REVISTA ESPANOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. XV, n. 48
1985
pp. 661-690

METODOS CUANTITATIVOS EN LA ADMINISTRACION. UNA APLICACION A LAS CUENTAS A COBRAR

Ignacio de L. Díaz Ruiz
Intendente Mercantil

1. INTRODUCCION

Cada día se impone con más fuerza la idea de las ventajas que reporta la aplicación de las modernas técnicas cuantitativas en la Administración.

En el plano científico, han sido numerosos los progresos alcanzados con el empleo de modelos matemáticos para el planteamiento y solución de múltiples problemas, abarcando a la casi totalidad de las áreas de la empresa.

A pesar de los diferentes nombres con que se designan los distintos métodos cuantitativos aplicados en la Administración: investigación operativa, análisis de sistemas, análisis costo-beneficio, etc.; todos tienen en común el empleo de las matemáticas como herramienta fundamental y persiguen un mismo objetivo: la racionalización sistemática de los procedimientos o métodos para la correcta toma de decisiones y, en definitiva, la solución más favorable de los problemas que afectan a la vida de la empresa.

Hoy en día es perfectamente posible conjugar las técnicas cuantitativas con la Informática de una manera rápida y eficaz y a un coste interesante, con resultados que avalan la idea antes señalada de la conveniencia de su utilización en la mayoría de los casos.

Estas modernas técnicas constituyen poderosos instrumentos que el verdadero profesional debe conocer y manejar. Si no resuelven la totalidad de las cuestiones que se suscitan en la problemática de la empresa y su entorno, sí serán sin duda una valiosa ayuda para la acertada toma de decisiones.

En el presente trabajo utilizamos un modelo matemático basado en las Cadenas de Markov para determinar la composición futura de la cartera de clientes, clasificada en grupos por razón de la antigüedad de los débitos, con expresión del número de cuentas e importe de saldos para cada grupo.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dentro de la diversidad de «cartera de clientes» que pueden darse en la vida real de la empresa, atendiendo tanto a la naturaleza de la misma por razón de su actividad (industrial, comercial, etc.) como a la modalidad bajo la que se produce la venta de sus productos (exclusivamente al contado, a crédito, pago a plazos, con *leasing*, etc.), se ha escogido para su estudio y aplicación el supuesto más general.

Se supone una cartera de clientes generada por una actividad comercial en marcha, con ventas al contado y a crédito —un mayorista, por ejemplo—, con las hipótesis y restricciones que se establecen en otro apartado respecto de su composición y evolución.

La concreción precedente, debemos aclarar, tiene más bien un carácter metodológico, por lo que no debe tomarse en sentido restrictivo. Así, pues, nada obsta para que la cartera de clientes pueda ser la correspondiente a una actividad cualquiera empresarial, incluida por tanto la típicamente financiera o bancaria, privada u oficial, en la que las cuentas de crédito constituyen aquella cartera por la suma de los préstamos otorgados.

Pues bien, en un momento determinado —supongamos al final de un ejercicio— se conoce la situación de la cartera de clientes a través de los datos que suministra la contabilidad debidamente implantada, con tratamiento informático de la información.

Insistimos en la conveniencia de contar con una contabilidad tratada con ordenador para la comodidad en el logro de los objetivos perseguidos. La no disposición de medios informáticos no impedirá la consecución de idénticos resultados; sin embargo, el tratamiento de la información necesaria —los datos a manejar— será más laborioso de realizar.

Expongamos el desarrollo del proceso. Con referencia la fecha 31-12-XX, por ejemplo, el Servicio de Proceso de datos de la empresa facilita al de Contabilidad un listado de la situación de los clientes a dicha fecha, conteniendo la siguiente información, en presentación horizontal, es decir, columnas del listado: 1. Código.—2. Apellidos, nombre o razón social.—3. Saldo fin mes anterior.—4. Cargos del mes.—5. Abonos del mes.—6. Saldo actual.—7. Antigüedad.—8. Grupo.

El listado en cuestión aparece totalizado al final, con expresión, además, del número total de clientes que comprende.

El significado de las columnas expresadas o conceptos no necesita explicación, salvo las dos últimas de «Antigüedad» y «Grupo», cuyo contenido y alcance pasamos a definir.

Identificamos «Grupo» como un ordinal establecido en función de la «Antigüedad» del débito de cada cliente. Esta clasificación que diseñamos a efectos de una formulación esquemática del modelo, obviamente es susceptible de ser alterada y ajustada en la forma que se desee. Persigue una agrupación de los clientes en razón de la antigüedad media de sus saldos.

Del Grupo I formarán parte los clientes cuyo débito más antiguo sin liquidar tenga una antigüedad inferior a dos meses. En el Grupo II, una antigüedad entre dos y cuatro meses; en el Grupo III, los que tengan una antigüedad entre cuatro y seis meses. A efectos de simplificación, no se contemplan en este trabajo más que los tres grupos descritos. Se supone que las ventas se formalizan a un plazo máximo de ciento ochenta días.

Adicionalmente entran en juego tres Grupos complementarios. El Grupo IV, que permitirá medir directamente la morosidad, al que le asignamos una antigüedad entre seis y nueve meses. De acuerdo con la política fijada por la Dirección de la empresa de saneamiento de activo, que asumimos en nuestra hipótesis, todo dédito con una antigüedad superior a nueve meses es automáticamente dado de baja en la cuenta de clientes y pasa a ser considerado como «crédito de dudoso cobro», con el tratamiento contable procedente y teniendo en cuenta la normativa fiscal vigente. Con vistas a identificación y ulterior utilización, creamos el Grupo V, que recogerá estas partidas dadas de baja en la cartera de clientes.

Asumimos igualmente el siguiente hecho real: En cualquier momento, un determinado débito, en cualesquiera de los Grupos I al IV, puede ser cancelado si se hace efectivo, esto es, si es cobrado. A estos créditos que tras haber sido cobrados en un período han sido baja en el Grupo correspondiente y que en definitiva han ido a acrecer la Tesorería, a efectos de nuestra exposición los encuadramos en el Grupo 0.

Una precisión ha de hacerse en orden a definir el alcance de la magnitud antigüedad, en el supuesto, generalmente frecuente en la práctica, de que un mismo cliente (cuenta) presente varios cargos por diferentes compras y uno o varios abonos por pagos —parciales o totales respecto a aquéllas— durante un período de tiempo. En este caso, la clasificación de antigüedad se hace atendiendo al criterio F.I.F.O., es decir, imputando el cobro al débito más antiguo. Si éste queda cancelado en su totalidad, el saldo de la cuenta se clarificará según la antigüedad de la siguiente partida debida en orden cronológico. Ilustraremos esto mediante un ejemplo. Supongamos que un cliente A tiene anotados tres cargos: unos de 5.000 pesetas con una antigüedad de ciento cincuenta días; otro de 8.000 pesetas de hace cien días, y un tercero de 10.000 pesetas que data de treinta días. Esta cuenta, con un saldo de 23.000 pesetas estará clasificada en el Grupo III. Si A abona 4.000 pesetas las 19.000 pesetas restantes permanecerán clasificadas en el mismo Grupo, al quedar pendiente un resto de 1.000 pesetas del primer cargo con una antigüedad de más de cuatro meses. Por el contrario, si A abona 5.000 pesetas, la cuenta, con un saldo de 18.000 pesetas, se reclasificará y pasará al Grupo II.

En posesión ya de la información precedente, vamos a exponer el objetivo de nuestro trabajo en orden a la cartera de clientes.

Como hemos visto, en fin de un período cualquiera nuestra cartera de clientes presenta una determinada estructura y composición. Conocemos no sólo el número e importe del débito de nuestros clientes, sino también cuál es la antigüedad de sus saldos. Podemos, además, obtener un listado ordenado por Grupos, cuyo resumen, que manejaremos para nuestros propósitos oportunamente, nos daría el número de clientes y suma de saldos para cada uno de los Grupos anteriormente definidos. Puede añadirse un dato complementario de especial relieve: el valor del saldo medio de cada Grupo. Se obtiene directamente dividiendo la suma de saldos entre el número de cuentas que comprende.

Dado que las cuentas con una antigüedad superior a nueve meses son baja automática en la Cartera y, por otra parte, las cuentas canceladas por haberse cobrado su saldo tampoco figuran en el Listado-Resumen, cuyo total se corresponde con los datos de la Contabilidad, resulta conveniente añadir los valores de estos dos últimos Grupos, que serían el V y el 0, respectivamente, antes descritos, con el fin de cuadrar en número e importe los datos entre dos períodos de tiempo consecutivos.

A esta magnitud nos referimos seguidamente.

La *información contable y estadística* de periodicidad al menos mensual, creemos que es necesaria y conveniente para conocimiento de los gestores de las diferentes áreas de la empresa, sin perjuicio de un flujo de información de mayor frecuencia para la disposición de ciertos datos. Estos pueden ser incluso diarios para determinados objetivos y/o requerimientos de los usuarios responsables.

Para nuestro propósito, sin embargo, la información mensual la consideramos suficiente, y así *el mes* aparece como duración elegida para estudiar y analizar los cambios cuantitativos y cualitativos en la composición de la cartera de clientes.

Por tanto, en fin del mes siguiente y de los meses sucesivos, nos será facilitada información antes aludida, cuyos resúmenes por Grupos, totalizados en número de clientes e importe de saldos, vamos a manejar con fines previsionales.

Se trata de determinar la estructura y composición de nuestra cartera de clientes al final del año siguiente, es decir, después de transcurridos doce meses —unidad elegida como período—, así como el volumen de cobros a realizar y de dudosos resultantes durante dicho año, todo ello mediante el tratamiento matemático de los resultados ofrecidos por la comparación entre la situación de la Cartera en fin de ejercicio —posición inicial o de partida— y un mes más tarde.

La simple comparación aritmética nos da un listado de diferencias en más y/o en menos, de significación estática, las cuales aparecen justificadas al conocerse el flujo de operaciones que se ha producido durante dicho período y que ha generado el paso de una situación a a otra (aspecto dinámico).

Como afirmábamos en la Introducción, el modelo matemático que vamos a emplear se basa en las Cadenas de Markov, en particular en las llamadas «cadenas absorbentes», y según puede observarse en la bibliografía referenciada al final, ha sido utilizado por algunos autores, en el área que tratamos, para el cálculo de la morosidad.

Dada la naturaleza esencialmente técnica del tema, obviamos al máximo las definiciones, conceptos y demostración de teoremas que soportan la teoría de las Cadenas de Markov. Encuadradas éstas en las matemáticas de los procesos estocásticos finitos, pueden consultarse, en su caso, en las obras especializadas que se citan en el último apartado de este trabajo.

No obstante, por constituir una variante original en relación a la literatura existente, sí desarrollamos matemáticamente la obtención de las fórmulas que aplicamos, por vía de ensayo, al caso práctico en el apartado 4. Dichas fórmulas, creemos, se aproximan más como modelo matemático a la casuística de la vida real en el área que tratamos, a pesar de las limitaciones de todo modelo econométrico o probabilístico para representar en términos matemáticos la realidad económica observable.

Es claro que los valores a manejar en las fórmulas —que para simplificación, en el ejemplo práctico, han sido tomados directamente de la comparación de los datos entre dos períodos consecutivos— pueden ser ponderados más ajustadamente, computando por ejemplo valores medios de varias series, con objeto de que los resultados finales se correspondan más exactamente con la realidad acontecida. Más adelante se volverá a incidir en este punto.

3. FORMULACION MATEMATICA DEL MODELO

3.1. Fundamentos matemáticos

En una cadena de Markov absorbente cualquiera de t estados, r estados absorbentes y s no absorbentes ($t=r+s$), la matriz de transición P toma la forma canónica o estándar siguiente:

$$P=\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & Q \end{array}\right] \quad [1], \text{ en la que}$$

I es una matriz identidad $r\times r$, O una matriz nula $r\times s$, R una matriz $s\times r$ y Q una matriz de orden $s\times s$, siendo r los estados absorbentes (los primeros) y los siguientes, s, los no absorbentes.

La matriz fundamental, N, de esta cadena absorbente viene dada por $N=I+QN$, $I=N-QN$, $I=(I-Q)N$ y, finalmente, $N=(I-Q)^{-1}$ [2], siendo N el número medio de pasos, antes de la absorción, que ha de permanecer en cada estado no absorbente, para cada estado inicial no absorbente.

Existe un teorema —cuya demostración omitimos— según el cual si en cada momento del proceso se incorporan x_i individuos al estado i, siendo z_i el número de individuos que se encuentran en dicho estado en el momento cero, se tiene que:

a) El número medio de individuos en el estado i tiende a y_i, siendo $y=xN$ [3], cualquiera que sea la composición (el valor) de z_i en el punto de partida, para un valor cualquiera de x_i, pero constante; y

b) La única distribución inicial para la cual el sistema está en equilibrio es $z=y$ [4].

En la fórmula [3], x es un vector fila cuyos componentes son todos nulos menos el primero, significando éste el valor de los individuos que se añaden o incorporan en cada paso o salto —período, para mejor identificación— del proceso al estado i. Su representación genérica sería $x=[x, o, o, \dots o]$, si la incorporación se produce en el estado primero.

Como según [3] N es la matriz fundamental del mismo orden s que Q (número de los estados no absorbentes), el vector x tendrá s elementos e y será también un vector fila de s elementos.

El valor de este vector y, entendido a efectos prácticos como la suma de sus componentes o elementos integrantes, será $y=x(n_{11}+n_{12}+\dots+$ $+n_{15})$ [5] (1), siendo $n_{11}, n_{12}, \dots n_{13}$ los valores de la primera fila de la matriz N, dado que el vector x tiene todos sus elementos nulos menos el primero.

Como corolario del teorema citado, se deduce que si x_i —número de individuos que se incorporan en cada paso (período) al proceso en el estado i— no es constante, el sistema no está en equilibrio y, por tanto, no se cumplen ni [3] ni [4].

---

(1) $y=[x, o, o, \dots o]\times N=[n_{11}, n_{12}, \dots n_{13}]\times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$

3.2. Parámetros y variables

Tratando de adaptarnos a la realidad en la contemplación del caso que analizamos de la cartera de clientes, el número nuevo de éstos en cada período mensual es variable. Como hemos expresado en el apartado precedente, identificamos el concepto de cliente con cuenta, y aunque el flujo operativo real implicará altas (clientes nuevos) y bajas (desaparición de clientes antiguos o simple cancelación de un saldo), es claro que el número de cuentas vivas en fin de cada mes será normalmente distinto, significando de hecho un número variable de altas/bajas en cada período.

Si a lo largo de un año, por ejemplo, la estadística de ventas nos revela que el número de nuevos clientes (cuentas), así como su importe es creciente, podemos determinar el incremento medio por período —en nuestro caso, un mes— e introducir este parámetro en el modelo matemático para conocer la composición de la cartera doce meses más tarde.

El incremento medio producido, en términos retrospectivos, puede estimarse como datos para proyectar los resultados hacia el futuro durante una duración igual, utilizándolo directamente, o bien reajustado en base a adjetivos comerciales realmente alcanzables (estudios de mercado, coyunturales, etc.), o en todo caso con fines de control presupuestario, es decir, previsionales, de indudable utilidad.

En la formulación matemática del modelo vamos a referirnos exclusivamente a una de las dos magnitudes que intervienen en la composición de la cartera de clientes: el número de éstos o cuentas; dejando el volumen de saldos, la otra magnitud, para el caso práctico, en que a través del saldo medio por Grupos se hará aplicación de ambas magnitudes.

Al utilizar la magnitud número de cuentas o de clientes nos encontraremos con la peculiaridad de las cantidades discretas, que no admiten más que valores enteros. Sin embargo, la hemos preferido en beneficio del mayor rigor en el desarrollo de la teoría matemática en que se basa el modelo.

3.3. Hipótesis y restricciones

Como el desarrollo del sistema opera con flujos de duración mensual, establecemos las siguientes hipótesis:

1.ª Que en el primer mes entran en el proceso x_1 nuevos clientes, siendo $x_1 > x_0$ o vector de entradas en situación de equilibrio.

2.ª Que en el segundo y sucesivos meses el número de nuevos clientes es creciente, esto es, $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_7$.

3.ª Que los diferentes valores de x_k, dentro de cada mes k, se incorporan a los respectivos estados (Grupos I al III, en nuestro caso) como nuevos clientes al final del período.

4.ª Por último —para determinar una fórmula sintética—, los valores de la serie del vector x de entradas de la hipótesis segunda, los expresamos en función del primero, x_1, variando en progresión geométrica de razón q, que representa precisamente el incremento medio mensual antes aludido.

Primeramente vamos a precisar qué se entiende por la «situación de equilibrio» aludida en la hipótesis primera.

Como hemos visto antes en el apartado 3.1, el proceso tiende a una posición de equilibrio, cualquiera que sea su composición inicial, si el número de entradas es constante en cada paso/período. Y la distribución inicial o final para la cual el sistema está en dicho equilibrio o tiende hacia él viene dada por $y = xN$ [3]. Pero como hemos señalado antes, el vector x de entradas es de hecho un escalar, ya que tiene todos sus componentes nulos menos el primero, es decir —trasladándonos a la realidad del ejemplo práctico—, cuando las entradas se producen únicamente (todas) por el Grupo I o primer estado del proceso. Esto no ocurrirá en la práctica, sino que las entradas se producirán en todos los estados. Una venta puede haberse concertado a pagar a sesenta días, a los noventa días o a los cinco meses, e inicialmente representan entradas en los Grupos I, II y III, respectivamente, con independencia del cobro efectivo a su vencimiento.

Obviamente, donde no se producirán «entradas» del exterior al proceso es en el Grupo IV (antigüedad entre seis y nueve meses), pues las ventas no se formalizan a un plazo superior a seis meses (véase párrafo 10 del apartado 2).

Así pues, el vector de entradas sería de la forma $x = [x_{I}, x_{II}, x_{III}, o]$, para adaptarnos en la exposición teórica al supuesto del ejemplo que al final desarrollamos.

La situación de equilibrio del proceso en este supuesto viene dada asimismo por la [3], $y = xN$, pero el valor del vector y es más complejo que antes. En efecto, como $N = [I - Q]^{-1}$, los valores de la matriz $N(4 \times$

$\times 4$); designándolos por n_{ij} darían lugar a las siguientes ecuaciones, siendo el vector de saldos resultantes $y = [s_1, s_2, s_3, s_4]$:

$$s_1 = n_{11}x_{\mathrm{I}} + n_{21}x_{\mathrm{II}} + n_{31}x_{\mathrm{III}}$$
$$s_2 = n_{12}x_{\mathrm{I}} + n_{22}x_{\mathrm{II}} + n_{32}x_{\mathrm{III}}$$
$$s_3 = n_{13}x_{\mathrm{I}} + n_{23}x_{\mathrm{II}} + n_{33}x_{\mathrm{III}}$$
$$s_4 = n_{14}x_{\mathrm{I}} + n_{24}x_{\mathrm{II}} + n_{34}x_{\mathrm{III}}$$

y

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = (n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14})x_{\mathrm{I}} + (n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24})x_{\mathrm{II}} + \\ + (n_{31} + n_{32} + n_{33} + n_{34})x_{\mathrm{III}} \qquad [7]$$

Por tanto, si son conocidas las probabilidades de transición de los estados absorbentes (matriz Q), el estado de equilibrio del proceso para un escalar dado $s_k = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$ —primer miembro de la [7]— viene determinado en función de los distintos valores del vector de entradas, x, y, naturalmente, de los valores n_{ij} de la matriz fundamental, N.

Es decir, dada una matriz Q cualquiera, los valores de N son una constante; x_{I}, x_{II} y x_{III} son variables independientes, y el valor de s_k será será función múltiple de x. Así, los valores que puede tomar s_k (soluciones) son infinitos, dado que el vector x puede contener —teóricamente— infinitas composiciones.

En el supuesto inverso, esto es, para un valor dado de s_k (sumatorio de elementos, individuos o cuentas del proceso en cada estado en situación de equilibrio), la variable x —vector de entradas— pasa a ser función de S_k y de N.

En principio, la solución es indeterminada, pues hay infinitos valores de x que satisfacen la [7], dados S_k y N.

Una solución teórica para hallar x se obtiene, sin embargo, aplicando la teoría de las «matrices inversas generalizadas», procedimiento de indudable interés para la resolución de un sistema de ecuaciones no homogéneo, es decir, con distinto número de ecuaciones que incógnitas.

En forma sintética, la ecuación [7] sería:

$$S = n_1x_{\mathrm{I}} + n_2x_{\mathrm{II}} + n_3x_{\mathrm{III}} \qquad [7\,b]$$

que representada en forma matricial (vectorial) tomaría la forma

$$[n_1, n_2, n_3]\begin{bmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ x_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = S$$

Premultiplicando ambos miembros por $[n_1, n_2, n_3]^{-1}$, tendremos:

$$\begin{bmatrix} x_{I} \\ x_{II} \\ x_{III} \end{bmatrix} = [n_1, n_2, n_3]^{-1} \times S \qquad [8]$$

Como

$$[n_1, n_2, n_3]^{-1} = \frac{1}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \times \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

finalmente, el vector de entradas, determinante de una situación de equilibrio en el proceso, sería:

$$X = \frac{1}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \times S \qquad [8\,b]$$

fórmula que nos dará los tres valores buscados de X: x_{I}, x_{II}, x_{III}.

Podemos comprobar que, efectivamente, éstos son una solución a la [7 b]. Asimismo, satisfacen la [3], de acuerdo con los valores de N y del vector de saldos S, de modo que

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = S_k \qquad [9]$$

Otro procedimiento para el cálculo del vector de entradas que mantenga la situación de equilibrio, conociendo S_k, es decir, el valor y composición del vector de saldos en un momento dado, s_1, s_2, s_3, s_4, parte de una hipótesis y del análisis del comportamiento del proceso y su transformación al avanzar éste un paso o salto; un mes en nuestro caso.

En efecto, si en el momento k el vector de saldos es $S_k = [s_1, s_2, s_3, s_4]$, después de un salto la composición sería: $S_{k+1} = [s_1, s_2, s_3, s_4] \times Q$.

Siendo el término general de la matriz Q, q_{ij}, los valores de S_{k+1} serían:

$$\begin{aligned} s'_1 &= s_1q_{11} + s_2q_{21} + s_3q_{31} + s_4q_{41} \\ s'_2 &= s_1q_{12} + s_2q_{22} + s_3q_{32} + s_4q_{42} \\ s'_3 &= s_1q_{13} + s_2q_{23} + s_3q_{33} + s_4q_{43} \\ s'_4 &= s_1q_{14} + s_2q_{24} + s_3q_{34} + s_4q_{44} \end{aligned} \qquad [10]$$

Al ser todos los términos de Q menores que uno por definición (cualquier $q_{ij} < 1$), los valores de S_{k+1} son todos respectivamente menores que los de S_k.

Lógicamente, si el proceso estaba en situación de equilibrio inicial, después de un salto «se ha desequilibrado», pasando a la composición $s_{k+1}=[S'_1, S'_2, S'_3, 0]$.

Para restablecer el equilibrio, nada más sencillo que agregar un vector de entradas —vector buscado— que sumado al S_{k+1} genere el primitivo S_k.

En principio, $S_x=S_k-S_{k+1}$. Ahora bien, como $S_x=X^x_1, X^x_2, X^x_3, 0]$, S'_4 tiene que ser igual a S_4, es decir, $S_1q_{14}+S_2q_{24}+S_3q_{34}+S_4q_{44}=S_4$. De donde,

$$S_4=\frac{S_1q_{14}+S_2q_{24}+S_3q_{34}}{1-q_{44}} \qquad [11]$$

única condición o limitación para el cálculo de S_x. Esta restricción es sencilla de obtener, dado que en la práctica q_{14} y q_{24} serán nulos por regla general. Por ello, una vez fijado el valor de S_3, S_4 vendrá dado por

$$\frac{S_3q_{34}}{1-q_{44}}$$

y S_1 y S_2 podrán combinarse en múltiples valores, con tal que la suma de ambos $S_1+S_2=S_4-(S_3+S_4)$, y que generen siempre valores de S_x todos positivos.

Así pues,

$$S_x=[(S_1-S'_1),\ (S_2-S'_2),\ (S_3-S'_3),\ 0] \qquad [12]$$

En el ejemplo del apartado 4, caso práctico, se hace uso del procedimiento que se acaba de describir para determinar el vector de entradas que mantiene la situación de equilibrio en que, se supone, se encuentra el proceso.

En otro caso, es decir, cuando q_{14} y q_{24} no sean nulos —supuesto que al menos en teoría debemos admitir—, los valores conocidos sólo serían S_1 y S_2, debiendo calcular los de S_3 y S_4 por medio de las fórmulas [11] y [9], como sigue:

$$\begin{aligned} &S_1q+S_2q+S_3q+S_4q=S_4 \\ &S_3+S_4=S_k-(S_1+S_2) \end{aligned} \qquad [13]$$

y resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, precedente.

3.4. Cálculo y desarrollo de la fórmula

Establecidas las hipótesis asumidas y analizadas y glosadas debidamente las restricciones introducidas, en las que se han definido y desarrollado ampliamente las condiciones de partida, a saber: equilibrio del proceso, los procedimientos teóricos y prácticos para el cálculo del vector de entradas y de la composición del vector de saldos, abordamos el planteamiento matemático que conduce a la fórmula del presente trabajo.

Si designamos por $Z^{(k)}$ la distribución o composición del número de cuentas en la cartera al final del período k (mes), siendo $0<k<n$, y el proceso se encuentra en equilibrio merced a la incorporación de X_k nuevos clientes —vector de entradas en los términos definidos en el apartado precedente.

Si consideramos la distribución al final de un períood cualquiera, k, en equilibrio como la inicial de $Z^{(0)}=[Z_{\mathrm{I}}, Z_{\mathrm{II}}, Z_{\mathrm{III}}, Z_{\mathrm{IV}}]$ y, consiguientemente, X_0 vector de entradas que mantiene en equilibrio el proceso, de acuerdo con las hipótesis 1.ª a la 4.ª establecidas al principio del apartado 3.3, decimos que al cabo de n meses la composición de la cartera sería

$$Z^n = X_0 q^{n+1} \times [qI-Q]^{-1} \qquad [14]$$

en la que X_0 y n acaban de ser definidos, Q es la matriz cuadrada de orden igual a los s estados no absorbentes e I —recordemos— matriz identidad del mismo orden, siendo q, según la hipótesis 4.ª, la razón de la variación, en progresión geométrica creciente, del vector de entradas X, a partir del vector de equilibrio $X_0=[X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{II}}, X_{\mathrm{III}}, 0]$.

En efecto. La distribución o composición de un vector, en una cadena de Markow, después de un salto o paso (en nuestro caso, período/mes), viene dada en función de la distribución inmediatamente anterior, y de la matriz Q de los estados no absorbentes, como una aplicación lineal, esto es, el producto de un vector fila de orden s por una matriz de orden $s \times s$, generando otro vector fila del mismo orden.

Así, la distribución del vector inicial de saldos (en número de cuentas) después de un mes será $Z^{(1)}=Z^{(0)}Q+X_1$, siendo $X_1=X_0 q$ el vector que representa los nuevos clientes incorporados al proceso, conforme a las hipótesis 1.ª/4.ª asumidas.

En forma desarrollada, este vector de entradas X_1 sería:

$$X_1=[X_{\mathrm{I}}^{(0)}q,\ X_{\mathrm{II}}^{(0)}q,\ X_{\mathrm{III}}^{(0)}q,\ 0]$$

Después de dos períodos, la distribución del vector de saldos sería, en forma sintética,

$$Z^{(2)}=Z^{(1)}Q+X_2$$

o sea,

$$Z^{(2)}=[Z^{(0)}Q+X_0q]\times Q+X_0q^2=Z^{(0)}Q^2+X_0\times(qQ+q^2)$$

Al final del tercer período:

$$Z^{(3)}=Z^{(2)}Q+X_3;\ Z^{(3)}=[Z^{(0)}Q^2+X_0(qQ+q^2)]\cdot Q+X_0q^3=$$
$$=Z^{(2)}Q^3+X_0(qQ^2+q^2Q+q^3)$$

Observando la ley de formación, al final del período k,

$$Z^{(k)}=Z^{(0)}Q^k+X_0(qQ^{k-1}+q^2Q^{k-2}+q^3Q^{k-3}+\ldots+q^{k-1}Q+q^k)$$

Asimismo, después de n períodos,

$$Z^{(n)}=Z^{(0)}Q^n+X_0(qQ^{n-1}+q^2Q^{n-2}+q^3Q^{n-3}+\ldots+q^{n-1}Q+q^n)$$

Examinando el contenido entre paréntesis del segundo miembro de la ecuación precedente, observamos que representa la suma de los términos de una matriz polinómica de orden n, completa, ordenada crecientemente respecto del escalar q y en forma decreciente en relación a la matriz Q. Es, pues, la suma de una serie de matrices, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q\cdot Q^{-1}$.

Por tanto, podemos aplicar la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica

$$S=\frac{A_n\cdot r-A_1}{r-1}$$

que nos es familiar, a dicha serie de matrices, y tendremos:

$$Z^{(n)}=Z^{(0)}Q^n+X_0\frac{q^nqQ^{-1}-qQ^n}{qQ^{-1}-1}=Z^{(0)}Q^n+X_0\frac{q^{n+1}-Q^n}{q-Q}$$

Para n suficientemente grande (en la práctica, para $n>10$), Q^n, sus diferentes valores, tienden a cero (2), y consiguientemente, $Z^{(0)}Q^n$ también tiende a cero, por lo que

(2) Como puede conocerse consultando en las obras de álgebra lineal que desarrollan la teoría de matrices, el comportamiento de las potencias de matrices para todos sus valores iguales o menores que uno (caso de las cadenas de Markow absorbentes) es idéntico al de las series convergentes de la forma $1, x, x^2, x^3, \ldots x^n$, para $x<1$, cuya suma, cuando $n\to\infty$ es igual a $(1-x)^{-1}$.

$$Z^{(n)}X_0\frac{q^{n+1}}{qI-Q}$$

introduciendo I como matriz identidad, de orden s igual al de Q.

Finalmente,

$$Z^{(n)}=X_0q^{n+1}[qI-Q]^{-1}$$

como queríamos demostrar.

Hemos desarrollado también la fórmula para el supuesto de que la incorporación de nuevos clientes al proceso, de acuerdo con las mismas hipótesis establecidas, varíen de un período a otro en progresión aritmética.

Este supuesto se adecua menos a la realidad. No obstante, consignamos el resultado final —omitiendo el desarrollo de su obtención— con fines meramente informativos y para satisfacer la posible curiosidad del aficionado al cálculo matricial:

$$Z^{(n)}=[X_0+dn-dQN]\times N \qquad [15]$$

siendo d la razón de la progresión aritmética, esto es, un vector fila de la forma $d=[d_{\text{I}}, d_{\text{II}}, d_{\text{III}}\ 0]$, de los incrementos de las entradas en los tres primeros estados, teniendo X_0, n y Q el mismo significado que en la [14]; y N, como sabemos, la matriz fundamental $[I-Q]^{-1}$.

4. CASO PRACTICO

A continuación presentamos la composición de la Cartera de Clientes de la empresa X, de acuerdo con lo expuesto en el apartado 2 de este trabajo, respecto de los Grupos allí definidos según la antigüedad de los saldos:

CUADRO 1
SALDOS AL 31-XII-1983

Grupos	Antigüedad (días)	Importe (pesetas)	Número de cuentas	Saldo medio del Grupo
I	0 a 30	1.500	7.500.000	5.000
II.	31 a 60	1.200	6.240.000	5.200
III	61 a 120	800	4.240.000	5.300
IV	121 a 180	320	1.632.000	5.100
TOTALES		3.820	19.612.000	5.134

CUADRO 2
INVENTARIO AL 31-I-1984

Grupos	Antigüedad (días)	Importe (pesetas)	Número de cuentas	Saldo medio del Grupo
I	0 a 30	1.540	7.772.000	5.047
II.	31 a 60	1.220	6.285.000	5.152
III	61 a 120	810	4.250.000	5.247
IV	121 a 180	328	1.696.000	5.171
TOTALES		3.898	20.003.000	5.142

Inicialmente, la matriz de transición del proceso la obtenemos de los datos contenidos en el detalle de los flujos habidos en cada Grupo, los cuales se reflejan en los siguientes estados:

GRUPO I

Saldo ant.	(1.500)	7.500.000	Cobros	(750)	3.713.000
Entr. del I	(36)	187.000	Salidas al II	(525)	2.635.000
Altas (ext.)	(1.279)	6.433.000	Saldo final	(1.540)	7.772.000
	(2.815)	14.120.000		(2.815)	14.120.000

GRUPO II

Saldo ant.	(1.200)	6.240.000	Cobros	(576)	2.984.000
Entr. del I	(525)	2.635.000	Sal. al I	(36)	187.000
Entr. del III	(32)	170.000	Sal. al III	(444)	2.290.000
Entr. del IV	(32)	41.000	Saldo final	(1.220)	6.285.000
Entr. del ext.	(511)	2.660.000			
	(2.276)	11.746.000		(2.276)	11.746.000

GRUPO III

Saldo ant.	(800)	4.240.000	Cobros	(352)	1.860.000
Entr. del II	(444)	2.290.000	Sal. al II	(32)	170.000
Entr. del IV	(16)	82.000	Sal. al IV	(288)	1.510.000
Entr. del ext.	(222)	1.178.000	Saldo final	(810)	4.250.000
	(1.482)	7.790.000		(1.482)	7.790.000

GRUPO IV

Saldo ant.	(320)	1.632.000	Cobros	(80)	412.000
Entr. del III	(288)	1.510.000	Sal. al II	(8)	41.000
			Sal. al III	(16)	82.000
			Bajas	(176)	911.000
			Saldo final	(328)	1.696.000
	(608)	3.142.000		(608)	3.142.000

Seguidamente presentamos, en el cuadro 3 (a efectos de facilitar la impresión lo descomponemos en las partes A y B), el resumen de flujos de los cuatro Grupos, sólo en número de cuentas, consignando en el A las salidas y en el B las entradas.

CUADRO 3A
RESUMEN GENERAL DE FLUJOS EN NUMERO DE CUENTAS

Grupos	Invent. 31-XII-83	SALIDAS							Saldos (prov.)
		Cobros	Al I	Al II	Al III	Al IV		TOTAL	
I	1.500	750	—	525	—	—	—	1.275	225
II.	1.200	576	36	—	444	—	—	1.056	144
III	800	352	—	32	—	288	—	672	128
IV	320	80	—	8	16	—	176	280	40
	3.820	1.758	36	565	460	288	176	3.283	537

CUADRO 3B
RESUMEN GENERAL DE FLUJOS EN NUMERO DE CUENTAS

Grupos	Saldos (del 3A)	ENTRADAS						Exist. al 31-I-84
		Del I	Del II	Del III	Del IV	TOTAL	Del ext.	
I	225	—	36	—	—	261	1.279	1.540
II.	144	525	—	32	8	709	511	1.220
III	128	—	444	—	16	588	222	810
IV	40	—	—	288	—	328	—	328
	537	525	480	320	24	1.886	2.012	3.898

La inclusión de las SALIDAS y SALDOS (provisionales), cuadro 3 A, antes que las ENTRADAS, cuadro 3 B, en contra de la confección y presentación ortodoxa y habitual de un estado de movimiento de existencias entre dos fechas dadas, ha sido intencionada, y ello con el fin de permitir que se haga evidente el cálculo de los coeficientes o términos de la Matriz de Transición del sistema. Pues bien, todos ellos se obtienen directamente de los datos contenidos en dicho cuadro 3 B.

En efecto. Para calcular dicha matriz de transición, que en su forma canónica es, como sabemos,

$$P=\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & Q \end{array}\right]$$

(véase párrafo primero del apartado 3.1), basta dividir los valores de las distintas columnas de las SALIDAS, para cada fila o Grupo, entre el valor correspondiente de la existencia inicial, en este caso la columna de «Inventario al 31-XII-1983».

Los coeficientes obtenidos significan las probabilidades de transición ocurridas en cada estado o Grupo después de un mes. Así, por ejemplo, las 750/1.500=0,50 indican que la mitad de las cuentas han sido cobradas; 525/1.500=0,35 (por pase al Grupo II) que el 35 por 100 de las cuentas iniciales no se han cobrado, pero han envejecido, y tienen ahora una antigüedad entre uno y dos meses, y, por último, que el 15 por 100 (225/1.500=0,15) de las cuentas continúan clasificadas en el Grupo de origen, pues mantienen una antigüedad inferior a un mes. Para recoger esta última circunstancia —los valores que permanecen en cada estado originario después de un paso o período (un mes, en nuestro caso)— es por lo que hemos habilitado la última columna del cuadro 3 A, «SALDOS (provisionales)», es decir, antes de las entradas, tanto las procedentes de los ditsintos estados o Grupos como del exterior.

De acuerdo con lo que acabamos de exponer, la matriz de transición resultante es la siguiente:

CUADRO 4
MATRIZ DE TRANSICION
(En función del número de cuentas)

Grupos	Cobros	Bajas	I	II	III	IV
Cobros	1	0	0	0	0	0
Bajas	0	1	0	0	0	0
I...	0,50	0	0,15	0,35	0	0
II.	0,48	0	0,03	0,12	0,37	0
III	0,44	0	0	0,04	0,16	0,36
IV	0,25	0,55	0	0,025	0,05	0,125

Dentro de la matriz particionada precedente, siguiendo la notación de la fórmula [1] antes citada, identificamos las siguientes matrices: En el cuadrante superior izquierdo, la matriz identidad I (2×2); en el superior derecho, la matriz nula 0 (2×4); en el inferior izquierdo, la matriz R (4×2), *y* por último, la matriz Q $(4\times4$, de los estados no absorbentes, con la que seguidamente vamos a operar.

Apenas mencionada en la parte teórica, la matriz R la utilizaremos en este apartado para determinar el montante de cobros y bajas que se producirían durante el próximo ejercicio, en consonancia con las mismas hipótesis asumidas para el cálculo de la composición de la Cartera un año más tarde.

Para determinar el vector de entradas en situación de equilibrio, hallamos $S^{(1)}$ multiplicando $S^{(0)}$ por Q. El valor que se obtiene para $S^{(1)}$ es el vector [261, 709, 588, 328] y, por tanto, el vector de entradas que mantiene el proceso en equilibrio, X_0, será igual a $S^{(0)}-S^{(1)}$, a saber:

$$S^{(0)}=[1.500,\ 1.200,\ 800,\ 320] \quad \text{y} \quad X_0=[1.239,\ 491,\ 212,\ -8] \quad (3)$$

(3) La aparición del componente negativo en el cuarto elemento del vector no ha sido intencionada, pero requiere una explicación adicional respecto de su significado y alcance. Corresponde, como sabemos, al Grupo IV, que mide la morosidad directamente, y el signo menos indica, por tanto, salida en vez de entrada. Nada impide que operemos con dicho vector, tal cual se obtiene de la diferencia $S^{(0)}-S^{(0)}Q$. Teóricamente, es lo correcto. Pero por tratarse de un supuesto práctico preferimos anular el valor de ese cuarto elemento, a fin de que los sucesivos vectores de entrada no se vean afectados por el factor q de crecimiento en lo que se refiere a dicho elemento negativo.

Es claro que los valores de este vector mantienen la condición de equilibrio del proceso, pues al aplicarlo en la fórmula [3] (véase párrafo 4.° del apartado 3.1) genera el vector $S^{(0)}$, es decir, $S^{(0)}=X_0N$.

Del vector de equilibrio X_0 que acabamos de obtener —vector puro del proceso— vamos a eliminar el cuarto elemento, $x_4=-8$, para adaptarnos estrictamente a las hipótesis establecidas: entradas del exterior (ventas) sólo en los Grupos I, II y III, debiendo, por tanto, ser cero las del Grupo IV.

El vector ajustado sería $X'_0=[1.239,\ 491,\ 212,\ 0]$, pero simultáneamente hemos de reajustar también las matrices Q y R del sistema. Veamos estos ajustes:

Como $x_4=S^{(0)}-S_4^{(1)}$, y x_4 tiene que ser cero, $S_4^{(0)}-S_4^{(1)}=0$.

Dado que $S_4^{(1)}=S_3^{(0)}\cdot q_{34}+S_4^{(0)}\cdot q_{44}$; si admitimos que todos los valores de Q, q_{ij}, salvo la q_{44}, permanecen invariables, el valor de este elemento que hace cero (anula) x_4 será:

$$q_{44}=\frac{S_4^{(0)}-S_3^{(0)}q_{34}}{S_4^{(0)}}$$

lo que nos da un valor de 0,10 (32/120). Es decir, el saldo provisional del Grupo IV, en el cuadro 3 A, debería ser 32 en vez de 40; por lo que, manteniendo invariables los Cobros y las salidas a los Grupos II y III, las Bajas o morosos habrían sido 184 cuentas, en lugar de las 176 habidas realmente.

De ahí que el valor del elemento r_{42} de la Matriz R pase a ser 0,575 (184/320), frente a los 0,55 que antes tenía.

Tenemos, pues, que:

a) $X'_0=[1.239,\ 491,\ 212,\ 0]$ es el vector de entradas, ajustado, de equilibrio.

b) $$Q'_0=\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0{,}03 & 0{,}12 & 0{,}37 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 0{,}16 & 0{,}36 \\ 0 & 0{,}025 & 0{,}05 & 0{,}10 \end{bmatrix}$$

matriz, ajustada, de los estados no absorbentes, y

c) $$R'_0=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0 \\ 0{,}48 & 0 \\ 0{,}44 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}575 \end{bmatrix}$$

matriz, ajustada, de la transición de los estados no absorbentes a los absorbentes.

Comparando los inventarios, en número de cuentas, al 31-I-1984 y el inicial al 31-XII-1983 (cuadros 3 B y 3 A, respectivamente), deducimos el incremento neto de la cartera durante el mes de enero, que ha sido de 78 cuentas en términos absolutos, y de un 2 por 100, aprixamadamente, en términos relativos: $(78\times 100)/3.720=2{,}042$ por 100.

Si estimamos que este porcentaje puede representar el incremento medio acumulativo mensual de la cartera (véase penúltimo párrafo del apartado 2) durante el resto del ejercicio, de acuerdo con la hipótesis 4.ª establecida en el apartado 3.3, el valor de q sería igual a 1,02.

Disponemos ya de todos los datos para calcular la composición de la cartera al 31-XII-1984, estimando un incremento mensual del 2 por 100 en las entradas (ventas=nuevas cuentas). Es decir, si las entradas del exterior según el vector de equilibrio ajustado, X'_0, eran de 1.239, 491 y 212 cuentas en los Grupos I, II y III, respectivamente, las del mes de enero serían: 1.263, 500 y 216, resultados de multiplicar las primeras por 1,02.

Aplicando la fórmula [14], tendríamos:

$$Z^{(12)}=[1.239,\ 491,\ 212,\ 0]\cdot 1{,}02^{13}\cdot[1{,}02\cdot I-Q']^{-1}$$

Como la matriz inversa de $[1{,}02\ I-Q']$, a la que llamamos M,

$$\text{es } M=\begin{bmatrix} 1{,}1654 & 0{,}4645 & 0{,}2045 & 0{,}0800 \\ 0{,}0398 & 1{,}1547 & 0{,}5084 & 0{,}1989 \\ 0{,}0024 & 0{,}0684 & 1{,}2200 & 0{,}4774 \\ 0{,}0012 & 0{,}0351 & 0{,}0801 & 1{,}1183 \end{bmatrix}$$

tenemos, finalmente, que $Z^{(12)}=[1.894,\ 1.497,\ 985,\ 375]$, esto es, el número de cuentas existentes en 31-XII-1984 en cada uno de los Grupos I al IV, establecidos según la antigüedad.

Utilizando el vector puro $X_0=[1.239,\ 491,\ 212,\ -8]$, el resultado hatado habría sido idéntico, salvo lógicamente para el Grupo IV, ajustado: $Z'^{(12)}=[1.894,\ 1.497,\ 985,\ 385]$.

Si operamos ahora con los flujos monetarios, en vez de con el número de cuentas, en base a los datos que se contienen en los estados de movimientos de los Grupos I al IV que antes hemos utilizado, obtendríamos el siguiente resumen, con presentación semejante a los cuadros 3 A y 4 A:

CUADRO 5A
RESUMEN GENERAL DE FLUJOS
(En miles de pesetas)

Grupos	Saldos 31-XII-1983	SALIDAS (enero 1984)							Saldos (prov.)
		Cobros	Al I	Al II	Al III	Al IV	Bajas	TOTAL	
I	7.500	3.713	—	2.635	—	—	—	6.348	1.152
II	6.240	2.984	187	—	2.290	—	—	5.461	779
III	4.240	1.860	—	170	—	1.510	—	3.540	700
IV	1.632	412	—	41	82	—	911	1.446	186
	19.612	8.969	187	2.846	2.372	1.510	911	16.795	2.817

CUADRO 5B
RESUMEN GENERAL DE FLUJOS
(En miles de pesetas)

Grupos	Saldos (del 5A)	ENTRADAS (enero 1984)						Saldos 31-I-1984
		Del I	Del II	Del III	Del IV	TOTAL	Del ext.	
I	1.152	—	187	—	—	187	6.433	7.772
II	779	2.635	—	170	41	2.846	2.660	6.285
III	700	—	2.290	—	82	2.372	1.178	4.250
IV	186	—	—	1.510	—	1.510	—	1.696
	2.817	2.635	2.477	1.680	123	6.915	10.271	20.003

Operando de la forma anteriormente expuesta, la matriz de transición resultante sería:

	Cobros	Bajas	I	II	III	IV
Cobros	1	0	0	0	0	0
Bajas	0	1	0	0	0	0
I	3.713/7.500	0	1.152/7.500	2.635/7.500	0	0
II	2.984/6.240	0	187/6.240	779/6.240	2.290/6.240	0
III	1.860/4.240	0	0	170/4.240	700/4.240	1.510/4.240
IV	412/1.632	911/1.632	0	41/1.632	82/1.632	186/1.632

Los valores de R y Q, con cuatro decimales, serían:

$$R=\begin{bmatrix} 0{,}4951 & 0 \\ 0{,}4782 & 0 \\ 0{,}4387 & 0 \\ 0{,}2525 & 0{,}5582 \end{bmatrix} \qquad Q=\begin{bmatrix} 0{,}1536 & 0{,}3513 & 0 & 0 \\ 0{,}0300 & 0{,}1248 & 0{,}3670 & 0 \\ 0 & 0{,}0401 & 0{,}1651 & 0{,}3651 \\ 0 & 0{,}0251 & 0{,}0502 & 0{,}1140 \end{bmatrix}$$

El vector de entradas que mantiene la situación de equilibrio, en pesetas, vendría dado como anteriormente por $X_0=S^{(0)}-S^{(0)}\cdot Q$, y siendo $S^{(0)}=[7.500.000,\ 6.240.000,\ 4.240.000,\ 1.632.000]$, el vector «puro» de equilibrio sería $X_0=[6.160.800,\ 2.615.111,\ 1.167.970,\ -63.912]$.

Si hacemos $x_4=0$, reajustaríamos los valores de q_{44} y r_{42} en la matriz de transición, conforme hicimos al operar con número de cuentas, y obtenemos: $q'=0{,}074838$ (que hace cero a x_4) y $r'=0{,}597362$; quedando, pues, las matrices Q' y R' con todos sus valores iguales a Q y R, salvo los dos términos citados.

Aplicando éstos a la órmula [14], obtenemos:

$$Z^{(12)}=X'_0\cdot q^{n+1}\times[q\cdot I-Q']^{-1}$$

y sustituyendo valores

$$Z^{(12)}=[6.160.800,\ 2.615.511,\ 1.167.970,\ 0]\times 1{,}02^{13}\times$$
$$\times[1{,}02\ I-Q']^{-1}$$

Si llamamos M a la matriz inversa de $[1{,}02\cdot I-Q']$, cuyo valor es:

$$M=\begin{bmatrix} 1{,}1705 & 0{,}4708 & 0{,}2067 & 0{,}0779 \\ 0{,}0402 & 1{,}1611 & 0{,}5097 & 0{,}1920 \\ 0{,}0024 & 0{,}0688 & 1{,}2264 & 0{,}4621 \\ 0{,}0012 & 0{,}0345 & 0{,}0787 & 1{,}0877 \end{bmatrix}$$

tenemos, finalmente, que $Z^{(12)}=[9.468.118,\ 7.784.576,\ 5.224.828,\ 1.968.641]$, es decir, el volumen de saldos vivos de la cartera al 31-XII-1984, en cada uno de los Grupos I al IV.

Utilizando el vector 'puro' X_0, así como la matriz original Q, el valor sería $Z^{(12)}=[9.468.019,\ 7.784.131,\ 5.223.922,\ 1.961.879]$, donde, obviamente, sólo existe diferencia sensible en el Grupo IV, cuyo coeficiente primitivo (q_{44} de la matriz Q) fue reajustado.

A continuación presentamos la composición de la cartera al 31-XII-1984, obtenida conforme a las hipótesis y restricciones formuladas, conjuntando los valores hallados en número de cuentas y en pesetas:

CUADRO 6
SALDOS AL 31-XII-1984

Grupos	Antigüedad (días)	SALDOS		Salmo medio del Grupo
		Número de cuentas	Importe (pesetas)	
I	0 a 30	1.894	9.468.118	5.000
II	31 a 60	1.497	7.784.576	5.200
III	61 a 120	985	5.224.828	5.304
IV	121 a 180	375	1.968.641	5.250
TOTALES		4.751	24.446.163	5.145

El cuadro precedente ha recogido los resultados obtenidos al aplicar a la fórmula [14] los valores ajustados, tanto del vector de equilibrio como de la matriz Q.

En comparación con los datos del cuadro 1, al 31-XII-1983, podemos observar cómo permanecen sin variación los saldos medios de los Grupos I y II; el del Grupo III, ligeramente superior; y con apreciable incremento en el Grupo IV: 5.250 pesetas frente a 5.100 pesetas.

Operando con los vectores 'puros' de equilibrio y, por tanto, con las matrices Q originales, los valores de los saldos medios de cada Grupo, así como del total, se mantienen constantes, salvando las diferencias de las operaciones intermedias por redondeo en los cálculos.

Podemos, pues, en la práctica operar directamente con el 'vector puro' de equilibrio y con las matrices R y Q generadas por el proceso observado, es decir, tal cual se deducen de la matriz particionada de transición, sin que ello afecte a la validez de los resultados finales.

Estos últimos sí se ven afectados, en cambio, en lo que se refiere a la determinación de la previsión de Cobros y Bajas (dudosos) durante el ejercicio de 1984, tema del que para completar y concluir este supuesto práctico, pasamos a ocuparnos a continuación.

Para un período cualquiera, los Cobros y Bajas vienen dados en función de los saldos finales del período precedente y de los valores de la matriz R de los dos estados absorbentes que tiene el proceso, a saber: Estado 0, Cobros, y Estado 5, Bajas o créditos dudosos.

Así, pues, el producto $S_{k-1}R$ nos dará el valor de los cobros y bajas habidos en período k.

En un proceso estacionario, o con más precisión, en situación de equilibrio permanente —caso teórico—, como S_k es constante, al cabo de un año, doce pasos o meses en nuestro caso, el total de cobros y bajas sería: $T=12\cdot S_k\cdot R$. Siendo S_k un vector fila de orden 1×4 y R una matriz 4×2, el producto resultante, T, es un vector fila 1×2.

En nuestro ejemplo, los cobros y bajas del mes de enero de 1984, utilizando la matriz R sin reajustar, expresados en pesetas, serían:

$$T_s=[7.500.000,\ 6.240.000,\ 4.240.000,\ 1.632.000]\times\begin{bmatrix}0{,}4951 & 0\\ 0{,}4782 & 0\\ 0{,}4387 & 0\\ 0{,}2525 & 0{,}5582\end{bmatrix}=$$

$$=[8.969.386,\ 910.982]$$

correspondiendo a

$$T_c=[1.500,\ 1.200,\ 800,\ 320]\times\begin{bmatrix}0{,}50 & 0\\ 0{,}48 & 0\\ 0{,}44 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}55\end{bmatrix}=[1.758,\ 176]$$

cuentas cobradas y dadas de baja, respectivamente.

El producto de los vectores T_c y T_s por doce, nos daría el montante de los cobros y de las bajas durante el año, en el supuesto de equilibrio permanente de la cartera, que no es nuestro caso.

En el supuesto contemplado en este trabajo, los valores de S_k son variables al final de cada período, pues vienen afectados por el incremento del vector de entradas, a partir del equilibrio inicial, en progresión geométrica de razón q, como hemos visto, lo que no nos permite aplicar la fórmula precedente.

Para su aplicación al proceso de variación de la cartera que comentamos, al que responde la repetida fórmula [14], cuya composición al 31-XII-1984 acabamos de obtener, hemos deducido la fórmula que a continuación consignamos, y que nos permite estimar con una aproximación suficiente los cobros y bajas que se producirán durante todo el año 1984:

$$T'=S'\times R \qquad [16]$$

donde

$$S'=X_0q\frac{q^{12}-1}{q-1}[q\cdot I-Q]^{-1} \qquad [17]$$

$$S' \approx \Sigma_1^{12} Sn \quad \text{y} \quad T' \approx \Sigma_1^{12} Tn$$

en los que los segundos miembros de estas dos últimas expresiones representan los valores exactos del problema.

El vector S' de la [17] representa, pues, las sumas acumuladas, aproximadas, de los saldos finales de los doce últimos meses (se incluyen los saldos iniciales de diciembre de 1983 y, por tanto, se excluyen los de diciembre de 1984, ya que estos últimos no juegan a efectos de cobros y bajas en 1984) para cada uno de los Grupos I al IV establecidos.

De acuerdo con los valores exactos obtenidos mediante un programa de ordenador, los resultados de la fórmula [17] son ligeramente inferiores a aquéllos, y para varios muestreos el error ha sido siempre inferior al 1 por 100. Ello la hace utilizable con suficientes garantías de fiabilidad para su aplicación al problema planteado.

En nuestro ejemplo, la suma de saldos acumulados sería:

a) Operando con el vector 'puro':

$$S' = [6.160.800,\ 2.615.511,\ 1.167.870,\ -63.912] \times 1{,}02 \times$$

$$\times \frac{1{,}02^{12}-1}{1{,}02-1} \times [qI-Q]^{-1} =$$

$$= [100.127.528,\ 82.319.845,\ 55.244.757,\ 20.747.542] \quad \text{(A1)}$$

siendo los valores exactos: 100.174.601, 82.470.393, 55.469.632 y 20.934.880 pesetas, respectivamente, calculados con ordenador.

b) Operando con el vector de equilibrio ajustado y con Q':

$$S'_1 = [100.128.577,\ 82.324.552,\ 55.254.335,\ 20.819.048] \quad \text{(A2)}$$

y sus valores exactos: 100.174.639, 82.471.855, 55.472.925 y 20.988.175 pesetas.

Por último, los cobros y bajas que se producirían en 1984 serán:

a) Operando sobre A1:

$T' = S' \times R$. Y sustituyendo valores, en miles de pesetas enteras, $T' = [49.573+39.365+24.236+5.239),\ 11.581]$ (A3), con el detalle de cobros por Grupos, o bien, $T' = [118.413,\ 11.581]$, que nos darían los totales de cobros y bajas del año.

b) Operando sobre A2, los valores de T', expresados también en miles de pesetas enteras, serían:

$T'=[(49.596+39.438+24.336+5.300), 12.538]$ (A4), o bien, totalizando los cobros de los cuatro Grupos, $T'=[118.670, 12.538]$

Para terminar, vamos a comparar los cobros y bajas según (A3) y (A4) con el sumatorio de las entradas mensuales, esto es, las ventas anuales previstas.

Siendo el vector de entradas de equilibrio ajustado X_0, y $X_0 \times q$ las entradas o ventas del mes de enero, el vector de ventas anuales vendría dado por

$$V_t = X_0 \times q \times \frac{q^{12}-1}{q-1} \qquad [18]$$

Sustituyendo valores y expresado en miles de pesetas enteras,, el vector de ventas de 1984 sería:

$V_t=[84.282, 35.781, 15.978, 0]$, correspondiendo a los Grupos I, II y III, respectivamente, y un total de 136.041.000 pesetas en números redondos.

Como antes decíamos, los valores de (A3) y (A4) pueden compararse con los de V_t para extraer los *ratios* correspondientes de Cobros/Ventas por Grupos.

Asimismo, las Bajas o fallidos del año [11.581.000 pesetas según (A3) ó 12.538.000 pesetas según (A4)] pueden compararse con las ventas totales de 136.041.000 pesetas, o con el total acumulado de los saldos morosos —Grupo IV— [cuarto elemento de dichos vectores (A3) o (A4)], según los *ratios* de gestión que se deseen.

5. CONCLUSIONES

Como puede deducirse de la lectura de los apartados precedentes, el presente trabajo ha girado alrededor de un punto central de partida: la clasificación de la cartera de clientes atendiendo a un criterio de antigüedad de los saldos vivos en el origen y su agrupación sistemática con miras a una proyección futura, susceptible de tratamiento matemático.

Desde aquella base y con esa perspectiva, se ha profundizado en el estudio y análisis de la teoría que soporta el modelo que se ha diseñado, para adecuarlo al máximo a los supuestos dables en la vida real, En este intento de aproximar a la realidad los materiales o instrumentos técnicos disponibles, es decir, la teoría matemática afín al tema (en nuestro caso las cadenas de Markov absorbentes), hemos concentrado nuestros esfuerzos en hallar las posibles alternativas o variantes que podrían introducirse en el modelo original.

Para ello hemos analizado cuidadosamente el significado y comportamiento del vector de equilibrio, los modos de obtención y la medición de sus efectos al actuar sobre las matrices del sistema. Desde el punto de vista teórico, creemos constituyen un ensayo y representan un intento de aportar nuevas ideas o sugerencias a conceptos de carácter matemático bastante especializado, y por ello, con frecuencia no muy familiares a nosotros, los profesionales de la Contabilidad y de la Economía.

Una de dichas variantes, pensamos, la constituye el supuesto desarrollado teóricamente en el apartado 3.º, según el cual la composición de la cartera de clientes no se encuentra en situación de equilibrio permanente, por lo que es preciso formular una o varias hipótesis acerca de su comportamiento futuro.

En las fórmulas deducidas sólo se contempla el supuesto de un crecimiento constante y regular —progresión geométrica—, pero nada impide adaptar dichas fórmulas a un caso más genérico. Es decir, es perfectamente correcto desde el punto de vista matemático que el crecimiento anual sea negativo, en cuyo caso la razón q será menor que la unidad. O bien que a lo largo de un año la cartera de clientes sea cuantitativamente igual (o aproximadamente igual) en número de cuentas y en importe, pero la estructura de su composición sea notablemente diferente como consecuencia de haberse producido desplazamiento de las masas internas entre los grupos clasificatorios de cuentas y saldos según la antigüedad. Esto último revelaría que la gestión de los Departamentos de Ventas y/o Cobros ha variado con respecto al pasado o qué causas exógenas han influido en dichos cambios.

En todo caso, un porcentaje anual de variación, estimado o real, positivo o negativo, incluso de pequeña dimensión, en el volumen de la cartera presente, puede ser tratado con las fórmulas que hemos obtenido, bastando con hallar el valor de q mensual que genera aquél. Y decimos mensual porque, con independencia de la amplitud temporal que asignemos a los Grupos de antigüedad y al número de ellos, consideramos al mes como parámetro ideal para tratar las Cadenas de Markov en su aplicación al tema de las cuentas a cobrar.

Con las reservas naturales al empleo de todo modelo, pensamos puede ser útil como procedimiento para estimar no sólo cuantitativamente los saldos futuros —a medio plazo— de los clientes, sino que, además de proporcionarnos información cualitativa o estructural sobre la cartera, puede permitirnos controlar de forma más directa y sistemática que como es habitual la morosidad de la cartera. Así, al menos, lo hemos intentado al incluir tanto en el desarrollo teórico como en el caso práctico el Grupo IV de antigüedad.

Dentro de la teoría general de sistemas, el modelo puede considerarse probabilístico si prescindimos del posible componente cíclico del proceso que incide sobre la composición de una cartera de clientes. De tipo probabilista, pues, en tanto que sus valores vienen dados fundamentalmente por las probabilidades de transición o probabilidades condicionales del paso o cambio de un estado a otro del proceso. En mayor medida aún, cuando por medio de la hipótesis de crecimiento establecida dejamos a un lado el criterio del equilibrio estable, al cual tiende en el límite, en general, un proceso markoviano.

6. BIBLIOGRAFIA (4)

CHACÓN, E.: *La investigación operativa. Programación dinámica,* Ibérica Europea de Ediciones, S. A. Madrid, 1977, 2.ª ed. (cap. 7, pág. 217).

GALLAGHER, CHARLES A., y WATSON, HUGH J.: *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en Administración,* Editorial McGraw-Hill, México, 1982 (capítulo 11, pág. 330).

HOEL, PAUL G.: *Matemáticas finitas y cálculo con aplicaciones a los negocios,* Editorial Limusa, México, 1977 (cap. 6, pág. 204) (*).

KEMENY, J. C.; SCHLEIFER, A.; SNELL, J. L., y THOMPSON, G. L.: *Estructuras matemáticas finitas,* Editorial Universitaria de Buenos Aires (E.U.D.E.B.A.), Buenos Aires, 1970, 2.ª ed. (cap. 6, pág. 445).

KEMENY, J. C.; SCHLEIFER, A.; SNELL, J. L., y THOPSON, G. L.: *Les mathematiques modernes dans la pratique des affaires,* Editorial Dunod, París, 1964 (caps. IV y V, págs. 128 y 217) (*).

KEMENY, J. C.; SNELL, J. L., y THOMPSON, G. L.: *Introducción a las matemáticas finitas,* Compañía Editorial Continental, S. A. (C.E.C.S.A.), México, 1971, 2.ª imp. (cap. 5, pág. 229).

LIPSCHUTZ, SEYMOUR: *Matemáticas finitas,* Editorial McGraw-Hill, México, 1974 (cap. 20, pág. 233).

---

(4) Contiene únicamente obras en que se estudian las Cadenas de Markov en general. Se han señalado con (*) aquellas en que, además, se trata el tema de las cuentas a cobrar con cierta expansión y se han considerado más interesantes.

LIPSCHUTZ, SEYMOUR: *Teoría y problemas de probabilidad,* Editorial McGraw-Hill, México, 1975 (cap. 7, pág. 126).

MARAVALL CASESNOVES, D.: *Cálculo de probabilidades y procesos estocásticos,* Editorial Paraninfo, Madrid, 1974 (caps. VII y XIII, págs. 114 y 220).

PARZEN, E.: *Procesos estocásticos,* Editorial Paraninfo, Madrid, 1972 (caps. 6 y 7, págs. 221 y 320).

ROZANOV, Y. A.: *Procesos aleatorios,* Editorial MIR, Moscú, 1973 (cap. III, página 135).

SHAN, JOHN K.: *Matrix methods in Accounting,* Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1972 (cap. 4, pág. 75) (*).

SRINGER CLIFFORD, H., y col.: *Modelos probabilísticos,* Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, México, 1972 (cap. 3, pág. 82).