1 + \sqrt{x_2} \\ \text{sujeto a} \quad m &\geq 20x_1 + x_2 \\ 0 &\leq x_1, x_2 \end{aligned}$$

   a) Plantee las condiciones de primer orden.
   b) Resuelva para el caso en que $m > 100$, verificando el cumplimiento de las condiciones de segundo orden.
   c) Resuelva para el caso en que $m < 100$.
   d) Determine en cuánto mejoraría el máximo si se aumentara m en una unidad, si el m original fuese:
      1) $m = 25$
      2) $m = 150$