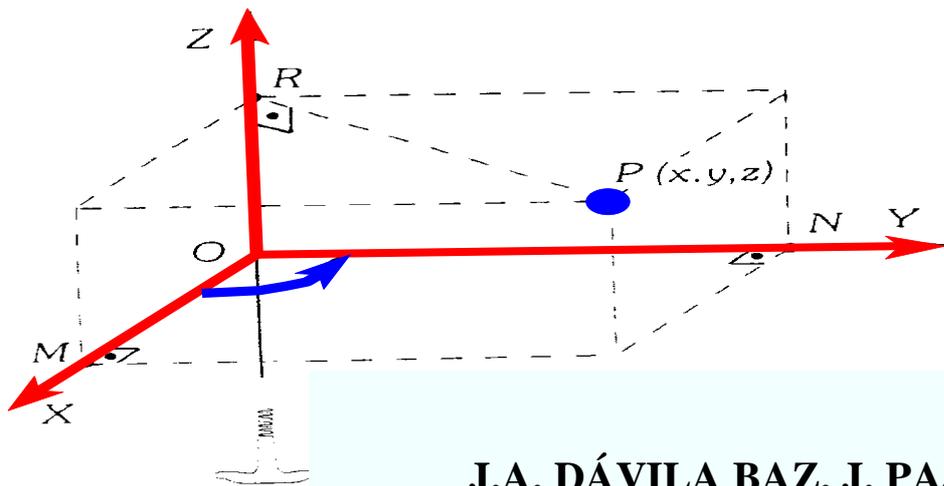


# MECÁNICA GENERAL

## ÍNDICE

### FUNDAMENTOS



J.A. DÁVILA BAZ, J. PAJÓN PERMUY

# **MECÁNICA GENERAL**

**Juán Antonio Dávila Baz**  
*Profesor Catedrático de Escuela Universitaria*

**Javier Pajón Permuy**  
*Profesor Titular de Escuela Universitaria*

**Universidad de Huelva**

HUELVA, 1999

**MECÁNICA GENERAL.**

Primera edición 1999.

© Juan Antonio Dávila Baz.

Javier Pajón Permuy.

Edita:

Depósito Legal:

I.S.B.N.:

## PRÓLOGO

### **Nota preliminar.**

Existe un aforismo, discutible en muchos casos, pero con el cual estamos bastante de acuerdo, que dice: “siempre es mejor un mal libro que unos buenos apuntes”.

Entiéndase un poco lo que quiere expresar: unos apuntes están, en general, provisionalmente editados, con mala o regular calidad.

Estos apuntes solo pretenden complementar los textos que seguimos en aquellas lagunas que nos ha parecido conveniente; no son exhaustivos, carecen del rigor de un libro editado y solo pretenden ser eso, un complemento, en ayuda de nuestros alumnos y alumnas.

En años sucesivos, como puede apreciarse, se han ampliado; comenzamos con la Mecánica Vectorial y luego han sido los Cuerpos Funiculares y particularmente la Dinámica (Cinemática y Cinética).

Finalmente se ha añadido un relato histórico de nuestras disciplinas, que a modo de introducción nos sirve para crear ambiente y dar pié a comenzar nuestra docencia con cierta elegancia, además de coincidir con Comte en su conocida frase:

Dice Comte

*"No se puede realmente conocer una ciencia sin haber estudiado su historia"*

**Huelva, La Rábida, 1999.**

LOS AUTORES

# ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
PROGRAMA DE MECÁNICA GENERAL. ....	1

## UNIDAD DIDÁCTICA 0: FUNDAMENTOS.

### TEMA I. FUNDAMENTOS.

1.1.- Reseña histórica. ....	7
1.2.- Alcance de la Mecánica. ....	21
1.3.- Unidades fundamentales y derivadas: Sistemas de Unidades. ....	22
1.4.- Ley de la homogeneidad dimensional. ....	23
1.4.1.- Teorema de $\pi$ de Buckingham. ....	24
1.5.- Magnitudes escalares y vectoriales. ....	26
1.6.- Modelos básicos y marco de referencia. ....	26
1.7.- Leyes y principios fundamentales de la mecánica. ....	27
1.5.- Magnitudes escalares y vectoriales. ....	26

## UNIDAD DIDÁCTICA I: CÁLCULO VECTORIAL.

### TEMA II. ÁLGEBRA VECTORIAL; FUNDAMENTOS.

2.1.- Definición, notación y clasificación de vectores ....	29
2.2.- Espacio vectorial. ....	31
2.3.- Operaciones fundamentales; suma y diferencia de vectores. ....	32
2.4.- Forma trinomia y vectores unitarios ....	33
2.5.- Producto de varios vectores.. ....	35
2.6.- Demostración de la fórmula $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ....	35

### TEMA III. ÁLGEBRA VECTORIAL; AMPLIACIÓN Y APLICACIONES.

3.1.- Plano: ecuación de la recta. ....	37
3.2.- Paralelismo y perpendicularidad de rectas. ....	38
3.3.- Ángulo de dos rectas. ....	38
3.4.- Distancia de un punto a una recta. ....	39
3.5.- Equidistancia de un punto a dos rectas: bisectrices. ....	40
3.6.- Espacio: ecuación del plano. ....	41
3.7.- Paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos. ....	42
3.8.- Intersección de dos planos. ....	43
3.9.- Plano por un punto, paralelo a un segundo plano dado. ....	43
3.10.- Plano por un punto, perpendicular a una recta dada. ....	43
3.11.- Plano pasando por una recta y perpendicular a un plano dado ....	44
3.12.- Plano por una recta y paralelo a una recta dada. ....	44
3.13.- Ángulo de dos rectas o de dos planos o entre recta y plano ....	44
3.14.- Distancia de un punto a un plano. ....	45
3.15.- Distancia del origen a un plano. ....	45
3.16.- Distancia entre dos planos paralelos. ....	45
3.17.- Distancias entre rectas paralelas. ....	45
3.18.- Distancia de un punto a una recta. ....	46
3.19.- Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan. ....	46

#### **TEMA IV. ANÁLISIS VECTORIAL.**

4.1.-	Derivada de un punto función de una variable escalar. . . . .	49
4.2.-	Campos escalares y vectoriales: Gradiente. . . . .	50
4.3.-	Divergencia y rotacional de un campo vectorial. . . . .	52
4.4.-	Algunas propiedades de la divergencia y de rotacional. . . . .	54
4.5.-	Integral de un vector a lo largo de una línea y sobre una superficie: circulación y flujo. . . . .	55

#### **TEMA V. MOMENTOS.**

5.1.-	Momento de un vector respecto a un punto. . . . .	57
5.2.-	Momento de un vector respecto a un eje . . . . .	58
5.3.-	Sistemas de vectores. . . . .	59
5.4.-	Invariantes de un sistema de vectores. . . . .	60
5.5.-	Momento mínimo. . . . .	61
5.6.-	Eje central. . . . .	62
5.7.-	Ecuación del eje central. . . . .	63
5.8.-	Algunas aplicaciones del eje central. . . . .	63
5.9.-	Generalización del teorema de Varignon . . . . .	64
5.10.-	Vectores concurrentes. . . . .	65
5.11.-	Vectores paralelos . . . . .	65
5.12.-	Vectores coplanarios. . . . .	66
5.13.-	Sistemas equivalentes. . . . .	67
5.14.-	Reducción de un sistema y reducción canónica. . . . .	68
5.15.-	Reducción de un sistema cuyo variante escalar es nulo. . . . .	68
5.16.-	Algunos problemas particulare. . . . .	69

#### **TEMA VI. CÁLCULO TENSORIAL.**

6.1.-	Concepto de tensores de primero y segundo orden . . . . .	71
6.2.-	Vectores afines. . . . .	75
6.3.-	Transformaciones tensoriales. . . . .	77

### **UNIDAD DIDÁCTICA II: ESTÁTICA.**

#### **TEMA XII. ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES.**

12.1.-	Introducción. . . . .	79
12.2.-	Polígono funicular. . . . .	79
12.3.-	Ecuaciones fundamentales del equilibrio de un cable. . . . .	80
12.4.-	Cable sometido a carga uniformemente repartida en proyección horizontal. . . . .	83
12.4.1.-	Amarres a la misma altura. . . . .	84
12.4.2.-	Amarres a distinta altura, ejes según direcciones conjugadas. . . . .	86
12.4.3.-	Amarres a distinta altura, ejes coordenados ortogonales. . . . .	88
12.6.-	Equilibrio de un cable pesado, catenaria. . . . .	90

### UNIDAD DIDÁCTICA III: DINÁMICA: CINEMÁTICA Y CINÉTICA.

#### TEMA XV. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS FUNDAMENTALES.

15.1.-	Introducción.	95
15.2.-	Tiempo, trayectoria y ecuaciones del movimiento; velocidad y aceleración.	95
15.3.-	Desplazamiento, velocidad y aceleraciones angulares.	97
15.4.-	Cinemática de una partícula en diversos sistemas coordenados.	98
15.5.-	Movimiento relativo de dos partículas (sistema móvil en traslación).	114
15.6.-	Movimiento relativo de dos partículas (sistema móvil en rotación).	115

#### TEMA XVI. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS PARTICULARES.

16.1.-	Movimientos rectilíneos.	119
16.2.-	Movimientos uniforme y uniformemente variado.	120
16.3.-	Movimiento de vehículos automotores en fase de arranque.	122
16.4.-	Movimiento armónico simple.	124
16.5.-	Composición de movimientos armónicos de igual frecuencia y dirección.	126
16.6.-	Movimientos periódicos en general y movimientos periódicos amortiguados.	127
16.7.-	Movimiento circunferencial.	127
16.8.-	Movimiento parabólico (en el vacío).	128
16.9.-	Movimiento helicoidal.	130
16.10.-	Movimiento plano cicloide.	131
16.11.-	Movimiento interdependientes.	133

#### TEMA XVII. CINÉTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS RECTILÍNEO Y PLANO.

17.1.-	Ecuaciones generales.	135
17.2.-	Movimiento rectilíneo de una sola partícula.	137
17.2.1.-	Caso 1º) $F = \text{constante}$ .	137
17.2.2.-	Caso 2º) $F = \text{función del tiempo} = F(t)$ .	138
17.2.3.-	Caso 3º) $F = \text{función de la posición} = F(x)$ .	138
17.2.4.-	Caso 4º) $F = \text{función de la velocidad} = F(v)$ .	139
17.3.-	Movimientos rectilíneos oscilatorios.	140
17.4.-	Movimiento rectilíneo de varias partículas conectadas.	143
17.5.-	Movimiento oscilatorio de varias partículas conectadas.	144
17.6.-	Movimientos planos: tipo parabólico en el vacío y en medio resistente.	145
17.7.-	Movimientos oscilatorios planos.	146

#### TEMA XVIII. CINÉTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS; MOVIMIENTOS.

23.1.-	Momentos de inercia.	149
23.2.-	Teoremas de Steiner.	150
23.3.-	Teoremas relativos a la rotación de ejes.	151
23.4.-	Momento angular de un cuerpo rígido.	153
23.5.-	Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido.	155
23.5.1.-	Traslación.	157
23.5.2.-	Rotación alrededor de un eje fijo.	158
23.5.3.-	Movimiento plano.	158
23.5.4.-	Movimiento alrededor de un punto fijo.	159
23.5.5.-	Movimiento general.	160
23.6.-	Conclusiones.	160

#### TEMA XXIV. CINÉTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS; TRABAJO Y ENERGÍA, IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

24.1.-	Equilibrado estático y dinámico.	
--------	----------------------------------	--

**CONTENIDOS GENERALES****UNIDAD DIDÁCTICA 0: FUNDAMENTOS.**

Tema I.- FUNDAMENTOS.

**UNIDAD DIDÁCTICA I: CÁLCULO VECTORIAL.**

- Tema II.- Álgebra vectorial; fundamentos.  
Tema III.- Álgebra vectorial; ampliación y aplicaciones.  
Tema IV.- Análisis vectorial.  
Tema V.- Momentos.  
Tema VI.- Calculo tensorial.

**UNIDAD DIDÁCTICA II: ESTÁTICA.**

- Tema VII.- Las fuerzas en equilibrio.  
Tema VIII.- Fuerzas másicas.  
Tema IX.- Momentos de inercia.  
Tema X.- Estática de la partícula, del sistema de partículas y del cuerpo rígido.  
Tema XI.- Máquinas elementales y mecánica estructural.  
Tema XII.- Estática de los cuerpos funiculares.  
Tema XIII.- Estática de los fluidos.  
Tema XIV.- Trabajo y energía.

**UNIDAD DIDÁCTICA III: DINÁMICA: CINEMÁTICA Y CINÉTICA.**

- Tema XV.- Cinemática de la partícula; movimientos fundamentales.  
Tema XVI.- Cinemática de la partícula; movimientos particulares.  
Tema XVII.- Cinética de la partícula; movimientos rectilíneo y plano.  
Tema XVIII.- Cinética de la partícula; movimientos generales.  
Tema XIX.- Cinética de la partícula; trabajo y energía; impulso y cantidad de movimiento.  
Tema XX.- Cinemática de los cuerpos rígidos; movimientos fundamentales.  
Tema XXI.- Cinemática de los cuerpos rígidos; movimientos particulares.  
Tema XXII.- Cinética de un sistema de partículas.  
Tema XXIII.- Cinética de los cuerpos rígidos; movimientos.  
Tema XXIV.- Cinética de los cuerpos rígidos; trabajo y energía; impulso y cantidad de movimiento.  
Tema XXV.- Vibraciones.

**DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS****UNIDAD DIDÁCTICA 0:  
FUNDAMENTOS.****Tema I.- Fundamentos.**

Reseña histórica.- Alcance de la Mecánica.- Unidades fundamentales y derivadas; sistemas de unidades.- Ley de la homogeneidad dimensional.- Cantidades escalares y vectoriales.- Modelos básicos.- Leyes y principios fundamentales de la Mecánica.- El sólido estelar.- El tiempo y el espacio absolutos.- Postulados relativistas.

**UNIDAD DIDÁCTICA I:  
CÁLCULO VECTORIAL.****Tema II.- Álgebra vectorial; fundamentos.**

Definición, notación y clasificación de los vectores.- Operaciones fundamentales; suma y diferencia de vectores.- Espacio vectorial.- Forma trinomia y vectores unitarios.- Producto escalar y vectorial.- Producto de varios vectores.

**Tema III.- Álgebra vectorial; ampliación y aplicaciones.**

Sistemas de coordenadas no ortogonales.- Representación matricial de los vectores.- Los vectores planos en el campo de los números complejos.- Análítica vectorial; los vectores en el plano y en el espacio; paralelismo y perpendicularidad; ángulos y distancias.

**Tema IV.- Análisis vectorial.**

Derivadas de un punto y geometría de un vector; funciones de una variable escalar.- Derivadas de productos escalares y vectoriales.- Campos escalares y vectoriales; gradiente.- Divergencia y rotacional.- Integración vectorial.- Circulación y flujo.- Ecuaciones de Poisson y Laplace.- Teorema de Ostrogradshy-Gauss.- Campos solenoides.- Teorema de Stoke.

**Tema V.- Momentos.**

Momentos de un vector respecto a un punto y a un eje.- Sistemas de vectores.- Invariantes.- Momento mínimo y eje central.- Vectores concurrentes, paralelos y coplanarios; teorema de Varignon.- Sistemas equivalentes; diversos casos.

**Tema VI.- Cálculo tensorial.**

Tensores de primero y segundo orden.- Tensor isótropo y tensor unidad; tensores conjugados y recíprocos.- Operaciones con tensores.- Nociones de análisis tensorial.

**UNIDAD DIDÁCTICA II:  
ESTÁTICA.**

**Tema VII.- Las fuerzas en equilibrio.**

La fuerza como vector; momentos y pares.- Fuerzas concentradas y distribuidas, externas e internas, constantes y variables.- Fuerzas de fricción; ley de Coulomb.- Sólido libre y ligado; grados de libertad y restricciones.- Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.).- Sistemas de fuerzas equivalentes; condiciones necesarias y suficientes.- Estabilidad del equilibrio.- Problemas estáticamente determinados.

**Tema VIII.- Fuerzas másicas.**

Momentos de primer orden y momentos de orden superior.- Centros de masas y centroides; líneas, áreas y volúmenes.- Teorema de Pappus-Guldin.- Cuerpos compuestos e irregulares.- Aplicaciones del cálculo integral.

**Tema IX.- Momentos de inercia.**

Momentos de inercia de superficies planas.- Teoremas de Steiner.- Ejes y momentos principales.- Elipse de inercia.- Diagrama de Mohr-Land y circunferencia de Mohr.- Momentos de inercia de masas.

**Tema X.- Estática de la partícula, sistema de partículas y del cuerpo rígido.**

Equilibrio del punto material; libre, sobre una superficie y sobre una curva.- Equilibrio de un sistema de partículas; casos particulares.- Equilibrio del sólido rígido.- Ecuaciones independientes de equilibrio del sólido rígido.- Ecuaciones independientes de equilibrio en forma alterna.- Análisis del sólido sobre distintas formas de sustentación en el plano y en el espacio.

**Tema XI.- Máquinas elementales y Mecánica estructural.**

Plano inclinado y cuña.- Cojinetes, poleas, polipastos y otras máquinas.- Vigas y armaduras: métodos de los nudos y de las secciones.- Isostatismo e hiperestatismo.

**Tema XII.- Estática de los cuerpos funiculares.**

Polígono funicular.- Ecuaciones fundamentales del equilibrio de un hilo.- Cargas distribuidas según la luz y a lo largo del hilo.- Amarres a la misma altura y a distinta altura.- Cable pesado con carga concentrada.

**Tema XIII.- Estática de los fluidos.**

Propiedades de los fluidos.- Ecuación de equilibrio.- Líquido en reposo y girando.- Fuerzas sobre superficie horizontal, inclinada, vertical y curva.- Presas.

**Tema XIV.- Trabajo y energía.**

Trabajo y potencia.- Trabajo de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo rígido.- Principio del trabajo virtual para el equilibrio.- Aplicaciones.- El P.T.V. para la estabilidad del equilibrio.- Principio de la energía potencial estacionaria para el equilibrio de los sistemas conservativos.- Principio de la energía potencial mínima para la estabilidad del equilibrio de los sistemas conservativos.- El P.T.V. y el método de los multiplicadores de Lagrange.

**UNIDAD DIDÁCTICA III:  
DINÁMICA: CINEMÁTICA Y CINÉTICA.**

**Tema XV.- Cinemática de la partícula; movimientos fundamentales.**

Tiempo, trayectoria y ecuaciones del movimiento; velocidad y aceleración.- Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.- Cinemática de una partícula en diversos sistemas coordenados.- Movimientos relativos; aceleración de Coriolis.

**Tema XVI.- Cinemática de la partícula; movimientos particulares.**

Movimientos rectilíneos; uniforme y uniformemente variado; de vehículos automotores en fase de arranque; armónicos y periódicos, periódicos amortiguado y aperiódico. Movimientos curvilíneos: circunferencial, parabólico, elíptico, vibratorio y otros.

**Tema XVII.- Cinética de la partícula; movimientos rectilíneo y plano.**

Ecuaciones generales.- Movimientos rectilíneos; movimientos rectilíneos oscilatorios; movimientos rectilíneos de varias partículas conectadas.- Movimientos oscilatorios; analogía con circuitos eléctricos.- Movimientos planos; tiro parabólico en el vacío y en medio resistente; movimientos oscilatorios planos.

**Tema XVIII.- Cinética de la partícula; movimientos generales.**

Movimientos curvilíneos sujetos a enlaces; péndulo simple en el vacío y en medio resistente.- Campos de fuerza centrales.- Mecánica espacial.- Campos de fuerza eléctrico y magnético.

**Tema XIX.- Cinética de la partícula: trabajo y energía; impulso y cantidad de movimiento.**

Sistemas conservativos; potencial y energía potencial.- Trabajo y energía en formas alternativas.- Ecuaciones de Lagrange para una partícula.- Impulso y cantidad de movimiento.- Conservación de la cantidad de movimiento.- Choques elástico e inelástico.- Momento cinético; su conservación.

**Tema XX.- Cinemática de los cuerpos rígidos; movimientos fundamentales.**

Desplazamientos básicos, teorema de Chasle, tipos de movimientos y desplazamiento infinitesimal helicoidal.- Posición de un cuerpo rígido; ángulos de Euler.- Ecuaciones generales de la cinemática del cuerpo rígido y de los diversos tipos de movimientos.

**Tema XXI.- Cinemática de los cuerpos rígidos; movimientos particulares.**

Traslación.- Rotación alrededor de un eje fijo.- Movimiento plano general.- Movimiento con un punto fijo y movimiento general.- Movimientos de rodadura, pivotamiento y deslizamiento.- Cálculo gráfico de velocidades y aceleraciones.- Perfiles conjugados y estudio cinemático de los engranajes.- Movimientos relativos de cuerpos rígidos y composición de movimientos.

**Tema XXII.- Cinética de un sistema de partículas.**

Ecuación general del movimiento y referencia al centro de masas del sistema.- Energía cinética de un sistema de partículas.- Ecuaciones del trabajo y de la energía.- Ecuación de Lagrange.- Impulso y cantidad de movimiento; su conservación.- Momento cinético de un sistema de partículas; su conservación.

**Tema XXIII.- Cinética de los cuerpos rígidos; movimientos.**

Momentos de inercia: Teoremas de Steiner en los cuerpos rígidos.- Ejes y momentos principales de inercia; elipsoide de inercia.- Momentos cinéticos de cuerpos rígidos.- Ecuaciones de movimiento de cuerpos rígidos.- Traslación.- Rotación alrededor de un eje fijo.- Movimiento plano.- Movimiento alrededor de un punto fijo.- Movimiento general.- Principio de D'Alambert.

**Tema XXIV.- Cinética de los cuerpos rígidos; trabajo y energía; impulso y cantidad de movimiento.**

Energía cinética de un cuerpo rígido.- Formas alternativas del trabajo y la energía.- Ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos.- Impulso y momento cinético.- Momento motor de arranque de órganos de máquinas con movimiento de rotación.- Péndulo físico y reversible; péndulo de torsión.- Equilibrados estático y dinámico.- Efectos giroscópicos.

**Tema XXV.- Vibraciones.**

Vibración libre.- Vibración torsional.- Métodos de la energía.- Fuerza lineal de restauración lineal y fuerza senoidal.- Fuerza lineal de restauración con amortiguamiento viscoso.- Idem y disturbio armónico.- Sistemas oscilatorios con múltiples grados de libertad.

**UNIDAD DIDÁCTICA 0:  
FUNDAMENTOS.**

**TEMA I  
FUNDAMENTOS**

**1. 1.- Reseña histórica.**

Dice Comte

*"No se puede realmente conocer una ciencia  
sin haber estudiado su historia"*

El tiempo ha sido testigo mudo de la evolución de la técnica. De hecho, la historia de la tecnología es tan antigua como la propia humanidad. Entre la primera piedra convertida en herramienta y la arrasadora irrupción de las máquinas, el progreso nunca ha bajado la guardia. Tampoco ahora.

*La prehistoria...*

Además de la caza, la pesca y la recolección de hierbas, raíces y frutos silvestres, y el uso de agujas de hueso y raspadores para confeccionar las pieles de los animales, las necesidades del hombre prehistórico en su adaptación al medio ambiente le llevaron a construir las primeras viviendas, las más antiguas conocidas, semicírculos de grandes piedras que servían de base para unas cabañas de ramaje, se hallaron en Olduvai (Tanzania). Otras más ligeras se encontraron en Gomboré, en Etiopía. En ambos casos, en fechas próximas a los dos millones de años. En Europa, la construcción más antigua conocida -500.000 años- es una cabaña alargada hallada en la playa de Niza, en Francia.

Las aldeas y su evolución hacia las primeras ciudades son resultado de la vida sedentaria desarrollada en el Neolítico y durante los últimos siete milenios antes de nuestra era. Desde entonces, la técnica de la construcción sufrió grandes transformaciones, desde las pieles y el ramaje de las primeras cabañas, hasta el trabajo de la piedra en forma de sillares o la fabricación del ladrillo.

En la última etapa del homo sapiens, hace unos 20.000 años, a las lanzas y anzuelos empleados para la caza y la pesca se añaden los arpones y, sobre todo, el arma más revolucionaria de la prehistoria: el arco y las flechas, la primera máquina inventada por el ser humano.

*Antiguas civilizaciones.*

Cuando el ser humano abrazó el sedentarismo, necesitó una vivienda; ya no le bastaba con un refugio que le protegiera del viento y de la lluvia junto al fuego del hogar o donde dormir cubierto con unas ramas trenzadas. Bambú, madera, cañas y bloques de coral fueron algunos de los materiales puestos a prueba. Babilonia se construyó -después que Jericó- utilizando barro secado al sol, y también los zigursta, alguno de los cuales se identificó con la Torre de Babel. Los lados del mayor de estos templos de base cuadrada medían 91.5 metros y llegó a disponer de siete pisos o terrazas superpuestas a las que se accedía mediante enormes tramos de escaleras. La construcción en barro es característica de zonas con escasas precipitaciones, en las que no abunda la madera. Dado que estos antiguos asentamientos acababan por convertirse en polvo, sólo se han conservado las creaciones más recientes de la arquitectura en adobe.

Los Babilónicos de la antigua Mesopotamia desarrollaron cálculos de más alto nivel; series, relaciones exponenciales o logarítmicas, ecuaciones de primer y segundo grado, etc... Poseían una metrología sistemática, así como, fórmulas aritméticas científicas, conocían la relación de Pitágoras. Son los inventores del Álgebra.

Los primeros que levantaron sus construcciones sagradas con piedra natural, un material más duradero, fueron los arquitectos egipcios: para los muertos y los dioses nada parecía suficiente. El alto nivel de evolución que alcanzó esa civilización con la utilización de la piedra en sus monumentos causa admiración todavía hoy. En los años veinte se realizaron mediciones en la pirámide de Keops con aparatos modernos y sólo se pudieron determinar unas desviaciones con respecto a la horizontal de unos cuantos milímetros.

Que esto fuera posible hace aproximadamente 4.500 años se debió a la coincidencia de cuatro condiciones previas. Una de ellas fue la utilización de un nuevo material, el cobre, para fabricar las herramientas. No menos decisiva resultó la larga tradición del oficio de cantero, lo que posibilitó una pericia cada vez mayor en el trabajo de la piedra. Otra de las ventajas fue que los arquitectos de entonces ya contaban con nociones matemáticas básicas, poseían una metrología propia, no sistemática, y un sistema de numeración decimal en el que al parecer no se tenía en cuenta el. Su aritmética y geometría, aunque primitiva, les permitía resolver las operaciones básicas (suma, resta, ...), fracciones; considerando solo "partes alícuotas" de la unidad,  $1/n$ , y nunca fracciones múltiples,  $m/n$ . Calculaban el área del triángulo, del círculo, y algunos volúmenes... Inventaron instrumentos de observación de las estrellas, así como, relojes de agua y cuadrantes solares.

Los constructores Egipcios poseían utensilios apropiados para medir y diseñar los planos, utilizan algunos principios de la mecánica para la construcción de pirámides, disponían de la piedra caliza y el granito, así como ladrillos. Cubrían grandes salas utilizando pilares o columnas, dinteles de piedra y losas de grandes dimensiones para los techos; para cubrir espacios emplearon esencialmente el sistema de dintel horizontal monolítico de piedra apoyada sobre pilares, razón por la cual éstos tenían que estar muy próximos, al ser la piedra material no apto a la flexión. Una particularidad importante, que demuestra las preocupaciones constructivas de los egipcios, es la disposición de un dado de piedra sobre el capitel, protegiendo así los bordes frágiles del mismo en su flexión y contribuyendo al centrado de la carga de compresión sobre la columna. Así mismo, en la forma de planta cuadrada, que va decreciendo de sección hasta su cúspide, en los grandes obeliscos egipcios, se adivina la intuición del sólido de igual resistencia a la compresión. Parece que también conocieron el arco como elemento constructivo, pero, de todos modos, las formas adinteladas fueron sus construcciones características.

Tampoco podemos olvidar las viejas Culturas del Oriente Medio, del Tigris y el Éufrates, cuya arquitectura floreció unos 4.000 años a.de C. y hasta la conquista del país por Alejandro Magno. La escasez de piedra y madera en esta zona hizo posible el desarrollo de la fabricación de ladrillos a base de arcilla.

En la india se inventó el sistema de numeración decimal, que ha llegado a ser universal.

En los escritos de la Escuela de Mo Ti, de la China antigua (1122 años a. de C.), se encuentran las primeras huellas de una geometría, definiciones del punto y de la línea, encontramos también elementos de mecánica y de óptica. Hay, por ejemplo, definiciones sobre; el tiempo, el contacto, la coincidencia, la continuidad, la fuerza, el choque, la resonancia, afirman que el peso es una fuerza, explican la inversión de la imagen en la cámara oscura, así como las imágenes de los espejos cóncavo, y convexo. Si bien, todas ellas son definiciones, sin demostraciones matemáticas.

#### *La mecánica Griega -Helénica clásica...*

El gran poema nacional que fue la epopeya homérica, en la que ha quedado recogido parte del saber colectivo del antiguo pueblo griego, supone, un punto de partida para conocer los progresos que en mecánica se hicieron en este período de su historia. Homero, sabe que el choque de un cuerpo sólido es tanto más eficaz cuanto mayores sean su peso y su velocidad. Conoce también la aceleración de la caída de los cuerpos por su peso. Se puede observar en Homero intentos de sistematizar los fenómenos físicos. Homero conoce ya una forma primitiva de proceso cíclico, pero todos sus ciclos incluyen en sus secuencias de causas y efectos una divinidad como fuerza motora.

*Aristóteles y su escuela...*

Aristóteles (años 384-322 a. de C.), discípulo de Platón y educador de Alejandro, fundador del Liceo, nos ha legado numerosos tratados científicos, algunos relativos a la materia, a la forma y a las leyes del universo sensible; entre ellos está el de Física ( *Physica auscultatio*) en 8 libros, que trata sobre el movimiento. Para el movimiento expresa la coexistencia simultánea de la potencia y del acto, la transformación de una cosa en otra que llevaba en su seno, definida así por el "El acto de lo que está en potencia en tanto que tal" (*actus existentis in potentia in quantum est in potentia*). define cuatro tipos de movimiento o Kinésis (alteraciones, cambios) que responden, en suma, a las modificaciones de la quiddidad (sustancia del cuerpo), de la cantidad, de la cualidad y del lugar.

¿Que pensar hoy de la física de Aristóteles?. Sin duda contiene numerosos errores y manifiestas puerilidades que provocan la sonrisa de los científicos modernos, que olvidan la pobreza de los medios de investigación de que disponían los antiguos. Pero importa menos los resultados que los principios mismos. Y, desde este punto de vista, como subrayo A. Mansion en su "Introduction á la Physique aristotélicienne" (París, Lovaina, 2ª ed., 1946), "no se puede negar que el ideal que Aristóteles se propuso en física responde a una concepción grandiosa y verdaderamente filosófica".

La primera obra de Mecánica conservada hasta hoy es "las Cuestiones mecánicas", atribuida a Aristóteles, en ella se plantean problemas muy precisos, como el de la "rueda de Aristóteles", y consigue asentar varios principios fundamentales, como el de la palanca o el del paralelogramo de velocidades.

Otra obra de suma importancia, perteneciente a Herón es, sin duda, su escrito sobre "las Mecánicas", en tres libros, cuyo texto griego se ha perdido en su mayor parte.

El libro primero contiene cuestiones geométricas y cinemáticas; rotación de círculos, en especial la "rueda de Aristóteles", reproducción de una figura plana o sólida con una razón dada, construcción de las dos medias proporcionales, el paralelogramo de velocidades, y una observación sobre el movimiento horizontal que anuncia el pensamiento de Galileo, y un estudio defectuoso del plano inclinado.

El segundo libro trata de las cinco máquinas simples; torno, palanca, polea, cuña y tornillo sin fin.

El libro tercero se orienta claramente a la práctica. Herón describe en él los procedimientos realmente utilizados para maniobrar fardos en arquitectura, y luego describe las prensas de tornillo.

El ejemplo de "las Mecánicas" basta para probar la existencia de una tradición mecánica, desde comienzos de la época helenística. Esta tradición se mezcla y se confunde, evidentemente, con la tradición técnica de los ingenieros, la cual se remonta a tiempos inmemoriales, y está jalonada, en este período, por los grandes nombres de Ctesibio, Filón de Bizancio, Vitrubio y Herón.

Grande fue el desarrollo griego, con todas las muestras del arte de la construcción que nos han perdurado; el desarrollo del montante y dintel data de alrededor del año 500 a.c..

#### *Época Helenística y Romana...*

Recordar las investigaciones de Estática e Hidrostática realizadas por Arquímedes (época Helenística y Romana, años 384-322 a. de C.), en el tratado "Del equilibrio de los planos o de su centro de gravedad", el sabio de Siracusa, formula el principio del equilibrio de las fuerzas que actúan sobre una palanca. Y los dos libros "Sobre los cuerpos flotantes", crea realmente la Hidrostática como ciencia.

Los romanos fueron los grandes prácticos; desarrollaron el arco y la bóveda e idearon un nuevo material, el hormigón, conglomerado de piedra y cal. En las obras de ingeniería, que extendieron por todo el imperio (acueductos, teatros, anfiteatros, calzadas,...) el arco carga directamente sobre los pilares y la bóveda era de medio punto sobre semicircunferencia.

Bizancio fue una continuación de Roma, con la sola diferencia de que la cúpula, que en el periodo romano se aplicaba a plantas circulares, en la construcción bizantina lo hará sobre plantas cuadradas o poligonales.

La influencia romana en arquitectura dura hasta el siglo XII, en que se empieza a utilizar el arco ojival; hasta entonces fue el estilo genérico denominado "románico", y ahora será el llamado "gótico"; que no será sólo un estilo, sino un avance constructivo, al conseguir que el arco ejerza menores empujes y poder construir con menos espesores de pared, con más ventanales, con formas más livianas y ligeras. Los esfuerzos van directamente a los contrafuertes y las paredes entre ellos no sirven sino de cerramientos. Puede asegurarse que la concepción estructural gótica supone ya un razonamiento teórico, un análisis de esfuerzos y transmisiones, que no son solo intuición y exigen una verdadera ciencia. Hasta entonces puede decirse que no hubo un desarrollo teórico estructural, sino más bien una formulación de reglas empíricas.

Desde finales del siglo II se observa una decadencia general de la ciencia, y por supuesto los progresos en mecánica se ven frenados. La actividad científica disminuye en proporción lamentable, y ni siquiera en el siglo IV, en el cual el renacimiento Constantino-teodosiano la da nuevos impulsos, experimenta prácticamente progreso alguno.

La mayoría de conocimientos que acumularon griegos y romanos se perdió durante la Edad Media y se recobró solamente después del Renacimiento. En el siglo XV se inicia una nueva era en la Historia, al producirse una verdadera revolución económica, artística y, sobre todo, científica, a la cual contribuyeron ciertos inventos, el principal el de la imprenta.

No obstante, la historia ha demostrado que el medievo, a pesar de ser calificado como una época oscura, alumbró cambios tecnológicos decisivos. Los avances en mecánica, agricultura o navegación así lo demuestran.

#### *Edad Media...*

Durante la Edad Media los científicos árabes hacen algunos progresos en mecánica, citar, por ejemplo a; Al-Khāzini, que escribió en 1121-1122 el "Libro de la balanza de la sabiduría", en el que estudia principalmente la determinación de los centros de gravedad y las condiciones de los diferentes equilibrios. Los científicos árabes estudian también la elevación de pesos por medio de máquinas y la transformación de los movimientos, siguiendo en este punto "las Mecánicas" de Herón de Alejandría, traducidas por Qustā ibn Lūqā. Desarrollan discusiones sobre los principios de la dinámica. Avicena, que intenta explicar una noción bastante próxima a la aceleración. Avempace, desarrolla la ley de Filopón sobre el movimiento de los proyectiles (la velocidad es proporcional a la diferencia entre la potencia motora y la resistencia).

En el occidente medieval cristiano se produce una verdadera conquista de las fuentes de energía. El molino de agua, conocido en Libia desde el siglo II a. de C., se extiende sobre todo Occidente. El molino de viento, documentado en Persia en el siglo VI, llegó a España en el siglo X, y desde allí pasó al resto de Europa. El Hombre medieval utilizó la polea, inventó el sistema biela-manivela, del que se tiene testimonio en la Alemania meridional a comienzos del siglo XV. Construye relojes mecánicos con pesas, con resorte de escape, pero sin balancín. La artillería se componía ya de mánganos y trabucos, cuyo tiro parecía regulado por fórmulas puramente empíricas.

Algunos nombres de esta época son; Averroes, Tomás Bradwardine. El médico catalán Antonio Ricart. Nicolás Oresme (representa el movimiento uniformemente acelerado). Roger Swineshead. Juan Buridán (y la teoría del ímpetus).

*A partir del siglo XV...*

A partir de siglo XV, muchos son los científicos que profundizan y aportan nuevos conocimientos al desarrollo de la mecánica, destacar a:

Leonardo de Vinci (1.452 - 1.519) fue el prototipo de hombre de su época, factotum, artista y hombre de ciencia italiano, que sintió desde niño la ambición de querer abarcar toda disciplina humana. Sin referirnos a su aspecto artístico, de todos conocido, pintor famoso, señalemos sus aptitudes como ingeniero al estudiar las necesidades hidráulicas de Ludovico Sforza, El Moro, y al decir suyo de saber dirigir la construcción de puentes ligeros y provisionales, edificios públicos y arquitectura en general, conducciones de agua...De muchos de éstos se conservan sus estudios y bocetos pictóricos; de sus libros de notas se desprende claramente que fue un gran observador y que comprendió perfectamente ciertos aspectos fundamentales del comportamiento de los materiales estructurales. Esta obra de Leonardo parece ser el principio real del desarrollo de la teoría de estructuras, si bien no tuvo la difusión debida por no editarse como libro, cosa que sí haría luego Galileo. El decía que es preciso primero conocer la teoría para después aplicarla a la práctica; en Mecánica aplicada hizo los primeros estudios sobre el problema de la flexión en distintas vigas y secciones, así mismo, generaliza la proposición de la palanca, al concepto de momentos estáticos aplicado al equilibrio de los cuerpos.

Simón Stevin (1548 - 1620). Su obra ocupa un lugar importante en la historia del pensamiento científico. En sus tres libros de mecánica (1586), estudió el equilibrio de los cuerpos, principalmente el de un cuerpo sobre un plano inclinado. En hidrostática, fue el primero en establecer el valor de la presión ejercida por un líquido sobre las paredes del recipiente que lo contiene.

Galileo-Galilei (1.564 - 1.642) ha sido reconocido como el fundador de la ciencia moderna; en su última publicación, "Dos nuevas ciencias", fue el primero en estudiar la resistencia de ciertos elementos estructurales, incluyendo el fallo de una viga en voladizo, considerando que el material era rígido y que, en el fallo, la compresión estaba concentrada en el borde inferior de la sección rota y la resistencia a la tracción estaba uniformemente repartida en toda la profundidad de la sección. Siendo profesor en Pisa fue cuando realizó sus famosos estudios sobre la caída de los cuerpos, realizando demostraciones experimentales. Murió retirado y ciego, después de su famoso abjuración pública sobre el giro alrededor del sol, en su villa de Arcetri.

Kepler (1571-1630). Leyes del movimiento planetario; deducidas laboriosamente de datos astronómicos registrados por Tycho Brahe. Es interesante que su análisis fue anterior al descubrimiento del cálculo matemático.

Descartes (1596-1650). Utilizó directamente la idea del trabajo virtual, en el estudio de la estática.

*Siglos XVII y XVIII...*

Las ciencias todas cada vez más comienzan a avanzar más aceleradamente, el hombre se emplea más en la investigación razonada y menos en el azar; la difusión del libro se generaliza, se comienzan a establecer academias...De pasada rápida, por no excedernos demasiado en este panorama brillante, citemos a:

Roberval (1602-1675). Inventor de la balanza que lleva su nombre. Halla la justificación de la ley de composición de fuerzas e intenta relacionar esta ley con el principio del trabajo virtual.

Pascal (1623-1662). Sus estudios en hidrostática le llevaron a deducir su conocido "principio de Pascal".

Huyghens (1629-1695). Inventor de un reloj que lleva su nombre. Realiza la primera extensión de la dinámica a los sistemas materiales, que se encuentra expuesta en su *Horologium Oscillatorium*. Utiliza el péndulo como regulador del movimiento de los relojes y propone el uso de un resorte espiral. Se le debe igualmente la concepción de la fuerza centrífuga (1673), la definición del momento de inercia. En 1673 da una solución correcta del problema del choque.

Roberto Hooke (1.635 - 1.703), quien realizó muchos experimentos e invenciones como encargado de la Royal Society Inglesa, muchos de los cuales no supo aprovechar o llegar hasta el final, atacando a Newton de supuestos plagios; estudiando los resortes de los relojes enunció su ley de la elasticidad.

Sir Isaac Newton (1642-1727), ingente figura, físico, matemático y astrónomo, como tantos otros de esta época, que estableció la Ley de la atracción universal y las primeras Leyes del movimiento. Se le conoce como el iniciador del cálculo matemático. En su obra más famosa, *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (Londres, 1687), estableció la base para el desarrollo de la mecánica clásica como se enseña en la actualidad en nuestras universidades.

Leibniz (1646-1716). Su aportación científica mas importante fue el cálculo infinitesimal (formulado al mismo tiempo por Newton, que le dio el nombre de fluxiones). Es conocido también por su ley de la *vis viva* "fuerza viva", la cual está asociada a la energía cinética del cuerpo.

Varignon (1654-1722), y su conocido teorema. En una obra póstuma, *Nueva Mecánica o Estática* (1725), expuso toda la estática, enunciando por primera vez la regla de la composición de fuerzas concurrentes y dando, en su generalidad, la teoría de los momentos.

Jean I Bernoulli (1667 - 1748) dejó sentado el principio de los trabajos virtuales. Con su hermano Jacques I, (1654-1705), resolvió varios problemas célebres de su tiempo. Publicó la primera integración de una ecuación diferencial. El conocido Teorema de Bernoulli es obra de su hijo Daniel.

Leonardo Euler (1.707 - 1.783), considerado el mejor matemático del siglo XVIII, creador de las funciones que llevan su nombre y de su conocida fórmula para el cálculo de barras a pandeo, estudiando también las coordenadas angulares de los cuerpos rígidos, el teorema fundamental de la cinemática y las ecuaciones del movimiento del cuerpo rígido.

Jean Le Roud D'Alembert (años 1717-1783). En su obra *Tratado de Dinámica* (1743), enuncia su conocido Principio de D'Alembert.

Conde Luís de Lagrange (años 1736-1813). En 1788 publicó su obra capital, la *Mecánica Analítica*, en la que expone las ecuaciones que llevan su nombre y su conocida función Lagrangiana.

Charles de Coulomb (1736-1806). En su *Teoría de las Máquinas Simples* (1779), estudia los problemas de frotamiento y formula su conocida Ley de Coulomb sobre el rozamiento o fricción seca, estableció con rigor y precisión el concepto de "tensión" y presentó por primera vez un correcto análisis elástico de la flexión de vigas.

Permítasenos que comentemos el hecho de no ser casualidad el que los matemáticos y los científicos teóricos y prácticos vayan asociados tantas veces; y es que la ciencia experimental se apoya siempre en el conocimiento teórico y en los matemáticos. Célebre es el freno que tuvo Einstein en el avance de sus teorías por falta de suficiente preparación matemática y que tuvo que paliar con ayudas muchas veces.

*Siglo XIX...*

Nuestras disciplinas experimentan, sobre todo las Estructuras, un gran avance, como ya expresamos, en cuanto a lo que se refiere a la construcción; y ello por dos circunstancias que marcan el siglo: una el acero dulce, y otra el progreso en el estudio del estado tensorial de los sólidos sometidos a fuerzas exteriores.

Marques de Pierre Simón Laplace (1749-1827), en su obra *Mecánica Celeste* reunió los trabajos hasta entonces dispersos de Newton, Halley, Clairaut, D'Alembert, Euler, etc... sobre las consecuencias del principio de gravitación universal. Es también conocido por su aportación del conocido operador diferencial (Laplaciano) y de la ecuación llamada « De Laplace ».

Louis Poincaré (1777-1859). Introduce el concepto de elipsoide de inercia y formula la Teoría de los pares, presentada originalmente en su obra *Elements de Statique*, publicada en 1830.

Navier (1.785 - 1.836) y Lamé (1.795 - 1.870) fueron los dos grandes desarrolladores de la teoría de la elasticidad. El primero estableció la importancia de conocer el límite hasta el cual se comportan elásticamente las estructuras y definió las tensiones de seguridad; el segundo propuso una elegante solución al problema de las deformaciones de una esfera elástica, autor de la obra "Lecciones sobre la teoría matemática de la elasticidad de los cuerpos sólidos", año 1852, y de la ya clásica *Elipse de Lamé*. Es sin duda importantísima su aportación a la fotoelasticimetría.

Carl Jacobi (1804-1851). Matemático alemán, conocido por sus trabajos en matemáticas, algunos de sus trabajos versan sobre la dinámica, la mecánica celeste y la mecánica de los fluidos.

Dos matemáticos ilustres, el Barón Joseph Fourier (1768-1830), francés, y el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), perfeccionan el principio de los trabajos virtuales.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), ilustre matemático y su conocido Principio de Hamilton.

León Foucault (1819-1868). Invento y estableció las teorías del giroscopio y el telescopio clásico.

Denis Poisson (1781-1840), simplifica las ecuaciones de Lagrange (paréntesis de Poisson). El conocido módulo que lleva su nombre, tan empleado en nuestras disciplinas.

Barón Augustin Cauchy (1789-1857), y sus estudios matemáticos de la deformación de un medio continuo. Es autor de más de 700 memorias.

Mohr (1.806 - 1.879), quien en 1.874 aplicó el principio de los trabajos virtuales al cálculo de estructuras, además de desarrollar la teoría de los círculos de su nombre para las tensiones de los sólidos.

Henri Hugoniot (1851-1887), estudió la elasticidad, la balística experimental en su obra "*Memoria sobre la propagación del movimiento de los cuerpos*", año 1887.

Castigliano (1.847 - 1.884), quien en 1.876 estableció su célebre teorema, aplicándolo enseguida al cálculo de los sistemas reticulares, además de inventar un cronómetro para medir los esfuerzos en las construcciones metálicas.

Gerber (1.832 - 1.912), ingeniero y notable constructor de puentes metálicos, que en 1.878 creó las vigas que llevan su nombre, convirtiendo en isostáticas las vigas continuas mediante articulaciones intermedias.

Cremona (1.830 - 1.903) creador del sencillo método de cálculo para vigas trianguladas y cerchas de nudos articulados, que lleva el nombre de "diagrama de Cremona".

Sin olvidar a Saint-Venant (1.797 - 1.886), Rankine (1.820 - 1.872), Maxwell (1.831 - 1.879), Culman (1.821 - 1.881), Muller-Breslau (1.851 - 1.925) y tantos otros.

*Una salvedad, sobre el movimiento relativo:*

Los promotores de la Mecánica clásica en el siglo XVIII y los creadores de la Mecánica analítica a finales de dicho siglo y comienzos de XIX se preocuparon más por desarrollar todas las consecuencias matemáticas de los principios sentados para el análisis dinámico del movimiento, que por establecer una reflexión sobre la incidencia que pudiera tener en este análisis la atención prestada al sistema de referencia del movimiento. Clairaut fue una excepción al proponer, en 1742, el estudio de este problema, pero llegó a un principio incompleto.

En la primera mitad del siglo XIX se colma, gracias a Coriolis, la considerable laguna que hemos advertido en la ley fundamental de la Mecánica, la falta de atención al sistema de referencia.

Foucault, idea en 1852 el giroscopio, basado en el movimiento de Poinot (todo sólido suspendido por su centro de gravedad, debe conservar la rotación que se le da, si esa rotación se produce en torno a uno de los ejes privilegiados, hoy llamados ejes principales de inercia).

En definitiva; la fuerza centrífuga compuesta, de Coriolis, el péndulo y el giroscopio de Foucault, son grandes conquistas de la Mecánica en el siglo XIX. Una se basa en el Análisis matemático, la otra, por el contrario, en la intuición y el experimento; pero las dos se caracterizan igualmente por la interacción de la teoría con la técnica. Nacidas por separado, los tratados clásicos las reúnen, desde comienzos del siglo XX, en una misma explicación racional; el hecho de que esta explicación racional haya tardado tanto en elaborarse, se debe precisamente a la dificultad de hacer explícita la lección común y esencial contenida en esas dos conquistas, a saber, que la ley de la Dinámica clásica lleva en sí misma el postulado de la existencia de sistemas de referencia privilegiados para el movimiento. La

revolución relativista era lo único que podía superar esa dificultad.

Varias obras de finales del siglo XIX anuncian las primeras discusiones, que darían lugar a esa revolución:

Barré de Saint-Venant; "Principios de Mecánica fundados en la Cinemática", año 1851. Se niega a considerar las nociones de masa y de fuerza si no es como nociones derivadas.

Reech; "Curso de mecánica", año 1852. Al contrario que Barré, hace de la fuerza una noción primera.

Andrade; "Lecciones de Mecánica Física", año 1898, en la misma línea que Reech, intenta perfeccionar un método de la que se ha llamado la Escuela del hilo, en el que se supone la existencia de un sistema de referencia en que todos los puntos materiales ejercen, unos sobre otros, acciones recíprocas equivalentes dos a dos.

Ernst Mach (1838-1916), uno de los críticos más lúcidos de fines de siglo, en su "Mecánica", año 1883, razona que en principio hay que considerar en todo instante todas las masas como situadas en interacción. Y como también es imposible traducir esta consideración de un modo práctico, la aplicación de la ley fundamental de la Mecánica clásica supone aproximaciones, y nada permite afirmar que en la cadena de consecuencias no vayan a presentarse dificultades que impongan la revisión de los principios mismos.

Sin despreciar el valor práctico del sistema clásico, H. Herz, en su "Principios de la Mecánica expuestos en una nueva conexión", Leipzig, año 1894, intenta construir un edificio más perfecto desde el punto de vista lógico y formal.

Henri Poincaré, y Pierre Duhem, realizan, con tesis distintas, un examen crítico a los principios newtonianos. Las tesis de Poincaré influyeron profundamente en la joven generación científica de fines de siglo.

El experimento de Michelson (consistente en estudiar la propagación de dos rayos luminosos procedentes de un mismo haz, utilizando el interferómetro) de 1881, repetido con la colaboración de Morley en 1887, y su interpretación por Lorentz en 1895, sitúan el origen de las teorías relativistas en la época misma cuyo malestar acabamos de mostrar. Pero la historia de esas teorías pertenece propiamente a nuestro siglo, y exige un tratamiento separado. La verdadera conclusión del siglo XIX en el dominio de la Mecánica es precisamente esa constelación del malestar y las incertidumbres nacidas de la utilización misma de los principios clásicos, y del presentimiento de una novedad radical, aparentemente.

La profunda crítica de las medidas de longitud y duración que precisa el verdadero

carácter físico del vínculo establecido por el principio de relatividad entre el espacio y el tiempo; el tratamiento matemático de las cualidades que el punto de vista relativista sitúa o vuelve a situar necesariamente en el lugar de las cantidades de la Ciencia clásica; la importancia decisiva dada a la noción de energía por los esquemas ondulatorios, son otras tantas conquistas que sólo han podido cosechar después de los trabajos de Albert Einstein.

*Siglo XX...*

Al llegar a nuestro siglo, el siglo XX, se producen en sucesión una serie de acontecimientos y avances importantes, que hacen progresar todas las ciencias, y las nuestras en particular, y que demuestran que el techo de las investigaciones no se alcanza jamás, sino muy al contrario, animan al hombre a continuar en su empeño de avance. Nos referimos, en concreto, a:

- a) La publicación de libros excelentes en nuestras ramas específicas, tratando sobre todo de las modernas teorías de elasticidad y plasticidad y de métodos de cálculo cada vez más idóneos.
- b) El desarrollo de máquinas, instrumentos y técnicas de ensayo de materiales, junto con el ensayo de nuevos materiales. En concreto, debemos citar el hormigón armado, que tanto desarrollo cobra en este siglo, junto con los aceros, los perfiles laminados, aluminio, plásticos, etc., todos ellos revolucionarios y aún en proceso de mejoramiento y avance.
- c) El método de distribución de momentos; el estudio más profundo de la resistencia a la rotura y comportamiento plástico. En 1.930 el norteamericano Cross da a conocer su método de cálculo de estructuras reticulares hiperestáticas.
- d) La aparición de la revolucionaria teoría de la relatividad de Einstein, que tanto conmocionó toda la Mecánica clásica y racional.
- e) También en el estudio de las cimentaciones de los suelos se está avanzando a pasos rápidos; se conocen mejor los repartos de tensiones en el suelo y sus distintas características. Aparece la rama de la "Mecánica del suelo", cuyos principales fundamentos ha desarrollado el profesor Terzaghi.
- f) Y, finalmente, y quizás el no menor de todos los citados, la aparición de las calculadoras y el actual imperio creciente de los ordenadores, que está constituyendo un formidable aporte al análisis y diseño en la práctica profesional, hasta el extremo de hacer posible utilizar teorías clásicas, aunque para ello sea necesario resolver un elevado número de ecuaciones simultáneas: importa ya más la sistematización, que la simplificación; ya no se busca simplificar los métodos operatorios, puesto que el

ordenador calcula en tiempos ínfimos, sino metodizarlos, organizarlos de manera repetitiva; los métodos matriciales se van imponiendo cada vez más y son el futuro de todas las ciencias aplicadas, del Cálculo de Estructuras sobre todo.

Muchos son los científicos que han impulsado la nueva mecánica de nuestro siglo, dando pie a dos grandes revoluciones; la de 1905 (Relatividad restringida), provocada por Einstein, a la de 1923 (Mecánica ondulatoria), debida principalmente a Schrödinger.

Contrariamente a lo que sugerían las revoluciones de comienzos de siglo, la Mecánica de tipo clásico no es hoy una disciplina agotada. El haber tropezado en este siglo con más paradojas que el total de cuantas había conocido en siglos pasados, le ha servido para adquirir una mejor conciencia de sus límites, de la naturaleza de su método, sin comprometer su esencia. Sin duda se ha convertido en la cantera donde los más modernos recursos de las Matemáticas se conjugan con los de numerosas técnicas experimentales de todos los ordenes. Sin duda, el tiempo de los absolutos de tipo newtoniano ha concluido, y los fundamentos no quedan ya asegurados mediante una metafísica simplista.

Pero en su nueva elaboración axiomática, profundamente marcada por la Relatividad general, esta Mecánica conserva los trazos característicos de la Mecánica clásica. Trabaja sobre los mismos objetos, de los que además estudia la estructura con una mayor precisión, sigue las sugerencias de la experiencia, proyecta sobre sus problemas la creciente luz del razonamiento matemático y extrae del análisis los materiales útiles para perfeccionar los conceptos abstractos. Pero la Mecánica clásica no ha finalizado su desarrollo y sigue siendo para las otras ramas de la Física a la vez una encrucijada y un modelo privilegiado.

¿Que nos depara el Siglo XXI?. ¿Cuál es el futuro de nuestras disciplinas?. Lo hemos dicho ya y lo repetimos: no hay techo, no existe el fin...hay un reto a los hombres de ciencia, hay un reto a usar un polinomio muy complejo, con muchas variables: estudio, intuición, deducción, experimentación, laboratorio, ordenadores,...

## 1. 2.- Alcance de la MECÁNICA.

División clásica de la MECÁNICA, subrayando las materias de la MECÁNICA GENERAL:



Como vemos la mecánica de cuerpos rígidos se subdivide en estática y dinámica; la estática estudia los cuerpos en reposo y la dinámica los cuerpos en movimiento.

La dinámica se divide en cinemática y cinética; la cinemática estudia la geometría del movimiento sin referencia a las causas, la cinética estudia las relaciones entre las fuerzas y el movimiento que provocan.

Como las relaciones cinemáticas forman parte del estudio de la cinética, la palabra dinámica se utiliza con frecuencia para referirse a la cinética.

### 1. 3.- Unidades fundamentales y derivadas; Sistemas de Unidades.

El Sistema Internacional de unidades (S.I.), está suplantando rápidamente en todos los campos de la técnica a los viejos sistemas Métrico y Anglosajón.

En España, el S.I. es de uso obligatorio según ley 88/67. (ley 8 noviembre de 1967), está compuesto por seis unidades fundamentales, dos unidades suplementarias y veintisiete unidades derivadas.

SISTEMA	MASA	FUERZA	LONGITUD	TIEMPO	TIPO
Giorgi (S.I.)	kilogramo (kg)	Newtón N	metro (m)	segundo (seg)	absoluto
Métrico (cgs)	gramo (gr)	dina	centímetro (cm)	segundo (seg)	absoluto
Inglés (1)	libra (lbm)	poundal (pdl)	pie (ft)	segundo (seg)	absoluto
Métrico (MKS)	U.T.M. Geokilo	kilogramo (kgf ó kp)	metro (m)	segundo (seg)	gravitacional
Inglés (2) (USCS)	slug	libra (lbf)	pie (ft)	segundo (seg)	gravitacional
<b>Conversión de Unidades</b>					
Masa	Fuerza		Longitud		
1 slug = 32,2 lbm 1 slug = 14,59 kg 1 kg = 2,205 lbm	1 kp = 9.807 N = 2,205 lbf 1 lbf = 32,2 pdl = 4,448 N 1 N = 10 <sup>5</sup> dinas		1 pulg (in) = 2,54 cm 1 ft = 12 pulg = 30,48 cm 1 yarda (yd) = 3 ft 1 milla (mi) = 5280 ft = 1609 m		

Los sistemas S.I., cgs e inglés (1), por ser la masa invariable (unidad fundamental), se denominan "sistemas absolutos", los demás son "sistemas gravitacionales", por ser la fuerza una unidad fundamental.

### 1. 4.- Ley de la homogeneidad dimensional.

Todas las ecuaciones que describen procesos deben ser dimensionalmente homogéneas.

Recordemos las ecuaciones de dimensión y las magnitudes (S.I.) de los parámetros más utilizados en la Mecánica.

Parámetro	Ecuación de dimensiones (L,M,T)	Magnitudes (S.I.)
Longitud	L	m
Masa	M	kg
Tiempo	T	s
		<u>Nombre Usual</u>
Area	$L^2$	$m^2$
Volumen	$L^3$	$m^3$
Velocidad	$L T^{-1}$	m/s
Aceleración	$L T^{-2}$	$m/s^2$
Densidad	$M L^{-3}$	$kg/m^3$
Fuerza	$M L T^{-2}$	<b>N (Newton)</b> = $kgm/s^2$
Peso específico	$M L^{-2} T^{-2}$	$N/m^3$ = $kg/m^2s^2$
Presión	$M L^{-1} T^{-2}$	<b>Pa (Pascal ó bar)</b> , $N/m^2$ = $kg/ms^2$
Energía o Trabajo	$M L^2 T^{-2}$	<b>J (Julio)</b> , $N \cdot m$ = $kgm^2/s^2$
Potencia	$M L^2 T^{-3}$	<b>W (Watio)</b> , $J/s$ , $N \cdot m/s$ = $kgm^2/s^3$
Elasticidad	$M L^{-1} T^{-2}$	
Cantidad adimensional	$L^0$	

\*\*\* Magnitudes fundamentales en el S.I.

Cualquier parámetro puede ser expresado en función de los tres parámetros fundamentales, es decir, en función de L. M. T.

Cuando el número de variables o magnitudes físicas son cuatro o más, el Teorema de  $\pi$  (Pi) de Buckingham constituye una excelente herramienta, mediante la cual pueden agruparse estas magnitudes en un número menor de grupos adimensionales significativos, a partir de los cuales puede establecerse una ecuación. Los grupos adimensionales se llaman grupos o números  $\pi$ .

### 1. 4. 1.- Teorema de $\pi$ de Buckingham

En un sistema de medida que contiene "K" magnitudes fundamentales (generalmente tres; por ejemplo, masa o fuerza, longitud y tiempo); consideremos una función, representativa de un fenómeno físico en el que intervienen un total de "n" parámetros (magnitudes físicas),  $q$ , representativos de otras tantas magnitudes (tales como la velocidad, presión, área... etc.)

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

Sean  $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jk}$  las dimensiones de  $q$  respecto a las magnitudes fundamentales

$$|q_{jk}| = |a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jk}|$$

Si la característica de la matriz  $|q_{jk}|$  es  $t \leq k$ . Entonces la ecuación es reducible a otra equivalente de la forma:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-t}) = 0$$

Siendo  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-t}$  monomios adimensionales formados por productos de potencias de las variables  $q$  de forma que en cada uno entran  $(t+1)$  factores, formados por los "t" correspondientes al menor no nulo y uno de los  $(n-t)$  restantes pudiendo este último elevarse a-1 para facilitar el cálculo.

Generalmente  $t=k=3$ , siendo el procedimiento a seguir:

- 1. Se escriben las  $n$  magnitudes físicas  $q$ , que intervienen en un problema en particular, anotando sus dimensiones y el número  $k$  de dimensiones fundamentales. Existirán  $(n-k)$  números  $\pi$ .
- 2. Seleccionar tres de estas magnitudes, sin que haya ninguna sin dimensiones, ni dos iguales. Todas las dimensiones fundamentales deben incluirse colectivamente en las magnitudes seleccionadas.
- 3. El primer grupo  $\pi$  puede expresarse como el producto de las magnitudes escogidas, elevada cada una a un exponente desconocido, y una de las otras magnitudes elevada a una potencia conocida (normalmente se toma igual a uno).
- 4. Mantener las magnitudes escogidas en 2. como variables repetidas y escoger una de las restantes variables para establecer el nuevo número  $\pi$ . Repetir el procedimiento para obtener los sucesivos números  $\pi$ .
- 5. En cada uno de los grupos  $\pi$  determinar los exponentes desconocidos mediante el análisis dimensional.

**EJEMPLO:**

*Desarrollar una expresión que dé la distancia recorrida en el tiempo T por un cuerpo que cae libremente, suponiendo que la distancia depende del peso del cuerpo, de la aceleración de la gravedad y del tiempo.*

Solución:

El problema puede resolverse estableciendo que cierta función de la distancia s, el peso W, la aceleración de la gravedad g y el tiempo T es igual a cero, o bien matemáticamente.

$$f_1(s, W, g, T) = 0$$

- 1. Se enumeran las magnitudes y sus unidades.

$$s = \text{longitud } L, W = \text{fuerza } F, g = \text{aceleración } L/T^2, T = \text{tiempo } T$$

Existen 4 magnitudes físicas, 3 fundamentales, tendremos  $(4-3) =$  un número  $\pi$ .

- 2. Escogidas s, W y T como magnitudes físicas proporcionan las tres dimensiones fundamentales F, L y T.
- 3. Como las magnitudes físicas de dimensiones distintas no pueden sumarse ni restarse, el número  $\pi$  se expresa en forma de producto, como sigue:

$$\pi_1 = (s^{x_1}) (W^{y_1}) (T^{z_1}) (g)^{(1*)}$$

Aplicando la homogeneidad dimensional

$$F^0 L^0 T^0 = (L^{x_1}) (F^{y_1}) (T^{z_1}) (LT^{-2})$$

Igualando los exponentes de F, L y T, respectivamente, se obtiene.

$$0 = y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0$$

$$0 = x_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

$$0 = z_1 - 2 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2$$

sustituyendo en <sup>(1\*)</sup>,

$$\pi_1 = s^{-1} W^0 T^2 g = \frac{W^0 T^2 g}{s}$$

despejando s y poniendo  $k = 1/\pi_1$ , se obtiene.  $s = k g T^2$ .

### 1. 5.- Magnitudes escalares y vectoriales.

En mecánica hay magnitudes que están determinadas cuando se conoce el valor numérico (módulo) que representa su medida y la unidad adoptada. A estas magnitudes se les llama “*magnitudes escalares*”. Son ejemplos de magnitudes escalares; el tiempo, la longitud, la masa, la temperatura, la presión, la energía, etc...

Las “*magnitudes vectoriales*” son aquellas que además del valor numérico (módulo) que representa su medida y la unidad adoptada, es preciso conocer su dirección y sentido. Mientras que la dirección define simplemente la recta a lo largo de la cual se halla el vector, el sentido especifica cuál de las dos direcciones asociadas a esa recta está dándose a entender. Son ejemplos de magnitudes vectoriales; la fuerza, la velocidad, la aceleración, etc...

Existe otro tipo de magnitudes para las que el carácter escalar o vectorial es insuficiente, y hay que definir las con un mayor número de condiciones (nueve en un espacio tridimensional). A éstas se les llama “*magnitudes tensoriales*”. Su nombre procede de su primera aplicación que apareció en el estudio de las “tensiones” producidas por fuerzas en medios continuos.

### 1. 6.- Modelos básicos y marco de referencia.

La mayoría de los fenómenos físicos se pueden representar matemáticamente, utilizando idealizaciones con el fin de crear modelos básicos simplificados, también conocidos como modelos matemáticos o modelos ideales.

Esta idealización en modelos y el seguimiento del método experimental positivo definido por Bacon, Stuart Mill y sobre todo por la escuela del Positivismo Matemático de Mach, Poincaré y sus numerosas tendencias actuales, que parten del descubrimiento de la naturaleza de las cosas desde la perspectiva de quién no sólo especula sino que también mide y calcula, no sólo observa sino que prevé y predice, son las técnicas que permiten abordar problemas que de otra manera serían extremadamente difíciles de resolver.

**Son ejemplos de modelos básicos:**

Una **partícula** es un modelo matemático de un punto masa, sin dimensiones pero con masa, y su posición se puede especificar en el espacio.

Un **cuerpo rígido** (en mecánica) es un modelo matemático de un cuerpo material o de un sistema de partículas en la cual la distancia entre dos puntos masa cualesquiera permanece constante, no se deforma.

Como puede observarse la partícula supone una idealización de un cuerpo rígido, en el que se ha despreciado su tamaño. A su vez, el cuerpo rígido supone otra idealización, en este caso de un medio continuo, en el que se ha supuesto que la distancia entre dos puntos del medio se mantiene constante. El medio continuo también es la idealización de un cuerpo material, tratado como un sistema discreto de moléculas separadas por espacios vacíos.

Al igual que podemos idealizar los sistemas físicos, podemos idealizar las acciones físicas. así, la fuerza concentrada se trata como una fuerza finita que actúa sobre un área infinitesimal o sobre un punto.

Por último, cuando especificamos cantidades físicas suponemos que existe un marco de referencia con respecto al cual efectuamos las medidas.

Se califica de "referencia inercial" a un sistema de coordenadas ligado a una estrella fija en el espacio. Cualquier otro sistema que se mueva uniformemente y sin rotación con respecto a la estrella fija, también se puede utilizar como referencia inercial. No obstante, en la mayoría de los trabajos de ingeniería, el sistema de coordenadas se fija a la superficie de la tierra, pues el error que se comete, debido a su movimiento de rotación y traslación, es muy pequeño. En mecánica los sistemas de coordenadas más utilizados son: El rectangular, el polar, el cilíndrico, el normal y tangencial, y las coordenadas esféricas.

## 1. 7.- Leyes y principios fundamentales de la mecánica.

Las leyes y principios básicos sobre los que descansa la Mecánica fueron desarrollados a partir de la evidencia experimental. Los que siguen son fundamentales:

### Leyes de las fuerzas

#### .- Primera ley de Newton "sobre la inercia".

Todo cuerpo material permanece en su estado de reposo o movimiento uniforme, a no ser que como consecuencia de la acción de fuerzas externas se modifique su estado. La resistencia a cambio de estado de movimiento, o de reposo, es una **propiedad de la materia** que se denomina **INERCIA**.

#### .- Segunda ley de Newton "sobre el movimiento".

La rapidez de variación (derivada temporal) de la cantidad de movimiento  $[d_{dt} \cdot mv]$  es igual a la fuerza que lo produce, efectuándose el cambio en la dirección en que está actuando la fuerza.  $f = m \cdot a$  (para  $m$  constante)

**.- Tercera ley de Newton "de la acción y la reacción".**

A cada acción le corresponde una reacción igual y opuesta.

**.- Principio de D'Alembert.**

La suma de las fuerzas de inercia (o fuerzas efectivas invertidas) y de las fuerzas reales aplicadas es igual a cero.

**Leyes de la Energía.**

- .- Principio del trabajo virtual.**
- .- Principio de la energía potencial.**
- .- Principio del trabajo y la energía.**
- .- Principio de la conservación de la energía.**

**Otras leyes.**

- .- Ley del paralelogramo.
- .- Ley de superposición y la trasmisibilidad.
- .- Ley de la atracción universal de Newton.