

# **Introducción a la teoría de circuitos y máquinas eléctricas**

Alexandre Wagemakers

Universidad Rey Juan Carlos

Francisco J. Escribano

Universidad de Alcalá



# Índice general

<i>Prefacio</i>	<i>page</i>	1
<b>Parte I Teoría de Circuitos</b>		<b>3</b>
<b>1. Teoría de circuitos</b>		<b>5</b>
1.1. La corriente eléctrica		5
1.2. Resistencias, condensadores y autoinducciones		15
1.3. Fuentes dependientes		36
1.4. Análisis de circuitos lineales		38
1.5. Teoremas de teoría de circuitos		63
1.6. Análisis de Transitorios		79
1.7. Resultados y fórmulas importantes		88
1.8. Ejercicios Resueltos		89
1.9. Ejercicios Adicionales		103
<b>2. Circuitos de corriente alterna</b>		<b>112</b>
2.1. Características de las señales alternas		113
2.2. Representación de cantidades sinusoidales como fasores		116
2.3. Resistencias, condensadores e inductancias en corriente alterna		123
2.4. Potencia en sistemas de corriente alterna		141
2.5. Comportamiento en frecuencia		154
2.6. Resultados y fórmulas importantes		159
2.7. Ejercicios Resueltos		160
2.8. Problemas adicionales		176
<b>3. Corriente alterna trifásica</b>		<b>185</b>
3.1. Fundamentos de la corriente trifásica		186
3.2. Conexión en estrella		189
3.3. Conexión en triángulo		192
3.4. Potencia en sistemas trifásicos		195
3.5. Resultados formulas importantes		198
3.6. Ejercicios Resueltos		198
3.7. Ejercicios adicionales		204

---

<b>Parte II Máquinas Eléctricas</b>	207
<b>4. Principios físicos de las máquinas eléctricas</b>	209
4.1. Circuitos Magnéticos	210
4.2. Principio del generador eléctrico	237
4.3. Principio del motor	243
4.4. Principios físicos de motores rotativos	248
4.5. Principios físicos de generadores rotativos	251
4.6. Generación de un campo giratorio	256
4.7. Ejercicios Resueltos	260
4.8. Ejercicios adicionales	266
<b>5. Transformadores</b>	270
5.1. Transformadores ideales	272
5.2. Transformador real	280
5.3. Pruebas de un transformador	298
5.4. Aspectos constructivos	306
5.5. Transformadores trifásicos	307
5.6. Resultados fórmulas importantes	319
5.7. Ejercicios resueltos	320
5.8. Ejercicios adicionales	329
<b>6. Motores y generadores eléctricos</b>	335
6.1. Motores asíncronos	336
6.2. Generadores y motores síncronos	356
6.3. Máquinas de corriente continua	368
6.4. Ejercicios	376
<b>Apéndice A Recordatorio de números complejos</b>	381
<b>Apéndice B Conceptos fundamentales de electromagnetismo</b>	385
<b>Bibliografía</b>	391
<b>Índice</b>	391
<i>Índice alfabético</i>	392

# Prefacio

Este libro tiene por objeto introducir a los alumnos de cursos de Ingeniería Química e Ingeniería Industrial rama Química en el mundo de la electrotecnia. Presentamos las herramientas básicas de cálculo eléctrico y los modelos mas utilizados en la ingeniería eléctrica moderna. El texto cuenta con numerosos ejemplos de aplicación de los principios explicados. Se introducen también las máquinas eléctricas más extendidas en la industria como son los transformadores, generadores y motores eléctricos.

En el capítulo 1 tratamos los circuitos de corrientes continua y asentamos las bases del análisis de circuito. En el capítulo 2 introducimos los conceptos de corriente alterna y el tratamiento de los fasores. El capítulo 3 presentamos brevemente los sistemas trifásicos y las fórmulas básicas para manejarlos. Se estudian en el capítulo 4 los transformadores de tensión alterna. Estos últimos son un elemento fundamental de la cadena de producción de energía y más en concreto del transporte de electricidad.

En los dos últimos capítulos se estudian los convertidores de energía mecánica a eléctrica (generadores) y de energía eléctrica a mecánica (motores). Se presentan primero los principios físicos elementales que hacen posible esta conversión. En el último capítulo hace énfasis en el aspecto tecnológico de las máquinas eléctricas mas importantes: el motor asíncrono, el generador síncrono y la máquina de corriente continua.



# Parte I

---

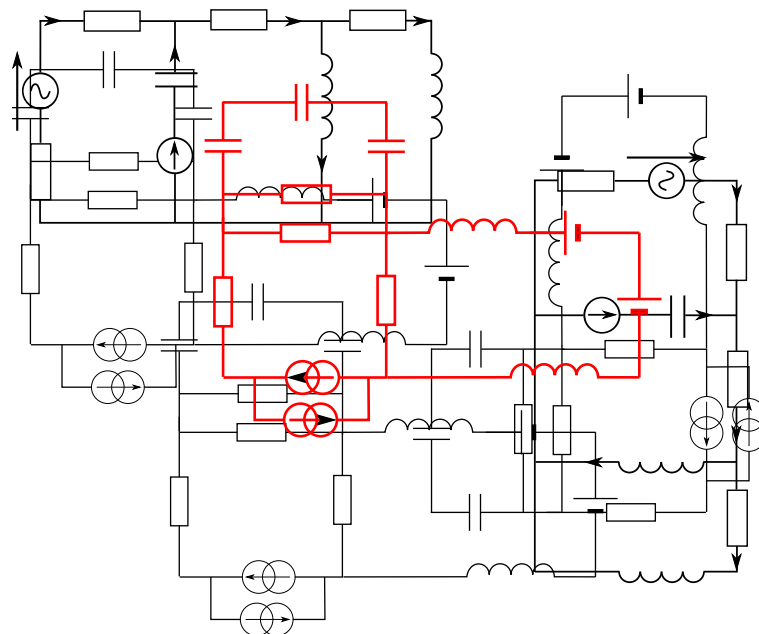
## Teoría de Circuitos





# 1 Teoría de circuitos

---



## 1.1 La corriente eléctrica

Antes de estudiar y analizar los circuitos eléctricos, conviene recordar brevemente los conceptos elementales de la electricidad. El resumen propuesto no es ni mucho menos exhaustivo. Se remite al lector a cualquier obra de física universitaria para un complemento de conceptos (ver bibliografía).

Para empezar, se recuerdan algunas leyes básicas útiles para el estudio de los circuitos eléctricos. El elemento básico de estudio es la carga eléctrica, cuya unidad fundamental en el Sistema Internacional (S.I.) es el Culombio [C]. Existen en dos sabores para las cargas: positivas y negativas. Las cargas eléctricas están presentes en todo el espacio y la materia que nos rodea. En la mayoría de los materiales, sin embargo, las cargas eléctricas no pueden moverse debido a la estructura de la materia. Existen excepciones tales como los materiales conductores, que permiten que las cargas puedan circular con un *esfuerzo razonable*.

Cuando existe un movimiento colectivo de cargas en una determinada dirección del conductor, hablamos de corriente eléctrica. La circulación de cargas en un conductor forma una corriente; de forma más precisa, se dirá que la variación de carga,  $dQ$ , con respecto al tiempo define la intensidad de corriente,  $I$ , medida en Amperios [A], según la relación:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

El concepto de corriente eléctrica es similar al del caudal de un fluido en una tubería (ver fig. 1.1), pero, en vez de medirlo en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , se mide en  $\text{C} \cdot \text{s}^{-1}$  (Culombios/segundo), o A. Este flujo de cargas en un material puede variar de forma arbitraria debido a influencias externas. No obstante, una situación habitual con aplicaciones muy importantes en el campo de la electricidad consiste en la presencia de un flujo de cargas constante a lo largo de un conductor. **Una corriente es continua cuando su valor no varía en el tiempo.** Dado que en este capítulo se circunscribe a esta situación, las corrientes estudiadas aquí se consideran independientes del tiempo.

Experimentalmente, se ha comprobado que existen fuerzas mecánicas entre cargas eléctricas, y se pueden medir con gran precisión gracias a la ley de Coulomb:

$$\mathbf{F} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{u},$$

medida en Newtons.  $Q_1$  y  $Q_2$  son las cargas eléctricas de dos objetos,  $K$  una constante y  $r^2$ , la distancia entre cargas. Esta fuerza es de naturaleza vectorial, es decir, que se deben de tener en cuenta su módulo, su dirección y su sentido. A tenor de la ley de Coulomb, se puede decir entonces que existe una influencia de una carga sobre cualquier otra en el espacio en forma de fuerza mecánica. Esta influencia no es exclusiva y admite superposición; es decir, que, si existen tres o más cargas, cada carga va a ejercer una fuerza sobre las otras cargas siguiendo la ley de Coulomb, de forma que se van a sumar las fuerzas una a una de forma independiente. Es la hipótesis llamada del espacio lineal, que establece que el efecto total resultante es la suma de los efectos individuales. Una carga ejerce entonces una influencia en todo su entorno de modo que cualquier otra carga se ve afectada por la influencia de esta primera (y recíprocamente). La suma de estas influencias individuales se puede condensar en el concepto de **campo eléctrico**. Ése viene representado por una función vectorial que define la influencia de un conjunto de cargas en un determinado punto. La fuerza ejercida sobre una carga  $Q$  en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en un determinado punto viene dado por:

$$\mathbf{F}_Q = Q\mathbf{E}.$$

El campo eléctrico tiene como unidades el  $[\text{V} \cdot \text{m}^{-1}]$  o el  $[\text{N} \cdot \text{C}^{-1}]$ . El trabajo  $\Delta W$  realizado por la fuerza  $\mathbf{F}_Q$  al mover una carga según un desplazamiento elemental

$\Delta \mathbf{x}$  se calcula mediante el producto escalar:

$$\Delta W = \mathbf{F}_Q \cdot \Delta \mathbf{x} = Q\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{x}.$$

Una de las características más importantes de la fuerza  $\mathbf{F}_Q$  es el hecho de ser conservativa. Se le puede asociar una energía potencial tal que la variación  $\Delta U$  de energía potencial a lo largo del trayecto es menos el trabajo de la fuerza correspondiente:

$$\Delta U = -\Delta W = -Q\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{x}.$$

Moviendo la carga  $Q$  en este campo  $\mathbf{E}$  siguiendo un desplazamiento elemental  $d\mathbf{x}$ , se obtiene la diferencia de energía potencial sobre la carga representada por el diferencial:

$$dU = -\mathbf{F}_Q \cdot d\mathbf{x} = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.1)$$

En general, para un desplazamiento desde un punto A hasta un punto B, la variación de energía potencial es:

$$\Delta U = U_B - U_A = - \int_A^B Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.2)$$

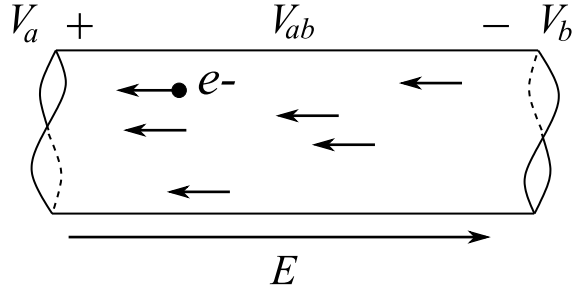
Esta fuerza es conservativa por lo que el camino elegido para calcular esta integral no importa. El trabajo sólo depende del punto inicial y final. La integral anterior tiene como resultado la energía potencial en el punto A (punto inicial) menos la energía potencial en el punto B. Se define entonces la diferencia de **potencial eléctrico** como:

$$V_B - V_A = \frac{\Delta U}{Q} = \frac{U_B - U_A}{Q} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Es una forma de calcular el trabajo por unidad de carga entre dos puntos. La cantidad  $V_A$  es el potencial eléctrico en el punto A, cuya unidad en el S.I. es el voltio [V]. La diferencia de potencial entre dos puntos A y B multiplicada por el valor de una carga define entonces el trabajo externo necesario para mover dicha carga entre ambos puntos:

$$\Delta W = W_B - W_A = Q(V_A - V_B). \quad (1.4)$$

El potencial eléctrico es una función escalar que depende de un punto o de una región del espacio. Sin embargo, es esencial definir una referencia absoluta para dar un valor a estos potenciales. Un convenio admitido establece que el potencial eléctrico en un punto alejado infinitamente del potencial estudiado es cero. En electricidad y electrónica, es poco usual referirse a un potencial absoluto en un punto, y en las situaciones prácticas se trabaja con **diferencias de potencial** o **tensiones**. La tensión entre dos puntos A y B se representa en un esquema escribiendo directamente la diferencia de potencial  $V_A - V_B$ . Un convenio para escribir de forma más condensada las tensiones consisten en abreviar la diferencia como  $V_{AB} = V_A - V_B$ . Los subíndices indican entre qué puntos se toma la



**Figura 1.1** Ilustración de un alambre recorrido por una corriente continua; los signos + y - indican dónde está el punto de mayor potencial. En este esquema la diferencia de potencial  $V_{ab}$  es positiva. El sentido del campo eléctrico se orienta del potencial mayor hacia el menor, lo cual define el sentido de arrastre de los electrones. Para electrones con una carga negativa, el movimiento global se orienta del potencial menor hacia el mayor.

diferencia de potencial. Esta notación permite, además, operar con las diferencias de potenciales como si fueran vectores. Por ejemplo en conductor con tres tensiones diferentes en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , la relación entre las tensiones se puede descomponer como:

$$V_{AC} = V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) = V_{AB} + V_{BC} \quad (1.5)$$

De este modo se puede descomponer cualquier diferencia de potencial usando un punto intermedio análogamente a las relaciones vectoriales en geometría. Otras relaciones útiles para manipular tensiones, y que se deducen de las definiciones anteriores, son:

$$V_{AC} = V_A - V_C = -(V_C - V_A) = -V_{CA}, \quad (1.6)$$

$$V_{AA} = 0. \quad (1.7)$$

### 1.1.1 Potencia y energía eléctrica

En un conductor como el de la figura 1.1, el trabajo externo necesario para llevar una carga  $Q$  desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$  es:

$$\Delta W = W_{BA} = Q(V_A - V_B) = Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.8)$$

y, dado que el trabajo no depende del trayecto por ser el campo conservativo, se puede escribir directamente:

$$W_{BA} = Q \cdot V_{AB}. \quad (1.9)$$

Ésta es la energía que se necesita invertir para llevar las cargas del punto  $A$  al punto  $B$ .

La **potencia eléctrica** es la energía por unidad de tiempo, y se expresa normalmente en Vatios [W], o, en ciertos casos, en Julios por segundo [ $\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$ ]. La definición de potencia instantánea para el conductor anterior es:

$$P = \frac{dW_{BA}}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot V_{AB} = I \cdot V_{AB}. \quad (1.10)$$

En este caso, se supone  $V_{AB}$  constante, ya que el contexto es el de la corriente continua. Esta potencia es una magnitud real que corresponde a la transferencia de energía por segundo en un sistema. Es una cantidad muy importante y útil en ingeniería, pues sirve para dimensionar y analizar la capacidad de los sistemas para consumir o proporcionar energía.

Para un dipolo<sup>1</sup> sometido a una tensión  $V^2$  y recorrido por una intensidad  $I$  continua, la potencia se expresa entonces como:

$$P = VI. \quad (1.11)$$

Para volver a obtener la energía, se integra la potencia a lo largo del tiempo. El resultado de la integración da de nuevo Julios [J] o Vatios·s. Generalmente las compañías eléctricas facturan la energía usando como unidad los Vatios·hora. Por ejemplo, si un circuito de corriente continua se alimenta con 10V y 1A durante 1h, el consumo energético sería de 10W·h.

### Ejercicio 1.1

Un elemento de un circuito produce una energía de 10kJ en 5min. Calcular la potencia media producida.

### Solución del ejercicio 1.1

Se trata simplemente de calcular la energía transferida en un tiempo dado:

$$P_m = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{10000}{5 \cdot 60} = 33,3 \text{ W}$$

## 1.1.2 Convenio de signo en circuitos

Se consideran ahora elementos con dos terminales entre los cuales se puede fijar una diferencia de potencial. Estos elementos se llaman **dipolos** y se representan gráficamente como una caja de las que salen dos líneas longitudinales que simbolizan los cables conectores al dispositivo<sup>3</sup>. Dado un dipolo, se puede representar de forma esquemática la diferencia de potencial entre sus bornes y la corriente que lo atraviesa. La definición de diferencias de potenciales en dipolos no se sujeta por desgracia a un único convenio, sino que cambia según los países

<sup>1</sup> Cualquier elemento conductor con dos polos.

<sup>2</sup> Escribir  $V$  como una diferencia de potencial consiste en un abuso de notación bastante común.

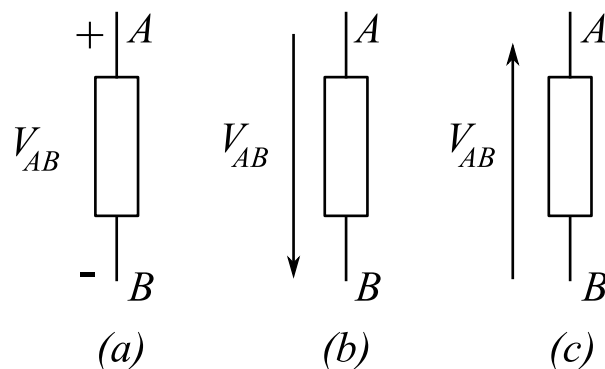
<sup>3</sup> Siempre se van a representar los cables conductores con trazo negro continuo.

y los usos. A modo de ejemplo, se dibujan en la figura 1.4 las tres formas más comunes de representar las tensiones en un circuito.

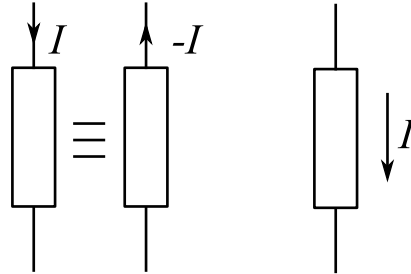
Suponiendo el potencial del terminal  $A$  con un valor superior al potencial del terminal  $B$ , se obtiene entonces una diferencia de potencial  $V_{AB} = V_A - V_B$  positiva. Para empezar, presentamos el convenio usado para el resto de este texto. En la figura 1.2 (a) el signo '+' y el signo '-' indican que el potencial de  $A$  es superior al potencial de  $B$ ; ésta es una forma de representar el sentido de las diferencias de potenciales muy común en obras de tradición anglosajona. En la figura 1.2 (b), el sentido de la tensión se indica con una flecha que apunta hacia el potencial más bajo. Esta representación hace coincidir el sentido del campo eléctrico con la flecha de la tensión, y es también un convenio muy usado en electricidad. En la figura 1.2 (c), la flecha de la tensión se orienta de '-' a '+', apuntando hacia el potencial de mayor valor. Como se puede comprobar a través de los dos últimos convenios, el sentido de la flecha es arbitrario, dado que se trata de una representación para ayudar a razonar sobre los circuitos, y no cambia en absoluto los valores de las tensiones ni el fenómeno físico subyacente. De hecho, la misma tensión se puede denotar de dos formas:

- $V_{AB} > 0$  y los marcadores + y - tal como en la figura 1.2 (a).
- $-V_{AB} < 0$  y los marcadores + y - invertidos.

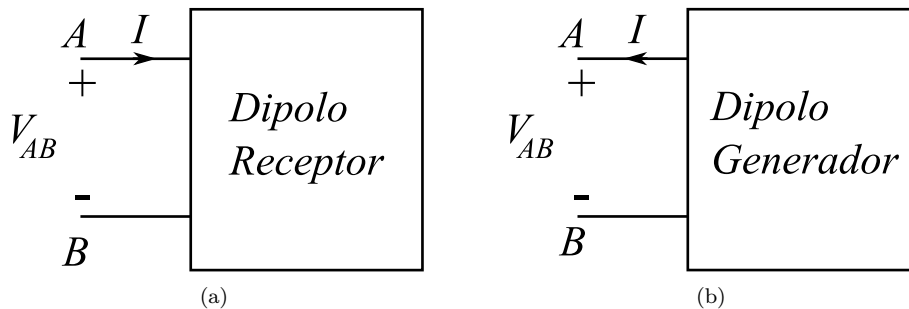
Las corrientes también se representan en los circuitos de forma esquemática. Para un conductor, la corriente se puede marcar con una flecha que indica el sentido de circulación de la corriente, tal como se señala en la figura 1.3. Sin embargo, la misma corriente, pero con signo opuesto, podrá representarse en la figura con una flecha en el sentido opuesto. Por ejemplo, una corriente de un 1A con un sentido de arriba abajo será totalmente equivalente a una corriente de  $-1A$  representada con una flecha de sentido opuesto. En la misma figura se puede observar una alternativa para la representación de la corriente. Se trata



**Figura 1.2** En esta figura tenemos las tres formas más comunes de representar las tensiones en los circuitos. Los dipolos, representados por cajas, tienen una diferencia de potencial en sus bornes y están recorridos por una corriente.



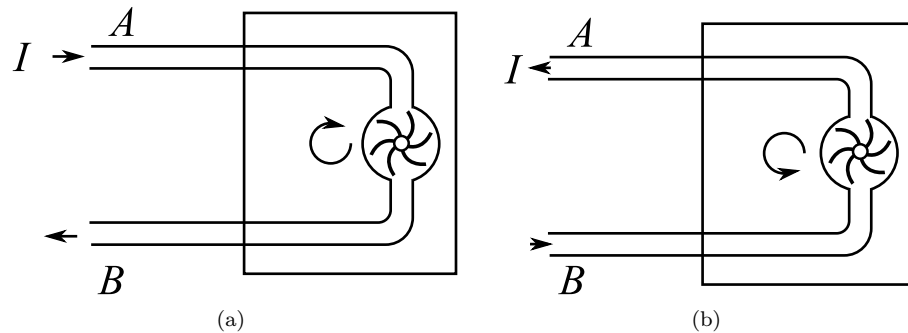
**Figura 1.3** Representación de las corrientes a través de un dipolo. Se marca el sentido de circulación de la corriente con una flecha sobre uno de los terminales. La misma corriente con signo negativo puede marcarse con una flecha de sentido opuesto. En algunas obras, la flecha de la corriente viene representada al lado del dipolo.



**Figura 1.4** Figura (a) Representación de un dipolo receptor de energía. Mientras la tensión en sus extremos es positiva (el potencial de A es superior al de B), la corriente entra en el dispositivo y se produce una cesión de energía al receptor. Figura (b) Representación de un dipolo generador. Para una diferencia de potencial  $V_{AB}$  positiva, la corriente sale del dispositivo entregando una energía al exterior.

de dibujar la corriente con una flecha a lado del esquema del dipolo. Es una representación usada en algunas obras dedicada a los circuitos eléctricos.

En un conductor, si se genera una diferencia de potencial eléctrico entre los extremos, las cargas en su interior se pondrán en movimiento. Siendo los electrones cargas eléctricas negativas, el sentido del movimiento de éstos es del potencial más bajo al más alto tal como se ha señalado en el epígrafe 1.1.1. A pesar de que el movimiento verdadero de los electrones va de menor a mayor potencial, el convenio internacional fija el sentido de la corriente en un conductor **del extremo de mayor al de menor potencial**. Este convenio es herencia de Benjamin Franklin, ya que asumió que las cargas eléctricas en movimiento eran positivas. A pesar de esta aparente disonancia entre convenio y realidad, esto no influye para nada en los cálculos y las conclusiones que se pueden sacar sobre el circuito. El arte de los circuitos consiste en representar elementos físicos por unos modelos sencillos y organizarlos en diagramas con el fin de efectuar cálculos y proponer



**Figura 1.5** En esta figura describimos una analogía hidráulica para explicar el convenio de signos. En un circuito hidráulico donde el extremo  $A$  está situado más alto que el extremo  $B$ , un flujo de agua entrante por  $A$  haría girar el molino. En el caso (b), se necesita activar el molino con un mecanismo externo para hacer circular el flujo y llevar el agua del punto  $B$  al punto  $A$ .

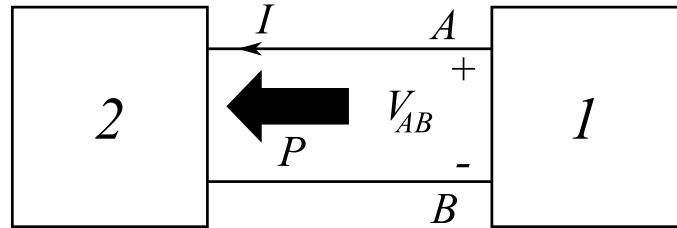
diseños. En lo que sigue, se van a relacionar estos conceptos con la energía que produce o consume un dipolo con ayuda de las figuras 1.5 y 1.4.

Una vez establecidos los potenciales en los extremos, se puede fijar el sentido de la corriente. Elegiendo  $V_{AB} > 0$ , imaginamos una carga **positiva** recorriendo el circuito de  $A$  hacia  $B$ , tal como viene representado en la figura 1.4 (a). Esta carga testigo cede energía al dipolo dado que el trabajo sobre la carga es  $\Delta W = qV_{AB} \geq 0$ . Es decir, que el dipolo recibe energía, por lo que se denomina *receptor*. El **convenio receptor** establece que cuando una corriente positiva circula de  $A$  hacia  $B$  y el potencial de  $A$  es superior al potencial de  $B$ , se tiene un receptor de energía. En los circuitos, se usará esta definición para fijar las tensiones dada una corriente, o viceversa. Una vez fijado uno de estos parámetros, el otro queda unívocamente determinado.

En el caso complementario al comentado, para fijar una diferencia de potencial  $V_{AB}$  positiva, se necesita una fuente de energía que mueva una carga positiva del punto  $B$  al punto  $A$ . El trabajo sobre la carga resulta entonces negativo:  $\Delta W = -qV_{AB} < 0$ . Por tanto, para establecer una corriente que circule del punto  $B$  hacia el punto  $A$ , el dipolo debe aportar energía. El **convenio generador** establece que cuando una corriente circula de  $B$  hacia  $A$ , y con un potencial en  $A$  superior al potencial en  $B$ , se tiene un dispositivo que aporta energía a las cargas. Se habla en general de un generador de diferencia de potencia o de un generador de corriente. El sentido de la flecha y de la corriente en esta situación se puede observar en la figura 1.4 (b).

Para entender mejor este convenio de sentidos existe una analogía muy similar en mecánica. El potencial gravitatorio puede jugar el papel del potencial eléctrico y los objetos dotados de masa el papel de las cargas eléctricas. Por ejemplo, una corriente de agua en una tubería es un ejemplo perfecto de analogía con la





**Figura 1.6** Balance de potencia en un circuito que cuenta con generadores y receptores.

corriente eléctrica. Este tipo de analogías es bastante común en física: aunque los objetos físicos sean distintos, las leyes que los rigen son muy similares.

Tomando esta analogía, en la figura 1.5 el sistema consiste en un simple tubo cuyo extremo  $A$  se encuentra a una altura mayor que el otro extremo  $B$ . En el receptor se coloca un molino que puede girar al paso del agua, o bien activarse y bombear el agua. Si el agua llega por el punto con mayor altura entonces el flujo se acelera por la acción de la gravedad y hace girar el molino. En este caso, el flujo de agua activa el molino cediendo energía al receptor. Es la situación análoga al receptor en electricidad: el potencial gravitatorio es superior en el punto  $A$  y provoca una circulación del fluido.

Si, por el contrario, se dispone de agua en el punto  $B$  y se desea elevarla hasta el punto  $A$ , el molino debe activarse para bombear el agua. Se necesita en este caso una energía externa para establecer la corriente; es decir, debemos aportar energía para compensar el trabajo de la masa dentro del tubo. Es idéntico al caso del generador eléctrico que debe mover las cargas de un punto a otro aportando energía. En el siguiente epígrafa se cuantifica cuánta energía, o potencia, se necesitan para establecer una intensidad de corriente dada la diferencia de potencial entre dos puntos.

### 1.1.3 Potencia en un circuito

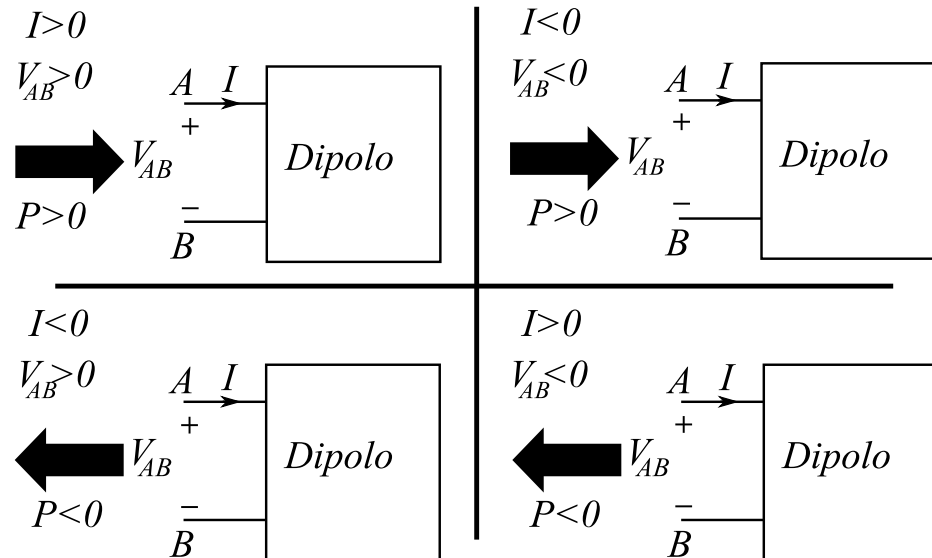
La energía que un dipolo recibe o proporciona determina el sentido de la corriente y/o de la tensión. En el convenio receptor, la energía se entrega al receptor. Se dice que el receptor **recibe** o **absorbe** energía. La potencia absorbida en el caso de una corriente continua es:

$$P = V_{AB}I, \quad (1.12)$$

con  $V_{AB} > 0$  y la corriente  $I > 0$  dirigido de  $A$  hacia  $B$ . Con el convenio receptor, una potencia positiva significa que el receptor **recibe** energía.

En el caso de un dispositivo correspondiente al convenio generador, éste tiene que proporcionar una energía para poder hacer circular la corriente. Se dice que el dispositivo **entrega** energía. La potencia entregada por este dispositivo es:

$$P = V_{AB}I, \quad (1.13)$$



**Figura 1.7** Sentido del flujo de potencia en función del signo de la corriente y de la tensión cuando el dipolo está considerado bajo el convenio receptor. Esta potencia puede ser positiva, y en tal caso el dipolo absorbe energía, o bien negativa y, en tal caso, el dipolo se comporta como un generador.

con  $V_{AB} > 0$  e  $I > 0$  dirigido de B hacia A. En el convenio generador, una potencia positiva significa que el dispositivo **entrega** energía.

Cuando un circuito entrega energía y se conecta a otro circuito que recibe energía, se puede establecer un balance de potencias. En la figura 1.6, el dispositivo 1 (un generador) se conecta al dispositivo 2 (un receptor). El sentido de la corriente viene determinado por la naturaleza de los elementos, y circulará en un sentido u otro dependiendo de la diferencia de potencial entre terminales. Siguiendo el convenio conocido, si tenemos una diferencia de potencial positiva entre A y B, la corriente circulará del generador hacia el receptor con signo positivo. Con la definición de potencia dada anteriormente, se genera ésta en un lado (generador) y se absorbe en el receptor al otro lado. La flecha en la figura 1.6 indica el sentido del flujo de esta potencia. Una observación importante en este ejemplo es que toda la energía producida en un extremo se consume en el otro, por lo que podemos establecer el siguiente balance en potencia:

$$P_{generada} = P_{absorbida}. \quad (1.14)$$

Este balance de potencia se generaliza más adelante bajo el teorema de Tellegen. De momento, conviene recordar que, en todo circuito en el que circulan corrientes, unos elementos producen potencia y otros la consumen.

Teóricamente, en los cálculos sobre circuitos, se pueden obtener valores numéricos de potencias positivas o negativas según el sentido de la corriente y de la

tensión de un elemento. No hay contradicción con lo anterior: simplemente en alguna ocasión el cálculo de la corriente da un resultado negativo y basta con volver a interpretar el papel del dipolo en esa situación. Lo que suponíamos que era un receptor resulta ser un generador o viceversa. Una vez fijada la tensión y la corriente siguiendo el esquema de la figura 1.7 bajo el convenio receptor, los cuatro casos que pueden ocurrir dependiendo de los valores numéricos calculados o medidos son:

- $I > 0, V_{AB} > 0 \rightarrow P > 0$ , el dipolo es un receptor y absorbe un flujo de potencia  $P = V_{AB} \cdot I$ .
- $I > 0, V_{AB} < 0 \rightarrow P < 0$ , el dipolo es un generador y entrega un flujo de potencia  $P = V_{AB} \cdot I$ .
- $I < 0, V_{AB} < 0 \rightarrow P > 0$ , el dipolo es un receptor y absorbe un flujo de potencia  $P = V_{AB} \cdot I$ .
- $I < 0, V_{AB} > 0 \rightarrow P < 0$ , el dipolo es un generador y entrega un flujo de potencia  $P = V_{AB} \cdot I$ .

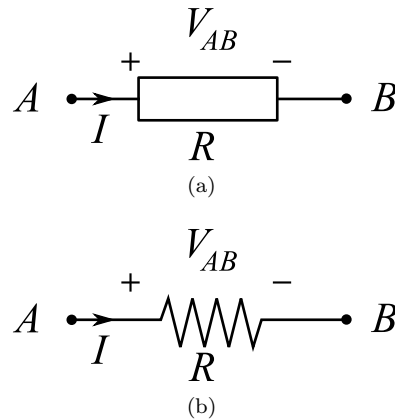
Una potencia negativa en tal caso significa una potencia que sale del dipolo. En el ejemplo que se acaba de comentar, la elección de la tensión y la corriente corresponde al convenio receptor, pero, al mismo tiempo, los signos de la corriente y tensión pueden diferir. El mismo razonamiento se puede aplicar a un dipolo bajo el convenio generador: una vez fijado el sentido de la tensión y de la corriente, tenemos una potencia positiva si los valores numéricos de ambos son del mismo signo.

## 1.2 Resistencias, condensadores y autoinducciones

En esta sección se estudian algunas propiedades fundamentales de los elementos pasivos más comunes en electricidad: las resistencias, los condensadores y las bobinas (también llamadas autoinducciones). Se describen aquí únicamente los componentes lineales, es decir, aquéllos cuya respuesta a un estímulo es lineal y en los que, por tanto, hay una proporcionalidad entre estímulo y respuesta. Son elementos esenciales en todos los diseños y análisis de circuitos eléctricos y electrónicos. Estudiamos primero los componentes pasivos capaces de consumir energía. Éstos no pueden producir más energía de la que reciben. En contraste, los componentes activos pueden aportar energía al circuito. Posteriormente, estos elementos van a ayudar a modelar otros fenómenos lineales que resultan útiles en muchos ámbitos de la ingeniería en general, no solamente en la eléctrica.

### 1.2.1 Resistencia

El primer elemento de circuito tratado es la resistencia. Físicamente, una resistencia es un dipolo, con dos bornes conductores unidos a un material conductor



**Figura 1.8** En (a) esquema normalizado de una resistencia. En la figura (b) aparece otra forma estándar de representación.

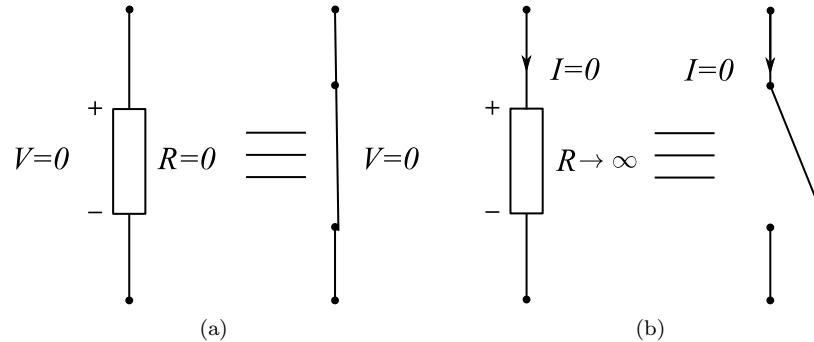
o semiconductor. En operación, sobre cada uno de los bornes se aplica un potencial eléctrico distinto. Es decir, se introduce una diferencia de potencial entre los extremos del dipolo. Como su nombre indica, la resistencia impone una *difficultad* a la corriente que lo atraviesa. El material conductor o semiconductor de que está construido conlleva una estructura que en cierto modo “ralentiza” el flujo de electrones que lo atraviesa. Para una diferencia de potencial dada entre los bornes, el material va a limitar la velocidad de los electrones y por lo tanto modifica la corriente que lo atraviesa. La relación entre la diferencia de potencial sobre los bornes y la corriente que circula en el dipolo viene dada por la ley de Ohm:

$$V = RI \quad (1.15)$$

El valor de la resistencia  $R$  se mide en ohmios  $[\Omega]$  y se corresponde con una propiedad física del componente o del material conductor. La ley de Ohm establece una relación **lineal** entre la tensión y la corriente. Se trata de **un modelo** del componente físico que sólo refleja un aspecto (principal) de su funcionamiento, dado que éste tendrá un comportamiento distinto según su construcción y del tipo de material que lo compone en condiciones diversas. Por ejemplo, para los materiales metálicos, existe una dependencia adicional de la resistencia con la temperatura. Un material dado se caracteriza por su llamada resistividad  $\rho$ , medida en  $[\Omega \cdot \text{m}]$ , que varía con la temperatura según:

$$\rho(T) = \rho_0(1 + a(T - T_0)), \quad (1.16)$$

donde  $\rho_0$  y  $a$  (medido en  $\text{K}^{-1}$ ) son parámetros que dependen del material, y  $T_0 = 300\text{K}$ . En el Cuadro 1.1, se muestran valores de resistividad correspondientes a algunos metales. La resistencia total de un elemento concreto (un cable, por ejemplo), formado por un material de resistividad  $\rho$ , depende de su longitud  $l$  y



**Figura 1.9** Equivalente circuital de las resistencias de valor  $R = 0$  y  $R = +\infty$ . La primera es equivalente a un circuito cerrado o un simple cable que no presenta ninguna diferencia de potencial en sus bornes. El segundo caso corresponde a un circuito abierto en el que no hay ninguna circulación de corriente.

de su sección  $S$ :

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}. \quad (1.17)$$

La ley de Ohm aproxima con precisión el comportamiento de los conductores en la gran mayoría de los casos. Como está dicho, su aspecto más característico es corresponder a una ley lineal.

Existen dos casos de resistencia con particular interés en teoría de circuitos. Se trata de las resistencias con valores  $R = 0$  y  $R = +\infty$ . El caso de la figura 1.9 (a) corresponde a una resistencia equivalente a un cable perfecto ( $R = 0$ ), es decir que no hay diferencia de potencial entre sus extremos.

El caso de la figura 1.9 (b),  $R = +\infty$ , corresponde a una resistencia que no deja pasar ninguna corriente. Si aplicamos la ley de Ohm para este elemento, la corriente será nula independientemente del valor de la tensión  $V$  al tener  $I = V/R \simeq 0$ . Simboliza un circuito abierto en el que no hay posibilidad de circulación de corriente. Estas dos situaciones son muy frecuentes en electricidad y en electrónica, y permiten hacer aproximaciones rápidamente. Una resistencia de valor muy alto puede a veces considerarse como un circuito abierto, y una de valor bajo, como un cable. Esto puede ayudar a simplificar el análisis de un circuito.

Para calcular la potencia que disipa una resistencia, se usa la definición ya vista para un circuito de corriente continua:

$$P = VI \quad (1.18)$$

Por otro lado la ley de Ohm relaciona la tensión y la corriente, por lo que la expresión de la potencia en función de  $R$  queda:

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (1.19)$$

Material	$\rho_0$ (n $\Omega$ ·m)	$a$ (K <sup>-1</sup> )
Aluminio	26,7	4,5
Cobre	16,76	4,3
Oro	22	4
Hierro	101	6,5
Níquel	69	6,8
Plata	16,3	4,1
Plomo	206	4,2

**Cuadro 1.1** Algunos de valores de resistividad para los metales más comunes. Se da la resistividad  $\rho$  en n $\Omega$ ·m y el coeficiente de temperatura  $a$  en K<sup>-1</sup>.

La potencia en una resistencia es proporcional al cuadrado de la corriente multiplicado por la resistencia. La resistencia transforma básicamente la energía eléctrica en calor, mediante el efecto Joule de disipación térmica<sup>4</sup>. La capacidad de disipación térmica limita la corriente máxima que puede circular por la resistencia. Es decir, que, si una resistencia de 10 $\Omega$  está diseñada para una potencia máxima de 10W, la corriente máxima que la puede atravesar es:  $I_{max} = \sqrt{10/10} = 1A$ . Esto pone de relieve que hay que tener cuidado con los valores de las corrientes en el momento del diseño de un sistema para no producir daños sobre los componentes. Por encima de la corriente máxima, el dispositivo se puede destruir y quemar debido al calor disipado.

Las resistencias (en cuanto elemento físico) se encuentra en casi todos los circuitos electrónicos y está presente también como una propiedad de los cables. Éstos no son ideales y tienen una cierta resistencia que aumenta con la longitud. Se caracterizan mediante una resistencia lineal  $\lambda$  en  $\Omega \cdot m^{-1}$ . Así pues, la resistencia de los cables no es despreciable cuando se consideran distancias de varios kilómetros. Las pérdidas pueden ser importantes, por lo que se usan materiales con la menor resistividad posible. Pero, a su vez, el coste del conductor ha de ser inferior a las pérdidas generadas por efecto Joule. Por ejemplo, es ilusorio usar oro o platino para transportar electricidad cuando el precio de estos materiales es mayor que el de la energía que se transporta. En un capítulo posterior, se describe cómo se pueden reducir las pérdidas de transporte por efecto Joule con un mecanismo muy sencillo.

### Ejercicio 1.2

Un cable de cobre transporta una corriente continua de 20A sobre una distancia de 2000m. A partir de la información disponible en el capítulo, hallar el diámetro del cable para que las pérdidas por disipación en el mismo sean inferiores a 100W.

<sup>4</sup> El efecto Joule relaciona el calor disipado por un conductor con la corriente que le atraviesa y el tiempo de funcionamiento:  $Q = I^2 R t$ , donde  $Q$  es la energía calorífica en Julios cuando  $I$  se mide en A,  $R$  en  $\Omega$  y  $t$  en s.

**Solución del ejercicio 1.2**

La conductividad del cobre es de  $16.76 \text{ n}\Omega\cdot\text{m}$ . Con este dato, la resistencia de un conductor se puede hallar mediante la fórmula:

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

con  $l = 2000\text{m}$  y  $\rho = 16,76 \text{ n}\Omega\cdot\text{m}$ . Las pérdidas, que no deben exceder  $P_{max} = 100\text{W}$ , se calculan como:

$$P_{max} = R_{max} I^2,$$

es decir que la resistencia tendrá que ser inferior a:

$$R_{max} < \frac{P_{max}}{I^2} = 0,25\Omega.$$

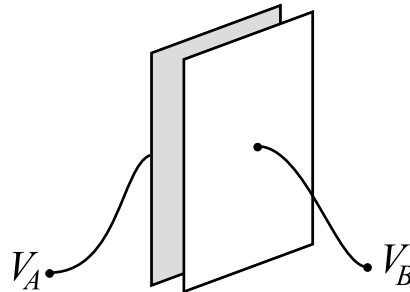
La sección mínima del conductor para obtener esta resistencia será:

$$S_{min} > \frac{\rho l}{R_{max}}.$$

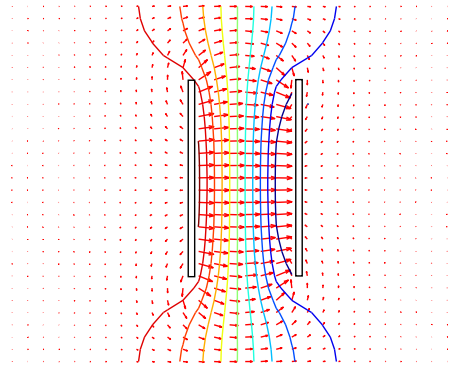
Y se obtiene  $S_{min} > 1,3 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$ . Es decir, un diámetro mínimo de  $6,4\text{mm}$ .

**1.2.2 El condensador**

El condensador es un elemento capaz de acumular carga cuando se le alimenta con corriente continua, y, por lo tanto, es capaz de almacenar energía. En teoría, dos piezas metálicas con partes enfrentadas sin contacto se comportan como un condensador cuando existe una diferencia de potencial entre ellas. En esta configuración, los metales en equilibrio electrostático tienen la misma carga, pero con signos opuestos. En la figura 1.10 tenemos el esquema formado por dos placas metálicas paralelas A y B sometidas a una diferencia de potencial  $V_{AB}$ . Entre las placas existe un campo eléctrico que se dirige desde la parte de potencial mayor hacia la de menor siguiendo la ley:  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$  (ver anexo B).  $V$  es la función del potencial eléctrico que depende del punto  $(x, y, z)$  considerado.



**Figura 1.10** Esquema de un condensador de placas plano-paralelas con una diferencia de potencial  $V_{AB}$  entre ellas.



**Figura 1.11** Campo eléctrico formado entre dos placas paralelas enfrentadas en presencia de cargas opuestas; las placas se ven de perfil y tienen aplicada una diferencia de potencial. Las flechas representan el módulo y la dirección del campo eléctrico. Se puede observar que el campo es casi uniforme entre las placas. Por otra parte, las líneas continuas son líneas isotopotenciales, es decir, que a lo largo de ellas el potencial no varía.

Suponiendo que las placas están hechas de un conductor ideal, el potencial será el mismo en toda ella<sup>5</sup>. Para unas placas paralelas suficientemente grandes frente a la distancia que las separa, la magnitud del campo eléctrico entre ellas se puede calcular teóricamente:

$$E = V_{AB}/d \quad (1.20)$$

siendo  $d$  la distancia entre ambas. Esta expresión relaciona el campo eléctrico y el potencial fijado entre las dos placas. En la figura 1.11 tenemos el ejemplo (generado mediante simulación) de un campo eléctrico entre dos placas paralelas cargadas con una densidad de carga igual, pero de signos opuestos. Se representa el campo eléctrico en algunos puntos mediante flechas cuya longitud es proporcional a la magnitud del campo. Este campo se puede considerar casi uniforme entre las placas y disminuye muy rápidamente al alejarse de las mismas. Gracias a las leyes de la física, y teniendo en cuenta algunas aproximaciones, se puede estimar la magnitud del campo entre las placas en función de la carga y de la geometría del problema:

$$E = \frac{Q}{\epsilon S} \quad (1.21)$$

siendo  $S$  la superficie de las placas y  $\epsilon$  una constante que depende del material situado entre las mismas. La carga  $Q$  considerada es el valor absoluto de la carga en una de las placas ( $Q_+ = +Q$ ,  $Q_- = -Q$ ).

Esta simple pero importante expresión relaciona el campo con la carga alma-

<sup>5</sup> Esto se debe a que en un conductor la resistividad es muy baja. Entre dos puntos del conductor la tensión se escribirá como:  $V_{AB} = RI$ . Si  $R \simeq 0$ , entonces no hay diferencia de potencial.



Material	$\varepsilon_d$
Aire	1
Vidrio (Silicio)	3,8
Papel	2,0
Poliéster	2,8 - 4,5
Poliestireno	2,4 - 2,6
Polipropileno	2,2
Aceite mineral	2,3

**Cuadro 1.2** Algunos de valores de la permitividad relativa de materiales habitualmente usados en la fabricación de condensadores.

cenada. El potencial, a su vez, sabemos que se relaciona con el campo mediante la ecuación 1.20. Combinando las dos expresiones, se obtiene la carga acumulada en las placas en función de la diferencia de potencial, que es la propiedad directamente mensurable sobre el elemento:

$$Q = \varepsilon E \cdot S = \frac{\varepsilon S}{d} V_{BA} \quad (1.22)$$

Se define la *capacidad* de un condensador como la relación entre la carga acumulada en sus placas y la diferencia de potencial aplicada:

$$C = \frac{Q}{V_{BA}} = \frac{\varepsilon S}{d} \quad (1.23)$$

La capacidad tiene como unidad en el S.I. el Faradio [F], que consiste en una medida de cuánta carga puede almacenar un condensador dada una diferencia de potencial. En general, la capacidad depende únicamente de la geometría del condensador (superficie  $S$  y distancia entre placas  $d$ ) y de la permitividad ( $\varepsilon$ ).

Hasta ahora no se ha especificado el significado y naturaleza del parámetro  $\varepsilon$ . La permitividad depende directamente del material situado entre las placas. De algún modo, representa la sensibilidad o capacidad de respuesta del medio al campo eléctrico y se mide en Faradios por metro [ $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ ]. En la práctica, se suele colocar entre las placas un material dieléctrico que aumenta la permitividad y, por lo tanto, la capacidad. La permitividad se descompone como el producto del valor de la permitividad en el vacío y del valor de la permitividad relativa del material dieléctrico  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_d$ , donde  $\varepsilon_0 \simeq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ . El parámetro  $\varepsilon_d$  es una cantidad adimensional que depende del material estudiado. En el Cuadro 1.2, se proporcionan algunos ejemplos de materiales usados en la fabricación de condensadores. Con un dieléctrico bueno, se puede reducir la superficie del condensador manteniendo el valor de la capacidad. Así puede incorporarse en una cápsula de tamaño reducido y ser utilizado como componente electrónico en la industria.

La expresión de la carga se puede simplificar como:

$$Q = C \Delta V, \quad (1.24)$$

donde  $\Delta V$  es la diferencia de potencial. Conociendo la capacidad, esta fórmula

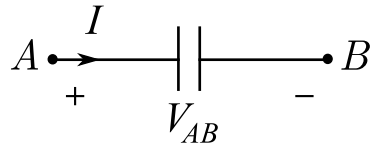


Figura 1.12 Esquema normalizado de un condensador.

se puede aplicar a cualquier condensador: la carga almacenada es igual a la capacidad por la diferencia de potencial. Es importante recordar que se trata de un modelo y como tal no recoge todos los aspectos de la realidad. Un condensador real tiene una serie de defectos que no se incluyen aquí. Sin embargo, esta descripción es satisfactoria para su uso en electrotecnia.

Anteriormente se ha mencionado que el condensador almacena energía. Para calcular la cantidad de energía contenida en el espacio entre las placas se puede primero calcular el trabajo ejercido sobre las cargas. El trabajo elemental  $dW$  necesario para desplazar una carga  $dQ$  de una placa a otra a través de la diferencia de potencial  $V$  es:  $dW = VdQ$ . La energía acumulada consiste en el trabajo necesario para mover todas las cargas de una placa a otra (es decir para cargar el condensador). La ecuación 1.24 nos indica que  $dQ = CdV$ , por lo tanto se puede integrar el trabajo entre  $A$  y  $B$  siendo

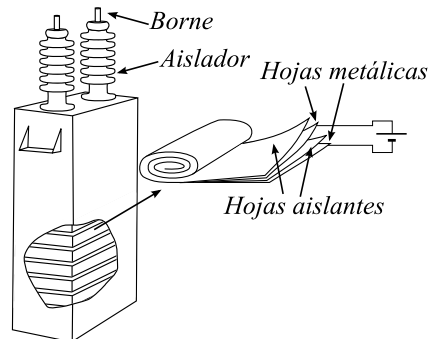
$$U = \int_A^B dW = \int_A^B CVdV = \frac{1}{2}CV_{AB}^2. \quad (1.25)$$

La energía depende directamente de la capacidad y del cuadrado de la tensión aplicada  $V_{AB}$ . La energía máxima almacenada depende de la capacidad y, por lo tanto, del dieléctrico. Para miniaturizar condensadores se usan dieléctricos con un valor alto y se juega con parámetros tales como la superficie de las placas y la distancia entre ellas. Sin embargo, para altas tensiones no hay otro remedio que usar condensadores voluminosos, aunque estos son peligrosos por los riesgos de explosión o incendio. El voltaje máximo que puede soportar un condensador es un parámetro importante en el diseño de un circuito. Uno tiene que usar los condensadores adecuados para evitar la destrucción del circuito<sup>6</sup>.

Otro peligro relacionado con los condensadores está relacionado justamente con el hecho de que acumula carga. Cuando se desconecta el condensador de la fuente de tensión, se mantiene su carga y la tensión en sus bornes<sup>7</sup> hasta que se le conecta a un circuito o hasta que se realiza un contacto fortuito entre los bornes. Debido a esto, conviene descargar los condensadores de valores altos antes de manipularlos, lo que se consigue simplemente colocando una resistencia entre

<sup>6</sup> Ésta es de hecho una avería muy común en las fuentes de alimentación.

<sup>7</sup> Debido a las pérdidas internas esta tensión irá bajando poco a poco a lo largo del tiempo. Puede ser un problema para los condensadores de alta tensión que se descargan muy lentamente y, por ello, resultan peligrosos una vez desconectados.



**Figura 1.13** Ejemplo de condensador de alto voltaje para uso industrial. El condensador consiste básicamente en dos láminas metalizadas separadas por hojas aislantes. Se alternan las capas conductoras aislantes y conductoras que luego se enrollan para colocar en el encapsulado.

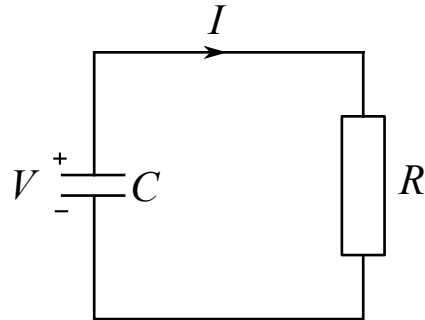
sus bornes. Se establece así una corriente eléctrica que disipa en la resistencia la energía acumulada en el condensador.

Para usos industriales se emplean condensadores similares al mostrado en la figura 1.13. El condensador está formado por una batería de condensadores en paralelo (ver asociación de condensadores). Cada condensador elemental está constituido por dos capas metálicas (aluminio o zinc) separadas mediante un aislante, típicamente papel impregnado de aceite mineral. La carcasa del condensador se rellena con aceite para mejorar la disipación de calor. Sin embargo, estos condensadores adolecen de graves problemas prácticos cuando se trata de potencias importantes: se calientan en exceso, pueden tener fugas y no es raro que surjan arcos voltaicos y cortocircuitos internos.

En la electrónica de señal y para pequeñas potencias se usan condensadores que emplean material cerámico como dieléctrico. Otro tipo de condensadores muy común es el condensador electrolítico, que permite alcanzar capacidades altas en volúmenes reducidos. Estos condensadores tienen polaridad debido al dieléctrico empleado, y, además, están afectados por una elevada dispersión respecto de los valores nominales debido al electrolítico.

### Ejercicio 1.3

En los años 2000 se ha desarrollado una nueva clase de condensadores de muy alta capacidad llamada “supercondensadores”. Gracias a su estructura interna, estos condensadores pueden almacenar mucha más energía. Una de las aplicaciones consiste en alimentar pequeños aparatos electrónicos que precisan corriente continua. En la figura siguiente se muestra un condensador conectado a una resistencia, donde dicho condensador actúa como una batería.



El condensador está inicialmente cargado con una tensión de  $5V$  y es capaz de almacenar una energía de  $10W \cdot h$ . La resistencia conectada tiene un valor de  $100\Omega$ .

- Hallar la capacidad del condensador.
- Determinar el tiempo de funcionamiento del condensador como batería (suponiendo una tensión constante).

### Solución del ejercicio 1.3

Para hallar la capacidad de este condensador, se puede usar la fórmula que relaciona la energía con el voltaje y la capacidad:

$$E = \frac{1}{2}CV^2 = 10W \cdot h = 36000J$$

La capacidad vale entonces:

$$C = \frac{2E}{V^2} = \frac{2 \cdot 36000}{25} = 2880F$$

Es un valor de capacidad muy elevado, pero que puede alcanzarse en este tipo de dispositivos.

Para determinar el tiempo de funcionamiento del dispositivo primero se debe determinar el consumo en potencia de la resistencia:

$$P = \frac{V^2}{R} = 0,25W$$

La energía consumida es básicamente el tiempo de funcionamiento por la potencia entregada. Suponiendo que la potencia es constante, el tiempo de funcionamiento es entonces:

$$t = \frac{E}{P} = \frac{10}{0,25} = 40h$$

El condensador puede alimentar la carga durante  $40h$  (considerando la tensión constante entre sus bornes).

### Ejercicio 1.4

Se dispone de un rollo de aluminio de cocina de 40cm de ancho y de 10m de largo. Se dispone de otro rollo de papel vegetal con las mismas dimensiones que puede servir de aislante. Siendo la espesura de la hoja de papel vegetal de 0,2mm, ¿cual sería la capacidad del condensador casero que se puede construir? Se considerará como constante dieléctrica relativa para el papel  $\epsilon_r = 2$ .

### Solución del ejercicio 1.4

Para realizar el condensador, se divide el papel aluminio en dos partes iguales, y se hace lo mismo para el papel aislante. Se obtienen entonces dos hojas de aluminio con superficie  $S = 5 \cdot 0,2 = 1\text{m}^2$ . Apilando las hojas de aluminio con una hoja de aislante entre ellas, la capacidad del condensador formado es:

$$C = \frac{2\epsilon_0 S}{d} = \frac{28,854 \cdot 10^{-12}\text{F}}{0,2 \cdot 10^{-3}} = 88,5\text{nF}$$

Resulta un condensador sencillo que no difiere demasiado de los condensadores usados en la industria. Los materiales son distintos pero el principio es el mismo.

### 1.2.3 Inductancias

Las inductancias o inductores constituyen la tercera gran clase de elementos lineales en electricidad y en electrónica. Al igual que un condensador, un elemento inductivo permite almacenar energía, pero, en este caso, en forma de campo magnético. Para entender el concepto de inductancia conviene pues estudiar primero cómo se produce el campo magnético.

Una carga moviéndose en el espacio ejerce sobre el resto de cargas una influencia (*fuera*) en forma de campo eléctrico y magnético. En el caso de conductores con corriente continua, aparece un campo magnético a su alrededor que puede tener una estructura muy compleja. Sin embargo, se puede calcular este campo para algunos casos sencillos que tienen aplicaciones prácticas importantes. Por ejemplo, para un hilo recto de longitud infinita recorrido por una corriente continua se puede demostrar que el campo magnético tiene una estructura simétrica en el espacio alrededor del hilo. Este campo define unas superficies cilíndricas sobre las cuales el módulo del mismo es constante (no así su dirección). Esta intensidad de campo decrece con el inverso de la distancia. Doblando el hilo para formar una espira circular, el aspecto del campo cambiará. En este caso, es como si se doblaran las superficies cilíndricas de igual intensidad de campo para darles una forma que recuerda un *donut* (forma toroidal). Cuando se superponen varias espiras idénticas recorridas por la misma corriente podemos hacernos una idea del campo en el interior de las mismas (ver fig 1.14 (a) y (b)). Esta disposición

de las espiras permite obtener un campo magnético casi uniforme dentro del cilindro definido por las espiras.

El solenoide o bobina es un ejemplo de dispositivo inductivo que consta de espiras enrolladas y recorridas por una corriente eléctrica. Si la corriente es continua, existe entonces un campo uniforme y constante en el interior de la bobina. Una **inductancia** (o **inductor**) es un elemento de circuito eléctrico capaz de generar tal campo magnético<sup>8</sup>. Es necesario describir algunos aspectos físicos de las inductancias para poder establecer un modelo matemático que pueda servir tanto para la corriente continua como para la corriente alterna.

Antes de estudiar los detalles de los elementos inductivos, conviene recordar algunos aspectos fundamentales que se observan en electromagnetismo:

- Un conductor recorrido por una corriente produce una influencia en su entorno en forma de campo magnético.
- La magnitud de este campo es proporcional a la intensidad de la corriente que lo recorre.
- Dado una superficie, se puede calcular “qué cantidad” de campo magnético atraviesa esta superficie mediante el flujo magnético.

La noción de flujo magnético es de importancia en electrotecnia, en concreto, para las aplicaciones en máquinas eléctricas. Representa de algún modo la cantidad de campo magnético que atraviesa una superficie y su unidad es el Weber [Wb] y suele denotarse con la letra griega  $\Phi$ . La definición formal del flujo magnético viene dada por:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.26)$$

A partir de aquí, se puede definir la inductancia (la propiedad que recibe dicho nombre) de un conductor que delimita una superficie (tal como lo hace una espira, por ejemplo):

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (1.27)$$

Donde  $I$  es la corriente continua que circula en el conductor y  $\Phi$  el flujo magnético que atraviesa la superficie delimitada. La inductancia determina la relación entre el flujo y la intensidad para un conductor con una determinada geometría, tal y como sucede en una bobina. Dado la importancia de las bobinas en la ingeniería eléctrica es importante calcular explícitamente la inductancia de una bobina con  $N$  espiras.

Se puede calcular de forma teórica el campo magnético en el interior de un solenoide aplicando la ley de Ampère, teniendo en cuenta que este campo es casi

<sup>8</sup> La inductancia es una propiedad física de un circuito magnético. Sin embargo se llama con el mismo nombre al elemento de circuito que tiene esta propiedad. En otros libros el lector podrá encontrar el término inductor para referirse al elemento de circuito. No se hará aquí sin embargo la diferencia entre los dos términos.

Nombre	Composición %	Max. Perm.
Monimax	47 Ni, 3 Mo	35,000
Sinimax	43 Ni, 3 Si	35,000
48 % nickel-iron	48 Ni	60,000
78 Permalloy	78.5 Ni	70,000
Mumetal	77 Ni, 5 Cu, 2 Cr	85,000
Deltamax	50 Ni	85,000
MoPermalloy	79 Ni, 4.0 Mo	90,000
Supermalloy	79 Ni, 5 Mo	900,000

Cuadro 1.3 Permeabilidad magnética relativa de algunos materiales.

uniforme. La expresión del campo magnético dentro del cilindro delimitado por la bobina es, aproximadamente:

$$B_0 = \mu \frac{N_0}{l_0} I \quad (1.28)$$

El campo uniforme  $B_0$  es proporcional a  $I$  y al cociente entre la longitud  $l_0$  y el número  $N_0$  de espiras. El campo magnético depende linealmente del parámetro  $\mu$  llamado permeabilidad magnética. La permeabilidad representa la sensibilidad de la materia al campo magnético y tiene como unidad el Henrio por metro [ $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$ ]. Para cambiar este factor en la bobina se puede colocar un núcleo de hierro dentro del cilindro definido por las espiras. La permeabilidad de un material se puede descomponer como el producto de la permeabilidad del vacío y de un número relativo propio del material considerado:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (1.29)$$

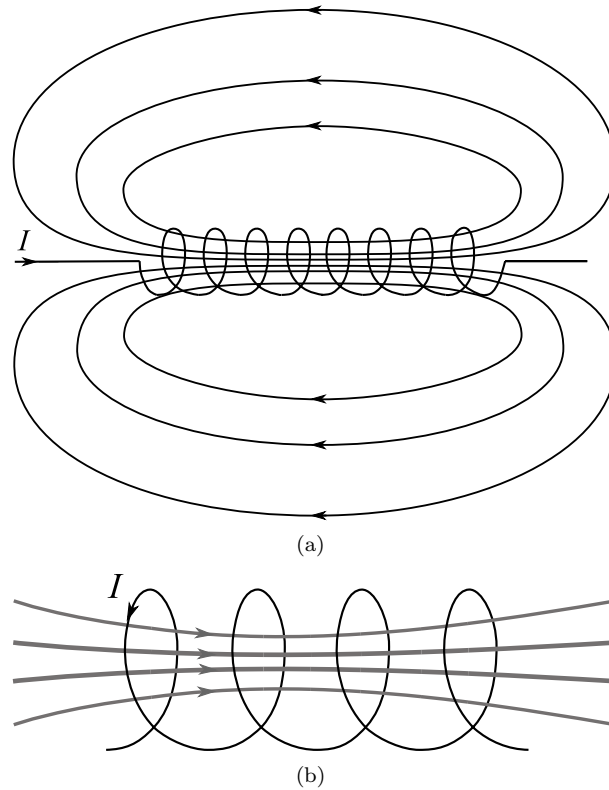
con  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$  y  $\mu_r$  un número adimensional. Algunos valores para diversos materiales se pueden encontrar en el Cuadro 1.3. Estos aspectos se estudian en profundidad en el Capítulo 4.

En la figura 1.15 aparece el ejemplo del campo creado por un solenoide. Se observa el corte transversal de la bobina con una corriente saliente hacia el lector en los círculos de arriba, y hacia dentro para los círculos de abajo. El campo es casi uniforme dentro del solenoide. Sin embargo, se ven efectos de borde importantes cerca de los conductores, donde el campo resulta no uniforme. Ahora que se ha calculado el campo dentro de la bobina, es posible hallar fácilmente el flujo que atraviesa una sección de la bobina. El campo es casi uniforme y normal a la superficie definida por una espira, por lo que el flujo es:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_0 N_0 S = S \mu N_0^2 / l_0 I \quad (1.30)$$

$S$  es la superficie de una sección de la bobina (de una espira), se debe contar  $N_0$  veces el flujo creado por una espira para tener en cuenta la superficie total dado que los flujos que atraviesan cada espira se suman<sup>9</sup>. La inductancia en este caso

<sup>9</sup> La bobina se puede ver como una helice formada por  $N$  espiras. Es una superficie continua pero se puede asimilar sin gran error a la asociación de  $N$  espiras.



**Figura 1.14** Esquema del campo creado por una inductancia. En (a) se dibujan las líneas de campo creadas por la corriente en la inductancia. Obsérvese cómo las líneas de campo siempre se cierran sobre sí mismas. En (b) aparece una ampliación de la zona interior a la bobina: en esta región, el campo forma líneas casi paralelas.

es independiente de la corriente del conductor y, despejando la ecuación (1.27), se obtiene:

$$L = S\mu N_0^2/l_0. \quad (1.31)$$

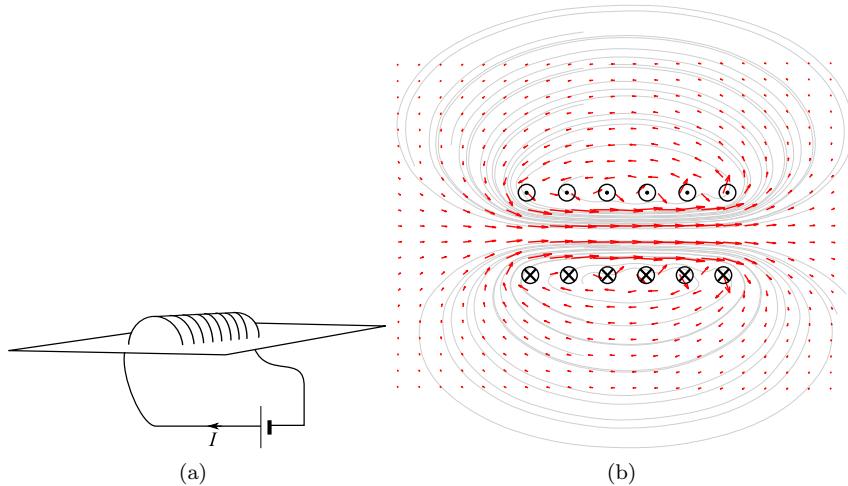
La inductancia  $L$  es un parámetro que depende de la geometría y de la naturaleza del material encerrado por la bobina. En realidad, se acaba de calcular lo que se conoce como la autoinductancia de una bobina, lo que tiene en cuenta el hecho de que la bobina se ve influenciada por su propio campo magnético. En el Capítulo 4 se precisan estas nociones.

Las inductancias acumulan energía en forma de campo magnético. Esta energía se calcula como el trabajo necesario para generar dicho campo en el espacio. Se presenta aquí solo el resultado del cálculo:

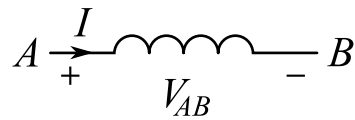
$$E_L = \frac{1}{2}LI^2 \quad (1.32)$$

Para incrementar la energía máxima conviene aumentar el número de espiras





**Figura 1.15** Simulación del campo creado por un solenoide. Se representa el campo en el plano transversal de la bobina de la figura (a). En (b), el módulo y la dirección del campo magnético se representan mediante un conjunto de flechas. Las líneas curvas y cerradas representan algunas líneas de campo. Los círculos negros simbolizan secciones de conductores. En los círculos de arriba, la corriente saldría hacia el lector, mientras que en los círculos de abajo la corriente entraría en el papel.

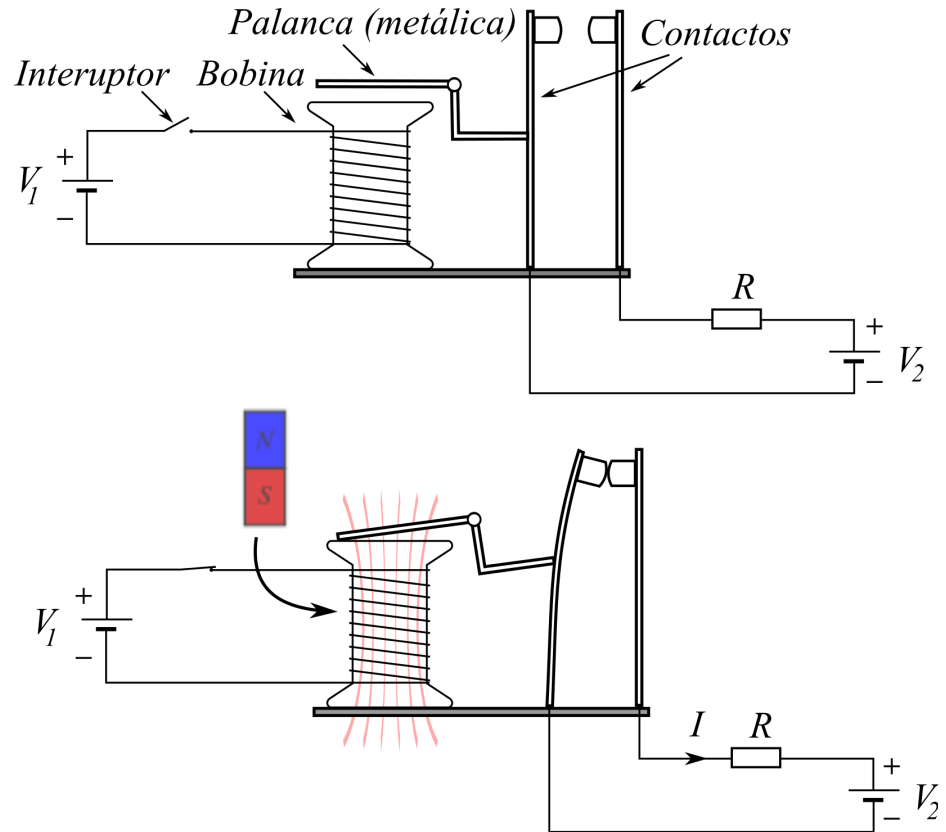


**Figura 1.16** Esquema normalizado de una inductancia.

o cambiar el material, es decir, aumentar  $L$  (caso de uso de materiales ferromagnéticos).

En la figura 1.16 se muestra el esquema normalizado de un elemento inductivo. Se representa también bajo el convenio receptor, con la corriente opuesta a la tensión. Se usará este símbolo en los circuitos para significar que un elemento de un dispositivo posee un comportamiento inductivo.

En realidad, un modelo más completo de la inductancia debe de tener en cuenta la resistividad del material de la bobina. Esta puede llegar a ser importante cuando se trata de varias decenas de metros, o incluso kilómetros, de hilo. La resistencia del conductor va a crear un calentamiento de la bobina y por lo tanto pérdidas de potencia. En el caso de las máquinas eléctricas de alta potencia, las cuales contienen muchas bobinas, se han de calcular estas pérdidas para incluirlas en el rendimiento del dispositivo. Otro aspecto que hay que tener en cuenta para el modelo cuando funciona en régimen de corriente alterna son los efectos capacitivos que pueden aparecer entre los hilos. Los hilos de una bobina están



**Figura 1.17** Se muestra en la figura el funcionamiento de una bobina como electroimán. Cuando el interruptor de la bobina se cierra, ésta actúa como un electroimán y la pieza metálica, atraída por el mismo, cierra el circuito. El interés de este mecanismo es el de poder cerrar un circuito que posee tensiones altas (por ejemplo  $V_2 = 220\text{V}$ ) mediante la aplicación de una tensión muy baja (por ejemplo  $V_1 = 12\text{V}$ ).

cubiertos por un aislante eléctrico para evitar el contacto entre una espira y la siguiente. Las espiras, por tanto, están separadas únicamente por esta fina capa aislante. Estos efectos sin embargo se pueden despreciar en corriente continua.

El modelo de la inductancia tiene mucha importancia en electrotecnia dado que los bobinados de los transformadores y de las máquinas eléctricas se reducen a este modelo. Los cálculos de campo magnético y de transferencia de energía son abordables gracias a ellos.

Una aplicación típica de las bobinas en corriente continua es el relé. El relé es un dispositivo electromecánico que permite controlar la apertura o cierre de un circuito. Su utilidad es servir de interruptor controlable mediante una tensión pequeña que permite cortar o activar un circuito sometido a una tensión alta. El esquema del dispositivo se puede ver en la figura 1.17. La bobina, una vez

alimentada, actúa como un electroimán que atrae una pequeña pieza metálica. La pieza metálica cierra un interruptor formado por dos conductores flexibles (típicamente de cobre). Una vez que el circuito está cerrado, la corriente puede circular por el circuito de alto voltaje. Un inconveniente de este tipo de dispositivos es el consumo de energía cuando el interruptor está cerrado. La fuerza que la bobina puede ejercer sobre la pieza metálica está relacionada con la densidad de energía que produce la bobina en el espacio.

### Ejercicio 1.5

Se quiere diseñar una inductancia de 1mH. Se dispone de cable aislado en abundancia y de un cilindro de papel de 3cm de diametro y de 5cm de largo. ¿Cómo obtener tal inductancia? ¿Cuántas vueltas se necesitan si se coloca un cilindro de hierro en lugar de papel?

### Solución del ejercicio 1.5

Para obtener la inductancia equivalente se usa la fórmula 1.31 y se despeja el número de espiras necesarias para obtener una inductancia de 1mH:

$$N = \sqrt{\frac{L l}{S \mu_0}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{\pi (2,5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 147,3$$

Son necesarias 148 vueltas del cable para obtener la inductancia deseada.

Colocando un cilindro de hierro en vez de papel en nuestra bobina, el nuevo número de espiras sería:

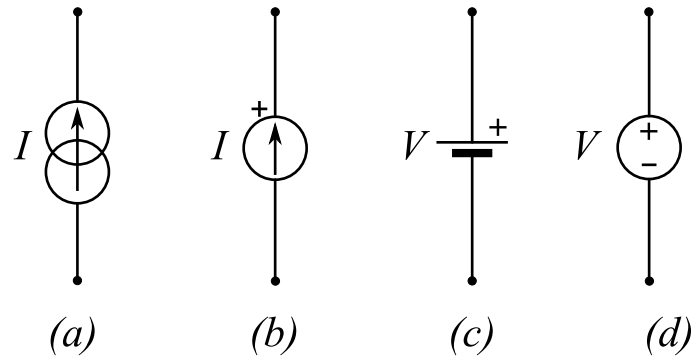
$$N' = \frac{N}{\sqrt{\mu_r}},$$

con  $\mu_r$  la permeabilidad relativa del hierro (alrededor de 5000). Como se ve, puede reducirse considerablemente el número de espiras necesarias.

## 1.2.4 Generadores y fuentes

Un generador es un elemento capaz de poner en movimiento los electrones en un circuito. Sería equivalente a una bomba en un circuito hidráulico: no crea el fluido, sino que lo hace circular. El generador eléctrico crea un campo eléctrico que acelera las cargas, provocando una corriente eléctrica si está conectado a un circuito por donde pueda circular.

Los generadores se pueden modelar según dos tipos de fuentes: las fuentes de tensión y las fuentes de corriente. El primer tipo fija la diferencia de potencial, mientras la corriente depende del circuito conectado. En el segundo caso, se ofrece una corriente fija. La diferencia de potencial para esta fuente dependerá del circuito. Los símbolos usuales para las fuentes de tensión y corriente se muestran en la figura 1.18.

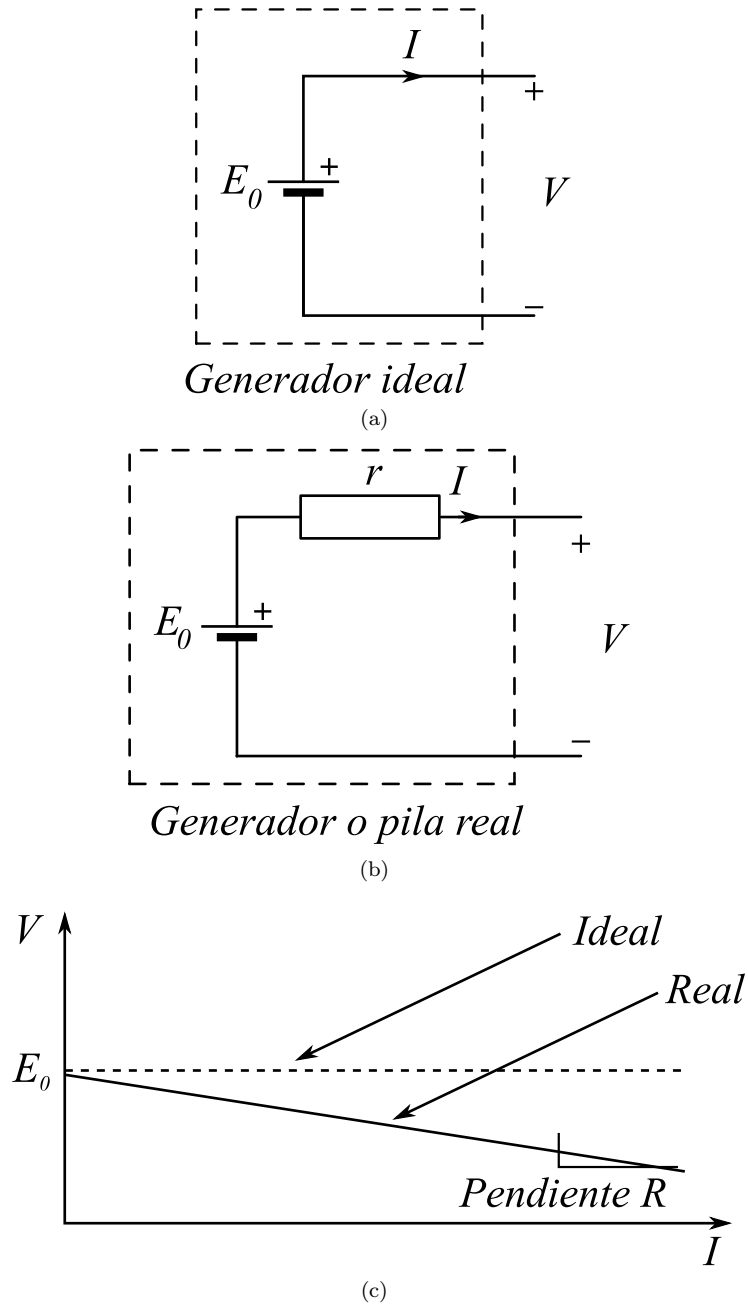


**Figura 1.18** Símbolos normalizados de las fuentes de tensión y de corriente. A la izquierda (a y b) se encuentran las fuentes de corriente y, a la derecha, los símbolos para las fuentes de tensión (c y d).

Un generador ideal de tensión continua se representa esquemáticamente como aparece en la figura 1.19 (a). Un generador o pila ideal puede producir cualquier corriente sin cambiar la tensión entre sus dos polos. Esto significa que, independientemente de la carga conectada a su salida, el generador es capaz de mantener la misma tensión. Es decir, si se conecta una resistencia  $R$  a un generador de f.e.m. (fuerza electromotriz)  $E_0$ , aparecerá una corriente dada por la ley de Ohm:  $I = E_0/R$ . Si la resistencia es muy pequeña, la corriente será muy grande mientras el generador mantenga la tensión  $E_0$  constante entre sus bornes. Este tipo de comportamiento viene representado en la figura 1.19 donde se observa la característica tensión-corriente de un generador. En línea discontinua se representa la característica ideal de un generador, donde la tensión se mantiene igual para cualquier corriente  $I$  de salida: es una recta de ecuación  $V = E_0$ .

Sin embargo, esta característica es imposible de obtener en la realidad, ya que esto significaría que el generador podría proporcionar una potencia infinita. Recordemos que la potencia se expresa como  $P = VI$  en régimen de corriente continua. Para  $I \rightarrow \infty$  con  $V$  constante, la potencia también sería infinita. En la práctica la potencia está limitada y el generador no puede proporcionar potencia indefinidamente creciente. Cualquier pila o generador de tensión real se modela con una resistencia en serie con el generador de f.e.m., resistencia que simboliza las pérdidas y las limitaciones del propio generador. Para un generador de tensión real, esta resistencia en serie provoca una caída de tensión a la salida del generador a medida que va subiendo la corriente proporcionada. Esta resistencia, llamada **resistencia interna**, modeliza los defectos y las pérdidas internas del dispositivo.

En el esquema de la figura 1.19 (b), una f.e.m.  $E_0$  se encuentra en serie con una resistencia  $r$  que representa la resistencia interna del dispositivo real. A la salida del generador se mide una tensión  $V$  y una corriente  $I$  proporcionada al dispositivo conectado. La tensión a la salida sería la tensión del generador menos



**Figura 1.19** Esquema de un generador de f.e.m., junto con las características tensión-corriente de un generador ideal (a) y real (b). En esta figura aparece el esquema normalizado de un generador de tensión continua. También se representa la resistencia interna modelada como una resistencia en serie con el generador. (c) Características ideal y real de un generador de tensión continua cuando cambia la intensidad a la salida.

lo que “roba” la resistencia interna:

$$V = E_0 - rI \quad (1.33)$$

La representación de la tensión  $V$  en función de la corriente se puede apreciar en la figura 1.19 (c), constituyendo una recta de pendiente  $-r$ . A medida que sube la intensidad de salida del generador, la diferencia de potencial  $V$  se hace menor por causa de la resistencia interna. Se puede analizar dónde se consume la potencia haciendo un balance de cada elemento:

- Potencia de la resistencia interna  $r$ :  $P_r = rI^2$
- Potencia de la salida:  $P_s = VI = (E_0 - rI)I = E_0I - rI^2$
- Potencia de la f.e.m.:  $P_E = E_0I$

La resistencia interna disipa una potencia dentro del generador real. Significa que el generador tiene un consumo propio de energía que se convierte en calor.

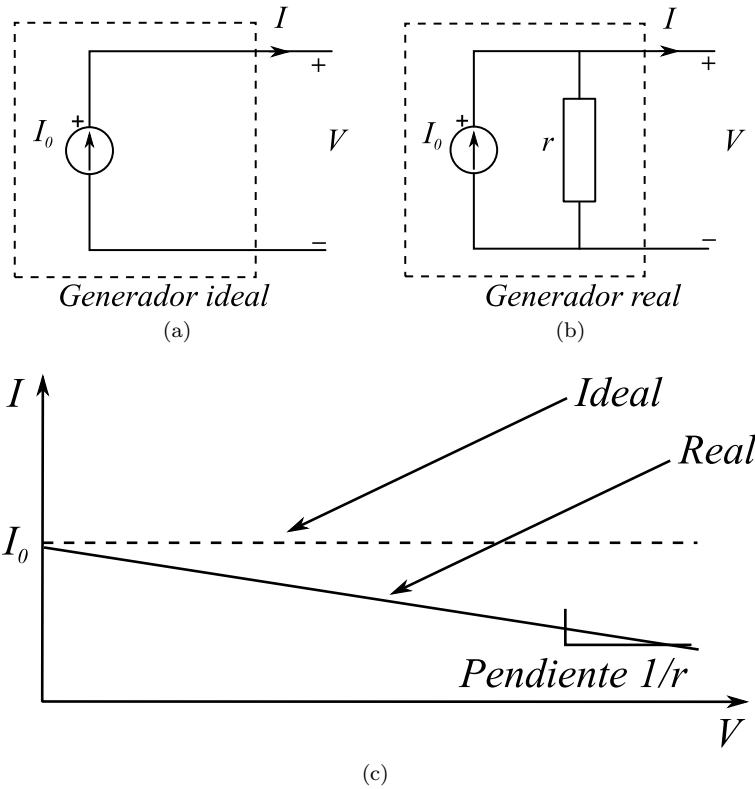
Existen también generadores de corriente en los que la corriente suministrada por la fuente es *a priori* independiente de la tensión que requiere la carga. Estos generadores proporcionan una corriente  $I_0$  constante independientemente de la impedancia conectada en sus bornes. En la figura 1.20 (a) aparece el esquema normalizado del generador de corriente. Si conectamos una resistencia  $R$  a un generador ideal de corriente  $I_0$ , la tensión de salida será  $V = RI_0$ , según la ley de Ohm. La característica tensión/corriente de una fuente ideal es una recta  $I = I_0$ ; como se puede observar en la figura 1.20 (b), la corriente es independiente de la tensión de los bornes del generador.

En realidad, existen defectos que se plasman en forma de una resistencia de fuga de corriente en paralelo con el generador, tal como se muestra en la figura 1.20 (c). Este generador no puede proporcionar una corriente constante para cualquier tensión de salida ya que esto significaría que el generador podría producir una potencia infinita. Al tener una resistencia en paralelo con el generador, la corriente de salida disminuye a medida que la tensión de salida del generador aumenta. Al igual que con el generador de tensiones, se puede expresar la ley que relaciona la corriente de salida con la tensión  $V$  a partir de la figura 1.20 (b):

$$I = I_0 - V/r. \quad (1.34)$$

Se representa esta recta en la figura 1.20 (c). La corriente de salida  $I$  del dispositivo corresponde a la corriente del generador ideal menos lo que “roba” la resistencia interna. Se puede hacer un balance de las potencias de cada elemento cuando el generador proporciona una tensión  $V$  y una corriente  $I$  a la salida:

- Potencia de la resistencia interna  $r$ :  $P_r = V^2/r$
- Potencia de la salida:  $P_s = VI = (I_0 - V/r)V = VI_0 - V^2/r$
- Potencia de la fuente de corriente:  $P_I = VI_0$



**Figura 1.20** Esquema de un generador de corriente, junto con las características tensión-corriente de un generador ideal (a) y real (b). En esta figura se dibuja el esquema normalizado de un generador de corriente continua, donde el círculo con la flecha indica el sentido de la corriente del generador. La resistencia interna se asocia en paralelo con el generador. (c) Características ideal y real de un generador de corriente continua cuando cambia la intensidad a la salida.

A medida que el voltaje de salida aumenta, la potencia entregada por el generador disminuye por la disipación interna en la resistencia interna.

Existe un método teórico para pasar de un generador de tensión a un generador de corriente equivalente: son los equivalentes de Thévenin y Norton (ver sección 1.5). Sin embargo, es preciso señalar que existen diferencias importantes de diseño entre ambos dispositivos: no se construye de la misma forma un generador de tensión que un generador de corriente.

### Ejercicio 1.6

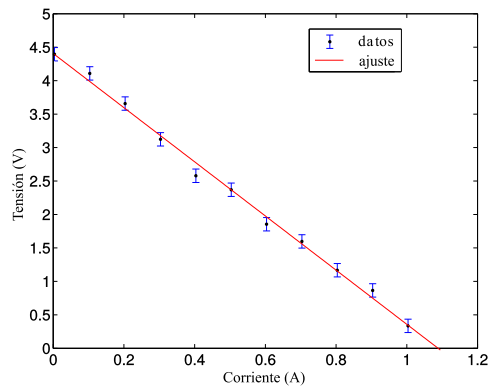
Se han obtenido en un laboratorio los siguientes valores de corriente y tensión para distintas cargas de un generador de tensión:

tensión (V)	4.41	4.13	3.68	3.14	2.60	2.39	1.87	1.62	1.19	0.8892
corriente (A)	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90

A partir de estos valores, estimar la resistencia interna, el valor nominal del voltaje de la batería y la resistencia de la carga en cada punto.

### Solución del ejercicio 1.6

Para estimar la resistencia interna se ha de estimar la pendiente de la recta. Usamos el método de los mínimos cuadrados que nos proporciona la mejor estimación. En la figura siguiente se dibujan los datos junto con la recta de regresión lineal.



Después del cálculo, la pendiente resulta:

$$a = -4$$

Este valor corresponde a una resistencia interna del generador de  $4\Omega$ . El valor nominal de la batería corresponde al valor cuando la intensidad es nula, es decir:  $V_0 = 4,41V$ .

Para obtener el valor de la carga para cada punto de la característica usamos la fórmula:

$$R = \frac{(E - rI)}{I}$$

y se obtiene el Cuadro siguiente:

Tensión (V)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R ( $\Omega$ )	Inf	40.0	18.0	10.6	7.0	4.8	3.3	2.3	1.5	0.8	0.4

## 1.3 Fuentes dependientes

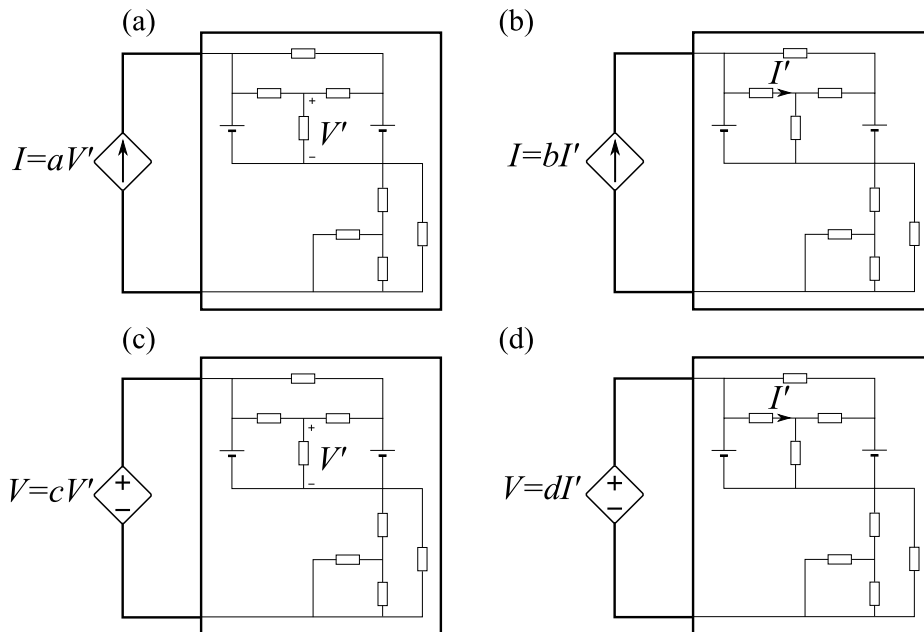
En algunas situaciones, los elementos ideales detallados hasta ahora no son suficientes para obtener un modelo satisfactorio del circuito. Un tipo de elementos adicional usado para elaborar modelos más completos consiste en fuentes de



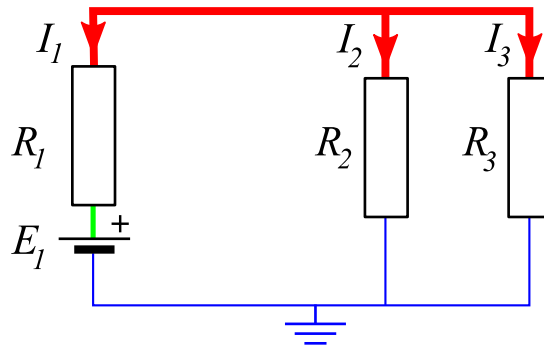
corriente y tensiones cuyos valores dependen de algún parámetro del circuito tratado. Estos generadores o fuentes se dicen **dependientes** al tener su valor de salida sujeto a otro parámetro del circuito que puede incluso variar en el tiempo. El valor de la tensión o corriente del generador puede depender por ejemplo de otra tensión o corriente del circuito.

Existen cuatro tipos de fuente dependientes:

- Las fuentes de corriente controladas por tensión: una tensión del circuito determina la corriente de la fuente dependiente. La corriente de la fuente se expresa como  $I = aV'$ , con  $a$  un parámetro que depende de la fuente y  $V'$ , una tensión del circuito. Ver la figura 1.21 (a).
- Las fuentes de corriente controladas por corriente: otra corriente del circuito determina la corriente de la fuente. La corriente se expresa como  $I = bI'$ , siendo  $b$  un parámetro propio de la fuente e  $I'$ , otra corriente del circuito. Ver la figura 1.21 (b).
- Las fuentes de tensión controladas por tensión: aquí es una tensión la que controla el voltaje de salida. La tensión de salida de la fuente sería  $V = cV'$ , donde la ganancia  $c$  depende de la fuente y  $V'$  depende del circuito. Ver la figura 1.21 (c).
- Las fuentes de tensión controladas por corriente: en este caso, una corriente



**Figura 1.21** Tipos de fuentes dependientes comunes en circuitos lineales. Los generadores de corriente pueden depender de una tensión o de una corriente del circuito al que están conectados. Lo mismo para los generadores de tensión, que son controlados por algún parámetro del circuito.



**Figura 1.22** Ejemplo sencillo de circuito donde las partes del circuito situadas bajo un mismo potencial están marcadas con el mismo color.

del circuito determina el voltaje de salida. El voltaje de salida es  $V = dI'$ , con  $d$  el parámetro propio de la fuente e  $I'$ , una corriente del circuito. Ver la figura 1.21 (d).

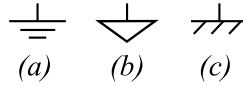
Estos tipos de fuente aparecen cuando existen elementos tales como transistores. Suelen complicar el análisis de los circuitos lineales; sin embargo, resultan esenciales cuando se tratan los circuitos con dispositivos semiconductores. En la figura 1.21 se representan los cuatro tipos de fuentes anteriormente enumerados. Pueden aparecer con símbolos distintivos en los circuitos tales como rombos o cuadrados. Siempre se pone al lado el parámetro del circuito del que dependen.

## 1.4 Análisis de circuitos lineales

Un circuito eléctrico es la asociación de varios dispositivos conectados entre sí (resistencias, generadores, etc.) con el fin de desempeñar una cierta función o de obtener el modelo de un dispositivo dado. Un circuito lineal es la representación idealizada de este circuito físico, a partir de elementos lineales.

Esta asociación se representa de manera esquemática mediante un diagrama donde a cada elemento físico le corresponde un símbolo normalizado junto con el valor numérico de su característica física (la capacidad, inductancia, etc.). Este esquema permite visualizar las corrientes y las tensiones presentes en el circuito, y, además, proporciona una herramienta de diseño, de análisis y de cálculo. Es una representación muy útil y muy potente que permite abstraer las características importantes del dispositivo físico. Esto es, se cumple el propósito de la ingeniería en cuanto se dispone de un modelo de la realidad (una abstracción) que permite razonar y hacer cálculos.

En la figura 1.22 se ilustra un ejemplo de circuito donde los elementos están conectados mediante líneas. Estas líneas representan conductores ideales que



**Figura 1.23** Representación de la referencia de masa en los circuitos. La representación de la izquierda (a) corresponde a una referencia a la tierra. El esquema del centro (b) corresponde a la masa para circuitos que tratan con señales, y el esquema de la izquierda (c) suele representar una referencia sobre la carcasa del aparato.

conectan los diversos elementos físicos (resistencias y generador de tensión en este caso). Sobre esta figura se representan las tensiones y corrientes que circulan en cada elemento.

Los conectores son elementos donde el potencial es idéntico en todo punto. En un conductor, como puede ser un cable, el potencial se considera constante en toda su extensión; dicho de otro modo, no hay diferencia de potencial entre dos puntos de un mismo cable. Estas zonas equipotenciales se comportan como un único nodo (o nudo) donde van conectados los elementos. En la figura 1.22, la línea roja en la parte superior del dibujo conecta las tres resistencias. En cada punto de esta línea el potencial eléctrico es el mismo, sin embargo no fluye necesariamente la misma corriente en cada tramo de la línea. Si existen ramificaciones en el conector (si se separa en dos por ejemplo), entonces las intensidades en cada rama pueden ser distintas. En la figura 1.22 la corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son distintas a pesar de fluir desde un mismo conductor (se entiende aquí por conductor la tres ramas de la línea roja).

Existe un valor de potencial particularmente importante en electricidad, ya que sirve de referencia a todos los valores de potencial en un circuito. Se trata de la denominada **masa**, que se representa como se muestra en la figura 1.23. Como se ha dicho, se trata de una referencia absoluta para los potenciales del circuito. Este potencial de referencia es a menudo la tierra o el neutro de la red eléctrica. En las instalaciones eléctricas domésticas los enchufes disponen en su mayoría de tres terminales: uno llamado fase, un neutro que sirve de referencia y una toma de tierra que se conecta al suelo de la casa (literalmente a la tierra de los cimientos de la casa). Dependiendo de la referencia real usada se elige un símbolo u otro: por ejemplo, para una referencia respecto a la tierra del circuito se usará el esquema 1.23 (a). Puede existir a veces más de una referencia en los circuitos debido al conexionado. Por ejemplo, una parte del circuito puede estar conectado a la tierra, y otra a la carcasa metálica de un aparato. Hay que tener cuidado entonces de que estos circuitos queden separados eléctricamente, dado que las dos tierras no están necesariamente al mismo potencial relativo<sup>10</sup>. El contacto entre estas masas puede resultar peligroso al existir una diferencia de potencial

<sup>10</sup> Para entender este punto, se puede tomar la analogía de la referencia de la altura. Alguien puede medir alturas tomando como referencia el nivel del mar o la Puerta del Sol de Madrid. En ambos casos la altura absoluta de un objeto será la misma en los dos referenciales. Existirá, sin embargo, una diferencia de altura entre las dos referencias.

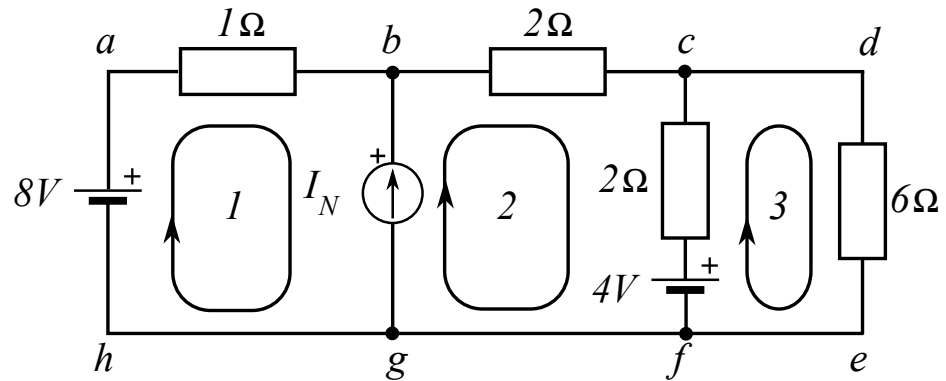


Figura 1.24 Ejemplo de circuito lineal con 3 mallas y 3 nudos.

que puede ser importante, lo que provoca corrientes que fluyen de una parte hacia otra. Como se ve, la existencia de múltiples referencias puede complicar el diseño de circuitos al tener que aislar las distintas partes eléctricamente.

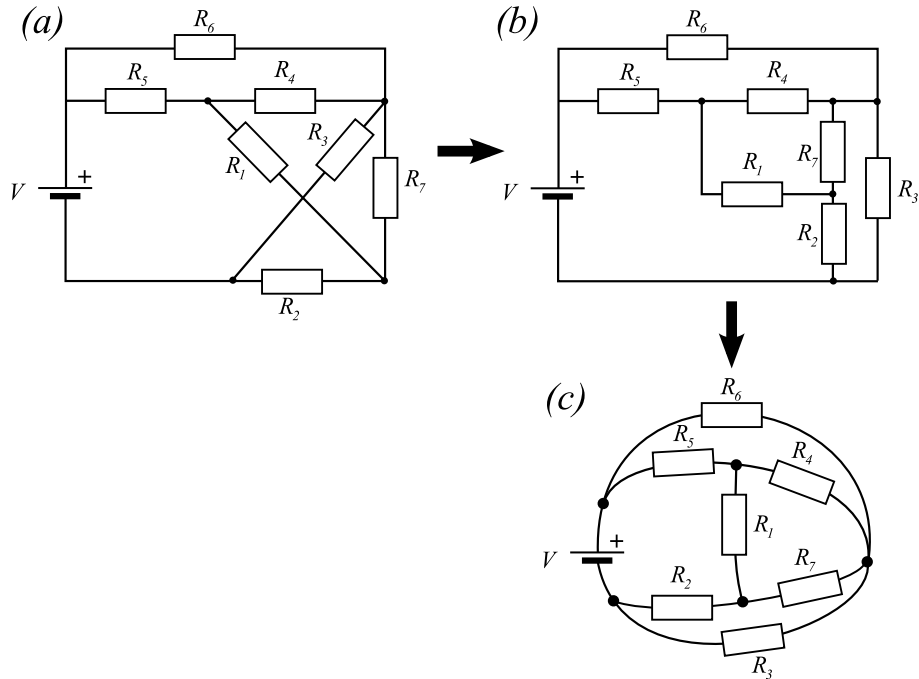
#### 1.4.1 Definiciones

Resolver un circuito lineal consiste en deducir del esquema todas las corrientes eléctricas y todas las tensiones que lo caracterizan. Antes de aplicar las leyes que rigen la electricidad, conviene analizar la topología del circuito, es decir, estudiar cuál es la estructura de las conexiones. Se definen ahora los elementos básicos de los circuitos desde el punto de vista topológico:

- **Nudo:** un nudo es un conductor con un potencial eléctrico dado donde confluyen 2 o más corrientes. Se suele referir al nudo como el punto de interconexión de dichas corrientes.
- **Rama:** una rama consiste en una unión mediante dipolos entre dos nudos. Dados 2 nudos, podemos unirlos mediante una infinidad de tipos de ramas. Por ejemplo una resistencia entre dos nudos es una rama.
- **Lazo:** un lazo es un recorrido cerrado formado por ramas del circuito.
- **Malla:** una malla es un lazo que no contiene a ningún otro lazo en su interior<sup>11</sup>.

Algunos ejemplos de estas definiciones aparecen en el circuito de la figura 1.24. En esta figura se han dibujado seis elementos lineales. Se pueden contar en total 6 lazos:  $abcdefgha$ ,  $abgha$ ,  $abcfgha$ ,  $bcdefgb$ ,  $bcfgb$ ,  $cdefc$ . De estos 6 lazos, podemos destacar 3 mallas, es decir 3 recorridos cerrados que no se solapan:  $abgha$ ,  $bcfgb$  y  $cdefc$ . Las tres mallas van marcadas con un número y corresponden a las tres “ventanas” del circuito. Los otros lazos se pueden obtener como combinaciones de estas tres mallas.

<sup>11</sup> El concepto de malla está relacionado con los circuitos planos. Son circuitos que se pueden dibujar de tal forma que ninguna rama quede por debajo o por encima de otra.



**Figura 1.25** Ejemplo de circuito lineal que puede simplificarse al dibujar de nuevo el esquema. En la figura (b) no existe ningún cruce de ramas, y, aunque el circuito es todavía complejo, se puede analizar con ayuda de las leyes de Kirchhoff. En la última figura (c), se han marcado claramente los nudos y las resistencias que los unen. Aparece una simetría en el circuito que podía ser difícil de intuir antes. Es importante transformar el circuito para hacer aparecer claramente su estructura.

Por otra parte, se pueden contar 3 nudos en el circuito, los dos primeros son inmediatos y están en los puntos  $b$  y  $c$ . El tercero es más difícil de detectar, ya que se trata de la asociación de los puntos  $g$  y  $f$ . Estos dos puntos constituyen el mismo nudo porque no hay ningún dipolo que los separe (están unidos por un cable). En este nudo se han conectado cuatro ramas y se podría utilizar para definir el potencial de referencia del circuito (la masa o la tierra). Es un ejemplo de cómo puede engañar el aspecto de un circuito. Merece la pena analizar y volver a dibujar los circuitos que pueden parecer complejos a primera vista con el fin de ayudar a su resolución. La localización de los nudos debe de hacerse con cuidado también para no olvidar o confundir alguna corriente. En la figura 1.25 se muestra un ejemplo de circuito que puede parecer complicado a primera vista. Sin embargo una vez transformado su análisis resulta más sencillo. Por ejemplo, se puede quitar el cruce de resistencias que resulta incómodo para los cálculos. Una vez transformado el circuito en la forma (c), se puede proceder a

su análisis. Sigue siendo un circuito complejo, pero las estructuras aparecen más claramente<sup>12</sup>.

Resolver los circuitos consiste, por una parte, en analizar la estructura de los circuitos modificando su forma a conveniencia sin modificar sus magnitudes, y, por otra, en aplicar las leyes de la electricidad que rigen los elementos del circuito.

### 1.4.2 Leyes de Kirchhoff

En las primeras secciones de este capítulo se ha descrito el comportamiento eléctrico de algunos elementos básicos. Ahora se van a combinar estos elementos en redes y, gracias a la teoría de circuitos, se podrán deducir las cantidades importantes que caracterizan el circuito. Por un lado, se debe analizar el efecto de la red y de las conexiones. Por otro lado, se deben aplicar las leyes físicas que rigen los elementos. Las leyes de Kirchhoff que se enuncian a continuación son la base de todo análisis de circuitos, sea lineal o no-lineal. Permiten establecer relaciones entre los voltajes y corrientes de un circuito. Por tanto, gracias a estas ecuaciones y a las leyes de comportamiento de los componentes se pueden resolver los circuitos.

Las leyes de Kirchhoff son una forma de las leyes de conservación aplicadas a circuitos eléctricos<sup>13</sup>. **La primera ley de Kirchhoff** especifica que no hay acumulación de cargas en ningún punto de un circuito. Significa que en un nudo del circuito la suma algebraica de las corrientes es nula. Para hacer la suma algebraica de las corrientes en un nudo se toma con signo positivo las corrientes entrantes (con la flecha hacia el nudo) y con signo negativo las corrientes salientes:

$$\sum_{k \in \text{nudo}} I_k = 0 \quad (1.35)$$

Esta ley significa que no se puede tener un hilo o un nudo donde salga más corriente de la que entra (o al revés). En la figura 1.26 (a) se muestra un ejemplo de nudo donde llegan varias corrientes a la vez. Entran en el nudo las corrientes  $I_3$  e  $I_4$  y salen las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ . Se establece la relación entre estas corrientes

<sup>12</sup> En el apartado 1.6 se analiza cómo transformar una asociación de resistencias conectadas en estrella como las resistencias en  $R_2$ ,  $R_1$  y  $R_7$  en la figura 1.25 mediante una asociación en triángulo que simplifica mucho el circuito

<sup>13</sup> La ecuación de conservación de la carga se expresa de la forma siguiente:  $\text{div}(J) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Significa que las variaciones espaciales de la corriente ( $J$ ) son iguales a las variaciones temporales de la carga ( $\rho$ ). Tomando el ejemplo de un trozo de conductor como el de la figura 1.1, podemos asociar una densidad de corriente entrante  $J_1$  y otra saliente  $J_2$ . Usando el teorema de la divergencia aplicado al volumen del conductor, la ecuación anterior se transforma en:

$$\iiint_V \text{div}(J) dV = \iint_S J_2 \cdot dS - \iint_S J_1 \cdot dS = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

Si el segundo término es nulo, entonces la corriente que entra es igual a la corriente que sale. En el caso de las leyes de Kirchhoff, el segundo término se considera nulo, es decir, que no hay creación o destrucción de carga en un punto.

gracias a la ley de Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (1.36)$$

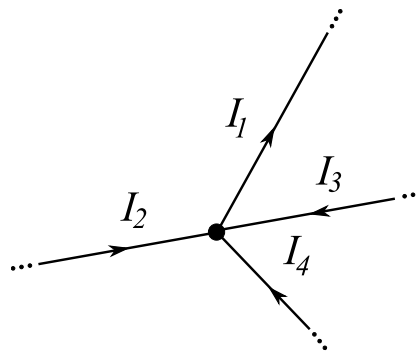
Una forma cómoda y equivalente de enunciar esta ley consiste en razonar sobre los flujos de corriente eléctrica: “en un nudo dado, todo lo que entra es igual a lo que sale”. Es decir:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4. \quad (1.37)$$

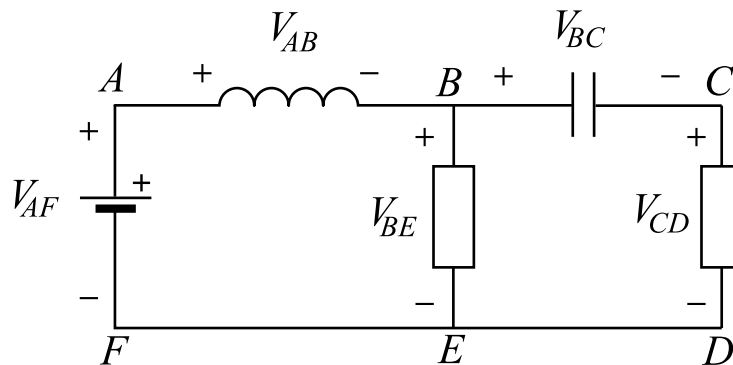
La **segunda ley de Kirchhoff**, llamada también ley de tensiones de Kirchhoff, representa otra ley de conservación. Es una ley de conservación de la tensión en una malla o lazo<sup>14</sup>.

Por ejemplo, los puntos ABEFA en la figura 1.26 (b) forman un lazo. Existen

<sup>14</sup> La ley de Kirchhoff en tensiones se puede demostrar asimismo a partir de las ecuaciones de Maxwell. Eligiendo un recorrido cerrado dentro de un circuito, se puede calcular la



(a) Primera ley de Kirchhoff



(b) Segunda ley de Kirchhoff

**Figura 1.26** (a) Esquema de un nudo donde llegan dos corrientes positivas ( $I_3$  y  $I_4$ ) y dos corrientes negativas. La ley de Kirchhoff afirma que la suma algebraica de estas corrientes es nula. (b) Ilustración de la segunda ley de Kirchhoff que afirma que la suma de las tensiones en una malla cerrada tiene que ser nula. Por ejemplo  $V_{AF} - V_{AB} - V_{BE} = 0$ .

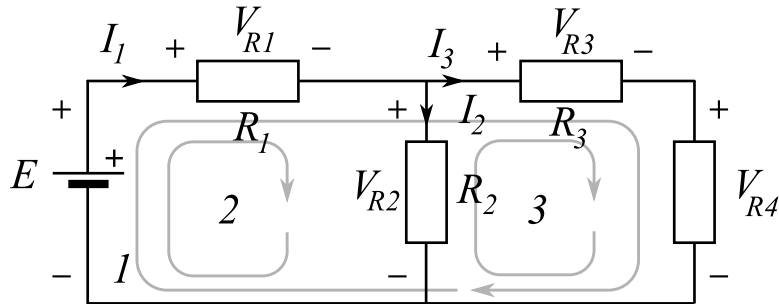


Figura 1.27 Ejemplo de aplicación de las leyes de Kirchhoff.

otros dos lazos: ABCDEFA y BCDEB. La ley de Kirchhoff expresa que la suma algebraica de las tensiones de estos circuitos cerrados tiene que ser nula para que la energía se conserve. La segunda ley de Kirchhoff para un circuito cerrado se enuncia de manera general:

$$\sum_{k \in \text{malla}} V_k = 0, \quad (1.38)$$

para las tensiones de un lazo del circuito. En nuestro ejemplo de la malla ABEFA de la figura 1.26 (b), la ley de Kirchhoff en tensiones proporciona la siguiente ecuación:  $V_{AB} + V_{BE} + V_{EF} + V_{FA} = 0$ . Si no se cumple la ley de Kirchhoff para un lazo del circuito, se contempla una de las dos situaciones siguientes:

- hemos cometido un error al sumar las tensiones algebraicamente, es decir que hay un error de signo.
- existen campos electromagnéticos externos que inducen tensiones.

En el primer caso, se deben de sumar correctamente las tensiones, para ello se expondrá más adelante un método para conseguirlo sin dificultad. En el segundo caso, no es que fallen las leyes del electromagnetismo, simplemente las leyes de Kirchhoff no cuentan con que existan inducción electromagnética en el propio circuito.

Se considera el ejemplo del circuito de la figura 1.27 para aplicar de forma práctica las leyes de Kirchhoff siguiendo los pasos a continuación:

circulación del campo eléctrico dentro de este conductor a lo largo del mismo como:

$$\oint E \cdot dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

De acuerdo con la ley de Faraday, la circulación de este campo es igual a la variación de flujo magnético en la superficie que encierra el recorrido. En la mayoría de los casos, esta variación de flujo se puede considerar nula. La ley de Kirchhoff puede entonces deducirse como:

$$\oint E \cdot dl = \sum_{k \in \text{malla}} V_k = 0$$



1. Se elige una malla del circuito, por ejemplo del lazo 1.
2. Para sumar las tensiones se elige el sentido de rotación horario siguiendo el lazo. Se elige un punto de salida y se recorre el lazo.
3. Dadas las corrientes, se establece la diferencia de potencial de cada elemento según es un receptor o generador (ver convenio de signos).
4. Las tensiones dirigida de - a + en el sentido de rotación (como la tensión  $E$ ) van sumadas con un signo positivo.
5. Las tensiones dirigida de + a - se suman con un signo menos.

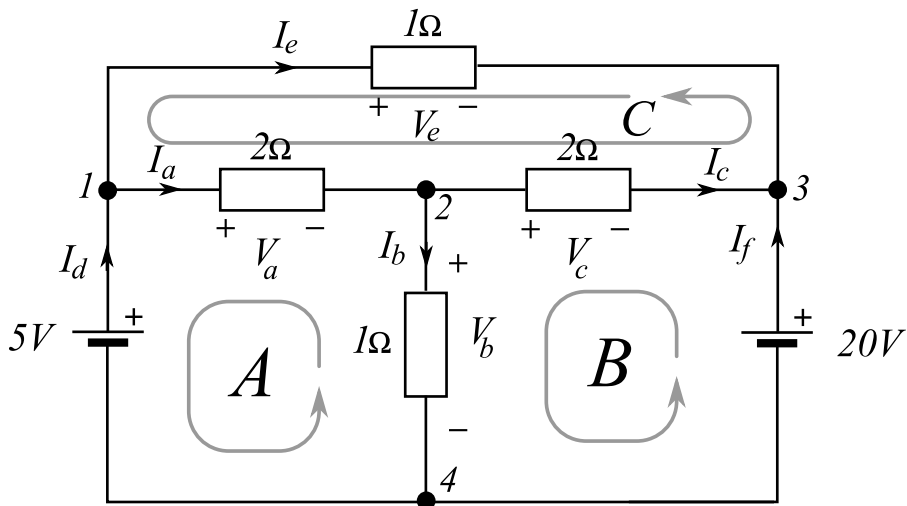
Para el lazo de nuestro ejemplo, la aplicación del método al lazo 1 resulta:

$$E - V_{R1} - V_{R3} - V_{R4} = 0.$$

Gracias a las leyes de Kirchoff y la ley de los elementos se pueden determinar todas las tensiones y corrientes del circuito. Cuando todos los elementos son lineales, el circuito puede resolverse con un sistema de ecuaciones lineales con las técnicas del álgebra lineal.

### Ejercicio 1.7

Deducir a partir de las leyes de Kirchoff las ecuaciones de las mallas y de los nudos de la figura siguiente:



### Solución del ejercicio 1.7

Para empezar se aplica la ley de Kirchoff en corriente a los cuatro nudos marcados, se trata de establecer el balance de corrientes en cada nudo:

$$\begin{array}{ll} I_d = I_a + I_e & \text{Nudo 1} \\ I_a = I_b + I_c & \text{Nudo 2} \\ I_c + I_e + I_f = 0 & \text{Nudo 3} \\ I_b = I_d + I_f & \text{Nudo 4} \end{array}$$

Observar que la cuarta ecuación es una combinación lineal de las otras tres, son solo tres ecuaciones independientes.

Se procede ahora a calcular las ecuaciones de las mallas. Siguiendo el sentido marcado en la figura del ejercicio se deducen las ecuaciones de las mallas:

$$\begin{aligned} V_a + V_b - 5 &= 0 && \text{Malla A} \\ 20 + V_c - V_b &= 0 && \text{Malla B} \\ V_e - V_a - V_c &= 0 && \text{Malla C} \end{aligned}$$

Para resolver el circuito solo se necesita encontrar la relación tensión/corriente de cada elemento. En el caso de las resistencias, se aplica la ley de Ohm.

### 1.4.3 Número de ecuaciones

El análisis de circuito consiste en obtener todas las corrientes y tensiones de un circuito a partir de los valores de los elementos que lo componen. En un circuito lineal el número de incógnitas es igual al número de ramas dado que en cada rama la corriente que circula es distinta. Se deben obtener tantas ecuaciones independientes como incógnitas para resolver el circuito.

Un método general para circuitos planos con  $r$  ramas consiste en lo siguiente:

1. Dado  $n$  nudos en el circuito existen  $n - 1$  nudos independientes que proporcionan  $n - 1$  relaciones entre corrientes.
2. Las  $r - (n - 1) = r - n + 1$  ecuaciones restantes se obtienen gracias a las mallas del circuitos. Es necesario elegir mallas o lazos independientes en el circuito con el fin de obtener un sistema de ecuaciones independientes<sup>15</sup>.

Es importante localizar los nudos y las mallas del circuito de forma correcta. Una vez obtenidas las  $r$  ecuaciones con  $r$  incógnitas se pueden aplicar las técnicas de álgebra lineal para resolver el sistema. Existen técnicas de resolución de circuitos más eficientes que reducen el número de ecuaciones. Sin embargo el método descrito antes funciona en todas las situaciones. En esta sección se describen métodos de análisis de circuitos lineales que permiten obtener todas las corrientes del circuito. Estos métodos son generales y dependen principalmente de la topología del circuito<sup>16</sup>.

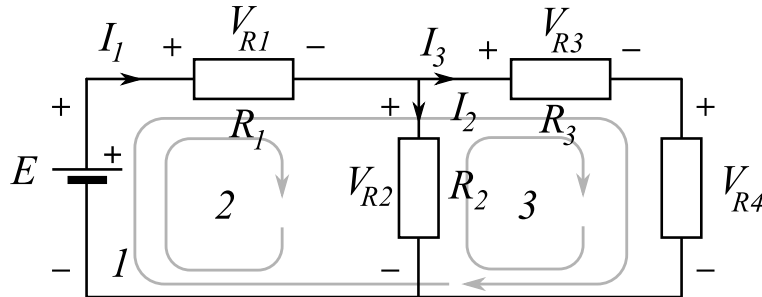
### Ejercicio 1.8

En el circuito de la figura siguiente determinar la corriente  $I_3$  así como la

<sup>15</sup> Por ejemplo si se eligen dos lazos que una vez combinados forma un tercero, la combinación de las ecuaciones de los dos primeros lazos formará una ecuación idéntica a la ecuación del tercer lazo.

<sup>16</sup> Las mismas técnicas se usan para circuitos de corriente continua y corriente alterna dado que solo depende de la red de conexión y no del funcionamiento de los elementos.

tensión  $V_{R2}$ . Datos:  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ ,  $R_4 = 5\Omega$  y la f.e.m.  $E = 10V$ .



### Solución del ejercicio 1.8

Para resolver el circuito se escriben por ejemplo las ecuaciones de las mallas 2 y 3:

$$\begin{cases} E - V_{R1} - V_{R2} = 0 \\ V_{R2} - V_{R3} - V_{R4} = 0 \end{cases}$$

se aplica también la ley de Kirchhoff para las corrientes en el único nudo independiente del circuito:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Se aplica la ley de Ohm para cada elemento:

$$\begin{cases} V_{R1} = R_1 I_1 \\ V_{R2} = R_2 I_2 \\ V_{R3} = R_3 I_3 \\ V_{R4} = R_4 I_3 \end{cases}$$

Tenemos todos los elementos para formar el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que necesitamos para resolver el circuito:

$$\begin{cases} E - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_3 = 0 \\ I_1 = I_2 + I_3 \end{cases}$$

Este sistema se puede tratar con las herramientas de álgebra lineal al ser un sistema lineal. En forma matricial se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} -R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para resolver.

Después del cálculo, se consigue:

$$I_2 = \frac{E(R_3+R_4)}{R_1 R_2 + (R_1+R_2)(R_3+R_4)}$$

$$I_3 = \frac{E R_2}{R_1 R_2 + (R_1+R_2)(R_3+R_4)}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Aplicación numérica:

$$I_2 = \frac{10(4+5)}{3 \cdot 10 + (3+10)(4+5)} = 0,612A$$

$$I_3 = \frac{10 \cdot 10}{3 \cdot 10 + (3+10)(4+5)} = 0,680A$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 1,292A$$

Por lo tanto la tensión  $V_{R2}$  vale:

$$V_{R2} = I_2 R_2 = 0,612 \cdot 10 = 6,120V$$

#### 1.4.4 Asociación de elementos lineales

Se puede reducir la complejidad de muchos circuitos lineales considerando la asociación de elementos de misma naturaleza cuando se encuentran en serie o en paralelo. De este modo se reduce el número de elementos y por tanto mejora la claridad para la resolución del circuito. Empecemos primero describiendo la asociación de resistencias.

##### Asociación de resistencias

La resistencia equivalente de una asociación en serie es sencillamente la suma de las resistencias. Para demostrarlo se utiliza la figura 1.28 (a) donde aparecen  $k$  resistencias en serie. Se define como resistencia en serie a **N resistencias atravesadas por la misma corriente con sus bornes conectados uno tras otro**. La tensión en las  $k$  resistencias se escribe en virtud de la ley de Ohm:

$$V_{R_k} = R_k I, \quad (1.39)$$

dado que la intensidad que circula es la misma en cada resistencia. Por otra parte por linealidad, se puede descomponer la tensión  $V_{AB}$ :

$$V_{AB} = V_{R1} + V_{R2} + \dots + V_{Rk} \quad (1.40)$$

Sustituyendo (1.39) en la precedente ecuación se tiene una expresión de  $V_{AB}$  en función de las resistencias:

$$V_{AB} = R_1 I + R_2 I + \dots + R_k I = I \sum_{n=1}^k R_n \quad (1.41)$$

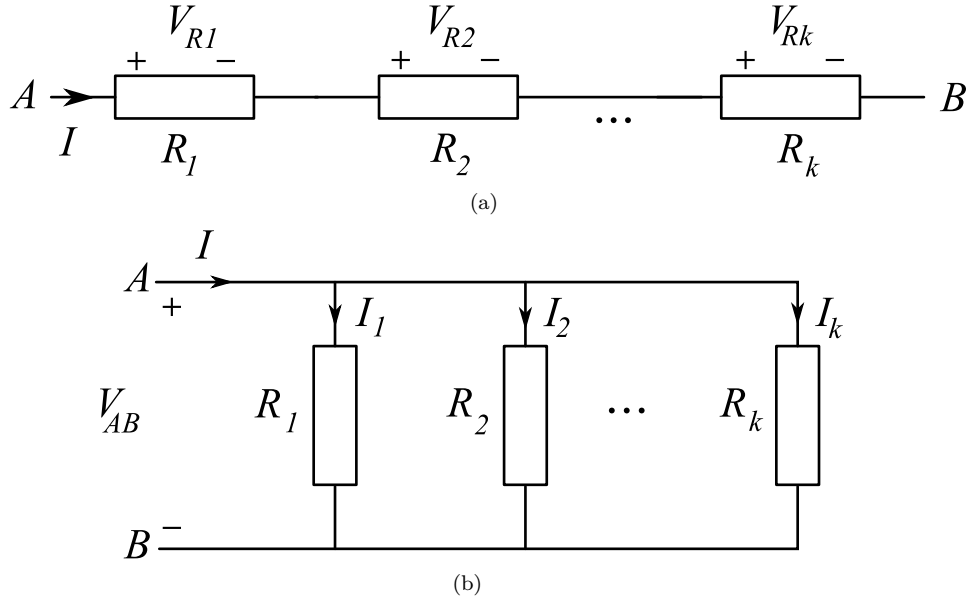


Figura 1.28 Ilustración de asociación de impedancias en serie y en paralelo.

Por lo que se define una nueva resistencia equivalente que depende de las resistencias en serie:

$$R_{eq} = \sum_k R_k \quad (1.42)$$

Para una asociación de componentes en paralelo se puede calcular a partir de las leyes de Kirchhoff la resistencia equivalente de una forma similar. Se define una asociación en paralelo como **una asociación de resistencias cuyos bornes están unidos a dos mismos nudos**. Es decir, que todas tendrán la misma diferencia de potencial.

En la figura 1.28 (b) se representan  $k$  resistencias conectadas a la misma tensión  $V_{AB}$ . En este caso la ley de Ohm se escribe para cada resistencia:

$$V_{AB} = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \dots = R_k I_k \quad (1.43)$$

Por otro lado, la ley de Kirchhoff establece una relación entre las corrientes del nudo:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_k = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \dots + \frac{V_{AB}}{R_k} \quad (1.44)$$

Esta última expresión se puede factorizar:

$$I = V_{AB} \sum_{n=1}^k \frac{1}{R_n} \quad (1.45)$$

Se define una nueva resistencia  $R_{eq}$  cuya inversa es igual a la suma de los inversos

de cada una de las resistencias en paralelo:

$$1/R_{eq} = \sum_{n=1}^k 1/R_n, \quad (1.46)$$

tal que  $V_{AB} = R_{eq}I$ . Es la suma de las admitancias<sup>17</sup>, es decir  $1/R_{eq}$  es la suma del inverso de las resistencias  $R_k$ . Con estas dos reglas de asociación se pueden reducir los circuitos a expresiones más sencillas. Una notación práctica para anotar dos resistencias en paralelo consiste en usar el símbolo paralelo “||”. Por ejemplo, la forma compacta de escribir  $R_1$  y  $R_2$  en paralelo sería:  $R_1||R_2$ .

### Asociación de condensadores

Al igual que las resistencias, una asociación de condensadores forma un nuevo condensador de capacidad diferente dependiendo de la asociación formada. Para los condensadores se deben repetir los cálculos de nuevo, la capacidad equivalente de dos condensadores en serie no es la suma de las capacidades individuales. Se puede demostrar que para condensadores asociados en serie:

$$1/C_{eq} = \sum_k 1/C_k. \quad (1.47)$$

Es decir que la capacidad equivalente de la asociación disminuye cuando se asocian en serie varios condensadores, domina el condensador de menor capacidad.

Para condensadores asociados en paralelo se obtiene:

$$C_{eq} = \sum_k C_k. \quad (1.48)$$

En este caso aumenta la capacidad total, pues se suman las capacidades individuales. Es importante notar aquí que el mecanismo de asociación funciona a la inversa que en las resistencias. Disminuye la resistencia de la asociación cuando se asocia en paralelo. Para justificar estos resultados tenemos que emplear las ecuaciones de la electrostática, se puede referir el lector a la bibliografía para las demostraciones.

### Asociación de inductancias

Al igual que resistencias y condensadores se pueden asociar bobinas en paralelo y en serie con el fin de obtener valores diferentes o para simplificar el análisis de un circuito. Las inductancias siguen el mismo patrón de asociación que las resistencias. Es decir, para bobinas en serie la inductancia equivalente es:

$$L_{eq} = \sum_k L_k. \quad (1.49)$$

es simplemente la suma de las inductancias individuales. Para un conjunto de inductancias en paralelo se obtiene la inductancia equivalente:

$$1/L_{eq} = \sum_k 1/L_k. \quad (1.50)$$

<sup>17</sup> La admitancia se define como el inverso de la resistencia en Siemens (S) o en mho.

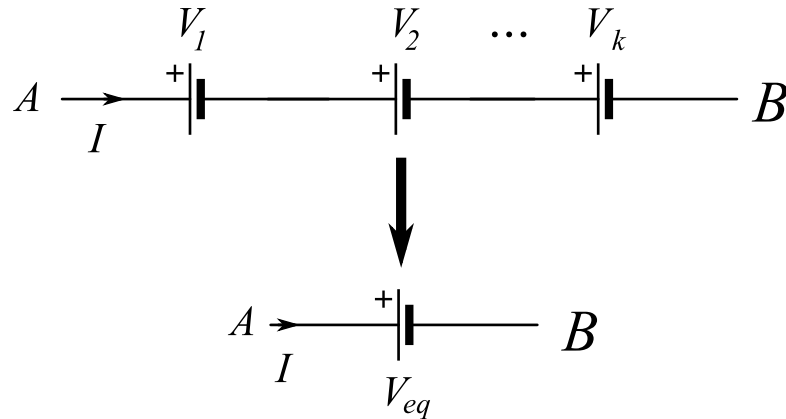


Figura 1.29 Asociación de fuentes de tensión en serie.

lo cual es equivalente al caso de resistencias en paralelo. Si uno quiere demostrar estas últimas relaciones, tenemos que calcular los campos magnéticos generados por las bobinas cuando se asocian en serie o paralelo. Además existen influencias del campo magnético de unas bobinas sobre otras que pueden complicar el análisis. Se completará el modelo de la bobina para tomar en cuenta estos efectos en el capítulo 4.

### Asociación de fuentes de tensión

En un esquema de circuitos eléctricos pueden aparecer varias fuentes en serie. Esta situación se resuelve sencillamente sumando el valor de las fuentes en serie tal como en la figura 1.29. Se suman teniendo en cuenta la orientación de las fuentes de tensiones, tomando un signo positivo o negativo según el sentido de la diferencia de potencial:

$$V_{eq} = \sum_k V_k. \quad (1.51)$$

Para fuentes de tensión asociadas en paralelo surge un problema. Aparece una contradicción, no puede haber dos potenciales distintos en un mismo punto. Imaginemos dos fuentes de tensión con un extremo común conectado a la tierra como referencia. En cuanto se conectan los otros dos extremos, las dos fuentes van a luchar para imponer su potencial. En la práctica, los conductores que unen los extremos se verían recorridos por corrientes muy altas que podrían llegar a destruir las fuentes de tensión. Hay que evitar en lo posible estos casos salvo que las fuentes de tensiones en paralelo tengan el mismo valor. Este caso se contempla en algunas situaciones para aumentar la corriente disponible a la salida de un generador, la tensión se mantiene pero la potencia disponible es mayor.

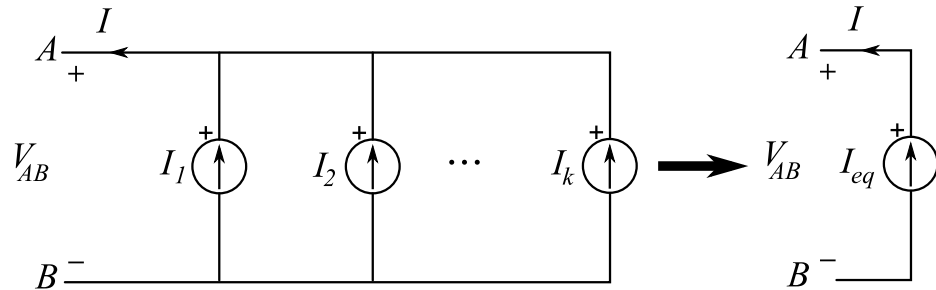


Figura 1.30 Asociación de fuentes de corriente en paralelo.

### Asociación de fuentes de corriente

Es bastante común tener diferentes fuentes de corriente en un mismo circuito. En algunos casos se pueden asociar estas fuentes para simplificar el circuito. Ocurre cuando tenemos varias fuentes de corriente en paralelo. En la figura 1.30 se enseña un caso donde es posible asociar varias fuentes de corriente en una única fuente de corriente equivalente. La corriente equivalente se calcula en virtud de las leyes de Kirchhoff, resulta simplemente una fuente de corriente que consiste en la suma de las corrientes individuales:

$$I_{eq} = \sum_k I_k. \quad (1.52)$$

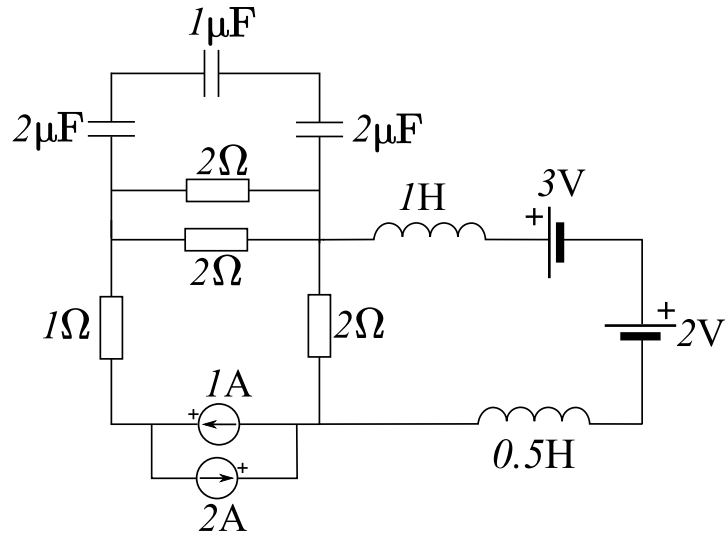
En este caso también se suman las corrientes acorde con el sentido de cada una.

Para la asociación de fuentes de corriente en serie aparece un problema de coherencia. ¿Disponiendo dos fuentes de corriente en serie, cual es la corriente de la rama? Cada una de la fuente va a intentar imponer un valor para la corriente de la rama. Esta situación no se debe de dar en circuitos, hay que evitar poner dos fuentes de corrientes con valores diferentes en la misma rama. Sin embargo, cuando las dos fuentes tienen el mismo valor, entonces la corriente total sigue siendo la misma en la rama.

### Ejercicio 1.9

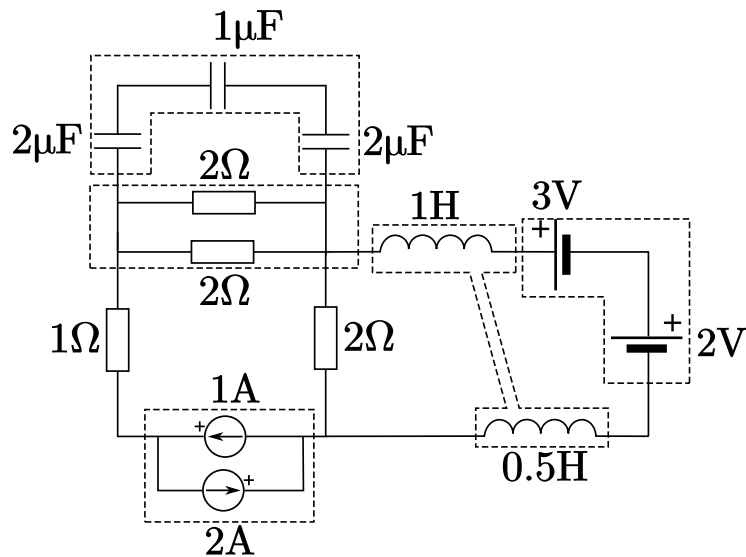
Simplificar lo más posible el circuito de la figura siguiente:





### Solución del ejercicio 1.9

Para simplificar el circuito, se deben usar todos los recursos disponibles. Es decir asociar en serie o en paralelo los elementos similares cuando sea posible. En la figura siguiente se marcan con una línea discontinua los elementos que se pueden asociar.



El resultado de estas asociaciones es el siguiente:

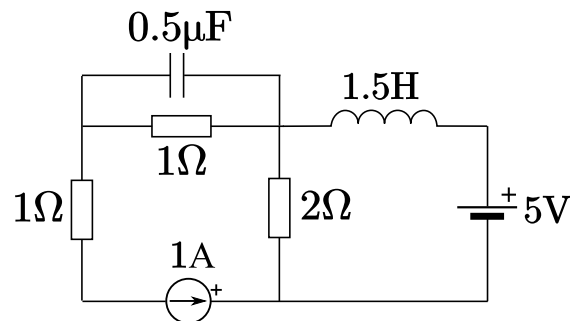
- Hay tres condensadores en serie. La capacidad equivalente de la asociación sería:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} = \frac{4}{2 \cdot 10^{-6}}$$

se obtiene una capacidad equivalente de  $0,5 \cdot 10^{-6}$ .

- Existen dos resistencias en paralelo de  $2\Omega$  cada una, la resistencia equivalente es de  $1\Omega$ .
- Las fuentes de corriente están en paralelo, la corriente total es de  $1A$ , el sentido viene determinado por la fuente de  $2A$ .
- Las fuentes de tensión están en serie. la tensión total es la suma, es decir  $5V$ .
- Hay dos inductancias en serie. La resultante es una inductancia equivalente de  $1,5H$ .

Una vez aplicadas las simplificaciones se obtiene el siguiente circuito:

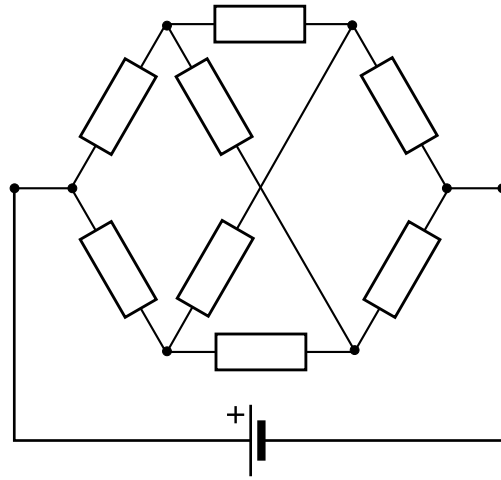


#### 1.4.5 Análisis mediante el método de las mallas

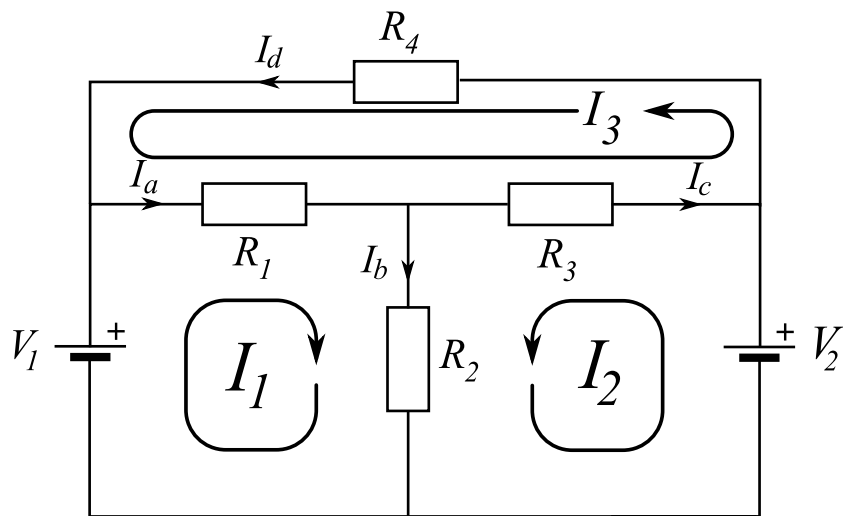
Resolver las ecuaciones de un circuito mediante las leyes de Kirchhoff puede ser a veces complicado debido al elevado número de variables. Existen métodos que permiten obtener un número de ecuaciones óptimo. El método de análisis por mallas es uno de ellos. El método se aplica a los circuitos planos, es decir a los circuitos que no contienen mallas que se solapan. En la figura 1.31 se muestra un ejemplo de circuito no plano, no se puede eliminar el cruce de resistencias de ninguna forma. El número de ecuaciones obtenidos con el método de las mallas corresponde al número de mallas (“las ventanas” del circuito). Se deducen de la forma siguiente:

1. Primero se atribuye a cada malla una corriente ficticia que circularía por toda la malla, son las denominadas **corrientes de malla**. El sentido elegido para estas corrientes es arbitrario aunque se suele respetar el sentido de las corrientes determinado por las fuentes.
2. Se deducen las ecuaciones de las  $n$  mallas en función de las corrientes definidas aplicando la ley de Kirchhoff en tensión.
3. Obtenemos un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas que podemos resolver.
4. Se transforman las corrientes de mallas en las corrientes de ramas originales.

Las corrientes de mallas se pueden ver como una combinación de corrientes de dos o más ramas. Se trata de una corriente común a todas las ramas de la malla



**Figura 1.31** Ejemplo de circuito no plano. Se cruzan dos resistencias en el centro, no hay ninguna forma de quitar el cruce sin provocar otro cruce de componentes.



**Figura 1.32** Ejemplo de circuito plano con tres mallas. Las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  circulan en toda la malla como si fuese una malla independiente.

elegida. En la figura 1.32 se muestra un ejemplo donde aparecen 3 mallas, se han elegido las corrientes de mallas de forma arbitraria para cada malla. Nótese que las corrientes que circulan por estas mallas se descomponen en función de las corrientes de las ramas originales. Por ejemplo la corriente  $I_a$  se descompone como la suma de dos corrientes de mallas dado que la rama pertenece a dos mallas distintas:

$$I_a = I_1 + I_3 \quad (1.53)$$

Una vez halladas las corrientes de malla  $I_1$  e  $I_2$  se pueden calcular la corriente de rama  $I_a$ . Una consecuencia importante es que los elementos de circuito pueden ser atravesados por más de una corriente de malla cuando son comunes a dos mallas.

Ahora falta plantear las ecuaciones del sistema con el fin de resolverlo. Una vez elegido el sentido de las corrientes de malla, se calcula la ecuación de la malla aplicando la ley de Kirchhoff en tensiones teniendo en cuenta que **en los elementos del circuito pueden circular más de una corriente de malla**. Hay que aplicar la ley de Kirchhoff con cuidado dado que las corrientes de mallas pueden tener sentidos distintos en un mismo elemento. Se empieza por ejemplo por la malla con la corriente  $I_1$  de la figura 1.32, a lo largo de la malla, el balance de tensiones es:

$$V_1 - R_1(I_1 + I_3) - R_2(I_1 + I_2) = 0 \quad (1.54)$$

Aparecen para estas resistencias dos corrientes de mallas. Para  $R_1$ , la corriente  $I_1$  circula en el sentido positivo e  $I_3$  en el mismo sentido, de allí el signo positivo. En la resistencia  $R_2$ , las corrientes tienen el mismo sentido. Se repite el proceso con las otras mallas hasta obtener un sistema con tantas ecuaciones como mallas. Este ejemplo se resuelve en el ejercicio propuesto.

En caso de que hayan fuentes de corrientes en el circuito pueden ocurrir dos situaciones:

- **La fuente de corriente pertenece sólo a una malla.** En este caso se usa la corriente de la fuente como una corriente de malla y se aplica el método a las  $n - 1$  mallas restantes dado que sabemos ya la corriente de esta malla.
- **La fuente de corriente pertenece a dos mallas.** Para resolver esta situación se usa una **supermalla**. Se establecen las corrientes de mallas arbitrarias usando el método habitual, pero a la hora de resolver el circuito se forma la ecuación de la supermalla que consiste en la fusión de las dos mallas que comparte la fuente de corriente. Las ecuaciones de las otras corrientes de malla completan el sistema de ecuaciones hasta poder resolverlo.

En la figura 1.33 se dibujan los dos casos que se pueden encontrar a la hora de resolver el circuito con fuentes de corriente.

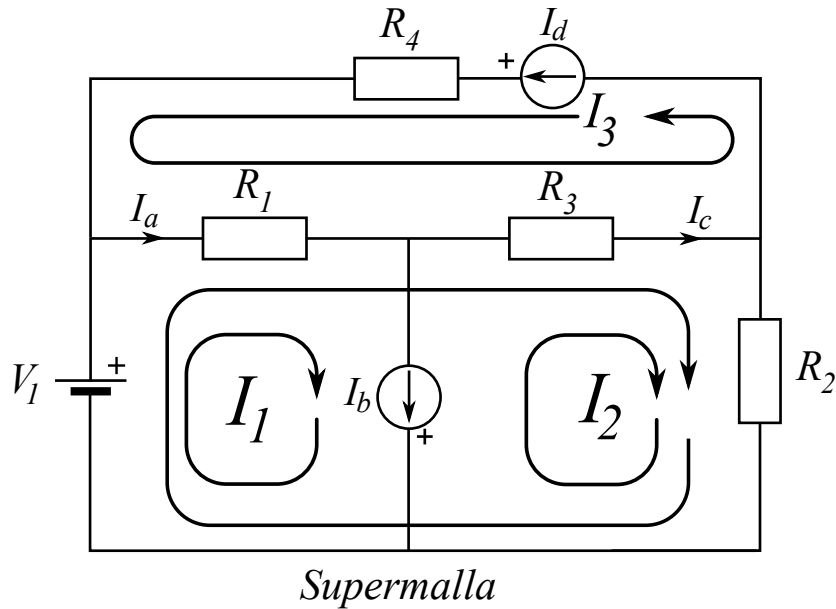
En la malla determinada por la corriente  $I_3$ , la fuente de corriente  $I_a$  será igual a la corriente  $I_3$ . En las mallas de las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  la fuente de corriente  $I_b$  pertenece a las dos mallas. La corriente  $I_b$  se define como:

$$I_b = I_1 - I_2 \quad (1.55)$$

Para obtener la ecuación de la malla se elige la supermalla formada por la unión de las dos mallas  $I_1$  e  $I_2$ . La ecuación de la malla es:

$$V_1 - R_1(I_1 + I_3) - R_3(I_2 + I_3) - R_2I_2 = 0 \quad (1.56)$$

las ecuaciones de las otras mallas se obtienen con el método clásico (ver ejemplos).



**Figura 1.33** Ejemplo de circuito con tres mallas y dos fuentes de corrientes. La fuente de corriente  $I_d$  simplemente se toma como corriente de malla dado que sólo pertenece a una malla. La fuente  $I_b$  pertenece a dos mallas y se debe formar una supermalla que consiste en la unión de dos mallas para obtener una ecuación.

### Ejercicio 1.10

Resolver el circuito de la figura 1.32 con el método de la mallas. Datos:  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $R_4 = 4\Omega$ ,  $V_1 = 5V$ ,  $V_2 = 10V$ .

### Solución del ejercicio 1.10

Primero para plantear el circuito se escriben las relaciones entre corrientes de malla y corrientes de ramas:

$$\begin{aligned} I_a &= I_1 + I_3 \\ I_b &= I_1 + I_2 \\ I_c &= -I_2 + I_3 \\ I_d &= I_3 \end{aligned}$$

Ahora se hallan las ecuaciones del circuito con las ecuaciones de las tres mallas y se resuelve el sistema. Se recomienda al lector encarecidamente que marque la polaridad de las tensiones en el dibujo para no equivocarse en los signos al hacer el balance de una malla.

$$\begin{aligned} V_1 - R_1(I_1 + I_3) - R_2(I_1 + I_2) &= 0 \\ V_2 - R_3(I_2 - I_3) - R_2(I_2 + I_1) &= 0 \\ R_1(I_3 + I_1) + R_3(I_3 - I_2) + R_4 I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Al final obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente en forma matricial después de agrupar los términos:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 & R_1 \\ R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve:  $I_1 = -0,8\text{A}$ ,  $I_2 = 3,06\text{A}$ ,  $I_3 = 1,25\text{A}$ . Las corrientes de mallas originales son:  $I_a = 0,45\text{A}$ ,  $I_b = 2,27\text{A}$ ,  $I_c = -1,81\text{A}$ ,  $I_d = 1,25\text{A}$ .

### Ejercicio 1.11

Resolver el circuito de la figura 1.33 con el método de las mallas. Datos:  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $R_4 = 4\Omega$ ,  $V_1 = 10\text{V}$ ,  $I_d = 1\text{A}$ ,  $I_b = 3\text{A}$ .

### Solución del ejercicio 1.11

Se escriben las relaciones entre corrientes de malla y corrientes de ramas primero:

$$\begin{aligned} I_a &= I_1 + I_3 \\ I_b &= I_1 - I_2 \\ I_c &= I_2 + I_3 \\ I_d &= I_3 \end{aligned}$$

Ahora se calculan las ecuaciones para la super-malla, dado que se conocen  $I_d$  e  $I_b$ , sólo nos falta una ecuación para resolver el circuito:

$$V_1 - R_1(I_1 + I_3) - R_3(I_2 + I_3) - R_2I_2 = 0,$$

siendo la otra ecuación:

$$I_b = I_1 - I_2$$

Al final se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 + R_3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 - (R_3 + R_1)I_3 \\ I_b \end{pmatrix}$$

Una vez resuelto:  $I_1 = 3,5\text{A}$ ,  $I_2 = 0,5\text{A}$ . Las corrientes de mallas originales son:  $I_a = 4,5\text{A}$ ,  $I_b = 3\text{A}$ ,  $I_c = 1,5\text{A}$ ,  $I_d = 1\text{A}$ .

## 1.4.6 Análisis mediante el método de los nudos

El método de análisis por mallas permite obtener un sistema de ecuaciones cuyas variables son corrientes. Con el método de los nudos se deduce un sistema de ecuaciones que depende de los potenciales de los nudos en vez de las corrientes de mallas.

Primero se fija un nudo del circuito que sirve de referencia a los potenciales de los otros nudos. En muchos casos, la masa o la tierra coincide con este nudo de referencia aunque no es una regla general. El método consiste en expresar el

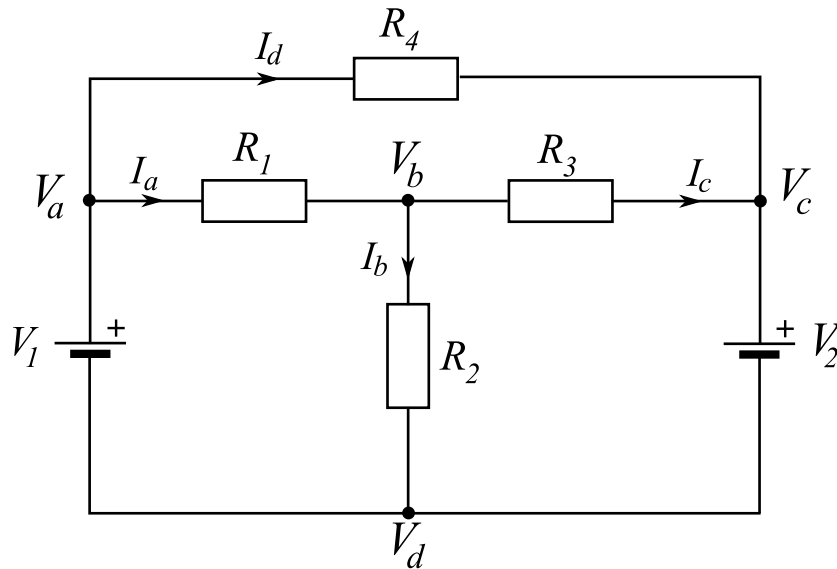


Figura 1.34 Ejemplo de circuito para ilustrar el método de los nudos.

potencial o la diferencia de potencial de cada nudo en función de los elementos del circuito.

Se procede de la forma siguiente:

1. Se identifican los  $n$  nudos del circuito y se les asocia un potencial.
2. Se elige un nudo de referencia donde se van a referir los potenciales de los otros nudos.
3. En el resto de los  $n - 1$  nudos se hace un balance de las corrientes con la ley de Kirchhoff.
4. Se expresan las corrientes de cada rama en función de los potenciales de los nudos definidos antes.
5. Se sustituyen las ecuaciones del punto anterior en las ecuaciones obtenidas en el punto 3. De esta forma se eliminan las corrientes y se resuelve el sistema de ecuaciones que depende únicamente de los potenciales.

En la figura 1.34, tenemos un circuito con cuatro nudos. Las tensiones de cada nudo se marca en la figura tomando como referencia el nudo  $V_d$  que también coincide con la masa. Se empieza por ejemplo en el nudo de  $V_b$  al que se han conectado tres ramas donde confluyen las corrientes  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ . Se puede expresar primero la relación entre estas corrientes en el nudo gracias a la ley de Kirchhoff en corriente:

$$I_a - I_b - I_c = 0 \quad (1.57)$$

Por otra parte, aplicando el punto 4 del método, cada una de estas corrientes se

expresa a su vez en función de los potenciales de nudos:

$$I_a = \frac{V_a - V_b}{R_1}$$

$$I_b = \frac{V_b - V_d}{R_2}$$

$$I_c = \frac{V_b - V_c}{R_3}$$

se obtienen así ecuaciones que relacionan las tensiones de los nudos con las corrientes. En los nudos  $a$  y  $c$  las fuentes de tensiones conectadas determinan directamente el valor del potencial de los nudos. Así, la diferencia de potencial entre el nudo  $a$  y  $d$  es  $V_a - V_d = V_1$ . Estas tensiones proporcionan las ecuaciones que faltan para la resolución del sistema. Procedemos al punto 5 del método y sustituimos las ecuaciones de las corrientes en el balance de la ecuación (1.57):

$$\frac{V_a - V_b}{R_1} - \frac{V_b - V_d}{R_2} - \frac{V_b - V_c}{R_3} = 0 \quad (1.58)$$

En el caso de que haya una fuente de corriente en el circuito se sustituye el valor en las ecuaciones de balance de corriente de los nudos involucrados y se resuelve después el sistema de ecuaciones. Es decir que la fuente fija una de las corrientes de las ecuaciones de balance.

Cuando existen fuentes de tensión en el circuito pueden ocurrir dos casos:

- La fuente de tensión está en serie con un elemento resistivo, por lo cual la corriente de rama queda determinada.
- La fuente de tensión se encuentra conectada entre dos nudos del sistema<sup>18</sup>. La corriente de la fuente no se puede determinar directamente y añade una incognita a las ecuaciones de balances de corriente. Para eliminar esta incognita, se necesita formar **un supernudo** que consiste en la unión de los dos nudos que conecta la fuente. Se hace el balance de corriente usando este supernudo como único nudo donde confluyen las demás corrientes.

Cuando existen fuentes de tensión entre nudos, interviene en el balance una corriente producida por la fuente que no está determinada. En este caso se forma un supernudo que engloba los dos nudos que la fuente une. En la figura 1.35 aparece una fuente de tensión  $V_3$  entre los nudos con potenciales  $V_a$  y  $V_b$ .

En un primer paso se escriben los balances de corrientes de los nudos:

$$\text{En } V_a: \quad I_1 - I_3 - I_4 = \frac{V_1 - (V_a - V_d)}{R_1} - I_3 - \frac{V_a - V_c}{R_4} = 0$$

$$\text{En } V_b: \quad I_3 - I_6 - I_5 = I_3 - \frac{V_b - V_d}{R_6} - \frac{V_b - V_c}{R_5} = 0 \quad (1.59)$$

$$\text{En } V_c: \quad I_4 + I_5 + I_2 = \frac{V_a - V_c}{R_4} + \frac{V_b - V_c}{R_5} + \frac{V_2 - (V_c - V_d)}{R_2} = 0$$

<sup>18</sup> En el caso anterior, un polo de la fuente de tensión iba conectado al nudo de referencia. No añade incognita sino que resuelve una ecuación directamente.



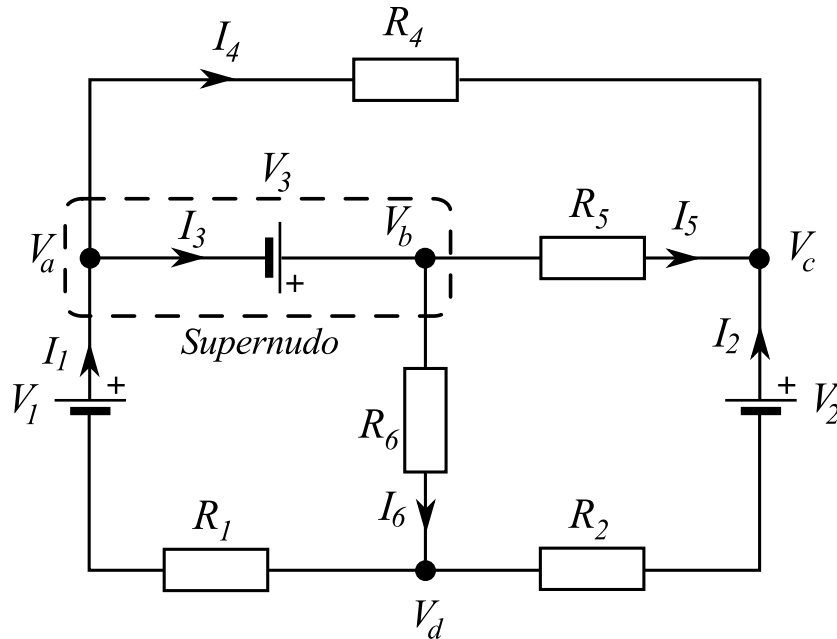


Figura 1.35 Ejemplo de circuito para ilustrar el método de los nudos.

La corriente  $I_3$  del generador  $V_3$  aparece en el balance de los dos primeros nudos. Si se suman estas dos primeras ecuaciones, obtenemos la ecuación del supernudo que agrupa estos dos nudos:

$$I_1 - I_4 - I_6 - I_5 = \frac{V_1 - (V_a - V_d)}{R_1} - \frac{V_a - V_c}{R_4} - \frac{V_b - V_d}{R_6} - \frac{V_b - V_c}{R_5} = 0 \quad (1.60)$$

Elijiendo  $V_d$  como nudo de referencia se obtiene un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas (las tensiones  $V_a, V_b$  y  $V_d$ ). Para terminar de resolver el circuito se debe de usar la condición impuesta por el generador de tensión  $V_3$ :

$$V_3 = V_b - V_a \quad (1.61)$$

El circuito se puede ahora resolver (ver el ejemplo).

### Ejercicio 1.12

Resolver el circuito de la figura 1.34 con el método de los nudos. Datos:  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $R_4 = 4\Omega$ ,  $V_1 = 5V$ ,  $V_2 = 10V$ .

### Solución del ejercicio 1.12

Una vez marcados los nudos se establecen las ecuaciones que relacionan las corrientes, para el nudo b:

$$I_a - I_b - I_c = 0$$

Se sustituyen en la ecuación las ecuaciones de las tensiones:

$$\frac{V_a - V_b}{R_1} - \frac{V_b - V_d}{R_2} - \frac{V_b - V_c}{R_3} = 0$$

Para los nudos  $V_a$  y  $V_c$ :

$$\begin{aligned} V_a - V_d &= V_1 \\ V_c - V_d &= V_2 \end{aligned}$$

Siendo  $V_d = 0V$  nuestra referencia de tensión, tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. El sistema en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) & \frac{1}{R_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo se consigue:  $V_a = V_1 = 5V$ ,  $V_b = 4,54V$ ,  $V_c = V_2 = 10V$ .

### Ejercicio 1.13

Resolver el circuito de la figura 1.35 con el método de los nudos. Datos:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_4 = 5\Omega$ ,  $R_5 = 2\Omega$ ,  $R_6 = 1\Omega$ ,  $V_1 = 10V$ ,  $V_2 = 4V$ ,  $V_3 = 2V$ .

### Solución del ejercicio 1.13

El circuito contiene una fuente de tensión entre dos nudos por lo que se puede formar un supernudo que unirá los nudos de  $V_a$  y  $V_b$ . Los balances de corrientes y las ecuaciones correspondientes son:

$$I_1 - I_4 - I_6 - I_5 = \frac{V_1 - (V_a - V_d)}{R_1} - \frac{V_a - V_c}{R_4} - \frac{V_b - V_d}{R_6} - \frac{V_b - V_c}{R_5} = 0$$

$$I_4 + I_5 + I_2 = \frac{V_a - V_c}{R_4} + \frac{V_b - V_c}{R_5} + \frac{V_2 - (V_c - V_d)}{R_2} = 0$$

Para completar las ecuaciones, se añade la diferencia de potencial entre los nudos  $V_a$  y  $V_b$  fijada por la fuente de tensión  $V_3$ :

$$V_b - V_a = V_3$$

Tomando  $V_d = 0$  como nudo de referencia para el circuito se obtiene:

$$\frac{V_1 - V_a}{R_1} - \frac{V_a - V_c}{R_4} - \frac{V_b}{R_6} - \frac{V_b - V_c}{R_5} = 0$$

$$\frac{V_a - V_c}{R_4} + \frac{V_b - V_c}{R_5} + \frac{V_2 - V_c}{R_2} = 0$$

$$V_b - V_a = V_3$$

Consiste en un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Reorganizando

las ecuaciones se obtiene el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4} & \left(-\frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_5}\right) & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \\ \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{V_1}{R_1} \\ -\frac{V_2}{R_2} \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo se obtiene:  $V_a = 2,1V$ ,  $V_b = 4,1V$ ,  $V_c = 3,72V$ .

## 1.5 Teoremas de teoría de circuitos

En esta sección se ilustran algunos de los teoremas más importante de la teoría de circuitos. Son esenciales para analizar y entender los circuitos eléctricos y electrónicos, tanto en corriente continua como en corriente alterna. Los teoremas se acompañan con ejemplos de corriente continua pero son igualmente validos en otros ámbitos.

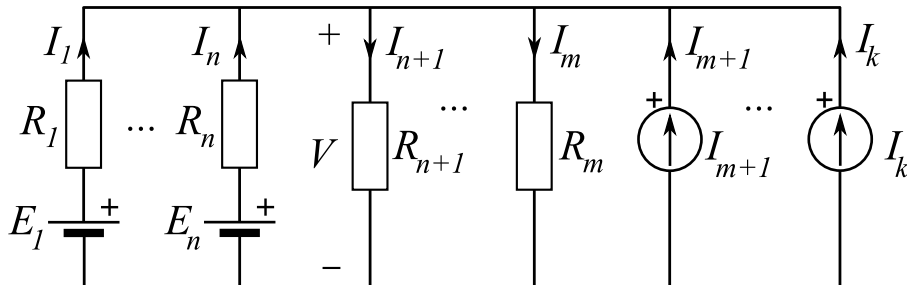
### 1.5.1 El teorema de Millman

El teorema de Millman permite calcular fácilmente la expresión de una tensión en un circuito lineal compuesto de ramas en paralelo como el ejemplo de la figura 1.36. Suponiendo un circuito con  $k$  ramas en paralelo, el método determina la tensión común a todas las ramas en función de los elementos del circuito. Basandonos en el circuito del figura 1.36 y usando las leyes de Kirchhoff, se puede despejar una simple fórmula para la tensión  $V$  común a todas las ramas. Cuando una fuente de tensión es presente en la rama, la tensión  $V$  se escribe como:

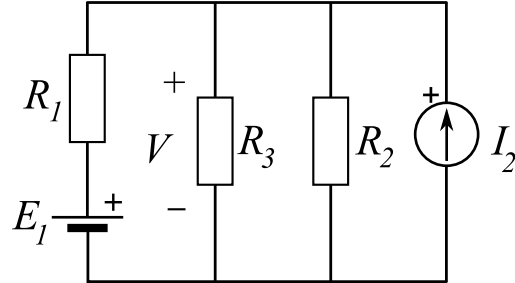
$$V = E_n - R_n I_n \quad (1.62)$$

Cuando únicamente existe una resistencia se obtiene:

$$V = R_m I_m \quad (1.63)$$



**Figura 1.36** Circuito compuesto de  $k$  ramas en paralelo con fuentes de tensión resistencias y fuentes de corriente.



**Figura 1.37** Circuito compuesto de 4 ramas en paralelo.

Por otro lado al tener sólo dos nudos en el circuito, podemos efectuar el balance de corriente con las leyes de Kirchhoff:

$$\sum_{j=0}^k I_j = 0 \quad (1.64)$$

Sustituimos en esta ecuación las corrientes en función de los elementos del circuito. Aparecen tres contribuciones de las ramas con fuentes de tensión, de las ramas con resistencias solas y de las ramas con fuentes de corriente:

$$\sum_{j=0}^k I_j = \sum_{j=0}^n \left( \frac{E_j}{R_j} - \frac{V}{R_j} \right) - \sum_{j=n+1}^m \left( \frac{V}{R_j} \right) + \sum_{j=m+1}^k I_j = 0 \quad (1.65)$$

Despejando la tensión  $V$  se obtiene la fórmula del teorema de Millman:

$$V = \frac{\sum_k E_k/R_k + \sum_k I_k}{\sum_k 1/R_k} \quad (1.66)$$

con  $E_k$  el valor de la fuente de la rama  $k$  (si la hubiese),  $R_k$  la resistencia equivalente, e  $I_k$  una fuente de corriente. La tensión  $V$  es la tensión común a las ramas dado que todas están en paralelo. Por ejemplo en la figura 1.37, el circuito representado comporta 3 resistencias y dos fuentes. Dado que todas las ramas están en paralelo, se puede aplicar el teorema para el cálculo (ver ejemplo).

La tensión  $V$  es la suma de las corrientes equivalentes de las ramas partido por la suma de todas las conductancias. Se puede obtener el mismo resultado con las leyes de Kirchhoff. Este teorema es simplemente una manera más rápida de calcular una tensión cuando se conocen los elementos del circuito. No se puede aplicar en todo los casos, si existen más de dos nudos el teorema ya no es válido.

#### Ejercicio 1.14

Aplicar el teorema de Millman al circuito de la figura 1.37 con fin de obtener la tensión  $V$ , ( $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ ,  $R_4 = 5\Omega$ ,  $E_1 = 10V$ ,  $I_2 = 1A$ )

### Solución del ejercicio 1.14

Para resolver este problema se aplica el teorema de Millman directamente a este circuito:

$$V = \frac{E_1/R_1 + I_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/(R_3 + R_4)} = \frac{10/3 + 1}{1/3 + 1/10 + 1/(4 + 5)} = 7,95V$$

### 1.5.2 El teorema de Thévenin

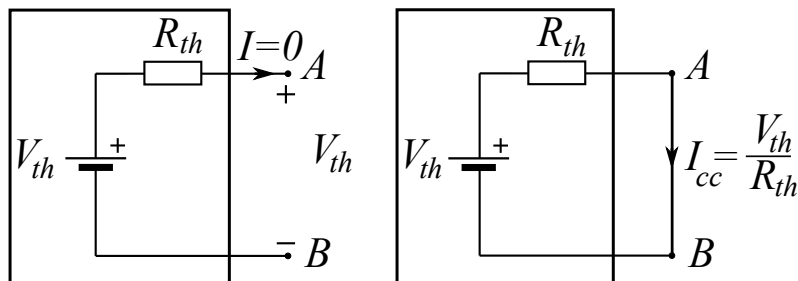
El teorema de Thévenin permite reducir cualquier circuito lineal a una simple fuente de tensión asociada a una resistencia. Es decir, que cualquier asociación de elementos lineales visto desde dos puntos<sup>19</sup> se comporta como un generador con un elemento pasivo en serie (una resistencia en corriente continua). Es un resultado muy interesante que permite hacer abstracción de todo los elementos del circuito y lo reduce a un modelo mucho más sencillo. Las aplicaciones para el análisis son multiples, es una herramienta muy potente para reducir la complejidad de un esquema eléctrico o electrónico.

El método general para obtener el equivalente Thévenin de un circuito visto de desde dos puntos  $A$  y  $B$  consiste en lo siguiente:

- El voltaje de Thévenin  $V_{th}$  se obtiene midiendo el voltaje entre  $A$  y  $B$  desconectando la posible carga o elementos entre los puntos  $A$  y  $B$ .
- Para calcular la resistencia de Thévenin  $R_{th}$ , se pone en cortocircuito los puntos  $A$  y  $B$  y se mide la corriente  $I_{cc}$  que circula entre los dos puntos. La resistencia se obtiene con:  $R_{th} = V_{th}/I_{cc}$ .

La figura 1.38 representa el procedimiento en las dos etapas necesarias para encontrar el equivalente. Se reduce el circuito a únicamente dos parámetros:  $V_{th}$

<sup>19</sup> Cuando decimos “visto desde dos puntos”, significa que tenemos dos terminales accesibles en los que podemos medir la características del circuito subyacente.



**Figura 1.38** Para encontrar el equivalente Thévenin visto de desde dos puertos se halla el voltaje y la corriente en las dos situaciones de prueba: en circuito abierto y en corto circuito.

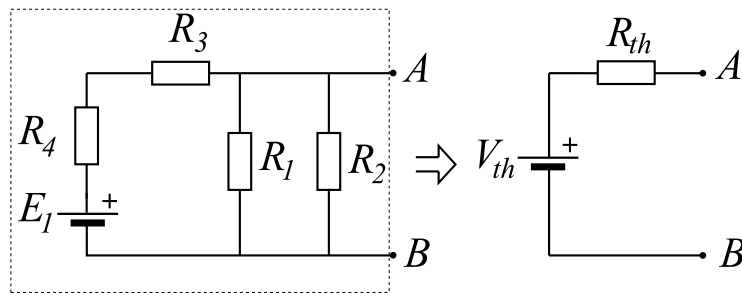
y  $R_{th}$ . Nótese que estos dos valores pueden depender de un parámetro interno al circuito, y su expresión puede llegar a ser compleja.

Si el circuito no contiene **ninguna fuente dependiente**, el método se puede modificar ligeramente para simplificar el análisis:

- Para calcular la resistencia de Thévenin  $R_{th}$  se ponen en cortocircuito las fuentes de tensiones independientes y se abren las fuentes de corrientes independientes. Se calcula de esta forma la resistencia equivalente entre los puntos A y B.
- El voltaje de Thévenin  $V_{th}$  se obtiene midiendo el voltaje entre A y B sin carga a la salida.

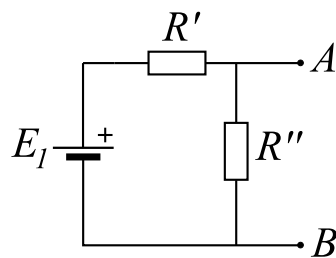
### Ejercicio 1.15

Obtener el equivalente de Thévenin del circuito siguiente visto desde los puntos A y B:



### Solución del ejercicio 1.15

Aplicando el método descrito anteriormente al circuito de la figura, primero se halla la tensión vista desde los puntos A y B. Para ello se simplifica el circuito asociando en paralelo las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  y por otro lado se asocian en serie las resistencias  $R_3$  y  $R_4$ .



Resulta:

$$R' = R_3 + R_4$$

$$R'' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

La tensión  $V_{AB}$  es entonces:

$$V_{th} = \frac{R'' E_1}{R'' + R'}$$

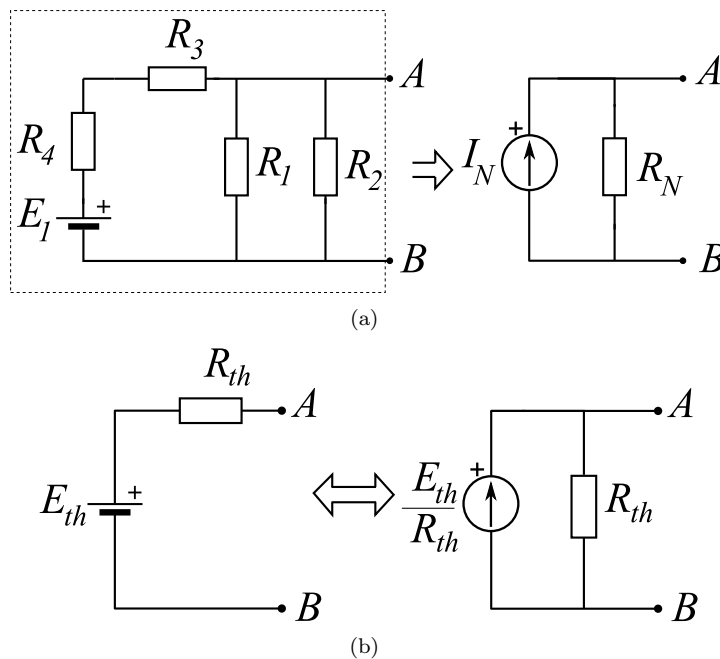
Para hallar la resistencia equivalente de Thévenin del circuito, se sustituye  $E_1$  por un cable y se calcula la resistencia entre A y B:

$$R_{th} = \frac{R' R''}{R' + R''}$$

ahora el circuito tiene un equivalente Thévenin  $V_{th}$  y  $R_{th}$ .

### 1.5.3 El teorema de Norton

El teorema de Norton es el equivalente del teorema de Thévenin para una fuente de corriente. Cualquier red lineal vista desde dos puntos se puede modelizar mediante una fuente de corriente y una resistencia equivalente en paralelo. Permite al igual que el teorema de Thevenin obtener un equivalente más manejable de una red lineal. Se puede pasar de una forma de Thévenin a una forma



**Figura 1.39** Ilustración del teorema de Norton. En la figura (a) se muestra como una red lineal puede transformarse en un equivalente compuesto de un generador de corriente y una resistencia en paralelo. (b) Equivalente entre un generador de Thévenin y generador de Norton.

de Norton con las siguientes fórmulas de equivalencia:

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} \quad (1.67)$$

$$R_N = R_{th} \quad (1.68)$$

De este modo los circuitos lineales se transforman de forma sencilla, reduciendo una red lineal a un simple generador de corriente asociado a su resistencia interna. En la figura 1.39 se muestra la relación entre un equivalente de Norton y un equivalente de Thévenin.

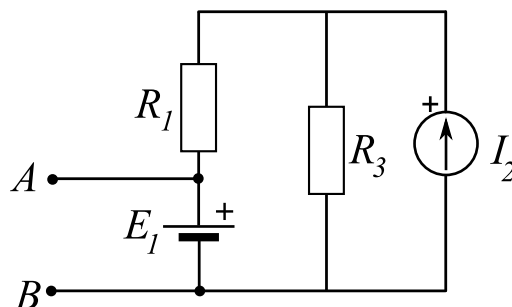
Existe también un método para determinar la resistencia de Norton y la fuente de corriente equivalente. Al igual que el método para el equivalente de Thévenin, se puede conseguir en dos pasos:

- La corriente Norton del circuito se obtiene poniendo la salida en cortocircuito de tal modo que toda la corriente  $I_N$  fluya por el cortocircuito.
- En circuito abierto, toda la corriente  $I_N$  pasa por la resistencia  $R_N$ , por lo que a gracias a la tensión  $V_{AB}$  en circuito abierto se obtiene:  $R_N = V_{AB}/I_N$ .

Los dos teoremas anteriores son esenciales para el análisis de circuitos lineales y no lineales. Son generales y sirven tanto en corriente alterna como en corriente continua.

### Ejercicio 1.16

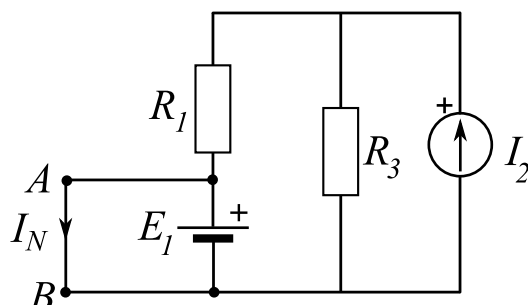
Obtener el equivalente de Norton del circuito siguiente entre los puntos A y B:



### Solución del ejercicio 1.16

Aplicamos el método general primero colocando un cortocircuito a la salida en el que toda la corriente  $I_n$  circula.





Aplicando la leyes de Kirchoff a este circuito encontramos una relación entre  $I_2$  e  $I_N$ :

$$I_N = \frac{I_2 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Para la segunda parte del método dejamos abierto el circuito entre A y B y medimos la tensión  $V_{AB}$ . Resulta evidente que  $V_{AB} = E_1$ . Podemos determinar la resistencia equivalente de Norton:

$$R_N = \frac{V_N}{I_N} = \frac{E_1 \cdot (R_1 + R_2)}{I_2 \cdot R_2}$$

#### 1.5.4 El teorema de superposición

En un sistema lineal se pueden separar los efectos de las distintas fuentes de tensión o corriente. Es una consecuencia de la linealidad de los circuitos: los efectos debidos a cada fuente se van sumando de manera independiente y lineal. Este teorema permite entonces calcular el efecto de cada fuente sobre el circuito por separado para luego obtener el efecto total resultante.

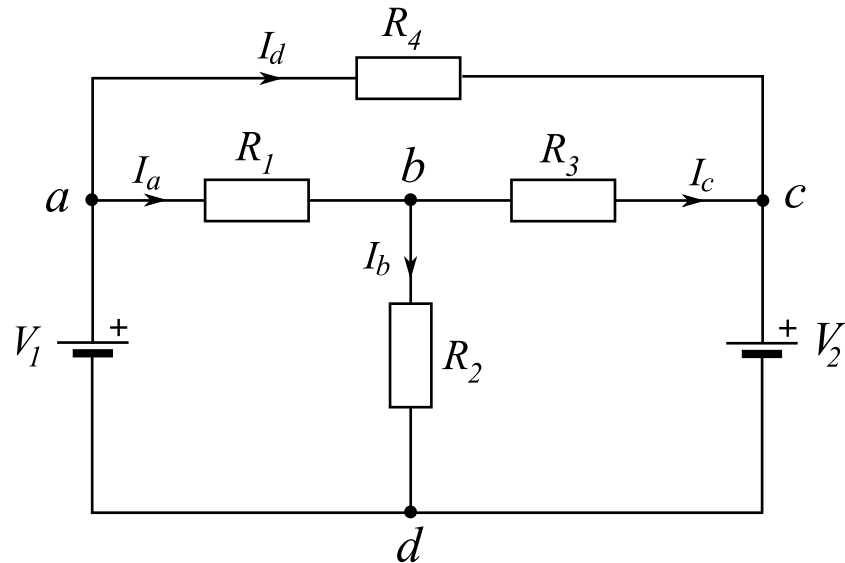
Suponiendo un sistema lineal con fuentes independientes, se procede de la manera siguiente para determinar los efectos de todas las fuentes:

1. Se elige una fuente para calcular su efecto sobre el circuito.
2. Se anulan las fuentes de tensión colocando un cortocircuito en su lugar y abrimos las fuentes de corriente (se desconectan).
3. Se calcula el efecto de la fuente elegida sobre el circuito.
4. Se repite para todas las otras fuentes y al final del proceso se suman todos los efectos individuales.
5. Se suman todas las corrientes y tensiones obtenidas en cada rama en cada paso para obtener la tensión final.

Este teorema permite descomponer un circuito complejo en una suma de circuitos más sencillos y más manejables. Sin embargo su aplicación puede llevar a más cálculos para la resolución que otros métodos convencionales.

**Ejercicio 1.17**

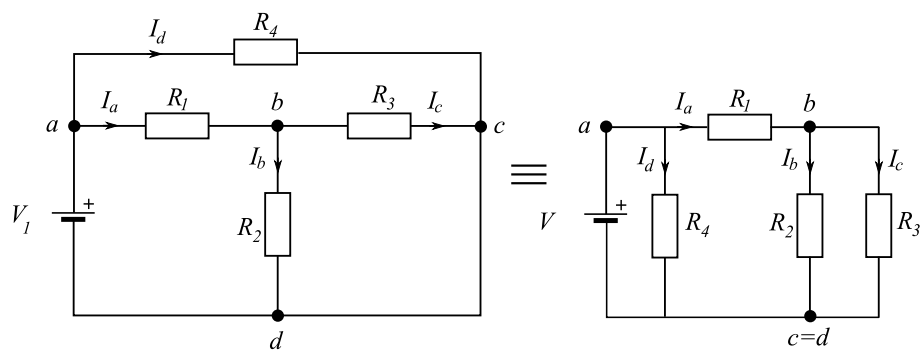
Obtener la tensión  $V_{bd}$  del circuito siguiente aplicando el teorema de superposición:



Datos:  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $R_4 = 4\Omega$ ,  $V_1 = 5V$ ,  $V_2 = 10V$ .

**Solución del ejercicio 1.17**

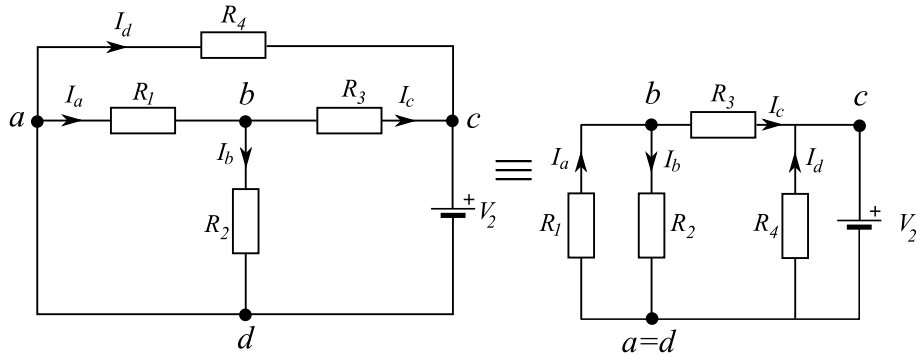
Para aplicar el teorema de superposición, primero se estudia el efecto de la tensión  $V_1$  sobre el circuito. Se apaga la fuente  $V_2$  sustituyéndola por un cortocircuito:



Al reorganizar los elementos en la figura anterior el circuito es más sencillo para el análisis. Según este circuito la tensión  $V'_{bd}$  sería:

$$V'_{bd} = \frac{(R_2 // R_3)V_1}{R_1 + (R_2 // R_3)} = \frac{6/5 \cdot 5}{1 + 6/5} = 2,72 \text{ V}$$

Ahora se calcula la contribución de la otra fuente:



En el nuevo circuito obtenido, la nueva tensión  $V''_{BD}$  se calcula también fácilmente:

$$V''_{bd} = \frac{(R_1 // R_2)V_2}{R_3 + (R_1 // R_2)} = \frac{2/3 \cdot 10}{3 + 2/3} = 1,81 \text{ V}$$

La tensión  $V_{bd}$  del circuito original será la suma de las dos contribuciones:

$$V_{bd} = V'_{bd} + V''_{bd} = 2,72 + 1,81 = 4,54 \text{ V}$$

Un resultado que se ha podido comprobar con un método alternativo.

### 1.5.5 El teorema de Tellegen

El teorema de Tellegen es importante por su generalidad. Permite ampliar la noción de balance de potencia en un circuito siempre que respete las leyes de Kirchhoff. Esta generalidad se debe a que el teorema se basa únicamente en la topología de la red y el hecho de que los lemas de Kirchhoff se cumplen.

Se considera un circuito que satisface las siguientes hipótesis:

- Un circuito con  $N$  ramas.
- Una diferencia de potencia  $V_k$  entre los extremos de cada rama.
- Se cumple la ley de Kirchhoff en tensiones para cada lazo.
- En cada nudo se satisface la ley de Kirchhoff en corriente.

En estas condiciones el teorema de Tellegen se enuncia como:

$$\sum_{k=1}^N V_k I_k = 0 \quad (1.69)$$

Es decir que la suma algebraica de las potencias de un circuito es nula. Es un teorema muy general dado que se cumple para elementos lineales, no lineales, que dependen del tiempo o no. La única condición reside en que las tensiones y corrientes deben cumplir con las leyes de Kirchhoff. La mayoría de los teoremas de circuitos pueden deducirse a partir del teorema de Tellegen, siendo uno de los más generales de la teoría de circuitos.

Para realizar la suma algebraica de las potencias, se debe elegir el signo de

las potencias según el elemento genere o consuma potencia. Si elegimos por ejemplo una potencia negativa para los elementos que aportan potencia y una potencia positiva para los elementos consumidores volvemos a obtener el balance de potencia que ya se ha obtenido anteriormente:

$$P_{consumida} = P_{generada} \quad (1.70)$$

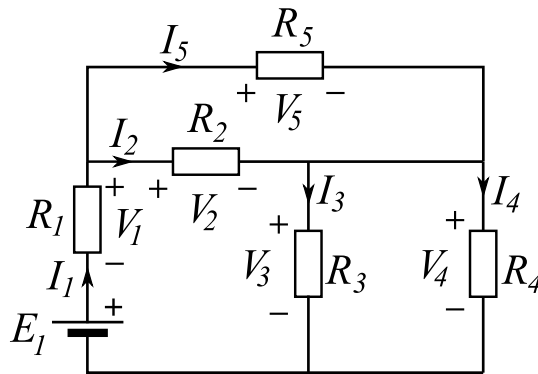
**El balance de potencia se cumple en un circuito** que satisface las condiciones anteriores. Es decir que los elementos con el **convenio generador** se suman negativamente y los elementos con el **convenio receptor** se suman positivamente.

Gracias a este teorema se pueden deducir otras propiedades de los circuitos lineales. Es útil para cualquier tipo de tensión variable en el tiempo dado que el teorema estipula bajo las condiciones enunciadas anteriormente para cualquier tiempo  $t$  se cumple:

$$\sum_{k=1}^N V_k(t)I_k(t) = 0. \quad (1.71)$$

### Ejercicio 1.18

Aplicar el teorema de Tellegen a la figura siguiente para verificar el balance de potencia del circuito.



Datos:  $E_1 = 50\text{V}$ ,  $R_1 = 2,5\Omega$ ,  $R_2 = 20\Omega$ ,  $R_3 = 10\Omega$ ,  $R_4 = R_3 = 10\Omega$ ,  $R_5 = 20/3\Omega$ .

### Solución del ejercicio 1.18

En el circuito de la figura anterior se obtienen las siguientes relaciones entre tensiones y corrientes:

$$\begin{cases} E_1 - V_1 - V_2 - V_3 = 0 \\ V_3 - V_4 = 0 \\ E_1 - V_1 - V_5 - V_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_5 = 0 \\ I_2 + I_5 - I_3 - I_4 = 0 \end{cases}$$

Luego se aplica la ley de Ohm para cada elemento. Resolvemos el circuito para los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} I_1 = 4A, I_2 = 1A, I_3 = 2A, I_4 = 2A, I_5 = 3A \\ V_1 = 10V, V_2 = 20V, V_3 = 20V \end{cases}$$

Se puede verificar que se cumple el teorema de Tellegen:

$$50 \cdot 4 = 10 \cdot 4 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 3$$

Tenemos  $200W = 200W$ .

### 1.5.6 El teorema de Kennelly (transformación Y- $\Delta$ )

El teorema de Kennelly permite la transformación de circuitos en forma de estrella a triángulo y de triángulo a estrella. Para un dispositivo con tres terminales formado por una asociación de dipolos lineales en estrella, es decir un polo de cada de los tres elementos va conectado a una misma referencia, se puede encontrarle un equivalente conectado en triángulo. En la figura 1.40 (a) se muestran tres resistencias dispuestas en triángulo. Desde el punto de vista de los circuitos, su comportamiento es igual al circuito de la figura 1.40 (b) dada una cierta transformación. El teorema de Kennelly permite encontrar la equivalencia entre ambas estructuras.

Si se mide la resistencia con un aparato entre los puntos  $a$  y  $b$  de la carga de la figura 1.40 (a) o (b), la medida tiene que ser igual en las dos configuraciones para que se cumpla la equivalencia. Visto de dos terminales, la resistencia no puede ser diferente en un esquema u otro. Sin embargo, la expresión de cada resistencia será distinta en cada caso. En el caso de la carga en estrella la resistencia medida será la suma de  $R_a$  y  $R_b$  en serie dado que el conductor  $c$  se deja sin conectar. Para el caso en triángulo  $R_{ab}$  está en paralelo con la suma de  $R_{bc}$  y  $R_{ca}$  en serie. Razonando de este modo se cumple la igualdad:

$$R_a + R_b = R_{ab} || (R_{bc} + R_{ca}) = \frac{R_{ab}(R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (1.72)$$

lo mismo ocurre con las resistencias entre los puntos  $a,c$  y  $b,c$ :

$$R_a + R_c = R_{ca} || (R_{bc} + R_{ab}) = \frac{R_{ca}(R_{bc} + R_{ab})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (1.73)$$

$$R_b + R_c = R_{bc} || (R_{ab} + R_{ca}) = \frac{R_{bc}(R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (1.74)$$

Haciendo combinaciones lineales de las últimas tres expresiones se despejan  $R_a$ ,

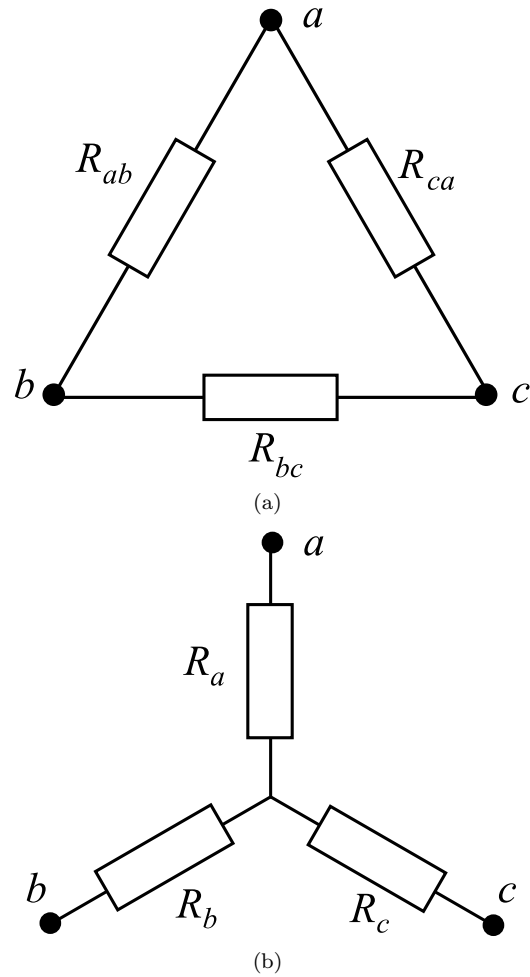


Figura 1.40 Esquema de circuitos en triángulo (a) y estrella (b)

$R_b$  y  $R_c$  en función de  $R_{ab}$ ,  $R_{bc}$  y  $R_{ca}$ . Se obtiene la **transformación  $\Delta$ -Y**:

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (1.75)$$

$$R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (1.76)$$

$$R_c = \frac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (1.77)$$

La resistencia equivalente en estrella es el producto de las dos resistencias del esquema en triángulo conectadas al punto estudiado dividido por la suma de las tres resistencias.

Si las tres resistencias  $R_{ab}$ ,  $R_{bc}$  y  $R_{ca}$  son idénticas se simplifica el resultado:

$$R_a = \frac{R_{\Delta}^2}{3R_{\Delta}} = \frac{R_{\Delta}}{3} \quad (1.78)$$

Para obtener la transformación inversa, es decir para obtener  $R_{ab}$ ,  $R_{bc}$  y  $R_{ca}$  en función de  $R_a$ ,  $R_b$  y  $R_c$ , se dividen las ecuaciones (1.75) a (1.77) dos a dos. Se obtienen las igualdades:

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{R_{ca}}{R_{bc}} \quad (1.79)$$

$$\frac{R_b}{R_c} = \frac{R_{ab}}{R_{ca}} \quad (1.80)$$

$$\frac{R_c}{R_a} = \frac{R_{bc}}{R_{ab}} \quad (1.81)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1.75-1.77) y factorizando se despejan los valores de las resistencias:

$$R_{ab} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_c} \quad (1.82)$$

$$R_{bc} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_a} \quad (1.83)$$

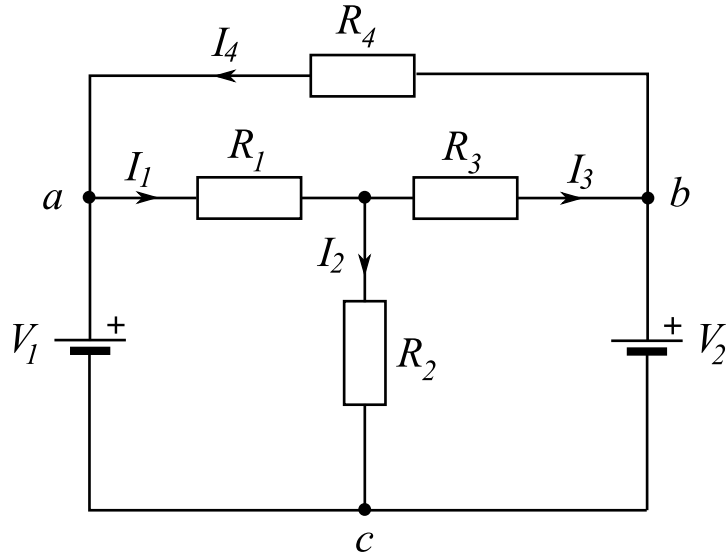
$$R_{ca} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_b} \quad (1.84)$$

$$(1.85)$$

Es decir, cada resistencia es la suma de los productos binarios de las resistencias ( $R_i R_j$ ) entre la resistencia opuesta a los dos nodos estudiados. Por ejemplo la resistencia opuesta a los dos nodos  $a$  y  $b$  es la resistencia  $R_c$ .

### Ejercicio 1.19

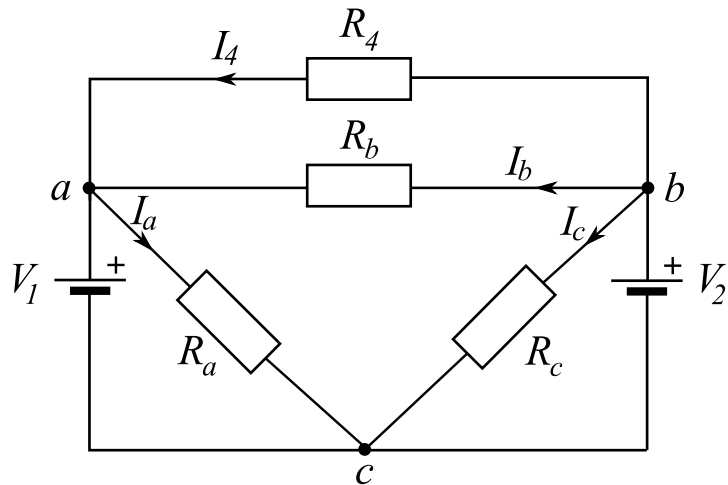
Queremos calcular la potencia que proporcionan los generadores de tensiones  $V_1$  y  $V_2$  de la siguiente figura:



Datos:  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $R_4 = 4\Omega$ ,  $V_1 = 5V$ ,  $V_2 = 10V$ .

### Solución del ejercicio 1.19

Para calcular la potencia se va a transformar el sistema conectado en estrella conectado entre los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  del circuito. El nuevo esquema una vez transformado es:



Usando el teorema de Kennelly se busca la equivalencia entre la disposición en estrella y en triángulo:

$$R_b = \frac{2+3+6}{2} = 5,5\Omega$$

$$R_c = \frac{2+3+6}{1} = 11\Omega$$

$$R_a = \frac{2+3+6}{3} = 11/3\Omega$$



Ahora la potencia disipada y las corrientes en todas las resistencias son calculables:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V_1}{R_a} = 1,36 \text{ A} \\ I_b &= \frac{V_2 - V_1}{R_b} = 0,91 \text{ A} \\ I_c &= \frac{V_2}{R_c} = 0,91 \text{ A} \\ I_4 &= \frac{V_2 - V_1}{R_4} = 1,25 \text{ A} \end{aligned}$$

Haciendo el balance de corrientes para cada generador se deduce la potencia producida para cada uno:

$$\begin{aligned} P_1 &= (I_a - I_b - I_d)V_1 = -4 \text{ W} \\ P_2 &= (I_b + I_c + I_d)V_2 = 30,7 \text{ W} \end{aligned}$$

### 1.5.7 Transferencia máxima de potencia

Para un circuito con un equivalente Thévenin conectado a una red pasiva, la transferencia de potencia del generador a la red depende de los parámetros del circuito y del equivalente Thévenin. Para obtener la máxima potencia transferida, la carga conectada al generador debe tener un valor óptimo. Se considera un ejemplo de red lineal activa conectada a un red de elementos pasivos como el representado en la figura 1.41. A la izquierda del circuito entre los puntos  $A$  y  $B$  se puede encontrar un equivalente Thévenin del circuito por otro lado. A la derecha de los puntos  $A$  y  $B$  se puede hallar la resistencia equivalente de la red. Resulta un generador  $V_1$  con una resistencia interna  $R_i$  conectado a otra resistencia equivalente  $R_e$  a la derecha de los dos puntos  $A$  y  $B$ . La potencia que produce la fuente es:

$$P_e = V_1 I = \frac{V_1^2}{R_i + R_e} \quad (1.86)$$

La potencia entregada a la carga  $R_e$  es:

$$P_s = R_e I^2 = \frac{R_e V_1^2}{(R_i + R_e)^2} \quad (1.87)$$

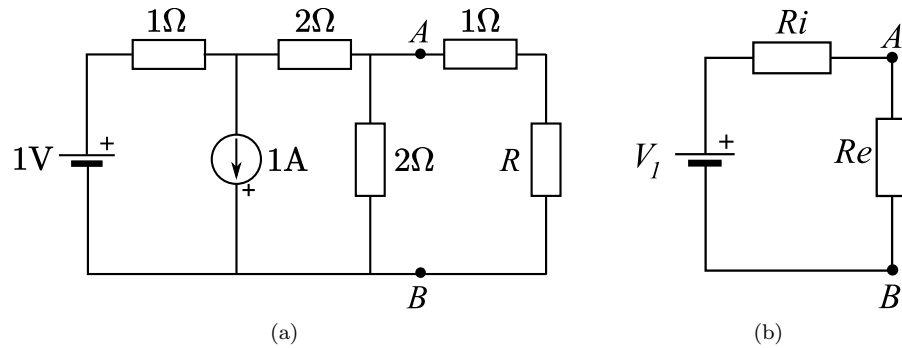
Por lo tanto la potencia de salida depende de la resistencia interna  $R_i$  y de la resistencia equivalente  $R_e$ . Para encontrar el valor de la resistencia de salida que optimiza la potencia entregada, se deriva la expresión de  $P_s$  con respecto a  $R_e$  y se buscan los extremos:

$$\frac{\partial P_s}{\partial R_e} = \frac{V_1^2 (R_i + R_e)^2 - V_1^2 R_e 2(R_i + R_e)}{(R_i + R_e)^4} = 0 \quad (1.88)$$

El numerador se anula cuando:

$$R_i = R_e \quad (1.89)$$

Es decir que la máxima potencia entregada se obtiene cuando la resistencia equivalente de salida iguala la resistencia interna del generador. Este teorema



**Figura 1.41** (a) Ejemplo de red activa conectada a un red pasiva. (b) Equivalente Thevenin de la red.

de redes lineales tiene mucha importancia práctica. La potencia que se quiere transmitir va a depender no solo de lo que se conecta sino también del propio generador. Se dice que la red conectada está adaptada cuando se transmite la máxima potencia. Es la versión más sencilla del teorema pero se puede generalizar para redes de todo tipo y también para el régimen sinusoidal.

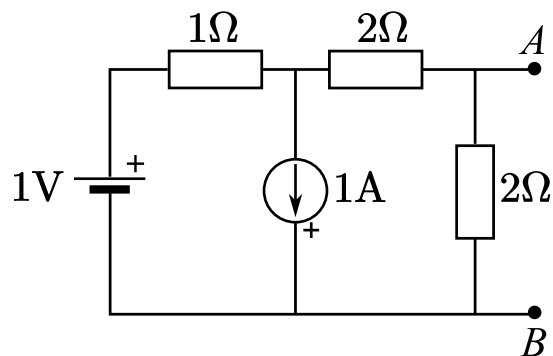
### Ejercicio 1.20

A partir de la figura 1.41 (a):

1. calcular el equivalente Thévenin de la fuente visto de desde los puntos A y B.
2. Calcular el valor de  $R$  que maximice la transferencia de potencia.

### Solución del ejercicio 1.20

1) Para encontrar el equivalente Thévenin se desconecta el circuito de los puntos A y B y se calcula la diferencia de potencial entre estos dos puntos. Obtenemos el circuito siguiente:



Después de cálculo, el equivalente Thévenin es:

$$\begin{aligned} V_{Th} &= V_{AB} = \frac{4}{5} \text{ V} \\ R_{Th} &= \frac{6}{5} \Omega \end{aligned}$$

2) A la salida, es decir a la derecha de los puntos  $A$  y  $B$  existe una resistencia equivalente  $R_e$  cuyo valor es:

$$R_e = R + 1$$

La máxima transferencia de potencia se realiza cuando  $R_e = R_{th}$  es decir cuando  $R = 1/5\Omega$ .

## 1.6 Análisis de Transitorios

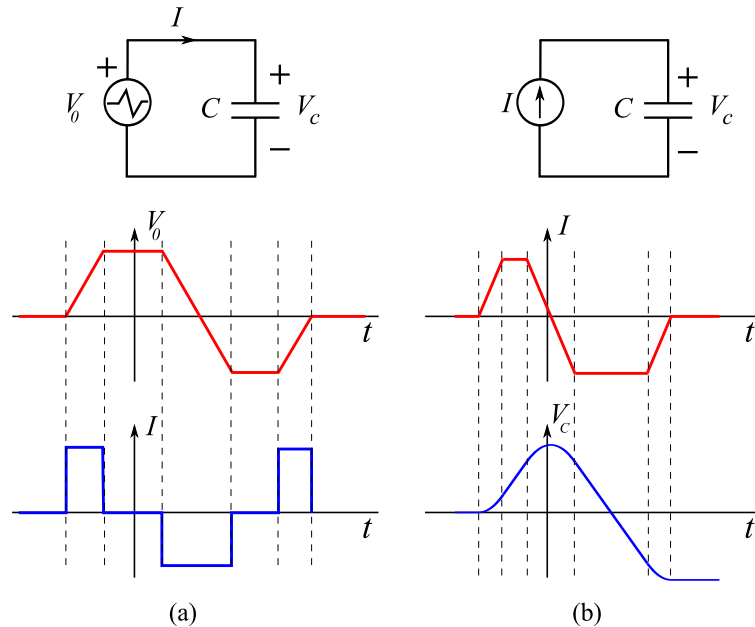
En los circuitos, antes de que se establezca el régimen permanente, transcurre una fase llamada transitorio. En esta sección se presentan los ejemplos prácticos más comunes: carga de un condensador y magnetización de una bobina. Estos dos ejemplos se encuentran con frecuencia en las máquinas eléctricas y circuitos electrónicos y permite estimar la dinámica de ciertos sistemas.

### 1.6.1 Transitorios de primer orden

Para estudiar los regímenes transitorios se necesita estudiar como cambian las cantidades en los circuitos cuando se producen cambios de tensiones o de corrientes. Para obtener la relación existente entre la corriente que atraviesa un condensador y la tensión en sus bornes, se toma primero la expresión de la carga en función de la diferencia de potencial:  $Q = CV$ . Suponiendo la capacidad constante, se deriva esta expresión frente al tiempo como sigue:

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_c}{dt} = I \quad (1.90)$$

es decir que la corriente de un condensador es la derivada de la diferencia de potencial en sus bornes. Con esta fórmula ya se puede estudiar el comportamiento dinámico de un condensador. En la figura 1.42 se muestra la evolución de la tensión y de la corriente en un condensador según se conecta a una fuente de tensión o de corriente. En la figura 1.42.(a) se conecta una fuente de voltaje. Siendo la corriente la derivada del voltaje en el condensador, según aumenta la tensión linealmente la corriente es constante. Por otro lado, en la figura 1.42.(b) se conecta una fuente de corriente variable que evoluciona de forma lineal a trozos. Para cada sección marcada, la tensión sería la integral de la corriente en el tiempo. Cuando la corriente aumenta linealmente, la tensión describe un arco de parábola (es cuadrático). Con una corriente constante se obtiene una evolución lineal de la tensión.



**Figura 1.42** Evolución de la tensión y de la corriente en un condensador cuando se conecta una fuente de tensión variable en el tiempo o una fuente de corriente. El comportamiento del condensador y su efecto sobre la diferencia de potencial o corriente viene dado por la expresión:  $I = CdV/dt$

Se pasa ahora a estudiar un circuito muy común en ingeniería cuyo transitorio aparece en muchos fenómenos eléctricos y electrónicos. Se trata de un circuito con una resistencia y un condensador en serie representados en la figura 1.43. Entender la dinámica de este circuito es importante para el diseño de circuitos electrónicos dado que a menudo se deben tener en cuenta estos transitorios. Por ejemplo el arranque de ciertas máquinas eléctricas o la frecuencia de ciertos osciladores dependen de esta dinámica.

Se puede deducir fácilmente la ecuación diferencial del circuito de la figura 1.43 aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$E(t) - RI - V_c = 0$$

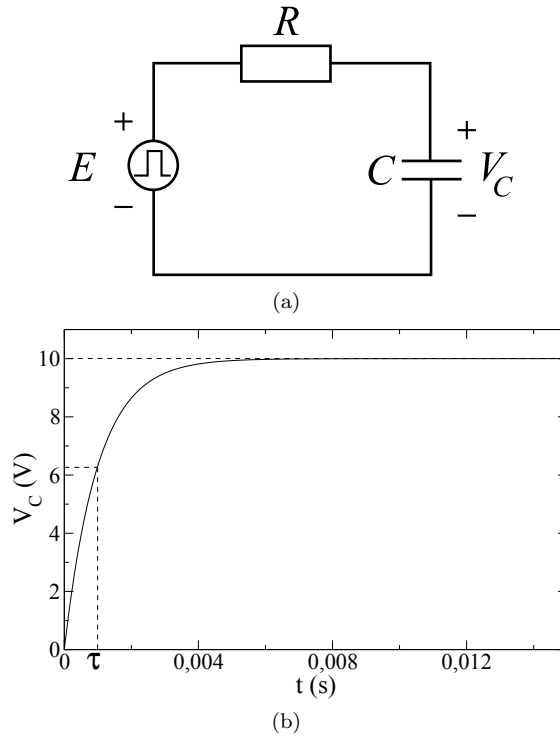
Sustituyendo en la ecuación anterior la corriente por su expresión en función de la derivada de la tensión:

$$E(t) - RC \frac{dV_c}{dt} - V_c = 0$$

Se reorganizan los términos y se obtiene:

$$RC \frac{dV_c}{dt} = E(t) - V_c \quad (1.91)$$

Existen varios casos interesantes de tensión  $E(t)$  para estudiar la reacción del



**Figura 1.43** Carga de un circuito RC. (a) Circuito RC con los parámetros siguientes:  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$  y  $E_0 = 10\text{V}$ . (b) Voltaje del condensador cuando se conecta a la fuente.

circuito, siendo la función escalón la más importante para entender el funcionamiento de la dinámica:

$$E(t) = \begin{cases} E_0 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (1.92)$$

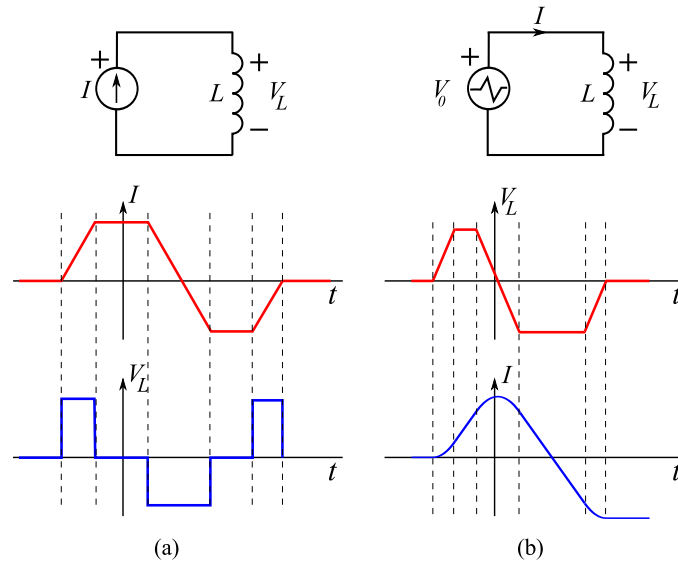
La respuesta al escalón de un sistema lo caracteriza completamente. Muchos ensayos y pruebas de equipos se realizan con esta función de excitación dado que permite extraer todos los parámetros del sistema.

Inicialmente se considera el condensador descargado, es decir  $V_c(0) = 0$  se puede deducir directamente la expresión matemática de la carga del condensador resolviendo la ecuación diferencial (1.91):

$$V_c(t) = E_0(1 - e^{-t/RC}) \text{ para } t \geq 0 \quad (1.93)$$

Se llama constante de tiempo del circuito al valor  $\tau = RC$ . Tiene unidad de tiempo y corresponde al tiempo en el que el condensador alcanza el 63% de la carga final. Se puede ver la evolución temporal para una resistencia de  $1\text{k}\Omega$  y un condensador de  $1\mu\text{F}$  conectados a una fuente de  $10\text{V}$  en la figura 1.43 (b).

Este ejemplo destaca una propiedad importante para el análisis de los circuitos



**Figura 1.44** Evolución de la tensión y de la corriente en una inductancia cuando se conecta una fuente de tensión variable en el tiempo o una fuente de corriente. La dinámica de la tensión y corriente viene determinada por la dinámica de la bobina:  $V = LdI/dt$

con condensadores: no hay discontinuidades de tensión en un condensador dado que la derivada de la tensión no puede ser infinita<sup>20</sup>.

En la segunda parte de nuestro estudio de los transitorios, se consideran **las inductancias**. Se estudia la dinámica de una bobina conectada a una fuente de tensión o de corriente. La dinámica de la tensión de una bobina viene dada por el flujo magnético  $\Phi = LI$ . Se estudian las variaciones de ambos términos:

$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (1.94)$$

siendo la inductancia  $L$  una constante independiente del tiempo. La derivada del flujo magnético corresponde a la tensión de la bobina  $V_L$  por la ley de Faraday:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \quad (1.95)$$

Se relaciona ahora la dinámica de la tensión de la bobina con la corriente que le atraviesa. En la figura 1.44 aparece la corriente y la tensión de una bobina una fijada la tensión o la corriente mediante una fuente. Las variaciones son parecidas al caso del condensador siendo el papel de la tensión y de la corriente intercambiados.

Un circuito muy común en ingeniería es el circuito LR, es decir un circuito

<sup>20</sup> La tensión es la derivada de la corriente. Una discontinuidad en la tensión significaría una corriente infinita. Por lo que la tensión tiene que ser una función continua y derivable.

con una inductancia y una resistencia en serie con una señal de excitación a la entrada. La señal elegida para el estudio de la dinámica es el escalón  $E(t)$  (1.92). La magnetización de una inductancia es también muy similar a la carga de un condensador para un circuito similar a la figura 1.45. Aplicando la ley de Kirchhoff a nuestro circuito se obtiene la ecuación:

$$L \frac{dI}{dt} = E(t) - RI \quad (1.96)$$

considerando la tensión y la corriente de la bobina nulas al inicio, se obtiene la solución de la corriente en función del tiempo:

$$I(t) = E/R(1 - e^{-tR/L}). \quad (1.97)$$

Es la misma dinámica que en el caso del condensador pero con los papeles de la intensidad y de la tensión intercambiados. Aquí es el parámetro  $\tau = L/R$  la constante de tiempo que determina la dinámica del circuito. Midiendo la respuesta del sistema a un estímulo de tipo escalón se determina la constante de tiempo  $\tau$  experimentalmente. Una forma práctica de obtener este tiempo consiste en medir el tiempo que tarda la tensión  $V_L$  en alcanzar el 37% de su valor inicial. Este tiempo coincide con  $\tau$  tal como se muestra en la figura 1.45 (b). En general muchos sistemas resultan de la combinación de varios de estos elementos. La respuestas del sistema o los transitorios pueden ser regidos por ecuaciones diferenciales de segundo orden o más. Estos transitorios son importantes en muchos casos prácticos. Por ejemplo, en un sistema de primer orden si se busca una respuesta rápida se tiende a reducir este tiempo de transito.

### Ejercicio 1.21

Un condensador de  $1.6 \mu\text{F}$ , inicialmente descargado, se conecta en serie con una resistencia de  $10 \text{ k}\Omega$  y una batería de  $5\text{V}$ . Se enciende la fuente en  $t = 0$ . Calculad:

1. La carga en el condensador después de un tiempo muy largo.
2. Cuanto tarda el condensador en alcanzar el 99% de su carga final.

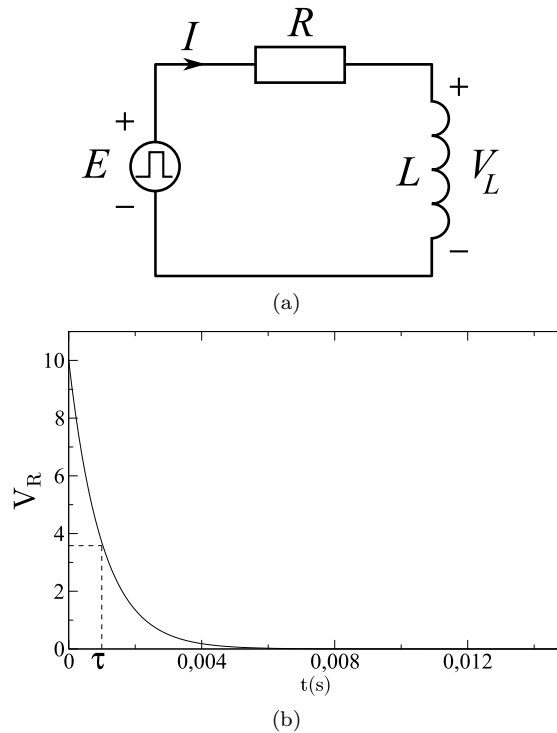
### Solución del ejercicio 1.21

1) Hallamos simplemente usando la fórmula que relaciona la carga y la diferencia de potencial sabiendo que al cabo de un tiempo largo la diferencia de potencial coincide con la tensión de la fuente:

$$Q = CV = 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

2) El tiempo necesario para alcanzar el 99% de la carga final se deduce de la fórmula de la carga de un condensador:

$$V_c(t) = E_0(1 - e^{-t/RC}) \text{ para } t \geq 0$$



**Figura 1.45** Carga de un circuito RL. (a) Circuito RL con los parámetros siguientes:  $R = 1k\Omega$ ,  $L = 1H$  y  $E=10V$ . (b) Voltaje de la bobina cuando se conecta la fuente en  $t = 0$ .

con  $E_0 = 5V$ ,  $R = 10k\Omega$  y  $C = 1,6\mu F$ . La carga final siendo  $0,99E_0$  sustituimos para hallar el tiempo  $t_{99}$ :

$$E_0(1 - e^{-t_{99}/RC}) = 0,99E_0$$

simplificamos los factores comunes y despejamos la exponencial:

$$e^{-t_{99}/RC} = 0,01$$

se aplica el logaritmo a ambos lados de la expresión:

$$t_{99} = -RC \ln(0,01) = -1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot \ln(0,01) = 0,074 \text{ s}$$

## 1.6.2 Transitorios de segundo orden

Cuando se combinan por ejemplo una bobina, un condensador y una resistencia en serie, la respuesta a un escalón de tensión es mucho más complicada que el crecimiento exponencial que se ha visto en el transitorio de primer orden. La dinámica de estos sistemas viene determinada por ecuaciones diferenciales de segundo orden que tienen un comportamiento mucho más complejo.



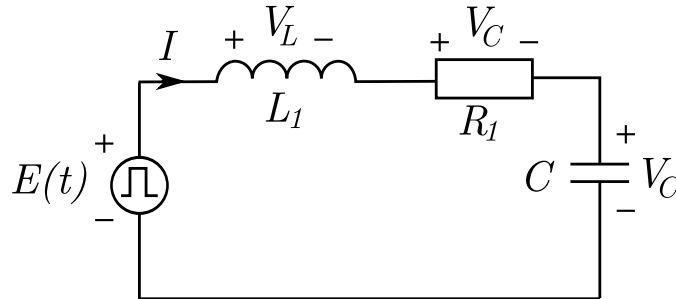


Figura 1.46 Circuito RLC conectado a una fuente de tensión.

Un ejemplo de sistema de segundo orden aparece en el circuito de la figura 1.46. Aplicando la ley de Kirchoff en tensión a este circuito se obtiene la ecuación:

$$E - V_L - V_R - V_C = 0. \quad (1.98)$$

Los elementos pasivos que intervienen en esta ecuación tienen una dependencia con la corriente  $I$ . Sustituyendo para cada elemento se obtiene la siguiente ecuación:

$$E(t) - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{1}{C} \int I dt = 0. \quad (1.99)$$

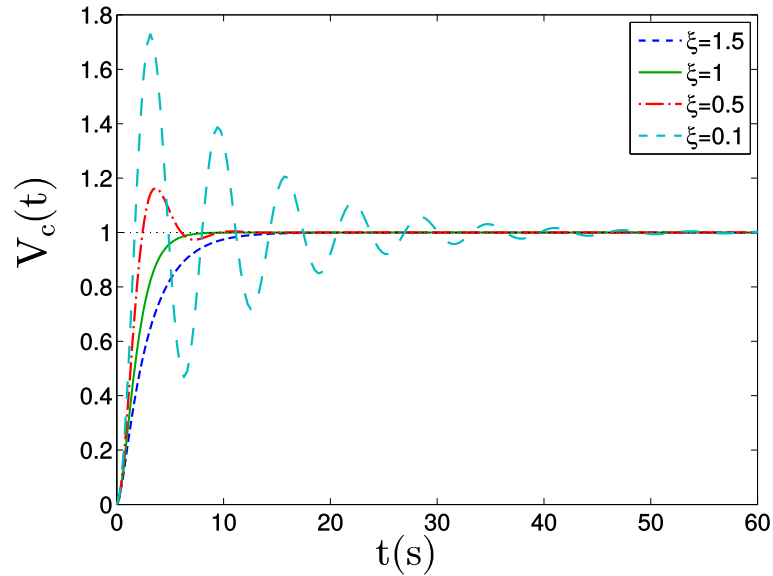
Es una ecuación diferencial que depende únicamente de la variable  $I$ . Por otro lado, se puede obtener una ecuación diferencial que depende únicamente de  $V_C$  fijandonos en:

$$I = C \frac{dV_C}{dt} \quad (1.100)$$

sustituyendo de nuevo en (1.99) se transforma la ecuación en:

$$LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = E(t). \quad (1.101)$$

De este modo obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden que se resuelve caso por caso dependiendo de la entrada  $E(t)$ . Se resumen a continuación los principales resultados obtenidos con la función de entrada escalón (1.92). La principal diferencia consiste en que el sistema se va a estabilizar después de unas oscilaciones en torno al estado final. Este comportamiento oscilatorio se debe a las transferencias de energía entre la bobina y el condensador. El número de oscilaciones va a depender de la resistencia  $R$  que representa un **amortiguamiento** o una pérdida de energía del sistema. Cuanto más alta sea la resistencia, menos oscilaciones se van a observar. Estas variaciones se pueden observar en la figura 1.47, a medida que disminuye el coeficiente de amortiguamiento aumenta el número de oscilaciones. Gracias a la teoría de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas lineales se pueden identificar algunos parámetros del sistema mediante a esta respuesta:



**Figura 1.47** Respuesta del sistema RLC (tensión  $V_C$ ) para una entrada escalón. Se varía el valor de la resistencia que determina el amortiguamiento del sistema

1. El coeficiente de amortiguamiento se define como:

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (1.102)$$

Este número comprendido entre 0 y 1 controla de alguna forma el número de oscilaciones del sistema antes de llegar al estado estable.

2. La frecuencia de las oscilaciones:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.103)$$

con:  $\omega_n = \sqrt{1/(LC)}$ .

En la figura se muestran los comportamientos típicos del transitorio antes de alcanzar la tensión final  $E_0 = 1V$ . Cuanto más pequeño es el coeficiente de amortiguamiento, más oscilaciones aparecen antes de estabilizarse alrededor del punto fijo. Dependiendo del valor del amortiguamiento se puede clasificar los comportamientos en tres grandes clases:

- Los sistemas sobreamortiguados: la respuesta se parece a la respuesta de un sistema de primer orden ( $\xi > 1$ ).
- Los sistemas con amortiguamiento crítico: la respuesta es la más rápida y la óptima para llegar al régimen permanente ( $\xi = 1$ ).
- Los sistemas subamortiguados: el sistema oscila antes de estabilizarse ( $0 < \xi < 1$ ).

Este tipo de respuesta tiene mucha importancia a la hora de entender los sistemas de ordenes superiores. Una técnica muy sencilla y muy usada consiste en simplificar un sistema y aproximarlos por la respuesta al escalón que pueda tener. En ingeniería de control, gran parte de los análisis consisten en identificar los parámetros de los sistemas aproximándolos a sistemas de primer y segundo orden.

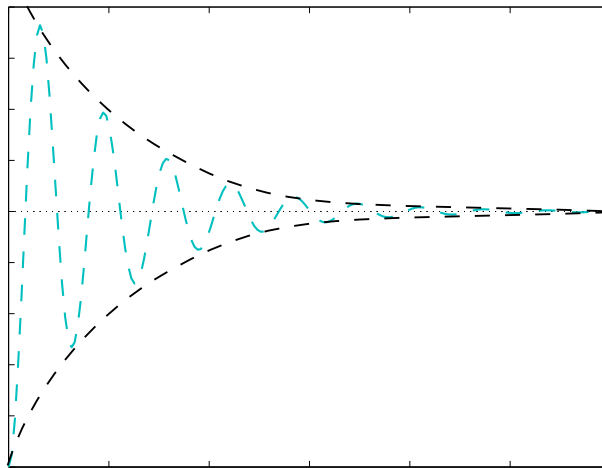
En esta sección se han tratado los transitorios antes de llegar al régimen permanente de corriente continua. Veremos en el siguiente capítulo otro tipo de régimen permanente: el régimen armónico.

### Ejercicio 1.22

Sabiendo que la respuesta al escalón unitario de un sistema subamortiguado tiene oscilaciones que decrecen de la forma  $\exp(-\xi\omega_n t)$ , calcular el tiempo necesario a un sistema para alcanzar el 5% del valor final.

### Solución del ejercicio 1.22

Este decrecimiento exponencial de las amplitudes se puede observar muy claramente en la figura siguiente:



Para calcular el tiempo pedido simplemente se necesita despejar la expresión de la exponencial:

$$e^{-\xi\omega_n t_{5\%}} = 0,05, \quad (1.104)$$

y despejando:

$$t_{5\%} = \frac{-\ln 0,05}{\xi\omega_n}. \quad (1.105)$$

Este tiempo se llama tiempo de establecimiento y permite dar una medida de

la velocidad del sistema. Los sistemas con amortiguamiento crítico tienen el tiempo de establecimiento más corto.

## 1.7 Resultados y fórmulas importantes

Fórmulas importantes	
Ley de Ohm	$V = RI$
Primera ley de Kirchhoff	$\sum_k I_k = 0$
Segunda ley de Kirchhoff	$\sum_{\text{malla}} V_k$
Potencia de un dipolo	$P = VI$
Asociación de resistencias en serie	$R_{eq} = \sum R_k$
Asociación de resistencias en paralelo	$1/R_{eq} = \sum 1/R_k$
Capacidad de un condensador de placas	$C = \epsilon S/d$
Inductancia de una bobina con núcleo	$L = S\mu N_0^2/l_0$

## 1.8 Ejercicios Resueltos

1. Una resistencia que puede disipar como máximo 100 W se proyecta para funcionar con una diferencia de potencial de 200 V, calcular:
- Cuánto vale la resistencia y que intensidad circula por ella.
  - ¿Qué potencia disipa la resistencia si se alimenta a 125 V?

**Solución:**

a) Como la potencia y la tensión son datos del problema, la resistencia se puede deducir de la siguiente fórmula:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

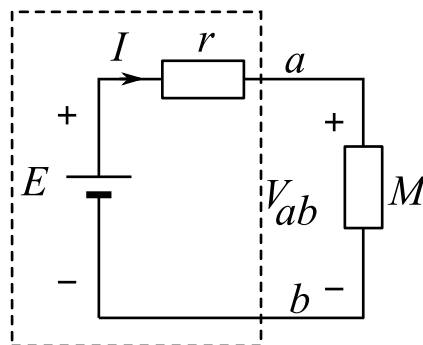
El valor numérico es:  $R = 200^2/100 = 400\Omega$ . La intensidad se halla mediante la ley de Ohm:  $I = V/R = 200/400 = 0,5\text{A}$

b) Alimentando la resistencia con 125V, la potencia disipada será de  $P = 125^2/400 = 39\text{W}$

2. Una batería con una f.e.m. de 12 V tiene una diferencia de potencial en sus extremos de 11.4 V cuando la intensidad suministrada a un motor es de 20 A. Calcular:
- Cuál es la resistencia interna de la batería.
  - Qué potencia suministra la batería.
  - De la potencia suministrada, ¿cuánta se pierde dentro de la propia batería?
  - Si en lugar de alimentar el motor, alimenta una resistencia de 2 ohmios, ¿Cuál es la diferencia de potencial en bornes de la batería?

**Solución:**

a) El problema se resume en el esquema siguiente:



A partir de esta figura y de los datos del problema se puede encontrar la resistencia interna  $r$  de la batería. Con la ley de Kirchoff se obtiene:

$$E - rI - V_{ab} = 0$$

con  $I = 20A$ ,  $V_{ab} = 11,4V$ ,  $E = 12V$ . Tenemos  $r = 0,03\Omega$ .

b) La potencia suministrada por la batería es:  $P = V_{ab}I = 11,4 \cdot 20 = 228W$ .

c) La potencia que se disipa internamente en la batería es la potencia de la resistencia interna  $r$ . Esta potencia es:  $P_r = rI^2 = 0,03 \cdot 20^2 = 12W$ .

d) Cambiando el motor por una resistencia de  $R = 2\Omega$  se obtiene la ecuación del circuito:

$$E - rI - RI = 0$$

La corriente es entonces:  $I = 12/2,03 = 5,91A$  y la diferencia de potencial en los bornes de la batería es:  $V_{ab} = RI = 11,8V$

3. Encontrar la resistencia equivalente del circuito de la figura.

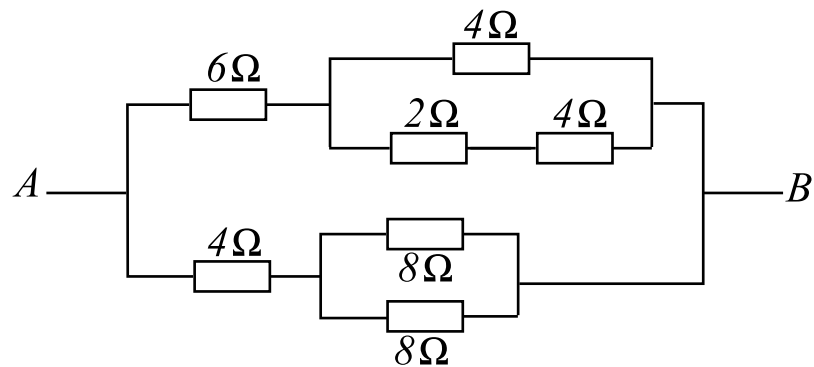


Figura del ejercicio 3

**Solución:**

Para solucionar este problema, se empieza por sumar las resistencias en serie (la de  $2\Omega$  y  $4\Omega$ ). Luego se asocian las resistencias en paralelo. Un vez transformadas se puede de nuevos asociar resistencias en serie. Se sigue el proceso hasta obtener una única resistencia. Solución:  $4,1\Omega$

4. Demostrar que la resistencia equivalente entre los puntos A y B de la figura es R. ¿Qué pasaría si se añade una resistencia R entre los puntos C y D?

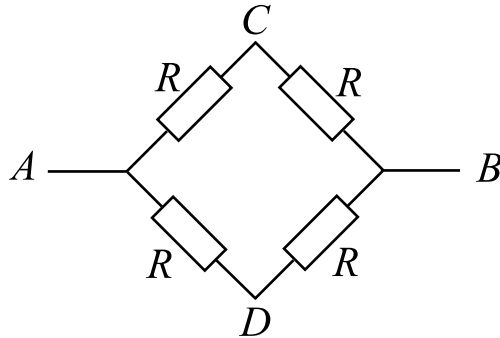
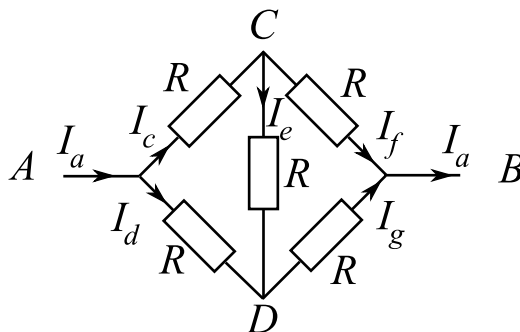


Figura del ejercicio 4

**Solución:**

Para obtener la resistencia equivalente se pueden asociar las dos resistencias en serie de cada rama, lo que nos daría  $2R$ . Se asocian luego en paralelo y obtenemos  $R$  el resultado final de la asociación.

Si se añade una resistencia entre los puntos C y D se debe analizar el circuito con más atención. En la figura siguiente se representa el circuito modificado con las corrientes correspondientes.



Gracias a las leyes de Kirchhoff se obtienen las ecuaciones del circuito:

$$\begin{aligned} I_a &= I_c + I_d \\ V_{AB} &= R(I_c + I_f) = R(I_d + I_g) \\ I_f + I_g &= I_a \end{aligned}$$

Es decir que se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} I_c + I_d &= I_f + I_g \\ I_c + I_f &= I_d + I_g \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones se llega a la conclusión que  $I_c = I_g$  y por lo tanto  $I_f = I_d$ . Significa que no circula ninguna corriente entre los puntos C y D. Un forma más intuitiva de obtener este resultado consiste en razonar sobre la simetría del circuito. Al tener las mismas resistencias en los caminos

ACB y ADB, las corrientes serán las mismas en ambos caminos. Las caídas de tensión en el tramo AC y el tramo AD son entonces las mismas. Conlleva que el potencial en C y D son los mismos, por lo tanto no hay diferencia de potencial.

5. En el circuito de la figura, la intensidad que circula por  $R_1$  vale 0,5 A, calcular:

- La intensidad que circula por  $R_2$ .
- La diferencia de potencial entre A y B.
- La resistencia equivalente entre A y B.
- La intensidad que circula por  $R_3$  y la total del circuito.

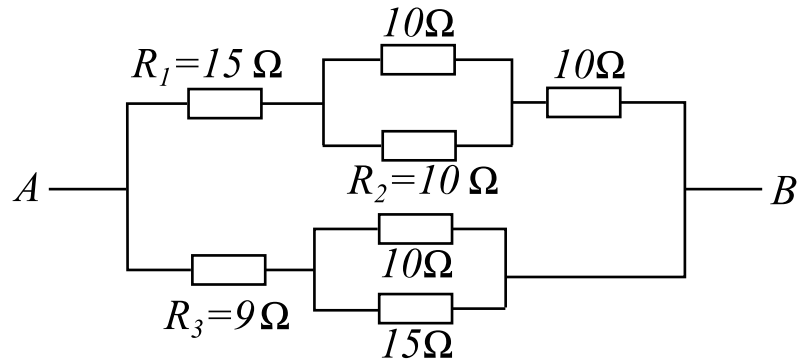


Figura del ejercicio 5

**Solución:**

a) y b) La intensidad circulando por la rama de  $R_1$  es de 0,5A. Se aplica la ley de Kirchoff a la rama superior:

$$V_{AB} = 0,5R_1 + 0,5(10\Omega || 10\Omega) + 0,5 \cdot 10 = 15V$$

En la rama en paralelo de las dos resistencia de  $10\Omega$  la corriente se separa en dos corrientes de misma magnitud. La diferencia de potencial es idéntica en los extremos y las resistencias iguales. La corriente en cada rama será de 0,25A.

c) La resistencia equivalente se obtiene asociando las resistencias en serie y en paralelo, obtenemos:  $R_{eq} = 10\Omega$ .

d) La intensidad circulando por  $R_3$  se puede obtener calculando primero la intensidad total que entra en el circuito. En concreto:

$$V_{AB} = R_{eq}I$$

La corriente vale  $I = 1,5A$ . Dado que la suma de las corrientes vale 1,5A y que la corriente de la rama de  $R_1$  es de 0,5A, se deduce con las leyes de Kirchoff que la corriente de la rama de  $R_3$  es de 1A.



6. En el circuito de la figura siguiente la diferencia de potencial entre C y D es de 12 V, calcular:
- La intensidad que circula por cada rama.
  - La diferencia de potencial entre A y B.
  - La resistencia equivalente.

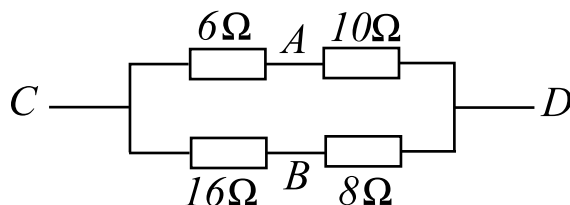


Figura del ejercicio 6

**Solución:**

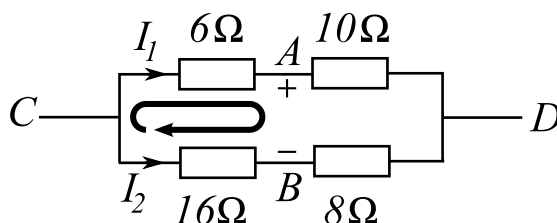
- a) Para calcular la intensidad de cada rama se aplican las leyes de Kirchhoff a cada rama:

$$V_{cd} = I_1(6 + 10)$$

$$V_{cd} = I_2(16 + 8)$$

La aplicación numérica nos da  $I_1 = 0,75A$  e  $I_2 = 0,5A$ .

- b) Para obtener la diferencia de potencia entre los puntos A y B se debe encontrar una malla adecuada.



Aplicando la ley de Kirchhoff sobre el lazo indicado en la figura se obtiene la ecuación:

$$-6I_1 - V_{AB} + 16I_2 = 0$$

Despejando:  $V_{AB} = 3,5V$

- c) La resistencia equivalente del circuito es  $R_{eq} = 9,6\Omega$ . Se puede deducir asociando las resistencias o simplemente con esta ecuación:

$$R_{eq} = \frac{V_{CD}}{I_1 + I_2} = \frac{12}{1,25} = 9,6\Omega$$

Es la tensión partido de la corriente total que circula entre los puntos C y D.

7. En el circuito de la figura, encontrar:
- La intensidad en cada resistencia.
  - La potencia suministrada por cada fuente.
  - La potencia disipada en cada resistencia.

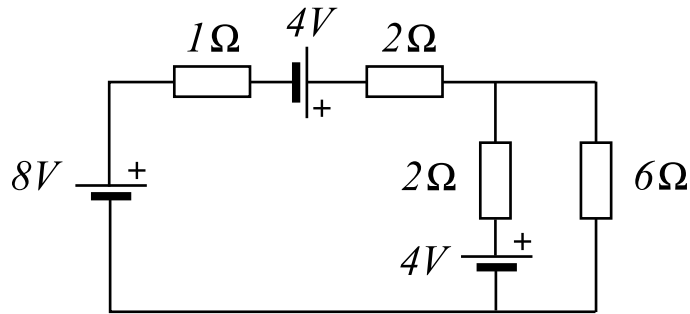
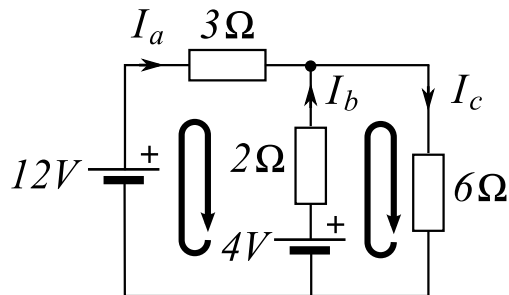


Figura del ejercicio 7

**Solución:**

- a) Para proceder a la resolución del circuito conviene primero simplificarlo. Para ello se asocian las fuentes y las resistencias en serie para clarificar el circuito.



En esta figura se pueden aplicar las leyes de Kirchoff en el nudo marcado además de las dos mallas. Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} I_a + I_b &= I_c \\ 12 - 3I_a + 2I_b - 4 &= 0 \\ 4 - 2I_b - 6I_c &= 0 \end{aligned}$$

Son tres ecuaciones con tres incógnitas. Una forma de resolver el sistema consiste en escribirlo en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Se resuelve con métodos de álgebra lineal:  $I_a = 2\text{A}$ ,  $I_b = -1\text{A}$ ,  $I_c = 1\text{A}$ . Nótese que la corriente  $I_b$  es negativa, esto significa que la batería de 4V está

actuando como un acumulador.

b) La potencia de cada fuente se obtiene a partir de las corrientes calculadas anteriormente. Para la fuente de 8V el consumo es de  $2 \cdot 8 = 16W$ , de 8W para la fuente de 4V y de  $-4W$  para la fuente de 4V con la corriente negativa. Esta potencia negativa significa que el generador acumula energía.

c) La potencia en cada resistencia se deduce también de las corrientes, de izquierda a derecha:

$$P_{1\Omega} = 4W$$

$$P_{2\Omega} = 8W$$

$$P_{2\Omega} = 2W$$

$$P_{6\Omega} = 6W$$

8. A partir del circuito de la figura siguiente calcular:

- la tensión  $V_1$ ,
- la corriente  $I$ ,
- la potencia proporcionada por cada generador.

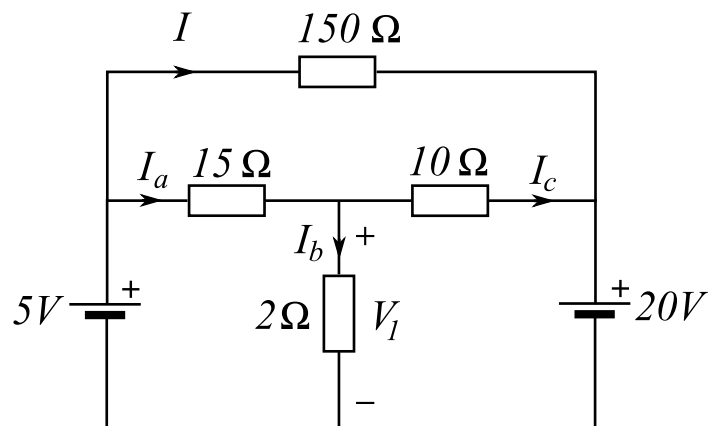


Figura del ejercicio 8

### Solución:

Se necesitan cuatro ecuaciones para obtener las cuatro corrientes del circuito. Es interesante notar que los generadores no tienen resistencias en serie. Implica que de momento podemos ignorar las corrientes que generan y centrarnos en las demás. Por ejemplo, se usa la ecuación proporcionada por un nudo y las otras tres ecuaciones se obtienen a partir de las tres mallas del circuito. El

sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{aligned} I_a &= I_b + I_c \\ 5 - 15I_a - 2I_b &= 0 \\ 20 + 10I_c - 2I_b &= 0 \\ 150I - 15I_a - 10I_c &= 0 \end{aligned}$$

Se puede observar que las tres primeras ecuaciones no dependen de la corriente  $I$ , por lo que se puede resolver directamente este sistema de tres dimensiones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -15 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Se obtiene:  $I_a = 0,1\text{A}$ ,  $I_b = 1,75\text{A}$ ,  $I_c = -1,65\text{A}$ . La tensión  $V_1$  es entonces:  $V_1 = 1,75 \cdot 2 = 3,5\text{V}$

b) La corriente  $I$  se deduce a partir de las ecuaciones anteriores:  $I = (15I_a + 10I_c)/150 = (15 \cdot 0,1 + 10 \cdot -1,65)/150 = -0,1\text{A}$ .

c) La potencia proporcionada por cada generador se obtiene con la corriente anteriores. La corriente que circula por la fuente de  $5\text{V}$  es  $I_a + I = 0,1 - 0,1 = 0\text{A}$ . No hay corriente circulando por este generador, por lo tanto no produce potencia. En el segundo generador de  $20\text{V}$  la corriente es de  $-I - I_c = 0,1 + 1,65 = 1,75\text{A}$  y la potencia producida es  $P = 1,75 \cdot 20 = 35\text{W}$ .

9. A partir del circuito de la figura siguiente calcular:

- las corrientes que circulan en cada rama. ,
- el equivalente Thévenin visto desde los puntos  $d$  y  $e$ .

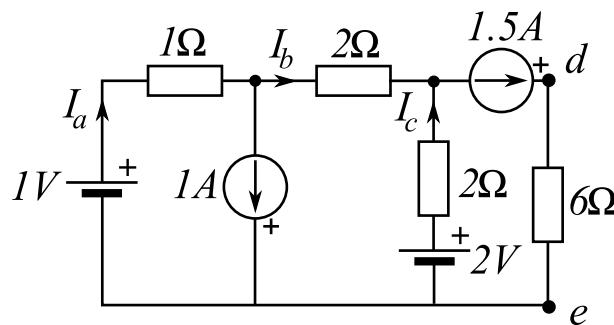
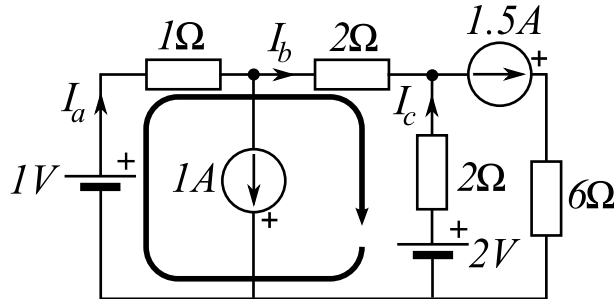


Figura del ejercicio 9

**Solución:**

a) Se determinan tres corrientes en este problema:  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ . Una vez aplicadas las leyes de Kirchhoff en los nudos, se completan las ecuaciones con una malla del circuito:



Se obtienen las siguientes ecuaciones:

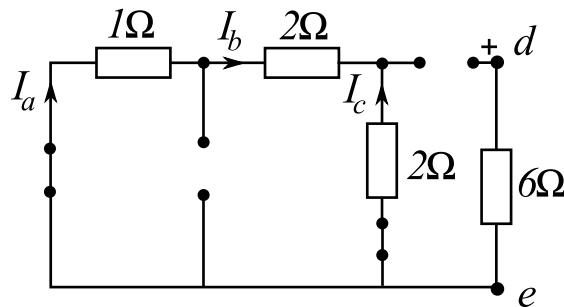
$$\begin{aligned} I_a &= I_b + 1 \\ I_c + I_b &= 1,5 \\ 1 - I_a - 2I_b + 2I_c - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Son tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el resultado es:  $I_a = 1,2A$ ,  $I_b = 0,2A$ ,  $I_c = 1,3A$ . Nótese que en la rama más a la derecha, la resistencia de  $6\Omega$  no tiene influencia sobre el resto del circuito pero consume una potencia. El generador de corriente impone la condición en el nudo.

b) Para hallar el equivalente Thévenin del circuito entre  $d$  y  $e$  se halla primero la resistencia equivalente. Como el circuito no tiene ninguna fuente dependiente, se abren las fuentes de corriente y se ponen en corto circuito las fuentes de tensión como sigue:



En la figura anterior, la única resistencia que aparece de desde los puntos  $e$  y  $d$  es la resistencia de  $6\Omega$ . Es la resistencia equivalente de Thévenin. Para obtener la tensión equivalente de Thevenin se mide la tensión entre  $e$  y  $d$ :

$$V_{th} = V_{ed} = 6 \cdot 1,5 = 9V$$

Se obtiene el siguiente equivalente de Thevenin:  $R_{th} = 6\Omega$ ,  $V_{th} = 9V$ . A efectos prácticos solo afecta la fuente de 1.5A.

10. A partir del circuito de la figura siguiente calcular:

- las corrientes que circulan en cada rama.
- el equivalente Norton del circuito visto desde los puntos  $a$  y  $b$ .

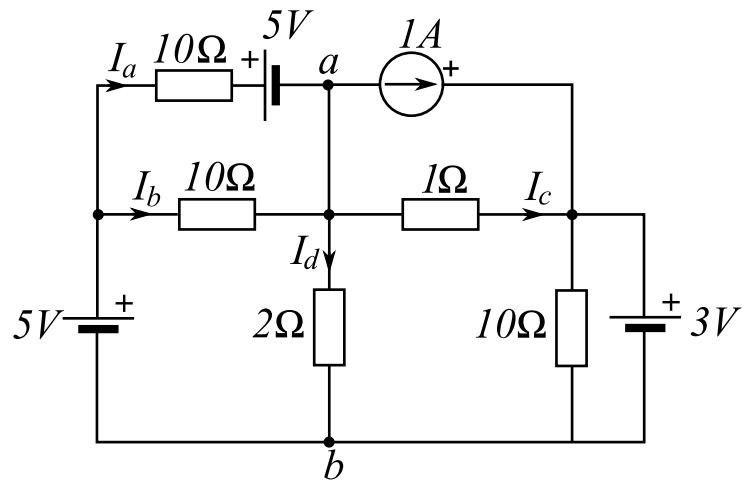
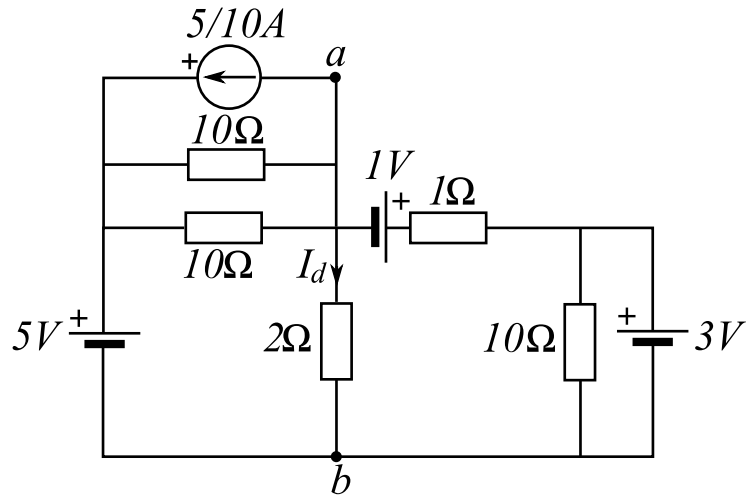


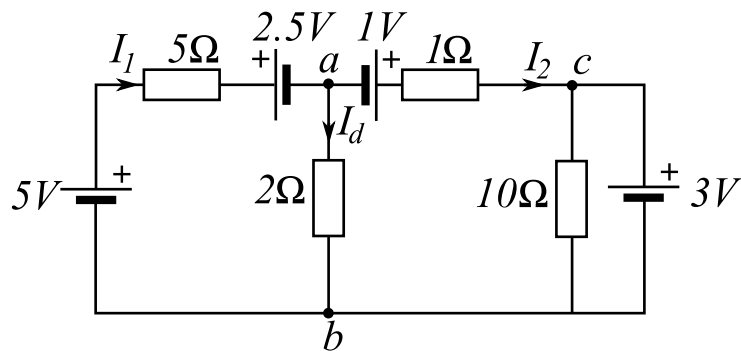
Figura del ejercicio 10

### Solución

Este problema requiere unos pasos previos para su resolución. Se simplifica primero el circuito transformando las fuentes de tensión y corriente en su equivalente Thévenin o Norton según nos conviene. Por ejemplo, se simplifica la fuente de corriente de 1A en paralelo con la resistencia de  $1\Omega$  como un generador de tensión de 1V en serie con una resistencia de  $1\Omega$ . El generador de tensión de 5V se puede transformar en una fuente de corriente de 0,5A en paralelo con una resistencia de  $10\Omega$ .



Asociando las resistencias en paralelo, y a continuación transformando el generador de corriente a un equivalente Thévenin llegamos a un circuito más sencillo:



Nótese que las corrientes son distintas debido a las transformaciones realizadas. Sin embargo una vez transformadas, las corrientes originales se deducen fácilmente.

Para resolver el circuito en este estado vamos a emplear el método de los nudos. Se elige el nudo  $b$  como referencia. Se han de deducir las ecuaciones de los otros dos nudos. Obtenemos el balance de corriente del nudo  $a$  y las ecuaciones de los potenciales de los nudos:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_d + I_2 \\ V_a &= 2I_d \\ V_a &= 2,5 - 5I_1 \\ V_a + 1 - I_2 - V_c &= 0 \end{aligned}$$

con  $V_c = 3V$ . Se despeja las corrientes en función de las tensiones:

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{V_a}{2} \\ I_1 &= \frac{2,5 - V_a}{5} \\ I_2 &= V_a - V_c + 1 \end{aligned}$$

Se sustituye ahora en la ecuación que relaciona las corrientes:

$$\frac{2,5 - V_a}{5} = \frac{V_a}{2} + V_a - V_c + 1$$

el resultado es:  $V_a = 1,47V$

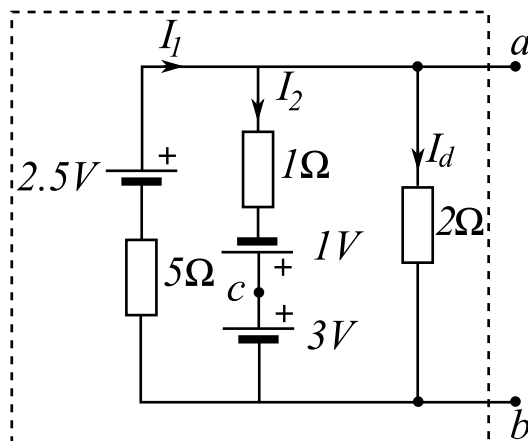
Las corrientes del circuito son:  $I_1 = 0,21A$ ,  $I_d = 0,74A$ ,  $I_2 = -0,53A$ . El resto de las corrientes se hallan con estas relaciones:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_a + I_b \\ 10I_b &= 5 + 10I_a \\ I_2 &= 1 + I_c \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema:  $I_c = -1,53A$ ,  $I_a = -0,15A$ ,  $I_b = 0,35A$ .

No se ha calculado la corriente circulando por la resistencia de  $10\Omega$ , ya que se calcula directamente con la ley de Ohm a partir de la diferencia de potencial entre sus polos.

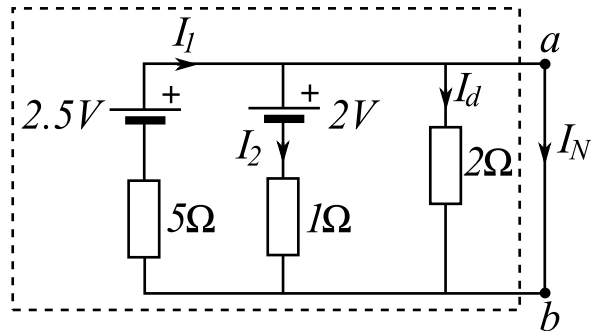
b) Para obtener el equivalente Norton se transforma el circuito de forma que aparezcan los dos puntos  $a$  y  $b$  como sigue:



Desaparece en este esquema la resistencia de  $10\Omega$  dado que no modifica los demás potenciales del circuito.

La tensión entre los puntos  $a$  y  $b$  se calculó en el apartado anterior,  $V_{ab} = V_a - V_b = 1,47V$ . Ahora para encontrar la resistencia equivalente se coloca la salida en corto-circuito y se mide la corriente que circula por esta rama.



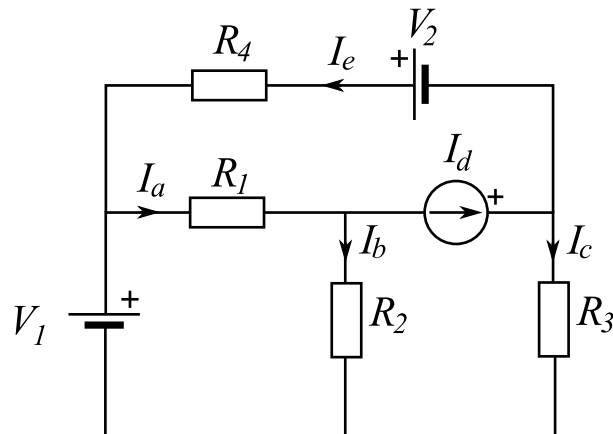


La corriente  $I_N$  se expresa como:

$$I_N = -I_d + I_1 - I_2$$

Pasan por el cable de corto circuito las corrientes siguientes  $I_d = 0\text{A}$ ,  $I_1 = 2,5/5 = 0,5\text{A}$ ,  $I_2 = -2/1\text{A}$ . La corriente de Norton es:  $I_N = 2,5\text{A}$  y la resistencia de Norton  $R_N = V_{ab}/I_N = 1,46/2,5 = 0,59\Omega$ .

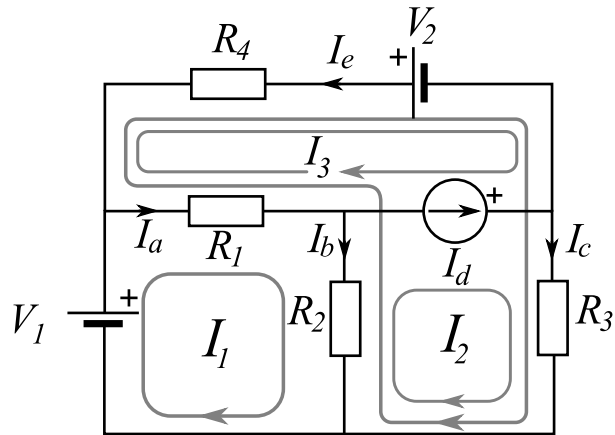
11. Calcular las corrientes del circuito siguiente con el método de las mallas:



Datos:  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $R_4 = 4\Omega$ ,  $I_d = 1\text{A}$ ,  $V_1 = 1\text{V}$ ,  $V_2 = 2\text{V}$ .

### Solución

Para resolver el circuito anterior con el método de las mallas se debe formar una “supermalla”. La fuente de corriente  $I_d$  pertenece a dos mallas simultáneamente, por lo que se han de juntar estas dos mallas con fin de realizar las operaciones:



Determinamos las dos ecuaciones de las mallas más la ecuación que relaciona la fuente de corriente  $I_d$  con las corrientes de mallas:

$$\begin{aligned} V_1 - R_1(I_1 - I_3) - R_2(I_1 - I_2) &= 0 \\ R_2(I_1 - I_2) + R_1(I_1 - I_3) - I_3 R_4 - I_2 R_3 - V_2 &= 0 \\ I_d &= I_2 - I_3 \end{aligned}$$

Se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sustituyendo los valores de los elementos, se consigue el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resulta:  $I_1 = I_2 = 0,428A$ ,  $I_3 = -0,57A$ . A partir de estos dos valores hallamos las otras intensidades:

$$\begin{aligned} I_a &= I_1 - I_3 = 1A \\ I_b &= I_1 - I_2 = 0A \\ I_c &= I_2 = 0,428A \\ I_e &= -I_3 = -0,57A \end{aligned}$$

12. A partir del circuito de la figura siguiente calcular las corrientes del circuito en función de  $\alpha$ .

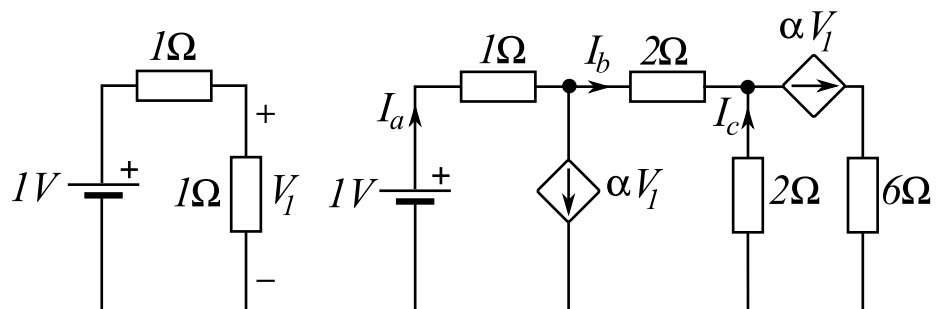


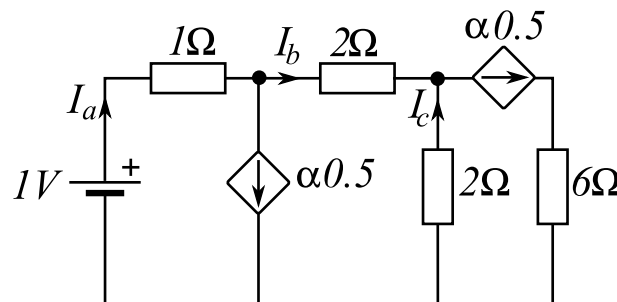
Figura del ejercicio 12

**Solución**

Este circuito contiene fuentes de corrientes controladas por la tensión  $V_1$ . Primero se calcula  $V_1$ :

$$V_1 = 1/2 = 0,5V$$

Ahora el sub-circuito de la derecha puede tratarse como un circuito clásico con fuentes de  $0,5\alpha A$ . El nuevo circuito es el siguiente:



Las ecuaciones del circuito son las siguientes:

$$\begin{aligned} 1 - I_a - 2I_b + 2I_c &= 0 \\ I_a &= 0,5\alpha + I_b \\ I_b + I_c &= 0,5\alpha \end{aligned}$$

Después de unas pocas manipulaciones se llega a:  $I_a = (1 + 3\alpha)/5A$ ,  $I_b = (1 + 0,5\alpha)/5A$ ,  $I_c = (-1 + 2\alpha)/5A$ .

**1.9 Ejercicios Adicionales**

- ¿Qué diferencia de tensión aporta la fuente  $U_x$  para que la diferencia de potencial entre los puntos a y b sea de 90 V? Resolver aplicando las leyes de Kirchhoff y después mediante el teorema de Millman aplicado en los puntos a y b.

Respuesta: a) 140V

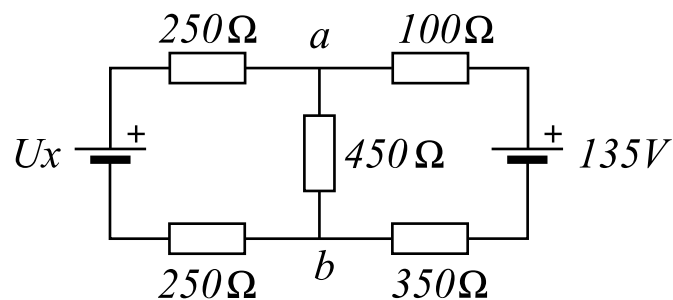


Figura del ejercicio 1

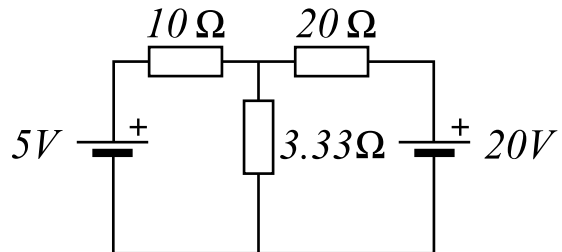


Figura del ejercicio 2

2. En el circuito de la figura, calcula la intensidad que circula por la resistencia de 3.33 ohmios y la potencia que disipa. Se puede usar el teorema de Millman para este ejercicio.

Respuesta: a) 1 A; b) 3.33 W

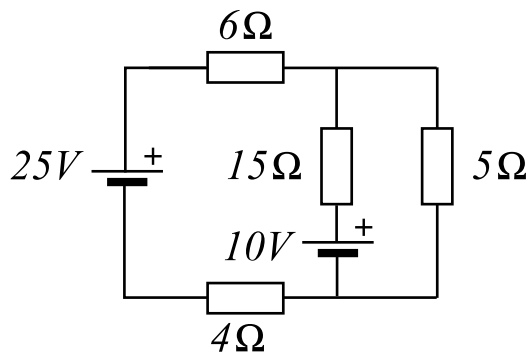


Figura del ejercicio 3

3. En el circuito de la figura, calcula la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia de 15 ohmios.

Respuesta: a) 1.36 V

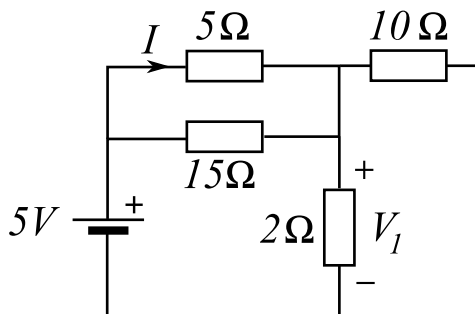


Figura del ejercicio 4

4. A partir del circuito de la figura 4 calcular:

- a) la tensión  $V_1$ ,  
 b) la corriente  $I$ ,  
 c) la potencia proporcionada por el generador,  
 d) la resistencia equivalente del circuito.

Respuesta: a)  $V_1 = 1,53V$ , b)  $I = 0,69A$ , c)  $P = 4,6W$ , d)  $R = 5,4\Omega$

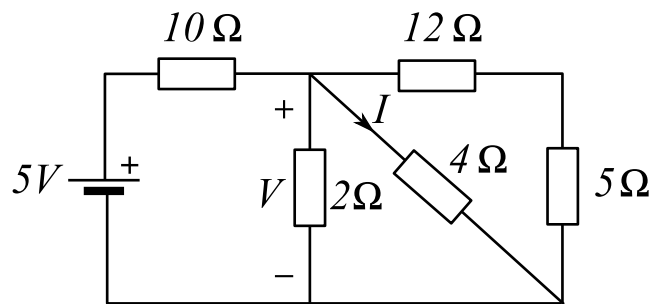


Figura del ejercicio 5

5. A partir del circuito de la figura 5 calcular:

- a) la tensión  $V$ ,  
 b) la corriente  $I$ ,  
 c) la potencia proporcionada por el generador,  
 d) la resistencia equivalente del circuito.

Respuesta: a)  $V_1 = 0,55V$  b)  $I = 0,137A$  c)  $P = 2,2W$  d)  $R_{eq} = 11,2\Omega$

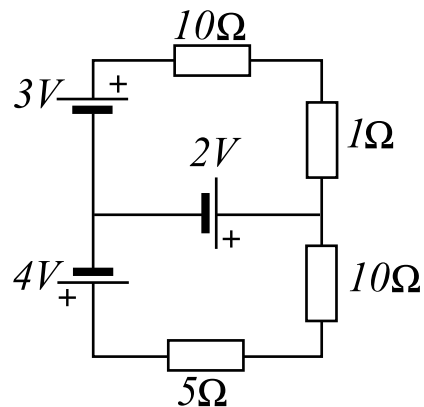


Figura del ejercicio 6

6. A partir del circuito de la figura 6 calcular:

- a) la intensidad que circula por cada una de las resistencias,  
 b) la potencia producida por cada generador,  
 c) verificar que la potencia consumida es igual a la producida.

Respuesta: a)  $I_{2V} = -0,224A$ ,  $I_{4V} = 2/15A$ ,  $I_{3V} = 1/11A$  b)  $P_{2V} = -0,45W$ ,  
 $I_{4V} = 8/15W$ ,  $I_{3V} = 3/11W$

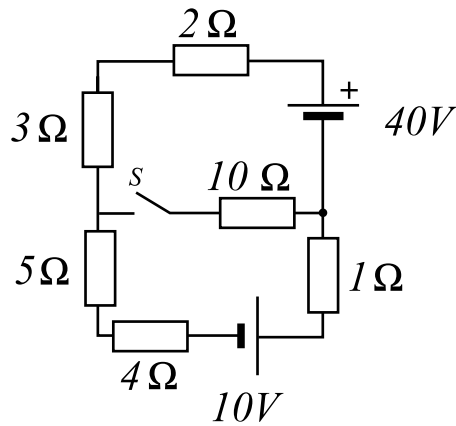


Figura del ejercicio 7

7. A partir del circuito de la figura 7 calcular:

- a) la intensidad que circula por cada una de las resistencias cuando el interruptor S está abierto

A continuación cerramos el interruptor S. Obtenga:

- b) la intensidad que circula por cada una de las resistencias,  
 c) la energía desprendida en la resistencia de  $10\Omega$  en 5 minutos.

Respuesta: a)  $I = 50/15A$  b)  $I_{10V} = 2,75A$ ,  $I_{40V} = 4,5A$ ,  $I_{10\Omega} = 1,75A$  c)  $E=9.8$  kJ

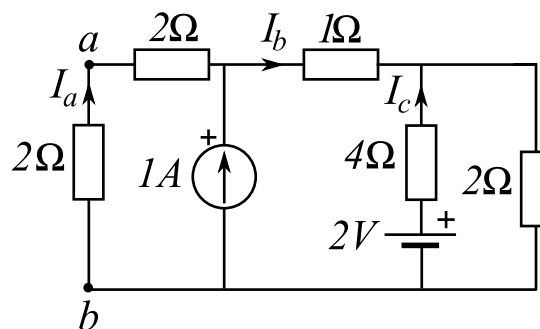


Figura del ejercicio 8

8. A partir del circuito de la figura 8 calcular:

- a) Las corrientes  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ .  
 b) El equivalente Norton desde los puntos  $a$  y  $b$ .

Respuesta: a)  $I_a = -0,47A$ ,  $I_b = 0,52A$ ,  $I_c = 0,157A$  b)  $R_N = 1,36\Omega$ ,  $I_N = 0,7A$

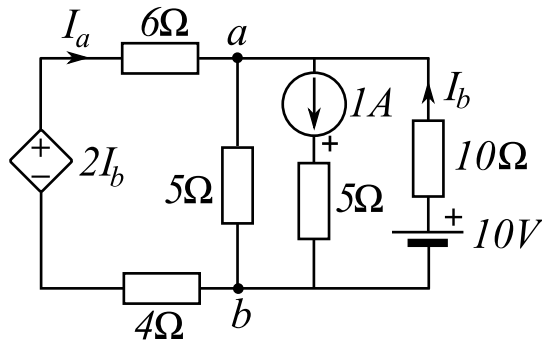


Figura del ejercicio 9

9. A partir del circuito de la figura 9 calcular las corrientes  $I_a$  e  $I_b$  así como la tensión  $V_{ab}$ .

Respuesta:  $I_a = 0,14A$ ,  $I_b = 0,95A$ ,  $V_{ab} = 0,476V$

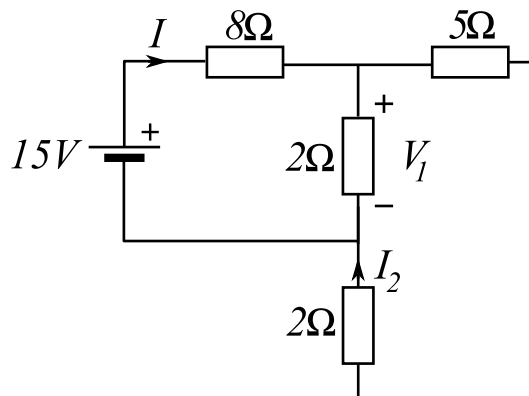


Figura del ejercicio 10

10. A partir del circuito de la figura 10 calcular las corrientes  $I$  e  $I_2$  y la tensión  $V_1$ .

Respuesta:  $I = 1,57A$ ,  $I_2 = 0,35A$ ,  $V_1 = 2,44V$

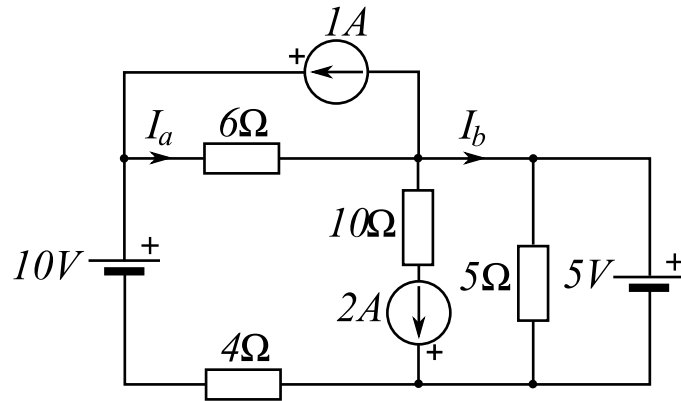


Figura del ejercicio 11

11. A partir del circuito de la figura 11 calcular las corrientes  $I_a$  e  $I_b$ .  
 Respuesta:  $I_a = 0,9A$ ,  $I_b = -2,1A$

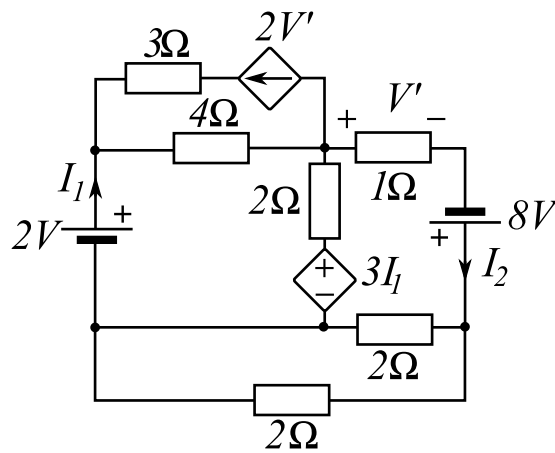


Figura del ejercicio 12

12. A partir del circuito de la figura 12 calcular las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ .  
 Respuesta:  $I_1 = -0,6A$ ,  $I_2 = 1,24A$



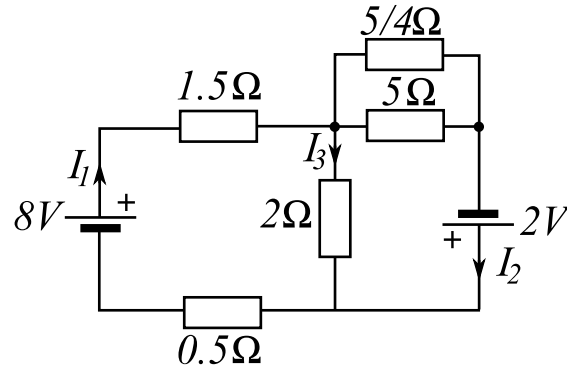


Figura del ejercicio 13

13. A partir del circuito de la figura 13 calcular las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .  
 Respuesta:  $I_1 = 7/2A$ ,  $I_2 = 3A$ ,  $I_3 = 1/2A$

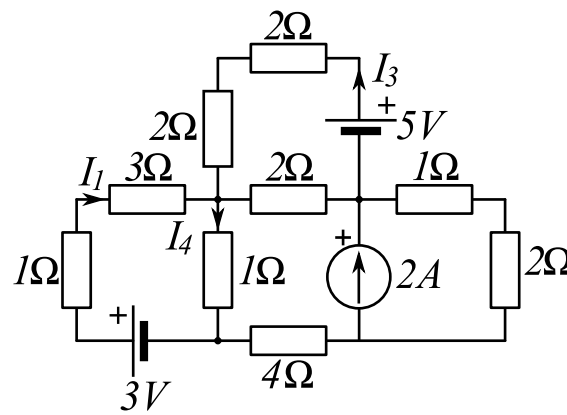


Figura del ejercicio 14

14. A partir del circuito de la figura 14 calcular las corrientes  $I_1$ ,  $I_3$  e  $I_4$ .  
 Respuesta:  $I_1 = 0,45A$ ,  $I_3 = 0,92A$ ,  $I_4 = 1,2A$

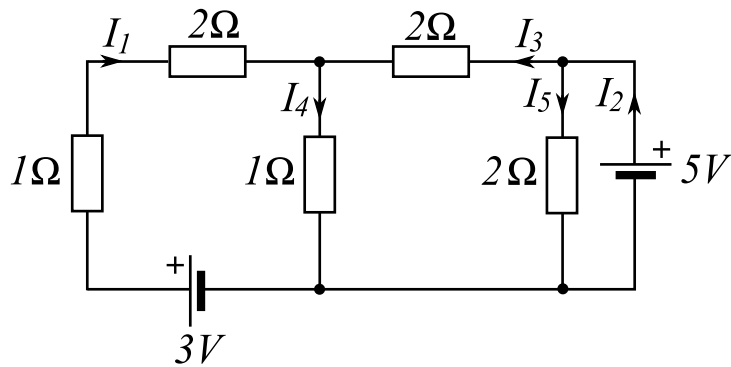


Figura del ejercicio 15

15. A partir del circuito de la figura 15 calcular todas las corrientes marcadas.  
 Respuesta:  $I_1 = 0,36\text{A}$ ,  $I_2 = 4,04\text{A}$ ,  $I_3 = 1,54\text{A}$ ,  $I_4 = 1,91\text{A}$ ,  $I_5 = 2,5\text{A}$ .

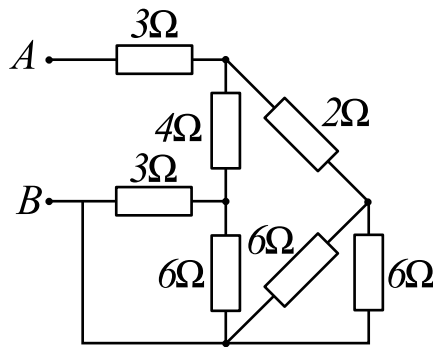


Figura del ejercicio 16

16. A partir del circuito de la figura 16, hallar la resistencia equivalente entre los puntos A y B.  
 Respuesta:  $R_{eq} = 5,72\Omega$ .

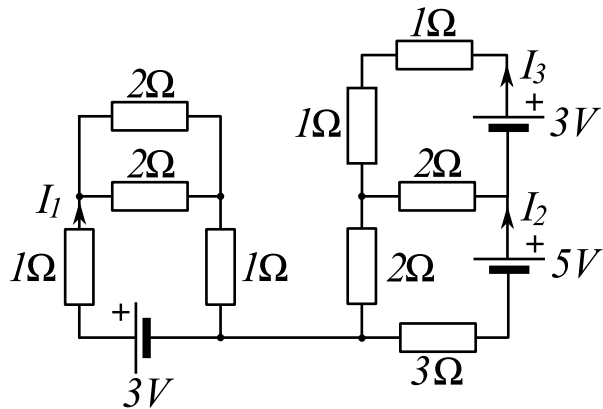
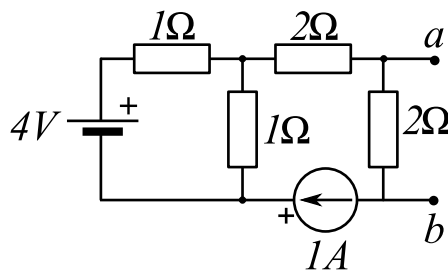


Figura del ejercicio 17

17. A partir del circuito de la figura 17 calcular todas las corrientes marcadas.  
 Respuesta:  $I_1 = 1\text{A}$ ,  $I_2 = 1,08\text{A}$ ,  $I_3 = 1,29\text{A}$ .

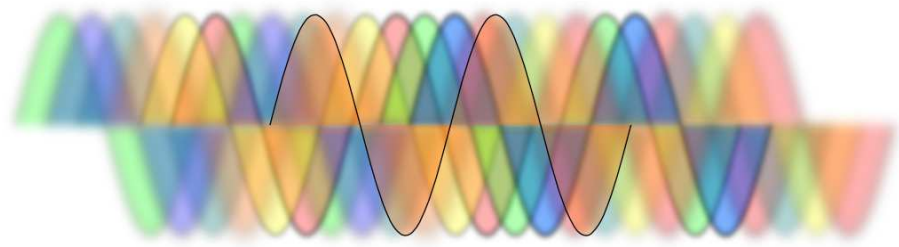


## Figura del ejercicio 18

18. A partir del circuito de la figura 18, hallar el equivalente de Thévenin entre los puntos  $a$  y  $b$ .  
Respuesta:  $R_{th} = 2\Omega$ ,  $V_{th} = 2V$
19. Un condensador de  $6\ \mu\text{F}$  esta cargado inicialmente a  $100\ \text{V}$ . A continuación se unen sus armaduras mediante una resistencia de  $500\ \Omega$ . Calcular:
- ¿Cuál es la carga inicial del condensador?
  - ¿Cuál es la corriente inicial después de conectar el condensador a la resistencia?
  - ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito?
  - ¿Cuál es la carga del condensador después de  $6\ \text{ms}$ ?
- Respuesta: a)  $6 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$ ; b)  $0.2\ \text{A}$ ; c)  $3\ \text{ms}$ ; d)  $8,1 \cdot 10^{-5}\ \text{C}$
20. Un condensador de  $1\ \mu\text{F}$  se encuentra inicialmente descargado. Se carga a continuación durante  $10\ \text{ms}$  con una corriente constante de  $1\ \text{mA}$ . ¿Cuál es la tensión en el condensador después del proceso de carga?  
Respuesta:  $10\ \text{V}$
21. Considera un circuito RC en serie con una resistencia  $R = 10\ \Omega$  y un condensador  $C = 1\ \mu\text{F}$ . En el instante inicial se conecta a un generador de  $10\ \text{V}$ . Si inicialmente el condensador estaba cargado, ¿cuál es la intensidad al cabo de  $2\ \text{ms}$ ?
22. Consideramos una fuente de tensión con una resistencia interna  $r$ , conectamos esta fuente a una resistencia de valor  $R$ . Encontrar el valor de  $R$  óptimo para que la potencia disipada en la resistencia sea máxima.
23. Tenemos una fuente de corriente continua de  $1\ \text{mA}$  y queremos cargar un condensador de  $10\ \mu\text{F}$  para tener  $100\ \text{V}$  en sus bornes. ¿Cuanto tiempo tenemos que dejar conectado el condensador? Sabiendo que el voltaje máximo del condensador es de  $300\ \text{V}$ , al cabo de cuanto tiempo el condensador puede explotar? ¿Cuanta energía esta almacenada en el condensador?
24. Conectamos un condensador de  $1\ \mu\text{F}$  a una fuente de tensión continua de  $10\ \text{V}$ . Una vez cargado desconectamos el generador y asociamos al condensador otro condensador descargado de  $10\ \mu\text{F}$ . ¿Cual es la tensión final del dispositivo?

## 2 Circuitos de corriente alterna

---



Dado la importancia de los fenómenos oscilatorios en electricidad y electrotecnia, se dedica un capítulo entero a la descripción los métodos de análisis de circuitos lineales con señales alternas.

En el dominio de la electrotecnia muchas de las tensiones que se generan son alternas, es decir que varían de forma sinusoidal con el tiempo. Las funciones trigonométricas son unas viejas conocidas en matemáticas y existe un formalismo y unas herramientas muy potentes que permiten manejarlas de forma sencilla.

El uso de corriente alterna ha tardado algún tiempo en imponerse como estándar en la industria. En los principios de la era industrial, en Estados Unidos, la compañía eléctrica Edison (fundada por el famoso inventor del mismo nombre) apostó por la corriente continua para la distribución comercial de energía. Sin embargo, el transporte de electricidad con este método se reveló ineficiente. La corriente alterna ofrecía un mejor rendimiento para el transporte debido a la existencia de transformadores de tensión. El desarrollo posterior de las máquinas asíncronas y síncronas ha establecido de una vez por todas el uso de la corriente alterna en las industrias. Sin embargo muchos aparatos eléctricos requieren una corriente continua, especialmente los componentes electrónicos de baja tensión. Por este motivo, existen numerosos convertidores de corriente alterna a continua y en gran parte la electrónica de potencia está dedicada a transformar la energía de una forma a la otra.

En este capítulo se introducen las herramientas que permiten el estudio de los circuitos de corriente alterna así como los modelos de los elementos de circuito usuales en corriente alterna. Se pospone el estudio de la generación de esta señales y su uso en capítulos posteriores (capítulos 4, 5 y 6).

## 2.1 Características de las señales alternas

La corriente alterna aparece en la electrotecnia con el desarrollo de los generadores rotativos gracias a los trabajos de Nikola Tesla en el siglo XIX. Estos generadores, al girar a una velocidad constante producen una fuerza electromotriz que varía en el tiempo como la señal sinusoidal periódica representada en la figura 2.1 (a). Los mecanismos físicos que permiten su generación se estudiarán en el capítulo 4. Esta onda sinusoidal es también la manifestación de una multitud de otros fenómenos oscilatorios en física, química, biología, ingeniería etc. Debido a su importancia, existe una gran variedad de herramientas matemáticas que nos permite tratar teóricamente estas oscilaciones armónicas. Se detallan a continuación las características principales de las funciones sinusoidales.

Las señales alternas tienen distintos parámetros importantes. Primero es una función periódica con un cierto periodo  $T_0$  en segundos que representa el tiempo para el cual se vuelve a repetir la forma de onda (ver 2.1 (a)). La frecuencia es el número de veces que se repite el fenómeno en un segundo, y corresponde también al inverso del periodo:

$$f_0 = \frac{1}{T_0},$$

y tiene como unidad el hertzio [Hz]. La representación de esta onda se encuentra en las figuras 2.1 (a) y (b), tiene la forma característica de una ola.

Una expresión matemática podría ser:

$$V(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + V_0. \quad (2.1)$$

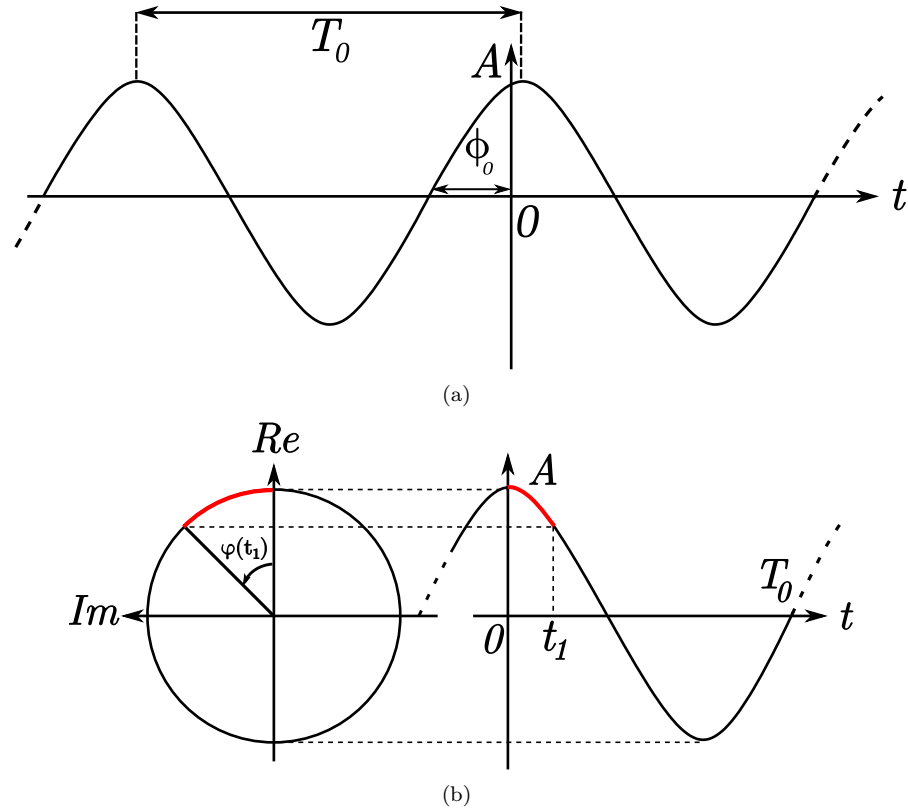
Es la función trigonométrica coseno.  $\phi_0$  se llama **la fase inicial** de la onda. Es la posición relativa de la onda en el tiempo  $t = 0$ . El parámetro  $A$  es **la amplitud**, es decir **el valor máximo** o de pico que puede alcanzar la función  $V$  cuando no existe componente continua  $V_0$  en la señal (es decir  $V_0 = 0V$ )<sup>1</sup>. El término dependiendo del tiempo en el coseno de la ecuación (2.1) se define como la fase  $\varphi$ :

$$\varphi(t) = 2\pi f_0 t + \phi_0.$$

Podemos comprobar fácilmente que la función  $V$  es periódica de periodo  $T_0$ . Nótese que  $\varphi(0) = \phi_0$  es la fase inicial.

La fase puede representarse también en un círculo trigonométrico de radio  $A$ , figura 2.1 (b). Marcamos un punto  $M$  sobre este círculo tal que la fase  $\varphi(t_1)$  represente el ángulo que forma un vector  $(\overrightarrow{OM})$  con el eje  $x$  del círculo. La proyección de este vector sobre el eje  $x$  (el vertical en nuestro dibujo) proporciona el valor numérico de la función  $V$  en el instante, en concreto vale  $A \cos(\varphi(t_1))$  para nuestro ejemplo. La velocidad de rotación de este vector  $(\overrightarrow{OM})$  se puede

<sup>1</sup> Para el resto del capítulo consideraremos  $V_0 = 0V$



**Figura 2.1** Representación de una función sinusoidal con sus distintos parámetros: periodo  $T_0$ , amplitud  $A$ , fase inicial  $\phi_0$  (en la figura la fase inicial corresponde en realidad a un intervalo de tiempo igual a  $\phi_0/(2\pi f_0)$ ). En la figura (b) presentamos un ejemplo de interpretación de la onda sinusoidal en el círculo trigonométrico. El círculo trigonométrico se gira  $90^\circ$  para facilitar la lectura. En el dominio temporal, la posición en el instante  $t_1$  corresponde a un ángulo  $\varphi(t_1)$  en el círculo trigonométrico. Esta fase es:  $\varphi(t_1) = \omega_0 t_1 + \phi_0$

hallar con la derivada temporal de la fase:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0.$$

con  $\omega_0$  la **frecuencia angular** o **velocidad angular** de la onda en radianes por segundo,  $[\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}]$ . Podemos concluir que la velocidad angular es constante para una onda sinusoidal.

El mismo círculo de la figura 2.1 (b) se puede representar en el plano de los números complejos. El eje  $x$  correspondería al eje de los números reales y el eje  $y$  al de los números imaginarios. El vector  $(\vec{OM})$  es equivalente a un número complejo de coordenadas  $(A \cos(\varphi(t)), A \sin(\varphi(t)))$ . Este número complejo se puede

expresar también como:

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) + j \cdot A \sin(\omega_0 t + \phi_0) = A e^{j(\omega_0 t + \phi_0)}$$

con  $j$  el número imaginario puro tal que  $j^2 = -1^2$ . Vemos ahora como la función  $V$  se puede escribir como la parte real de un número complejo:

$$V(t) = \Re\{A e^{j(\omega_0 t + \phi_0)}\} = \Re\{A(\cos(\omega_0 t + \phi_0) + j \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_0))\}.$$

El símbolo  $\Re$  significa “parte real de”. Un breve recordatorio de números complejos con las nociones básicas de cálculo se pueden encontrar en el anexo B. Entre otras ventajas, esta notación permite un trato simplificado del cálculo infinitesimal. Por ejemplo cuando se derivan y se integran estas señales tenemos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \Re\{A e^{j(\omega_0 t + \phi_0)}\} = \Re\{A j \omega_0 e^{j(\omega_0 t + \phi_0)}\},$$

significa que una derivada con respecto al tiempo equivale a multiplicar la señal compleja por  $j\omega_0$ . De la misma manera la integral en función del tiempo una señal sinusoidal se efectúa como:

$$\int_{-\infty}^t V(x) dx = \int_{-\infty}^t \Re\{A e^{j(\omega_0 x + \phi_0)}\} dx = \Re\left\{\frac{1}{j\omega_0} A e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} + K\right\},$$

lo que equivale a dividir por  $j\omega_0$  la señal compleja. En el tratamiento de circuitos en alterna, estas operaciones en el dominio complejo simplifican mucho la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta herramienta es la base del análisis de circuitos en régimen sinusoidal permanente, noción que se clarificará más adelante.

Otro parámetro importante relativo a la amplitud de una onda periódica es la amplitud cuadrática media, también llamado **valor eficaz**. Se define la amplitud cuadrática media de una función periódica como:

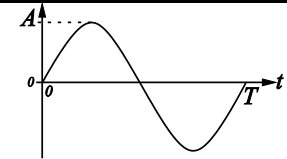
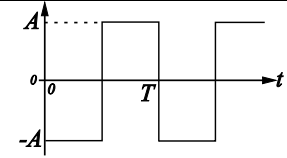
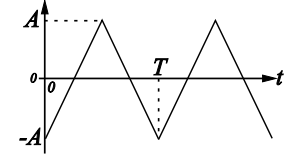
$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (V(t))^2 dt},$$

es el valor medio sobre un periodo de la onda llevada al cuadrado. Tiene importancia en electricidad dado que es una cantidad muy sencilla de medir experimentalmente, los aparatos de medidas proporcionan este valor. Para la onda sinusoidal de la ecuación (2.1) se obtiene:

$$V_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Para otras formas de ondas hay que efectuar el cálculo analítico. En la tabla 2.1 se han calculado unos ejemplos de valores eficaces para funciones periódicas más complicadas.

<sup>2</sup> Tradicionalmente, en electricidad se usa el símbolo  $j$  en vez de  $i$  para el número imaginario puro.

Señal sinusoidal		$V_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}$
Señal cuadrada		$V_{ef} = A$
Señal triangular		$V_{ef} = \frac{A}{\sqrt{3}}$

Cuadro 2.1 Algunos ejemplos de valores eficaces de funciones periódicas comunes.

**Ejercicio 2.1**

Calcular el valor eficaz de la siguiente onda periódica:  $V(t) = A \cos(\omega t)$ .

**Solución del ejercicio 2.1**

Para calcular el valor eficaz se aplica directamente la fórmula de la corriente alterna:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (V(t))^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(\omega t) dt}.$$

se desarrolla el coseno al cuadrado y se consigue:

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}.$$

Gracias al desarrollo anterior se puede terminar el cálculo:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \right) dt} = \sqrt{\frac{A^2}{T} \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t)]_0^T \right)} = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

**2.2 Representación de cantidades sinusoidales como fasores**

Se ha visto en el epígrafe anterior que una señal periódica podía representarse como la parte real de una señal compleja. Esta notación tiene ventajas cuando todas las señales de un circuito oscilan con la misma frecuencia en régimen permanente, es decir cuando el régimen de transitorio haya transcurrido. Se puede considerar el que el régimen de transitorio termina cuando la amplitud



de las señales periódicas deja de fluctuar. La hipótesis de base del análisis es otra vez la linealidad de los circuitos. Se puede demostrar que en los circuitos lineales, la frecuencia de la corriente y la tensión es la misma para cada elemento del circuito<sup>3</sup>.

En estas condiciones se puede ignorar la información de la frecuencia. Lo que entonces interesa de las cantidades sinusoidales de cada elemento son la amplitud y la fase inicial. Una señal sinusoidal quedará totalmente definida con tres parámetros: su amplitud, su fase y su frecuencia angular. Estas tres cantidades aparecen claramente en la siguiente ecuación<sup>4</sup>:

$$V(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Usando el formalismo de los números complejos se obtiene:

$$V(t) = \Re\{Ae^{j(\omega_0 t + \phi_0)}\} = \Re\{(Ae^{j\phi_0}) e^{j\omega_0 t}\}.$$

Con esta última notación, aparece un factor complejo correspondiente a la amplitud  $A$  y a la fase  $\phi_0$ . La definición del **fasor** viene dada por el número complejo  $\tilde{V}$ :

$$\tilde{V} = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{j\phi_0},$$

se guardan únicamente las informaciones de **amplitud eficaz** y de **fase de la señal**. El número complejo  $\tilde{V}$  tiene un módulo  $A/\sqrt{2}$  y un ángulo  $\phi_0$ . El manejo de los fasores simplifica en muchos casos el cálculo de operaciones trigonométricas complicadas. Además, esta técnica permite transformar ecuaciones diferenciales lineales en expresiones algebraicas más sencillas de resolver. Por desgracia esta notación es únicamente válida cuando se tratan de señales alternas, es decir que solo se puede definir un fasor en el dominio armónico.

Otra notación para los fasores muy usada en electrotecnia es la siguiente:

$$\tilde{V} = \frac{A}{\sqrt{2}} \angle \phi_0,$$

se escribe así el módulo  $\frac{A}{\sqrt{2}}$  y el ángulo  $\phi_0$  del fasor de forma más compacta.

En la mayoría de los libros de electrotecnia, la amplitud del fasor se define con el valor eficaz. Este convenio permite simplificar algunos cálculos de potencia. Sin embargo dicho convenio no se acuerda con la definición de módulo y fase de un número complejo. La definición natural de módulo del fasor correspondería a la amplitud máxima de la onda  $A$ , pero con esta definición los cálculos de potencias se complican. En consecuencia se opta en la mayoría de los casos en usar el fasor “eficaz” con la amplitud eficaz de la onda. Usaremos este convenio de aquí en adelante.

<sup>3</sup> Se demostrará que los elementos de circuitos lineales no afectan la frecuencia de las señales, solo cambian la amplitud y la fase. La cosa se complica cuando se tratan elementos no lineales.

<sup>4</sup> la elección de cos o sin es totalmente arbitraria, únicamente cambia la fase inicial  $\phi_0$ .

Una ventaja inmediata del uso de los fasores es la posibilidad de representarlos en el plano complejo como vectores para comparar diferentes cantidades sinusoidales. El dibujo así obtenido se llama un **diagrama de fasores**. Otra propiedad importante de los fasores consiste en la posibilidad sumar o restar gráficamente y analíticamente señales alternas como ilustrado en el ejemplo siguiente.

**Ejercicio 2.2** A partir de las funciones siguientes obtener la expresión de la suma de  $V_1 + V_2$ :

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \sqrt{2}A\cos(\omega_0 t) \\ V_2(t) &= \sqrt{2}B\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

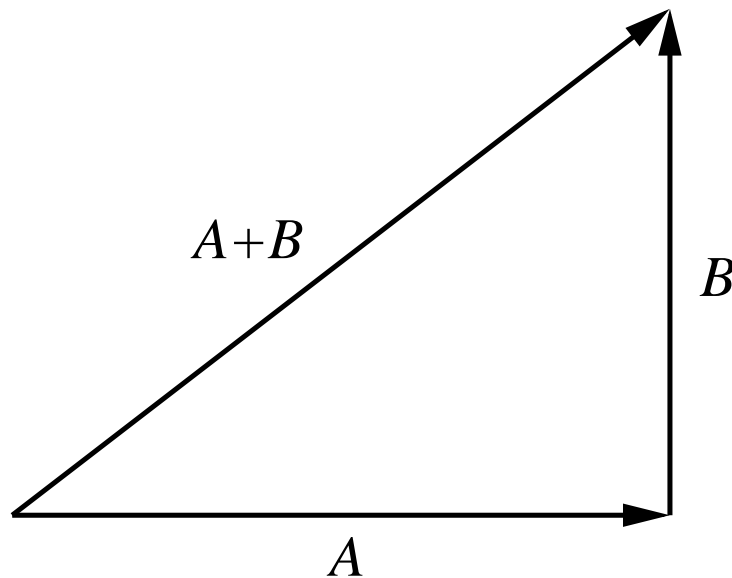
**Solución del ejercicio 2.2** Para calcular la suma optamos por pasar las funciones al dominio de los fasores:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= A \\ \tilde{V}_2 &= Be^{j\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Se calcula la suma:

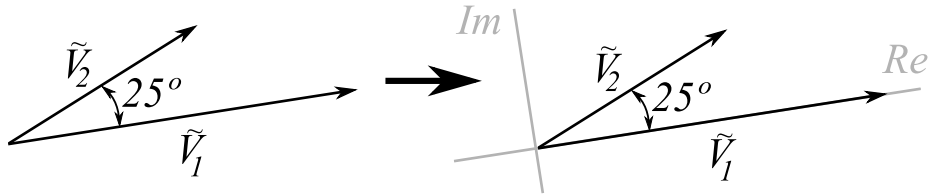
$$\tilde{V}_3 = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 = A + Be^{j\frac{\pi}{2}} = A\angle 0 + B\angle \frac{\pi}{2} = A + jB.$$

Se visualiza fácilmente en la figura siguiente el fasor resultante de la suma de los fasores  $\tilde{V}_1$  y  $\tilde{V}_2$  dando valores arbitrarios a  $A$  y  $B$ :



Se puede escribir el número complejo  $\tilde{V}_3$  con su módulo y su fase. Para más ayuda sobre estas transformaciones, el lector se puede referir al Apéndice B:

$$\tilde{V}_3 = A + jB = \sqrt{A^2 + B^2} \angle \tan^{-1} B/A$$



**Figura 2.2** Ejemplo de dos fasores. Cada uno puede servir de referencia para obtener la expresión del otro. El efecto de elegir  $\tilde{V}_1$  como referencia de fase implica posicionar el eje real de plano complejo paralelo a  $\tilde{V}_1$ .

Se recuerda otra vez que no se pueden sumar fasores de señales con frecuencias distintas.

### Uso de los fasores

Con los fasores el cálculo diferencial resulta simple. Se pueden definir fácilmente las operaciones de derivada y integración de un fasor considerando la forma compleja de una señal  $V(t) = \Re\{\sqrt{2}Ae^{j\phi_0}e^{j\omega_0 t}\}$ . El fasor correspondiente es  $\tilde{V} = Ae^{j\phi_0}$ . Podemos definir dos fasores  $\tilde{V}'$  y  $\tilde{V}''$  correspondientes a la derivada y a la primitiva de  $V(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\rightarrow \tilde{V}' = Aj\omega_0 e^{j\phi_0} = A\omega_0 \angle \phi_0 + \pi/2 \\ \int V dt &\rightarrow \tilde{V}'' = A\frac{1}{j\omega_0} e^{j\phi_0} = \frac{A}{\omega_0} \angle \phi_0 - \pi/2 \end{aligned}$$

En el apartado 2.1 se ha visto como se podían integrar y derivar funciones sinusoidales en el dominio complejo. Con estas reglas sencillas tenemos el fasor  $\tilde{V}'$  resultante de la derivada como  $\tilde{V}$  multiplicado por  $j\omega_0$ , o de forma equivalente multiplicamos la amplitud por  $\omega_0$  y giramos el fasor de un ángulo  $\pi/2$ . El fasor de la integral  $\tilde{V}''$  equivale al fasor  $\tilde{V}$  dividido por  $j\omega_0$ .

Con estas transformaciones se resuelven ecuaciones diferenciales de forma sencilla con una ecuación algebraica, siempre que las señales sean sinusoidales.

Cuando se usa el formalismo de los fasores, una cantidad importante es el fasor de referencia también llamado la **referencia de fase**. En los circuitos de corriente alterna, las señales tendrán la misma frecuencia pero aparecerán desfases relativos entre ellas, de allí la necesidad de una referencia única para poder cuantificar estos desfases relativos. Para resolver este problema se elige una de las tensiones o corrientes del circuito para servir de referencia a todos los otros fasores del sistema. Se elige el más cómodo para tratar el circuito o bien uno de particular interés. Es esencial definir este fasor al principio para poder dar una referencia a las demás fases sin ambigüedad. Las propiedades del circuitos no dependerán de la fase absoluta elegida sino de las diferencias relativas entre fasores de un mismo sistema.

En la figura 2.2 aparece el ejemplo de dos fasores separados de  $25^\circ$  entre sí. En el dibujo no aparece ningún sistema de ejes, por lo que podemos fijar esta referencia arbitrariamente. Por ejemplo, tomar  $\tilde{V}_1$  como referencia equivale a posicionar el eje real de plano complejo paralelo al fador  $\tilde{V}_1$ . En este marco de referencia, se pueden escribir los fasores como:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= V_1 \angle 0^\circ \\ \tilde{V}_2 &= V_2 \angle 25^\circ.\end{aligned}$$

Si al contrario se elige  $\tilde{V}_2$  como referencia se transforman las expresiones en:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= V_1 \angle -25^\circ \\ \tilde{V}_2 &= V_2 \angle 0^\circ.\end{aligned}$$

Con este ejemplo podemos ver que los fasores pueden escribirse de forma general como:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= V_1 \angle 0^\circ + \varphi \\ \tilde{V}_2 &= V_2 \angle 25^\circ + \varphi.\end{aligned}$$

con  $\varphi$  arbitraria. Como se puede observar, un cambio de referencia implica cambiar las fases absolutas de los fasores. Sin embargo se mantiene el desfase entre fasores idénticos ambos casos.

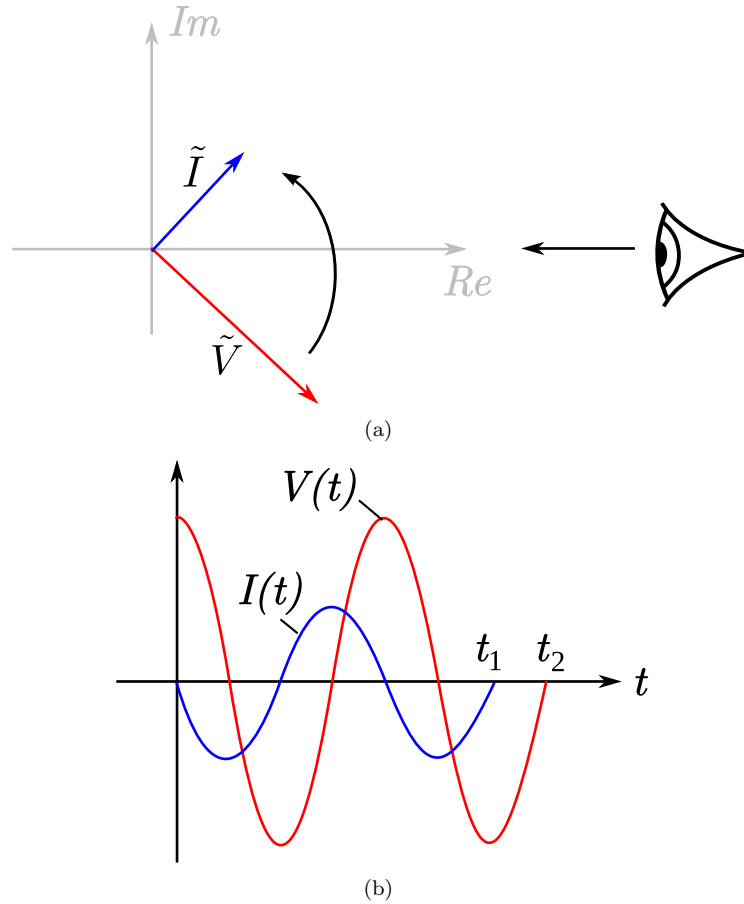
La elección de la referencia en un circuito es arbitraria pero debe de ser única. Una vez elegido la referencia de fase, se debe mantener para el resto del estudio del circuito.

### 2.2.1 Orden de los fasores y representación temporal

Cuando se estudian ondas de tensión o de intensidad conviene en muchos casos describir la diferencia de fase como en adelanto o en retraso dependiendo de la posición relativa de las ondas. Se describe aquí brevemente como determinar si una tensión está en *atraso* o en *adelanto* frente a otra tensión o corriente. Empezamos dibujando únicamente los dos fasores del sistema que deseamos comparar. No tienen porque tener la misma unidad, podemos comparar tensiones con corrientes. Se toma por ejemplo estos dos fasores:

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= A \\ \tilde{I} &= jB\tilde{V}\end{aligned}$$

En el dominio temporal las formas de onda correspondientes pueden verse en la gráfica 2.3 (b). Para determinar el orden de sucesión temporal, uno se debe fijar en el eje real del plano complejo donde colocamos nuestro ojo. Si nos imaginamos los fasores girando a una velocidad angular constante en el sentido directo, los vectores al girar pasarían delante de nuestro ojo. Si la corriente (en azul) pasa primero, entonces está en **adelanto** sobre la tensión (en rojo). Se puede ver lo mismo con la representación temporal de las formas de onda. La corriente cruza el eje temporal de la figura 2.3 (b) “subiendo” en el tiempo  $t_1$  y la tensión en el tiempo  $t_2$ . Si  $t_1$  es inferior a  $t_2$  entonces la corriente adelanta la tensión. También



**Figura 2.3** Determinación del sentido de dos cantidades de sinusoidales. Para determinar el sentido de las tensiones en el tiempo, nos fijamos por ejemplo en el eje real del plano complejo y se mira simbólicamente en esta dirección. Los vectores al girar pasan delante de nuestro ojo. Si la corriente en azul pasa primero, entonces estará en **adelanto** sobre la tensión. Se puede verlo de otra forma en la representación temporal de las formas de onda. La corriente cruza el eje temporal “subiendo” en el tiempo  $t_1$  y la tensión en el tiempo  $t_2$ . Si  $t_1$  es inferior a  $t_2$  entonces la corriente adelanta la tensión.

se puede decir que la tensión está en **atraso** comparado con la corriente. Las dos afirmaciones siguientes son entonces ciertas y equivalentes:

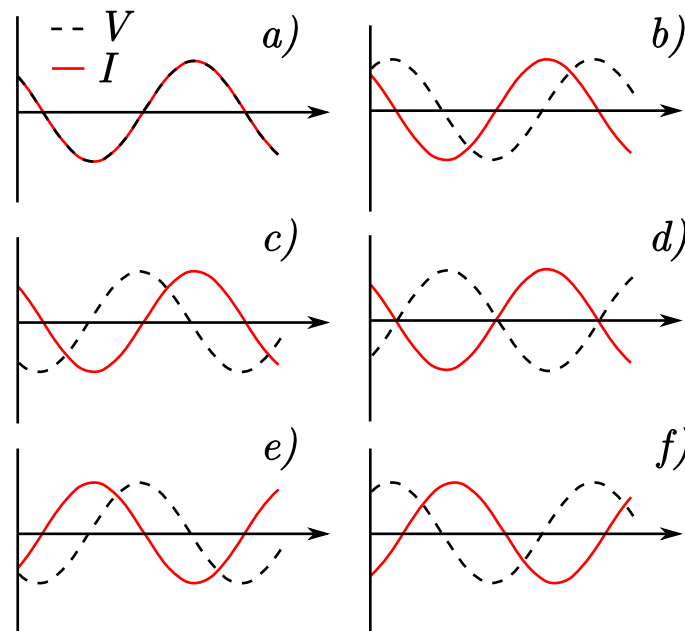
- La corriente  $\tilde{I}$  está en adelanto con respecto a la tensión  $\tilde{V}$ .
- La tensión  $\tilde{V}$  está en atraso con respecto a la corriente  $\tilde{I}$ .

En la figura 2.3 (a) puede haber una ambigüedad si cruza primero el fasor  $\tilde{V}$  y luego el fasor  $\tilde{I}$  al dar la vuelta. Se podría considerar que el desfase entre ambos es de  $270^\circ$ , en tal caso el fasor de  $V$  adelantaría la corriente  $\tilde{I}$ . Para simplificar el estudio, consideramos únicamente los desfases inferiores a  $180^\circ$  entre dos fasores.

Es decir que si el fasor recorre más de media vuelta sin que el otro fasor haya pasado por el semi-eje real positivo, tenemos que volver a realizar el experimento tomando el otro fasor como referencia.

### Ejercicio 2.3

Determinar a partir de las figuras siguientes el orden de los fasores o tensiones correspondientes.

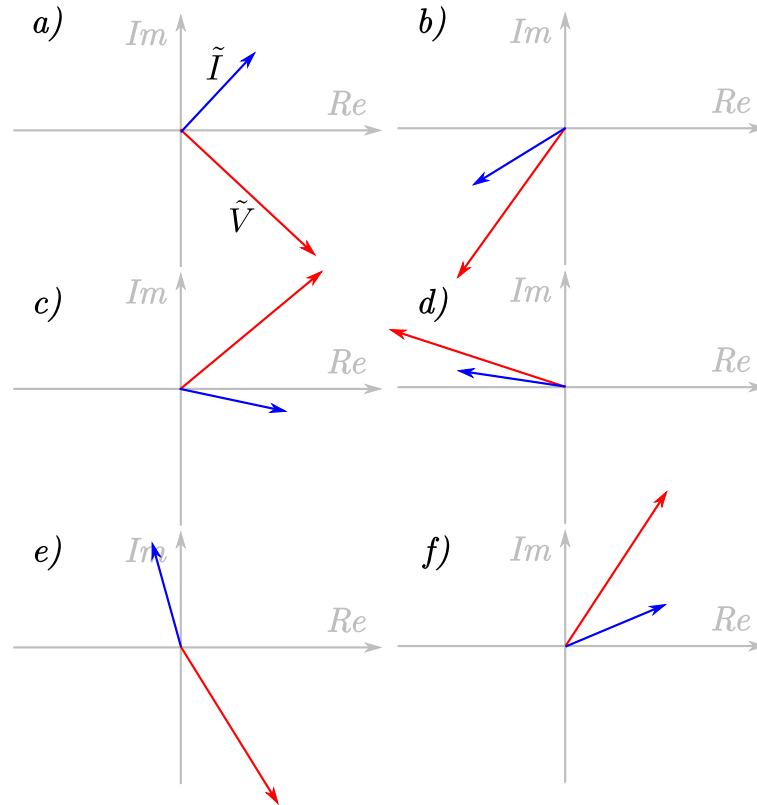


### Solución del ejercicio 2.3

El orden de los desfases para los casos considerados son: a)  $V$  e  $I$  en fase. b)  $V$  detrás de  $I$ . c)  $V$  adelanta  $I$ . d)  $V$  e  $I$  en antifase (desfase de  $180^\circ$ ) e)  $V$  detrás de  $I$ . f)  $V$  adelanta  $I$

### Ejercicio 2.4

Determinar a partir de las figuras siguientes el orden de los fasores o tensiones correspondientes.



#### Solución del ejercicio 2.4

El orden de los desfases para los casos considerados son: a) V detrás de I. b) V adelanta I. c) V adelanta I. d) V detrás de I. e) V detrás de I. f) V adelanta I

### 2.3 Resistencias, condensadores e inductancias en corriente alterna

Se han visto las características físicas de los componentes pero sólo se han estudiado su comportamiento en régimen continuo, es decir cuando las tensiones y las corrientes son constantes. Es esencial entender como se comportan estos elementos lineales en presencia de una corriente alterna. Este comportamiento va a ser distinto según el elemento considerado. Sin embargo gracias a la representación de las señales con números complejos existen modelos sencillos en forma de impedancia compleja. La **impedancia** mide la oposición de un elemento a la corriente alterna. Esta oposición (esta “resistencia”) admite una representación en forma de números complejos, con su fase y su módulo asociado.

Se estudiarán los circuitos con la ayuda de fasores para determinar las corrientes y tensiones en régimen estacionario. El interés del formalismo con fasores consiste en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales en forma ecuaciones

algebraica. En esta sección se expone el tratamiento de los elementos lineales cuando las tensiones y corrientes se usan en forma fasorial.

### 2.3.1 Resistencias

Una propiedad importante de las resistencias ideales es la validez de la ley de Ohm en cualquier circunstancia. Por lo tanto, la relación entre tensión y corriente alterna para una resistencia es idéntica a la relación en continua, es decir que la ley de Ohm se sigue cumpliendo. La relación tensión/corriente es lineal, incluso cuando hay variaciones temporales:

$$V(t) = RI(t) \quad (2.2)$$

Si la tensión entre los bornes de la resistencia es sinusoidal se deduce inmediatamente la corriente. La forma general de la tensión alterna es:

$$V(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega_0 t + \phi_0),$$

a la cual se asocia el siguiente fasor:

$$\tilde{V} = A \angle \phi_0.$$

Despejando la ecuación (2.2) se puede hallar la corriente:

$$I(t) = \frac{A}{R\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \phi_0),$$

por lo tanto le corresponde el fasor:

$$\tilde{I} = \frac{A}{R} \angle \phi_0.$$

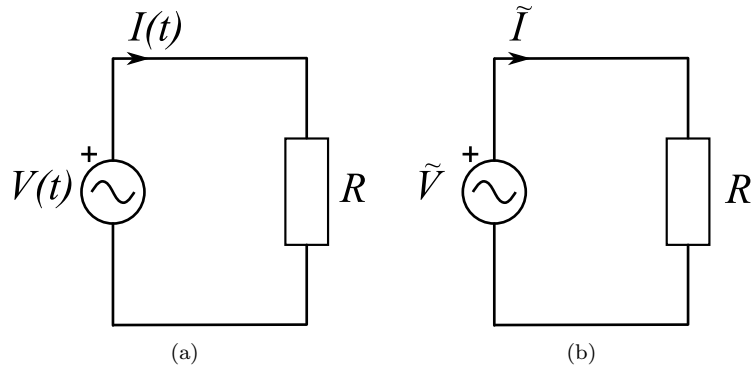
Se deduce la relación entre tensión y corriente en forma fasorial:

$$\tilde{V} = R\tilde{I}$$

Este elemento no produce ningún desfase adicional entre la tensión y la corriente.

En la figura 2.4 (a) aparece primero un simple circuito compuesto de un generador de tensión alterna y una resistencia (volveremos más adelante sobre este generador). En el esquema de la izquierda, el circuito aparece con tensiones y corrientes dependientes del tiempo. Este circuito se puede estudiar perfectamente con las leyes de Kirchhoff y obtendremos una solución para las corrientes y tensiones. En la figura 2.4 (b), el mismo circuito aparece pero con una diferencia esencial con el circuito (a), las cantidades que circulan son fasores. Se puede transformar el circuito de una forma a otra sabiendo como se comportan los elementos en régimen sinusoidal. En este segundo circuito se puede razonar directamente con los fasores y obtener las relaciones entre fasores en el dominio complejo. No es necesaria la resolución del circuito con las ecuaciones en el dominio temporal dado que una vez determinadas las soluciones del circuito en el dominio complejo, siempre se puede volver a las ecuaciones temporales para el





**Figura 2.4** Representación de un circuito resistivo alimentado en corriente alterna representado con la corriente y la tensión en su forma temporal (a) y fasorial (b).

régimen permanente del circuito. El interés de la resolución en el dominio complejo se hará evidente cuando se traten circuitos más complejo que necesitan el uso de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales en el dominio temporal para su resolución.

### 2.3.2 Condensadores

En el primer capítulo se ha descrito el comportamiento del condensador en régimen continuo, se han deducido las relaciones fundamentales como por ejemplo la relación entre la carga y la diferencia de potencial en sus bornes. Falta hallar la relación entre tensión y corriente cuando estas varían en el tiempo. Esta relación para un condensador puede calcularse fácilmente a partir de la relación entre la carga y la tensión aplicada en el bornes del condensador:

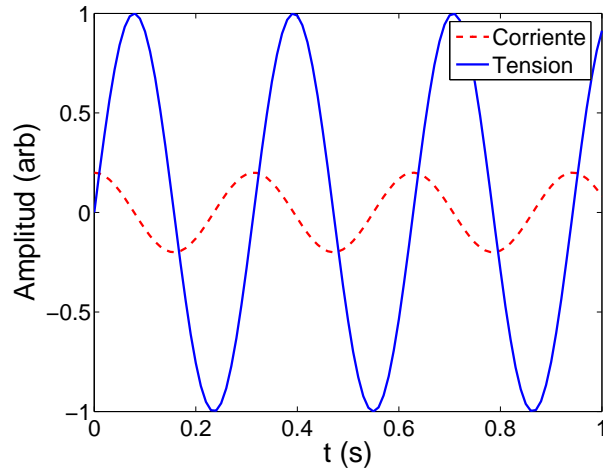
$$Q = CV$$

Para deducir el comportamiento dinámico de la carga, se estudian las variaciones temporales de esta. Cuando el condensador se alimenta en corriente alterna, la carga también va a fluctuar en el tiempo, es decir  $Q(t) = C V(t)$  (la capacidad siendo una constante). Para hallar la variación temporal de la carga se han de derivar ambos términos, de allí la expresión:

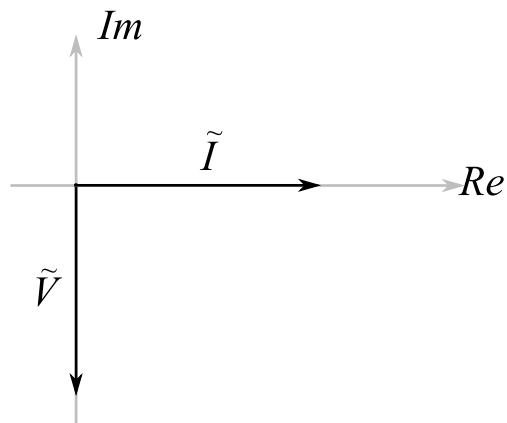
$$\frac{dQ}{dt} = I(t) = C \frac{dV}{dt}. \quad (2.3)$$

Así, una variación de carga en el condensador provoca una la circulación de corriente eléctrica en el circuito<sup>5</sup>. La fórmula (2.3) traduce el hecho de que la corriente que circula por un condensador es la derivada de la tensión entre sus

<sup>5</sup> Esta corriente eléctrica circula por el circuito pero no .atravesarealmente el condensador al estar los electrones acumulados en las placas. Sin embargo para más comodidad, podemos imaginar que una corriente fluye por el dispositivo.



(a)



(b)

**Figura 2.5** Representación de la corriente y de la tensión en un condensador alimentado en corriente alterna. (a) En esta primera figura se observa el desfase entre la corriente (línea discontinua) y la tensión en el condensador (línea continua). La tensión viene después de la corriente en el tiempo. El desfase entre ambos es de  $\frac{\pi}{2}$ . (b) En esta figura se muestra el diagrama de fasores equivalente. Siendo la referencia de fase la corriente  $I$ , el fasor de la tensión estará orientado hacia abajo debido a la relación:  $\tilde{V} = -(j/\omega_0 C)\tilde{I}$ .

polos. Como consecuencia, si la tensión es sinusoidal, la corriente también lo será al ser la derivada de una función sinusoidal también es sinusoidal.

También se puede interpretar el condensador como un integrador de corriente. Integrando y despejando la expresión anterior se obtiene la tensión:

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(x) dx.$$

La tensión  $V$  depende de la historia de  $I$ .

Cuando la corriente circulando por el condensador es alterna y de pulsación  $\omega_0$ , se pueden representar la tensión y la intensidad por sus respectivos fasores. Por ejemplo, para una tensión sinusoidal de amplitud  $\sqrt{2}V_0$ , de fase inicial  $\phi_0$  y frecuencia  $\omega_0$  la expresión de esta tensión es:

$$V(t) = \sqrt{2}V_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0),$$

le corresponde el fador complejo siguiente:

$$\tilde{V} = V_0 e^{j\phi_0} = V_0 \angle \phi_0.$$

usando la expresión de esta tensión en la ecuación (2.3), se deduce la expresión de la corriente:

$$I(t) = C \frac{dV}{dt} = C \frac{d}{dt}(\sqrt{2}V_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)) = C\sqrt{2}V_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}).$$

Se simplifican los cálculos usando fasores:

$$\tilde{I} = C\omega_0 V_0 \angle(\phi_0 + \frac{\pi}{2}) = C\omega_0 e^{j\frac{\pi}{2}} V_0 e^{j\phi_0} = C\omega_0 j V_0 \angle \phi_0 = jC\omega_0 \tilde{V}.$$

Recordamos que derivar una cantidad en el dominio fasorial corresponde a multiplicar por  $j\omega$ . Se despeja la relación directa entre tensión y corriente:

$$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega_0 C} \tilde{I}. \quad (2.4)$$

Se obtiene así una relación entre tensión y corriente para un condensador similar a la ley de Ohm para las resistencias. En base a la fórmula anterior vemos que el condensador provoca un desfase de  $\pi/2$  radianes entre la tensión y la corriente. Este desfase se puede observar en la representación temporal de las ondas en la figura 2.5(a). La representación en forma de fasores de la tensión y de la corriente también ayuda a visualizar la relación entre las cantidades. El orden de los fasores es el siguiente: primero viene la corriente y seguido viene la tensión. Se dice que la tensión va detrás de la corriente o que la corriente adelanta la tensión. Este desfase caracteriza los circuitos con condensadores. Al tener la corriente adelantada con respecto a la tensión, podemos estar seguro que existen condensadores en el circuito.

El número complejo que aparece en la ecuación (2.4) relaciona el fador de la tensión y de la corriente de un condensador. Este número complejo refleja la oposición del condensador al paso de la corriente, es la **impedancia compleja**. La impedancia de un condensador en régimen armónico se expresa como:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega_0 C}.$$

Se define la **reactancia** como la parte imaginaria de la impedancia:

$$X_C = \frac{1}{\omega_0 C}$$

La impedancia es entonces:

$$Z_C = -jX_C$$

Insistimos en que esta impedancia es únicamente válida en régimen armónico permanente. En otros casos, siempre hay que resolver las ecuaciones diferenciales o bien usar otros formalismos como por ejemplo las transformadas de Laplace.

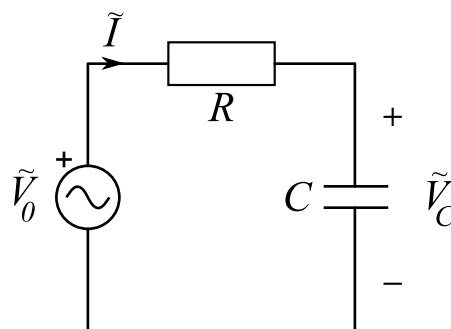
La impedancia de un condensador depende inversamente de la frecuencia de oscilación del generador. Los dos casos límites siguientes que pueden llegar a observarse al analizar un circuito:

- Para  $\omega \rightarrow 0$  la impedancia es:  $Z_C \sim \infty$ . El condensador equivale a un circuito abierto en corriente continua.
- Para  $\omega \rightarrow \infty$  la impedancia es:  $Z_C \rightarrow 0$ . Para frecuencias muy altas, el condensador es equivalente a un cable ideal.

El primer caso corresponde a la corriente continua y viene a decir que no pueden saltar los electrones de una placa a otra. El segundo caso, en altas frecuencias, el condensador equivale a un circuito cerrado. Estos dos casos permitirán hacer un análisis rápido de un circuito en bajas o altas frecuencias. Es una práctica muy común en electrónica despreciar condensadores de capacidad elevada cuando las frecuencias de las señales consideradas son elevadas. El efecto de estos condensadores sobre el resto del circuito es pequeño.

Más adelante trataremos el término de potencia de un condensador. Podemos comentar de momento que la potencia media sobre un periodo de onda de un condensador es nula. Significa que el condensador no consume energía en régimen de alterna sino que almacena y restituye la energía en cada periodo. Esta energía se almacena en forma de campo eléctrico entre las placas.

### Ejercicio 2.5



El circuito de la figura anterior se alimenta por una fuente de corriente alterna de frecuencia  $f = 150\text{Hz}$ . Expresar la corriente y la tensión  $V_C$  del condensador en forma de fasores. Datos del problema:  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ,

$$\tilde{V}_0 = 10\angle 0 \text{ V y } f = 150 \text{ Hz.}$$

### Solución del ejercicio 2.5

Antes de empezar, nótese el generador de alterna a la izquierda que produce una tensión con un fasor equivalente  $\tilde{V}_0$ . Este circuito ya está transformado al régimen fasorial por lo que todas las tensiones y corrientes se calcularán en este régimen.

Para resolver este problema primero se debe analizar la malla del circuito aplicando las leyes de Kirchhoff (siguen válidas en régimen armónico):

$$\tilde{V}_0 - R\tilde{I} - \tilde{V}_c = 0$$

usando la impedancia del condensador:

$$\tilde{V}_c = \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}$$

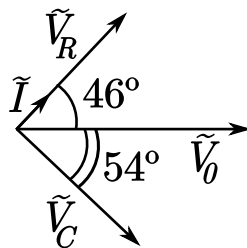
con  $\omega = 2\pi f$ . Se despeja la corriente a partir de las dos ecuaciones anteriores:

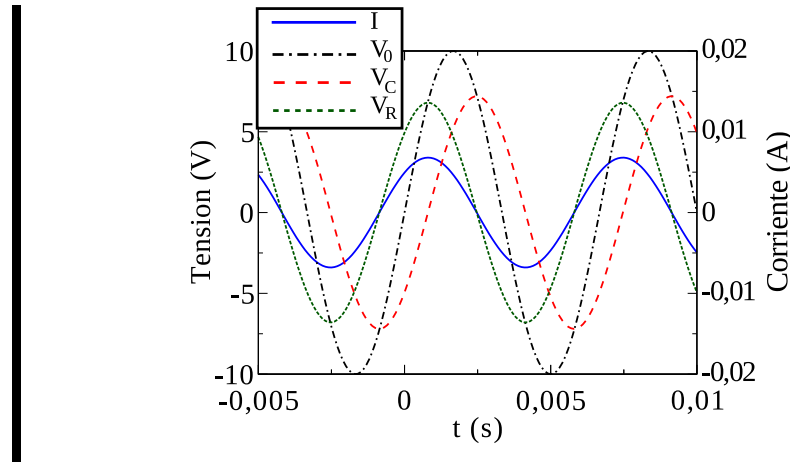
$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_0}{R - j/(\omega C)} = \frac{10}{1 \cdot 10^3 - j/(2\pi 150 \cdot 1 \cdot 10^{-6})} = 6,8 \cdot 10^{-3} \angle 46,6^\circ \text{ A}$$

Se puede entonces calcular la tensión  $\tilde{V}_c$ :

$$\tilde{V}_c = \frac{\tilde{I}}{j\omega C} = \frac{6,8 \cdot 10^{-3}}{9,42 \cdot 10^{-4}} \angle 46,6 - 90^\circ = 7,2 \angle -43,4^\circ \text{ V}$$

Se disponen de todos los elementos para dibujar el diagrama de fasores así como las series temporales de cada señal. Se elige como referencia de fase la tensión  $\tilde{V}_0$  del generador. Las figuras siguientes representan la series temporales y el diagrama de fasores.





### 2.3.3 Inductancias

Al igual que el condensador, se han estudiado las propiedades estáticas de las bobinas, es decir el comportamiento en corriente continua. Las bobinas se comportan de forma peculiar cuando se les alimentan con una tensión eléctrica alterna.

Las leyes del electromagnetismo relacionan la corriente y el flujo magnético de una bobina mediante el coeficiente de autoinductancia:

$$\Phi = LI$$

Al tener un régimen de alterna, se establece un flujo magnético  $\Phi(t)$  variable. El flujo variable creado auto-induce una fuerza electromotriz en la bobina que se opone a la causa que le ha dado lugar (según la ley de Lenz). Esta fuerza electromotriz se expresa mediante la ley de inducción de Faraday (ver el apéndice B para más información sobre la ley de Faraday):

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Suponiendo la corriente  $I$  este generada por un dispositivo externo podemos deducir la tensión  $V_L$  de la inductancia. En el caso de tener la fuente de tensión directamente conectada a la bobina, la tensión  $V_L$  viene impuesta por la fuente  $V_g$ . En tal caso  $V_L = V_g = d\Phi/dt$  el flujo viene determinado por  $V_g$  (y por tanto  $I$  también):

$$V_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Nótese que ahora el flujo solo depende de la tensión de alimentación  $V_g = V_L$  y no de la corriente como en el caso del régimen de corriente continua, se volverá a tratar este punto en el capítulo 4. Si la tensión es alterna y de pulsación  $\omega_0$ ,

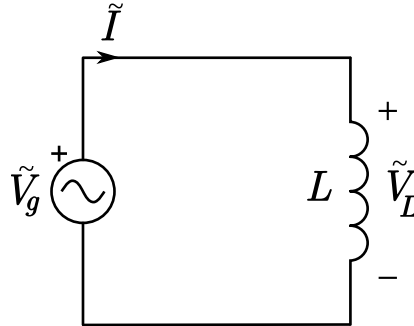


Figura 2.6 Inductancia conectada a una fuente de corriente alterna.

$V_0$  se escribe como:

$$V_g(t) = V_L(t) = V_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Para obtener la expresión de la corriente se necesita integrar esta última función de la tensión:

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_L(x) dx = \frac{-1}{\omega_0 L} V_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{-1}{\omega_0 L} V_0 \sin(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

La corriente también es sinusoidal y tiene un fasor asociado:

$$\tilde{I} = \frac{-1}{\omega_0 L} \frac{V_0}{\sqrt{2}} \angle \left( \phi_0 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{-1}{\omega_0 L} j \frac{V_0}{\sqrt{2}} \angle \phi_0 = \frac{1}{j\omega_0 L} \frac{V_0}{\sqrt{2}} \angle \phi_0 = \frac{1}{j\omega_0 L} \tilde{V}_L$$

Aparece de nuevo una relación entre tensión y corriente:

$$\tilde{V}_L = j\omega_0 L \tilde{I} = L\omega_0 \tilde{I} \angle \phi_0 + \frac{\pi}{2}$$

Este resultado se hubiera podido obtener también sabiendo que una integración en el régimen complejo equivale a dividir por  $j\omega$ . En base a esta última relación entre fasores se define la impedancia compleja de la inductancia como:

$$Z_L = j\omega_0 L$$

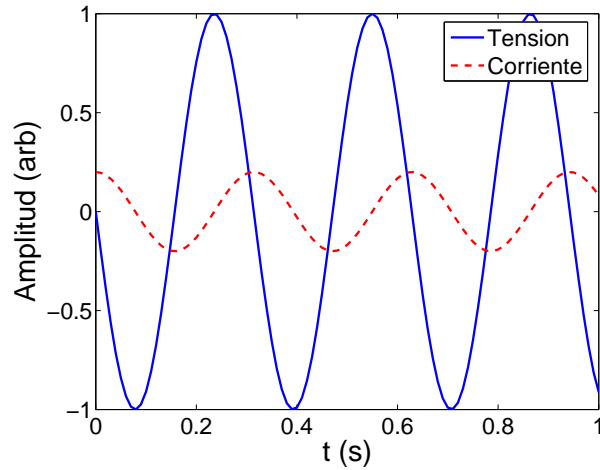
La reactancia de la bobina es:

$$X_L = \omega_0 L$$

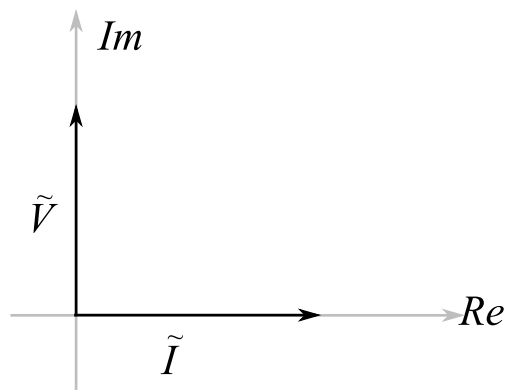
La inductancia se comporta como una resistencia de valor complejo en corriente alterna. Aparece una ley de Ohm para las inductancias al igual que para las resistencias y condensadores:

$$\tilde{V}_L = Z_L \tilde{I}$$

Se puede ver la relación entre la tensión y la corriente en la figura 2.7 donde la tensión adelanta la corriente en  $\pi/2$  debido al efecto de la bobina sobre la corriente. Hay que insistir sobre la importancia de estos desfases. Si un circuito



(a)



(b)

**Figura 2.7** Representación de la corriente y de la tensión en una inductancia alimentada en corriente alterna. (a) En esta figura, la corriente está detrás de la tensión con un desfase de  $\pi/2$ . (b) En esta figura, los fasores corresponden a la corriente y la tensión en una inductancia pura. Se elige como referencia de fase la corriente, pues la tensión está orientada hacia arriba debido a la relación:  $\tilde{V} = jL\omega_0\tilde{I}$ .

presenta una corriente en atraso sobre la tensión podemos asegurar la presencia de bobinas con comportamientos inductivos.

La expresión de la impedancia de la bobina tiene una dependencia directa con la frecuencia con los dos casos límites siguientes:

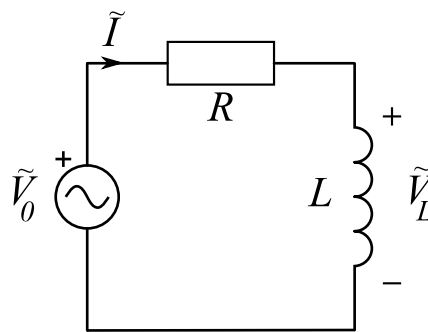
- Para  $\omega \rightarrow 0$  la impedancia es:  $Z_L \sim 0$ , es un corto circuito.
- Para  $\omega \rightarrow \infty$  la impedancia tiende a:  $Z_L \rightarrow \infty$ , es un circuito abierto.

En los circuitos de corriente alterna existe un efecto importante de la frecuencia de alimentación sobre el comportamiento de la bobina. Hay que considerar estos



efectos en cuenta a la hora de diseñar circuitos.

### Ejercicio 2.6



En el circuito de la figura anterior aparece una resistencia en serie con una inductancia alimentada por una fuente de tensión alterna de frecuencia  $f = 1000\text{Hz}$ . Expresar la corriente y la tensión  $\tilde{V}_L$  de la inductancia en forma de fasores. Datos del problema:  $R = 100\Omega$ ,  $L = 10\text{mH}$ ,  $\tilde{V}_0 = 10\angle 0\text{ V}$ .

### Solución del ejercicio 2.6

Para obtener  $\tilde{V}_L$  conviene primero calcular la corriente  $\tilde{I}$  que circula en el circuito. Aplicando la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff en el circuito obtenemos una relación entre las tensiones y la corriente:

$$\tilde{V}_0 - R\tilde{I} - \tilde{V}_L = 0$$

Se usa por otro lado la ley de Ohm para la inductancia:

$$\tilde{V}_L = j\omega L\tilde{I}$$

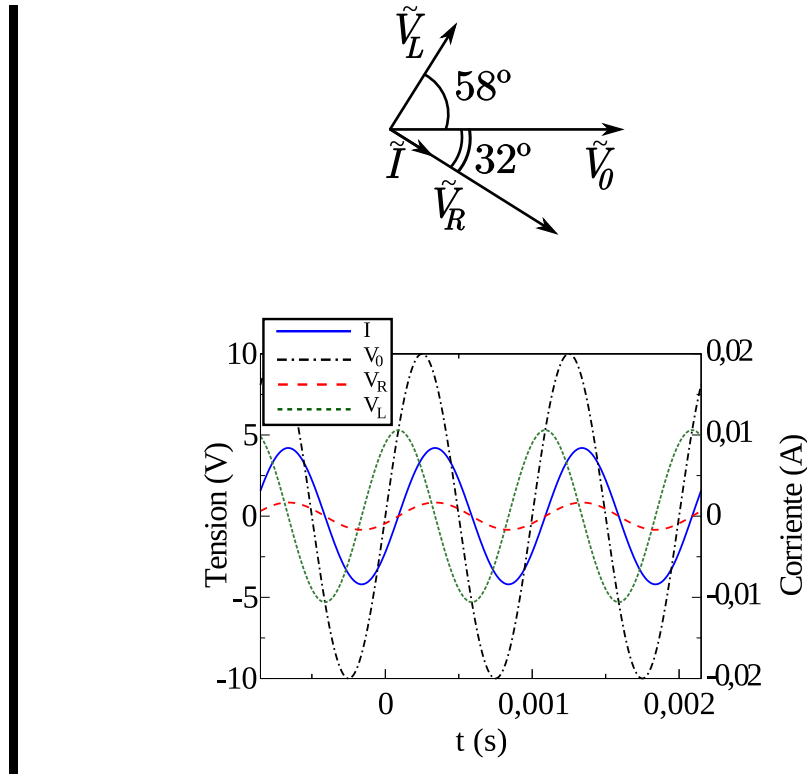
con  $\omega = 2\pi f$ . Se despeja la corriente a partir de las dos ecuaciones anteriores:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_0}{R + j\omega L} = \frac{10}{100 + j2\pi 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 8,46 \cdot 10^{-2} \angle -32,1^\circ \text{ A}$$

La tensión  $V_L$  tiene entonces la siguiente expresión:

$$\tilde{V}_L = j\omega L\tilde{I} = 62,8 \cdot 8,46 \cdot 10^{-2} \angle -32,1^\circ + 90^\circ = 5,33 \angle 57,9^\circ \text{ V}$$

Se puede ahora dibujar el diagrama de fasores tal como representado en la figuras siguientes. Razonando a partir del diagrama de fasores, la corriente viene detrás de la tensión en el tiempo, está en atraso. Este fenómeno es característico de los circuitos inductivos.



#### 2.3.4 Fuentes y generadores de corriente alterna

Se han descrito hasta ahora los elementos pasivos más frecuentes de la teoría de circuitos. Las fuentes de tensión y corriente son otra clase de elementos lineales esenciales en teoría de circuitos. Una fuente de tensión sinusoidal ideal proporciona una amplitud constante sea lo que sea la corriente que proporciona. La tensión de este dispositivo es entonces:

$$V_g(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

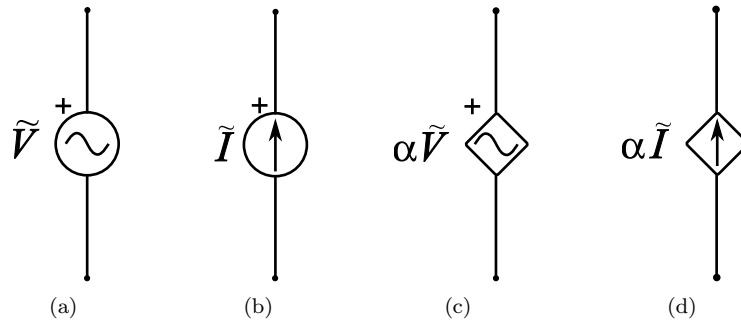
y en forma de fasores:

$$\tilde{V}_g = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \angle \varphi.$$

Este elemento se introduce en los circuitos para modelizar los generadores y las fuentes de tensión alterna ideales.

Para las fuentes de corriente se procede de la misma forma, se define un dispositivo que mantiene la corriente constante sea lo que sea la diferencia de potencial en sus bornes. La expresión general de la corriente es entonces:

$$I_g(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi),$$



**Figura 2.8** (a) Esquema de una fuente de tensión sinusoidal. (b) Esquema de una fuente de corriente sinusoidal. (c) Fuente de tensión dependiente y (d) fuente de corriente dependiente.

y en forma de fasores:

$$\tilde{I}_g = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \angle \varphi.$$

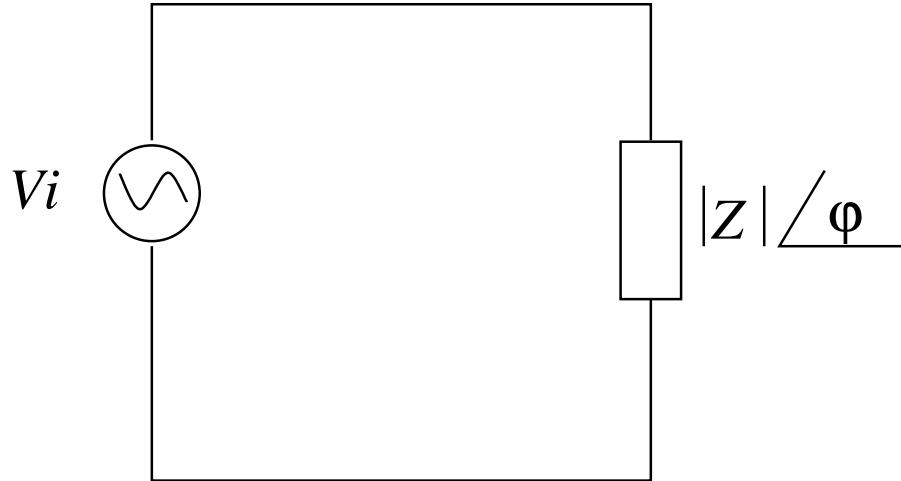
En la figura 2.8 (a) y (b) aparece el esquema de una fuente de tensión y de una fuente de corriente en régimen sinusoidal. Aunque la polaridad de la onda cambia en cada semi-periodo, necesitamos fijar un sentido inequívoco para la fuente. Se dibuja un pequeño signo positivo tal que la diferencia de potencial entre los dos puntos ( $V^+ - V^-$ ) corresponda con el valor de la tensión del generador. Por extensión, la diferencia de potencial corresponderá con el fasor. Se usa el mismo convenio para las fuentes de corriente con la flecha indicando el sentido de la corriente del generador.

Se puede afinar el modelo de las fuentes reales de corriente y tensión asociando una impedancia compleja en serie con la fuente de tensión o en paralelo con la de intensidad para representar los defectos internos de los generadores. Sería el equivalente de la resistencia interna de una pila en régimen de continua. Volveremos a encontrar estas asociaciones con los equivalentes de Norton y Thévenin.

Existen también fuentes dependientes que dependen de un parámetro tal como una tensión o una corriente del circuito al igual que en corriente continua. Se representan con rumbo distintivo de las fuentes de tensión o corriente normales para hacer énfasis en su particularidad. El tratamiento de estas fuentes en circuitos es idéntico al de las fuentes en corriente continua. Se debe establecer las ecuaciones tomando en cuenta la tensión o la corriente que controla la fuente y resolver el sistema de ecuaciones así obtenido.

### 2.3.5 Ley general de Ohm

Cualquier circuito formado de elementos pasivos lineales se comporta como una única impedancia compleja  $Z$  visto desde dos terminales. En este caso, se



**Figura 2.9** Circuito de corriente alterna con una impedancia  $Z$  compleja, representada por su módulo y su fase  $\theta$ .

puede generalizar la ley de Ohm para cualquier asociación de aquellos elementos:

$$\tilde{V} = Z\tilde{I},$$

con  $Z$  la impedancia compleja del componente o del circuito en cuestión. En el caso general es un número complejo con parte real e imaginaria. El método de asociación descrito más adelante permite obtener esta impedancia a partir del esquema pero también se puede obtener experimentalmente. En la figura 2.9 aparece la representación de tal circuito donde  $Z$  puede representar cualquier circuito lineal. La impedancia es un número complejo con ciertas restricciones, cuando se asocian resistencias, condensadores e inductancias. En concreto la parte real es siempre positiva<sup>6</sup>.

Los elementos lineales de un circuito se asocian de forma idéntica al caso de la corriente continua. Es decir que los elementos en serie o en paralelo se pueden asociar y simplificar tal como sigue:

- Para impedancias en serie:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

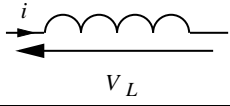
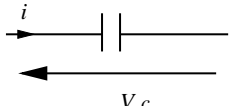
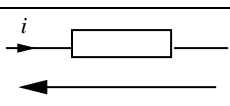
- Para impedancias en paralelo:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$

- Fuentes de tensión en serie:

$$\tilde{V}_{eq} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \cdots + \tilde{V}_n$$

<sup>6</sup> En algunos casos especiales, se puede modelizar elementos con una resistencia negativa.

Esquema	Tiempo	Imp. compleja y Fasores
	$V_L = L \frac{dI}{dt}$	$\tilde{V} = jL\omega\tilde{I} = L\omega\tilde{I}\angle\frac{\pi}{2}$
	$V_C = \frac{1}{C} \int idt$	$\tilde{V}_C = \frac{1}{jC\omega}\tilde{I} = \frac{1}{C\omega}\tilde{I}\angle-\frac{\pi}{2}$
	$V_R = Ri$	$\tilde{V}_R = R\tilde{I}$

**Cuadro 2.2** Resumen del comportamiento de los componentes en el dominio temporal y en el dominio armónico.

- Fuentes de corriente en paralelo:

$$\tilde{I}_{eq} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \dots + \tilde{I}_n$$

Son básicamente las mismas reglas de asociación vistas antes. Del mismo modo, no se pueden asociar fuentes de tensión en paralelo con distintas características y está prohibido poner fuentes de corrientes en serie cuando no son idénticas.

En la tabla 2.2 se resumen las transformaciones de los elementos de circuitos más comunes como son las resistencias, condensadores e inductancias en régimen armónico. Estas impedancias se usarán en varios modelos de máquinas eléctricas en el resto de los capítulos.

### 2.3.6 Teoría de circuitos en régimen armónico

Aunque hemos analizado circuitos en alterna antes podemos ahora confirmar que el análisis de circuitos presentado en el capítulo 1 sigue válido para el régimen de corriente alterna si se cumplen las siguientes condiciones:

- El circuito cumple los requisitos de las leyes de Kirchhoff (para la ley de corrientes y tensiones).
- Los elementos del circuito son lineales.

Ahora, para el análisis se puede usar la forma fasorial de las tensiones y corrientes. Se puede razonar sobre el circuito transformado con fasores al igual que un circuito de corriente continua. La ley de corrientes se resume en la expresión siguiente:

$$\sum_{k \in \text{nudo}} \tilde{I}_k = 0,$$

para las corrientes  $\tilde{I}_k$  llegando a un mismo nudo. La segunda ley de Kirchoff para las tensiones se escribe como:

$$\sum_{k \in \text{malla}} \tilde{V}_k = 0,$$

para los fasores de tensiones  $\tilde{V}_k$  de un lazo. El método de aplicación es idéntico al caso de la corriente continua al ser los circuitos lineales. Además todos los teoremas de redes lineales siguen siendo válido dado que únicamente se basan en la hipótesis de la linealidad. Los teoremas siguientes se aplican de forma indiscriminada a circuitos de corriente continua y alterna:

- El teorema de Millman.
- El teorema de Thévenin y Norton.
- El método de las mallas y de los nudos.
- El teorema de máxima de transferencia de potencia.
- El teorema de Tellegen.
- El teorema de Kennelly.

Se aplicarán estos teoremas cuando sea necesario o útil para la resolución y el análisis de los circuitos. Tenemos ahora todas las herramientas para analizar un circuito de corriente alterna.

### 2.3.7 Diagrama de fasores de un circuito

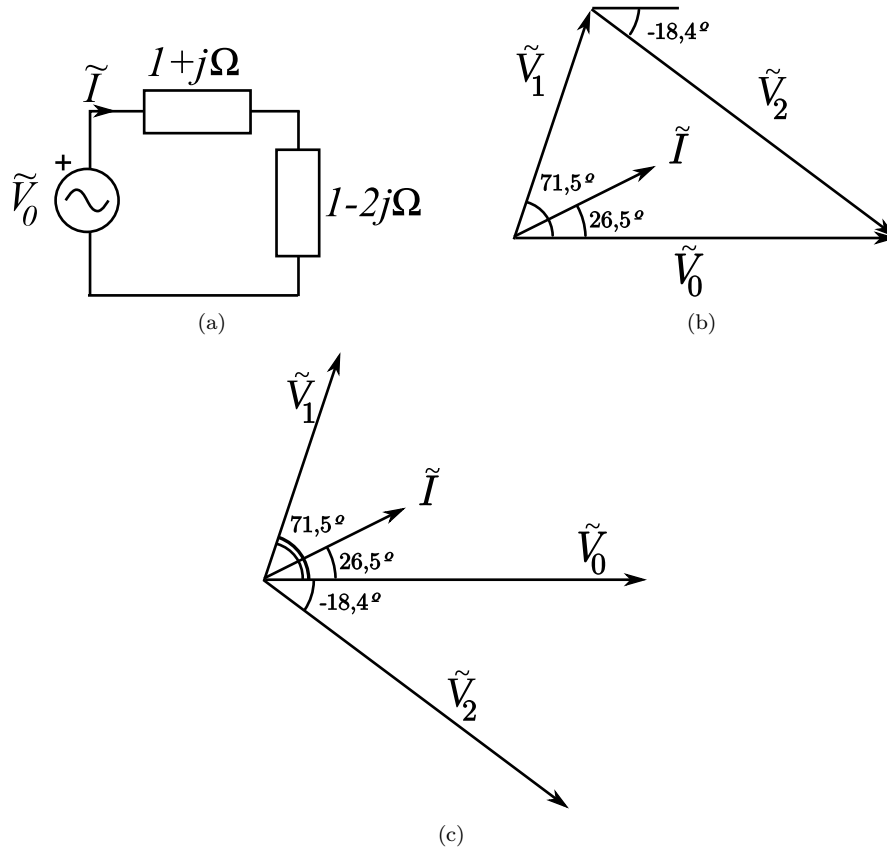
El diagrama de fasores de un circuito es una herramienta útil para visualizar las relaciones entre la distintas tensiones y corrientes. Es una representación gráfica de las tensiones en forma de vectores. Permite comparar los desfases y las amplitudes de distintos fasores en un único esquema. Se procede como sigue:

1. Primero se elige un fasor de referencia.
2. Se calcula la expresión de los otros fasores referidos al fasor de referencia.
3. Se dibuja en el plano complejo los distintos fasores obtenidos respetando los módulos y los ángulos obtenidos.

Es posible representar fasores de tensiones y corrientes en el mismo diagrama pero tendrán escalas separadas (y arbitrarias). Vamos a tener una escala para la tensión y otra para la corriente.

En la figura 2.10 se ha dibujado un circuito sencillo en corriente alterna. Dado una tensión de alimentación en alterna  $\tilde{V}_0$ , se puede encontrar la corriente del circuito y las caídas de potencial en los elementos:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_0}{1 + j + 1 - 2j} = \frac{\tilde{V}_0}{2 - j} = \frac{\tilde{V}_0}{\sqrt{5} \angle -26,5^\circ} = \tilde{V}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \angle 26,5^\circ$$



**Figura 2.10** Un circuito sencillo en (a) y su diagrama de fasores asociado en (b).

A partir de la corriente, se pueden hallar las caídas de potencial en los otros dos elementos:

$$\tilde{V}_1 = (1 + j)\tilde{I} = \tilde{V}_0 \sqrt{\frac{2}{5}} \angle 71,5^\circ$$

$$\tilde{V}_2 = (1 - 2j)\tilde{I} = \tilde{V}_0 \angle -36,8^\circ$$

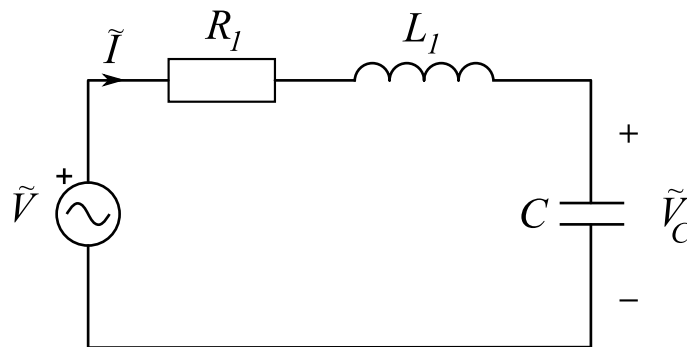
La construcción del diagrama de fasores se puede SEGUIR en la figura 2.10 (b). La corriente  $\tilde{I}$  tiene un desfase de  $26,5^\circ$  con el fasor  $\tilde{V}_0$ , sin embargo, la longitud del fasor en el diagrama se puede elegir libremente al no tener otros fasores de corriente. En el supuesto de tener más de un fasor de corriente, tendríamos que elegir una escala para estos fasores. Los fasores de tensión de los otros dos elementos van referidos al fasor de la tensión de alimentación  $\tilde{V}_0$ , cambia la longitud y el ángulo relativo de cada uno. En la figura se han alineado los fasores de tal modo que la suma de  $\tilde{V}_1$  y  $\tilde{V}_2$  resulte el fasor  $\tilde{V}_0$ .

Este método permite verificar si los cálculos analíticos son coherentes, se puede comprobar gráficamente que las leyes de Kirchhoff se cumplen. También se pue-

den obtener tensiones o corrientes gráficamente construyendo geoméricamente a partir de la relación entre fasores de un circuito.

### Ejercicio 2.7

Construir el diagrama de fasores de la figura siguiente. Datos:  $\tilde{V}_0 = 110V$ ,  $C = 50\mu F$ ,  $R = 100\Omega$ ,  $L = 100mH$ ,  $f=50Hz$ .



### Solución del ejercicio 2.7

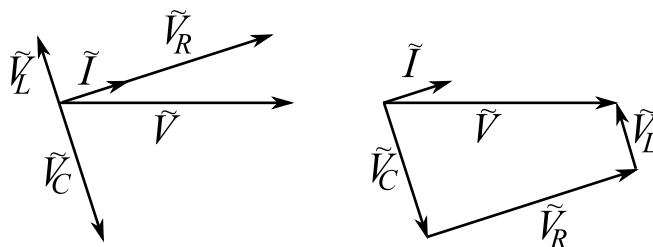
La expresión de la corriente de este circuito es:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)}$$

Se elige como referencia de fase la tensión  $\tilde{V}$  que tiene la siguiente expresión:  $\tilde{V} = V_0 \angle 0^\circ V$ . Se obtiene la expresión de  $\tilde{I}$ :

$$\tilde{I} = 0,99 + j0,32 = 1,04 \angle 18^\circ A$$

En el diagrama se dibuja primero  $\tilde{V}$  y luego el fasor de  $\tilde{I}$ , aquí no importa la escala sino el ángulo. Se puede construir por ejemplo el vector  $\tilde{V}$  sumando  $\tilde{V}_R$ ,  $\tilde{V}_L$  y  $\tilde{V}_C$ . El fasor de  $\tilde{V}_R$  será paralelo al fasor  $\tilde{I}$  con un módulo de 104V. Se repite el mismo proceso con  $\tilde{V}_L$  y  $\tilde{V}_C$ . El resultado de esta suma se puede observar en la figura siguiente.



El diagrama de fasores puede ser una herramienta de cálculo muy útil para determinar las tensiones de forma geométrica.



## 2.4 Potencia en sistemas de corriente alterna

Una de las nociones más importantes en electricidad es la de potencia. En régimen de alterna, la potencia varía en función del tiempo. Este simple hecho tiene consecuencias muy importantes en las aplicaciones prácticas. En concreto, la aparición de desfases entre corrientes y tensiones originan potencias positivas y negativas, lo que significa que el flujo de potencia puede cambiar de sentido entre generador y receptor. En corriente continua, una carga pasiva siempre recibe la potencia de la fuente. En corriente alterna es muy frecuente que las cargas acumulen energía durante un corto tiempo y luego restituyan la energía a la fuente. En esta situación se podría considerar un flujo de potencia negativo si consideramos el sentido fuente→carga como positivo. Siendo la potencia una cantidad sinusoidal, se va a hacer un uso extensivo de las herramientas de análisis presentadas anteriormente.

Antes de empezar la descripción matemática de la potencia en corriente alterna empezaremos con un ejemplo sencillo en el que únicamente disponemos de un generador y una resistencia conectada. Para estudiar la potencia de un sistema eléctrico necesitamos la noción de potencia instantánea, es la cantidad de energía que se transfiere por unidad de tiempo en un instante dado. Se calcula simplemente como el producto de la tensión por la intensidad para cualquier instante. Se ha visto en los ejemplos de circuitos anteriores que podían aparecer desfases entre tensión y corriente en un elemento reactivo (una inductancia o un condensador). Habiendo un desfase entre como aparece en la figura 2.11 en el panel de la derecha, multiplicando para cada instante la onda de tensión e intensidad vemos que la potencia resultante también oscila. Fijándonos bien, hay dos observaciones claves sobre esta onda de potencia:

- Su frecuencia es el doble de la frecuencia de la tensión y corriente.
- Puede tomar valores negativos y positivos.

Para poder entender en profundidad estos hechos y sus implicaciones procedemos a un análisis matemático.

Primero se va a tratar el fenómeno en el dominio temporal. Consideramos un sistema de corriente alterna con una tensión  $V(t)$  y su corriente  $I(t)$ :

$$\begin{aligned} V(t) &= \Re\{V_m e^{j(\omega_0 t + \theta_v)}\} = \frac{V_m}{2} \{e^{j(\omega_0 t + \theta_v)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta_v)}\} \\ I(t) &= \Re\{I_m e^{j(\omega_0 t + \theta_i)}\} = \frac{I_m}{2} \{e^{j(\omega_0 t + \theta_i)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta_i)}\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

con  $V_m$  e  $I_m$  los valores máximos. Se expresan las ecuaciones anteriores en función de las tensiones y corrientes eficaces:  $V_0 = V_m/\sqrt{2}$  e  $I_0 = I_m/\sqrt{2}$ . La potencia instantánea se calcula multiplicando las expresiones temporales del voltaje y la intensidad:

$$p(t) = V(t)I(t) = \frac{V_m}{2} \{e^{j(\omega_0 t + \theta_v)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta_v)}\} \frac{I_m}{2} \{e^{j(\omega_0 t + \theta_i)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta_i)}\}$$

y después de la transformación:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \{ \cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega_0 t - (\theta_v - \theta_i)) \}$$

Es la potencia en cada instante de tiempo. En esta última ecuación, la potencia se expresa como una componente continua más una componente oscilante de **una frecuencia doble** de la tensión y corriente. Se desarrollan los cálculos usando reglas elementales de trigonometría hasta obtener dos componentes bien identificables:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \{ \cos(\theta_v - \theta_i)(1 + \cos(2\omega_0 t)) + \sin(\theta_v - \theta_i) \sin(2\omega_0 t) \} \quad (2.6)$$

Examinando en detalle esta expresión, destacan dos términos importante. El primer término dependiendo de  $\cos(\theta_v - \theta_i)$  tiene una media temporal (sobre un periodo) constante y positiva. Es la parte de la **potencia real** o potencia media del sistema estudiado. Esta potencia pulsa en el tiempo y tiene una componente media igual a  $V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)/2$ .

Se define por tanto la potencia real o **potencia activa** como:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\phi) = V_0 I_0 \cos(\phi).$$

**El ángulo  $\phi$  es la diferencia de fase entre la tensión y la corriente** que se define para una tensión con una fase  $\theta_v$  y la corriente con una fase  $\theta_i$  como

$$\phi = \theta_v - \theta_i.$$

Este ángulo para circuitos lineales se mantiene en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ , dado que las impedancias siempre tiene una parte real positiva. Como consecuencia, la potencia activa siempre es positiva<sup>7</sup>.

El segundo término, dependiendo de  $\sin(\theta_v - \theta_i)$ , tiene una media temporal nula pero también participa en el balance energético. Este término representa la potencia que se transfiere continuamente de la fuente a la carga, se llama **la potencia reactiva**. Esta componente tiene un desfase de  $\pi/2$  relativo a la otra componente al ser una un coseno y otra un seno. La potencia reactiva de este sistema se define como:

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\phi) = V_0 I_0 \sin(\phi).$$

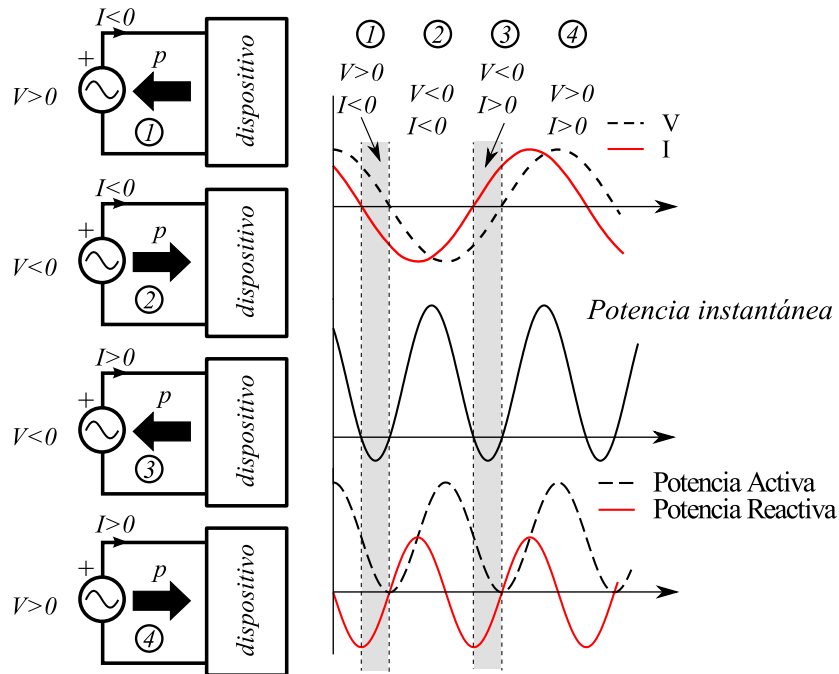
El signo de la potencia  $Q$  depende entonces del ángulo  $\phi$  que viene determinado por la impedancia del sistema conectado. La impedancia conectada al sistema determina este ángulo y por lo tanto el signo de  $Q$ .

La potencia instantánea se escribe más concisamente en términos de  $P$  y  $Q$ :

$$p(t) = P(1 + \cos(2\omega_0 t)) + Q \sin(2\omega_0 t)$$

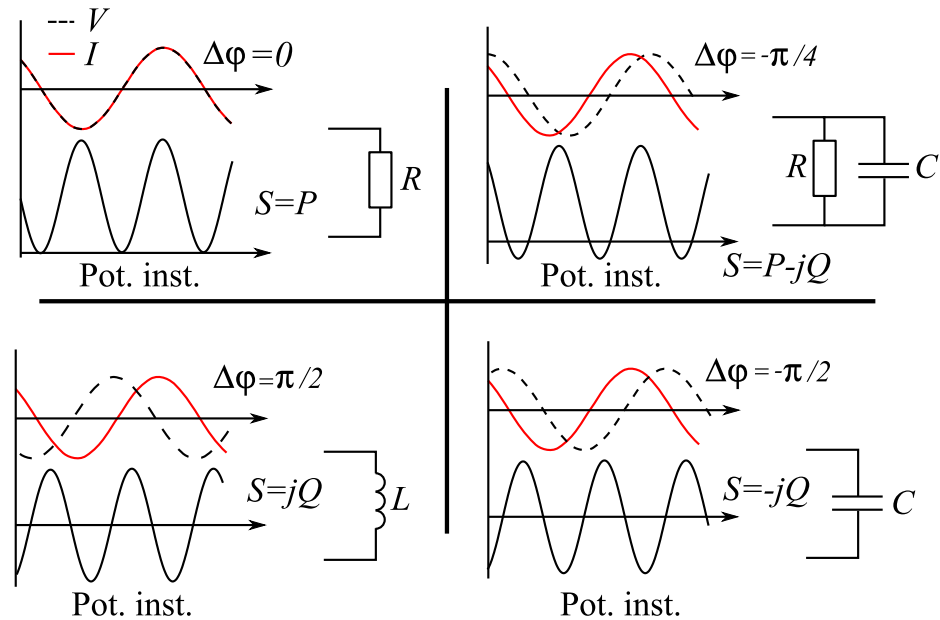
donde aparece claramente la contribución de la potencia activa y de la potencia reactiva.

<sup>7</sup> Hay que matizar esta afirmación si consideramos el sentido de los flujos de potencia, se precisa más adelante esta noción.



**Figura 2.11** Panel de derecha: arriba, corriente y tensión en un circuito (con unidades arbitrarias). Las dos formas de onda están desfasadas de  $\pi/4$ . En la figura central el producto de las dos contribuciones. La potencia tiene en algunas zonas valores negativos. Abajo aparece la contribución de la potencia activa y reactiva. La potencia activa es siempre positiva y la potencia reactiva tiene un media temporal nula, las dos están en desfase de  $\pi/2$ . **Panel de Izquierda:** Se dibuja la dirección del flujo de potencia en función del signo de  $V(t)$  e  $I(t)$ . Los cuatro casos marcados corresponden en el panel de la derecha con las situaciones marcadas. Cuando la tensión y la corriente tienen sentidos distintos, el flujo de potencia viaja del dispositivo a la fuente.

Para ilustrar el comportamiento de la potencia se estudia un caso concreto. En la figura 2.11, se representa la parte activa y reactiva de una serie temporal de la potencia. Primero se dibuja la tensión y la corriente desfasadas de  $\pi/4$ . La potencia instantánea, el producto de las dos series temporales  $V(t)$  e  $I(t)$  demuestra que la potencia oscila al doble de velocidad y tiene una parte negativa durante un cierto intervalo tiempo. En el último panel de la figura, esta potencia se descompone en dos contribuciones: la parte de la potencia activa y de la potencia reactiva. La potencia activa es siempre positiva y tiene una media temporal superior a cero. La potencia reactiva tiene una media nula y oscila alrededor del cero. La potencia instantánea es negativa cuando la corriente y la tensión tienen signo contrarios. El flujo global de potencia viaja en este caso del dispositivo a la fuente. Si la corriente y la tensión tienen el mismo signo, entonces la potencia instantánea es positiva y viaja de la fuente al dispositivo. El desfase entre la

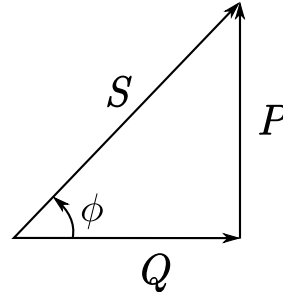


**Figura 2.12** Aspecto de la potencia en función del dispositivo conectado al generador. Para algunos desfases la potencia instantánea tiene una media temporal nula, es decir que toda la potencia es totalmente reactiva.

corriente y la tensión es el responsable del cambio de signo de la potencia. Los elementos lineales que provocan el desfase (bobinas y condensadores entre otros) se llaman elementos reactivos. Estos almacenan energía durante un semi-periodo y la restituyen durante el siguiente semi-periodo.

En la figura 2.12 se representa la tensión y la corriente así como la potencia instantánea en función del tipo de dispositivo conectado a la fuente de tensión. Se pueden observar comportamientos muy distintos según el tipo de elemento lineal estudiado. La potencia instantánea varía mucho según el desfase introducido entre la tensión y la corriente. Este desfase aparece cuando elementos con memoria están presentes, típicamente condensadores o bobinas. Así por ejemplo, un condensador sólo consume potencia reactiva, no tiene potencia activa dado que desfasa la corriente  $\pi/2$ . Para una inductancia, también la potencia media consumida es nula. La asociación de estos diferentes elementos en un circuito es lo que provoca el desfase de la tensión y de la corriente pero no causa un aumento directo de la potencia activa.

La aparición de una potencia oscilante significa que esta última también se puede representar con una cantidad compleja en forma de fasores. En términos de fasores se escribe como la suma de una componente real y otra imaginaria. La componente real corresponde a la potencia real y la componente imaginaria



**Figura 2.13** Fasores de potencia en un circuito de alterna. Esta figura se llama triángulo de potencia, se puede apreciar la importancia relativas de las potencias y también el ángulo de desfase entre tensión y corriente aparece como el ángulo formado por la potencia activa  $P$  y la potencia aparente  $S$ .

corresponde a la potencia reactiva. Se define el fasor de la **potencia compleja**:

$$\tilde{S} = P + jQ,$$

donde  $P$  es la potencia activa en Vatios [W] y  $Q$  la potencia reactiva en Voltios Amperios Reactivos [VAR], y el módulo  $|S|$  se llama potencia aparente en Voltios Amperios [VA] y corresponde a la amplitud de pico de la potencia instantánea. Las unidades anteriores son todas homogéneas a Vatios, sin embargo se diferencian para destacar el papel diferente de cada una en el proceso energético. Se relaciona la potencia compleja con las tensiones y corrientes, por identificación:

$$P = V_0 I_0 \cos(\phi) \text{ [W] ,}$$

$$Q = V_0 I_0 \sin(\phi) \text{ [VAR] ,} \quad (2.7)$$

$$|\tilde{S}| = V_0 I_0 \text{ [VA] .} \quad (2.8)$$

Esta notación simplifica mucho los cálculos gracias al uso de los fasores. El diagrama de fasores de la potencia se representa en la figura 2.13. Se puede destacar que la amplitud de la onda de potencia instantánea corresponde con el módulo de la potencia compleja  $|\tilde{S}|$ . Se llama también **potencia aparente**.

Una de las ventajas de usar la representación fasorial reside en el hecho de simplificar los cálculos de potencias. A partir de los fasores de tensión y corriente de un sistema se deduce directamente la potencia compleja consumida. Dado dos fasores  $\tilde{V}$  y  $\tilde{I}$  la potencia compleja se expresa como<sup>8</sup>:

$$\tilde{S} = \tilde{V} \tilde{I}^*,$$

con  $\tilde{I}^*$  el fasor conjugado de  $\tilde{I}$ . De esta manera se pueden deducir fácilmente las componentes de la potencia a partir de las amplitudes complejas de un circuito.

<sup>8</sup> Esta definición se transforma en  $S = \frac{\tilde{V} \tilde{I}^*}{2}$ , usando los fasores con el convenio de la amplitud en valores máximos en vez de valores eficaces.

Tomando el ejemplo anterior con los siguientes fasores:

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= V_0 \angle \theta_v \\ \tilde{I} &= I_0 \angle \theta_i\end{aligned}\tag{2.9}$$

La potencia compleja se calcula muy sencillamente:

$$\tilde{S} = \tilde{V} \tilde{I}^* = V_0 I_0 \angle (\theta_v - \theta_i) = V_0 I_0 (\cos(\phi) + j \sin(\phi))$$

con  $\phi = \theta_v - \theta_i$ . Se encuentra de nuevo la expresión de la potencia compleja definida antes. Encontramos de nuevo la expresión de la potencia compleja en forma  $\tilde{S} = P + jQ$ .

### 2.4.1 El factor de potencia

Muchos de los sistemas eléctricos contienen elementos que introducen potencias reactivas en el sistema. Por varias razones, esta potencia reactiva deteriora la calidad de una red eléctrica. Conviene por tanto tener una medida simple y fiable de la proporción entre potencia activa y reactiva. Es el cometido del factor de potencia.

El ángulo  $\phi$  de desfase entre la tensión y la corriente de una instalación se llama ángulo de factor de potencia y el término  $fp = \cos \phi$  corresponde al factor de potencia. En las aplicaciones prácticas, este parámetro tiene que quedarse dentro de unos márgenes aceptables. Si una empresa consume mucha energía eléctrica, el factor de potencia se debe controlar con cuidado dado que las empresas de suministro eléctrico aplican sanciones por rebasar de un cierto valor. Cuanto peor el factor de potencia, cuanto más potencia se devuelve a la línea. Parte de esta potencia devuelta se disipa en calor en los cables de transporte. Es decir que cuanto más cerca sea de 1, mejor se comporta el sistema dado que no consume energía reactiva (si  $\cos(\phi) = 1$  entonces  $\sin(\phi) = 0$ ). La energía reactiva simplemente se intercambia entre la fuente y la carga dos veces por cada periodo sin beneficiar a nadie.

Una fórmula alternativa para el factor de potencia se halla despejando la expresión  $P = |S| \cos \phi$ :

$$\cos \phi = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Aparece una relación entre potencia activa y reactiva.

Al ser el coseno una función par, no hay ninguna manera de distinguir entre un ángulo positivo y un ángulo negativo (siendo el ángulo comprendido en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ ). Se usan entonces los dos términos siguientes:

- Factor de potencia en atraso cuando la corriente va detrás de la tensión ( $\phi > 0$  tal como se ha definido antes con la tensión como referencia). Corresponde al caso de cargas inductivas, se dice también que el factor de potencia es inductivo.

- Factor de potencia en adelanto cuando la tensión va detrás de la corriente ( $\phi < 0$  tal como se ha definido antes con la tensión como referencia). Corresponde al caso de cargas capacitivas, se dice también que el factor de potencia es capacitivo.

El caso  $\phi = 0$  corresponde a una carga puramente resistiva, es decir que no hay consumo de energía reactiva.

En las aplicaciones prácticas, se estudia el factor de potencia de un sistema visto de dos puntos. Por ejemplo se calcula o se mide a la acometida de una instalación eléctrica, es decir en el punto de conexión a la red de alimentación. Permite así tener el consumo global de la instalación. Veremos más adelante como podemos controlar es parámetro del sistema.

#### 2.4.2 Potencia en una resistencia

Podemos aplicar el concepto de potencia compleja a cada elemento de circuito. Primero calculando la potencia en una resistencia de valor  $R$ , cuando le alimentamos con una corriente alterna. En este caso la potencia se escribe como:

$$\tilde{S} = \tilde{V}\tilde{I}^* = R\tilde{I}\tilde{I}^* = R|\tilde{I}|^2.$$

Esta potencia se puede expresar haciendo uso de la tensión:

$$\tilde{S} = \tilde{V} \cdot \left( \frac{\tilde{V}^*}{R} \right) = \frac{|\tilde{V}|^2}{R}$$

La potencia es real y toda la energía se consume en la resistencia. Es decir que cuando tenemos potencia activa en un circuito, necesariamente existen elementos resistivos o equipos que se pueden representar por una resistencia.

#### 2.4.3 Potencia en un condensador

Considerando la impedancia compleja de un condensador, la relación entre tensión y corriente se escribe como:

$$\tilde{V} = \frac{1}{jC\omega} \tilde{I} = \frac{1}{C\omega} \tilde{I} \angle -\frac{\pi}{2}.$$

Para una corriente arbitraria, la potencia se escribe como:

$$\tilde{S} = \tilde{V}\tilde{I}^* = \frac{1}{jC\omega} \tilde{I}\tilde{I}^* = \frac{-j}{C\omega} |\tilde{I}|^2$$

Se puede derivar una expresión similar en función la tensión:

$$\tilde{S} = \tilde{V}\tilde{I}^* = \tilde{V} (jC\omega\tilde{V})^* = -jC\omega |\tilde{V}|^2$$

La potencia es un número imaginario, implicando que la potencia real es nula: **el condensador no consume potencia activa**. Sin embargo almacena y transfiere energía en cada ciclo. En la práctica, los condensadores reales tienen

pérdidas de potencia y se calientan. Estos defectos se traducen en un consumo de potencia activa que puede incluirse en un modelo más completo. Es importante subrayar que la potencia reactiva del condensador es negativa, tiene consecuencias importantes para los circuitos.

#### 2.4.4 Potencia en una inductancia

Para una inductancia en corriente alterna, la relación entre tensión y corriente es:

$$\tilde{V} = jL\omega\tilde{I} = L\omega\tilde{I}\angle\frac{\pi}{2}.$$

Dada cierta corriente, la potencia se expresa mediante:

$$\tilde{S} = \tilde{V}\tilde{I}^* = jL\omega\tilde{I}\tilde{I}^* = jL\omega|\tilde{I}|^2 = \frac{j|\tilde{V}|^2}{L\omega}$$

Al igual que para el condensador la inductancia también tiene una potencia imaginaria, hay transferencias de energía entre la fuente y la carga. Una característica importante de la potencia compleja es el signo de la potencia, para una inductancia es una potencia imaginaria positiva y para un condensador negativa. Influyen estos signos en un circuito ya que el desfase entre la corriente y la tensión rige el balance de potencia de una instalación eléctrica. Conociendo esta diferencia de fase se va a poder diseñar circuitos de compensaciones de modo que se reduzca la potencia reactiva de un circuito.

#### 2.4.5 Potencia en una impedancia compleja

Una forma de resumir todos los cálculos anteriores consiste en expresar la potencia de cualquier circuito formado por elementos lineales, es decir resistencias, condensadores e inductancias. Dado una impedancia equivalente  $Z$  como la mostrada en la figura 2.9 se puede expresar la potencia consumida por esta carga como:

$$S = \tilde{V}\tilde{I}^* = Z\tilde{I}\tilde{I}^* = Z|\tilde{I}|^2.$$

Descomponiendo la impedancia compleja se obtiene la potencia:

$$S = |\tilde{I}|^2(\Re(Z) + j\Im(Z)),$$

o escrito de otra forma:

$$\begin{aligned} P &= |\tilde{I}|^2\Re(Z) \\ Q &= |\tilde{I}|^2\Im(Z). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por lo que a partir del conocimiento del módulo de la intensidad y de la impedancia equivalente del circuito se puede conocer la potencia activa y reactiva consumida.



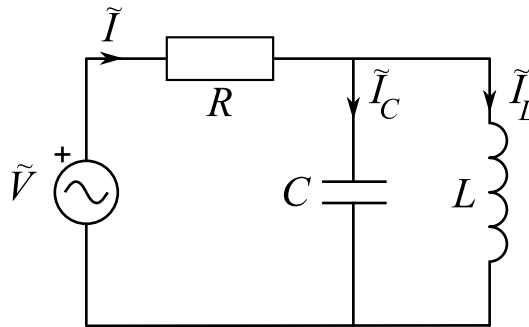
Con la tensión y la impedancia  $Z$  de un elemento se puede obtener también la potencia:

$$S = \tilde{V}\tilde{I}^* = \tilde{V} \left( \frac{\tilde{V}}{Z} \right)^* = \tilde{V} \frac{\tilde{V}^*}{Z^*} = \frac{|\tilde{V}|^2}{Z^*}$$

Se obtiene así la potencia compleja pero aparece ahora el conjugado del fasor de la impedancia compleja  $Z^*$  en el cálculo.

### Ejercicio 2.8

Determinar la potencia en cada elemento y la potencia compleja de la fuente de alimentación del circuito de la figura siguiente. Datos del problema:  $R = 10\Omega$ ,  $L = 10\text{mH}$ ,  $C = 200\mu\text{F}$ ,  $\tilde{V} = 10\angle 0\text{V}$  y  $f = 50\text{Hz}$ .



### Solución del ejercicio 2.8

Para determinar la potencia en cada elemento se debe determinar la corriente o la tensión de cada elemento. Por ejemplo se empieza por determinar la corriente  $\tilde{I}$ . El paso previo es determinar la impedancia total del circuito:

$$Z = R + \frac{1}{1/(jL\omega) + jC\omega} = R + \frac{jL\omega}{1 + LC(j\omega)^2}$$

La corriente  $\tilde{I}$  se expresa entonces como:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{\tilde{V}}{R + \frac{jL\omega}{1 + LC(j\omega)^2}} = \frac{\tilde{V}(1 + LC(j\omega)^2)}{R(1 + LC(j\omega)^2) + jL\omega}$$

La potencia disipada en la resistencia puede determinarse entonces mediante la ley de Ohm:

$$P_R = R|\tilde{I}|^2 = R \left| \frac{\tilde{V}(1 + LC(j\omega)^2)}{R(1 + LC(j\omega)^2) + jL\omega} \right|^2$$

Para calcular la potencia en la inductancia y en el condensador conviene

primero calcular las corrientes  $\tilde{I}_C$  e  $\tilde{I}_L$ . Para ello podemos considerar la tensión  $\tilde{V}_C$  del condensador que puede expresarse de dos formas:

$$\tilde{V}_C = \frac{\tilde{I}_C}{jC\omega} = \tilde{I}_L jL\omega.$$

Por otro lado, la ley de los nudos nos da:

$$\tilde{I} = \tilde{I}_L + \tilde{I}_C.$$

Usando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\tilde{I}_L = \frac{\tilde{I}}{1+LC(j\omega)^2} = \frac{\tilde{V}}{R(1+LC(j\omega)^2)+jL\omega}$$

$$\tilde{I}_C = \frac{\tilde{I}LC(j\omega)^2}{1+LC(j\omega)^2} = \frac{\tilde{V}LC(j\omega)^2}{R(1+LC(j\omega)^2)+jL\omega}$$

Por lo que la potencia en la inductancia es:

$$S_L = jL\omega |\tilde{I}_L|^2 = jL\omega \left| \frac{\tilde{V}}{R(1+LC(j\omega)^2)+jL\omega} \right|^2.$$

Por otro lado la potencia del condensador es:

$$S_C = \frac{1}{jC\omega} |\tilde{I}_C|^2 = \frac{1}{jC\omega} \left| \frac{\tilde{V}LC(j\omega)^2}{R(1+LC(j\omega)^2)+jL\omega} \right|^2.$$

Aplicación numérica:

$$\tilde{I} = 0,87 - j0,32 \text{ A}$$

$$P_R = 8,66 \text{ W}$$

$$Q_L = 3,82 \text{ VAR}$$

$$Q_C = -0,74 \text{ VAR}$$

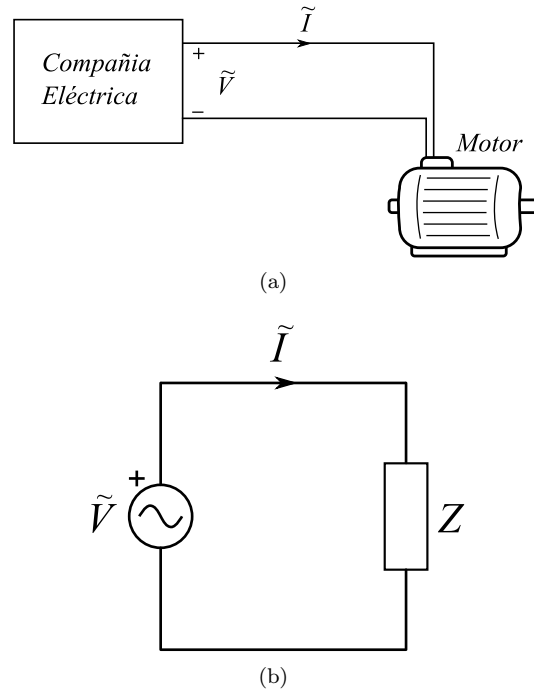
La potencia compleja se puede calcular a partir de la corriente y de la impedancia  $Z$ :

$$S = Z|\tilde{I}|^2 = 8,66 + j3,06 = P_R + j(Q_C + Q_L).$$

#### 2.4.6 Mejora del factor de potencia

El factor de potencia puede controlarse de distintos modos. En las industrias, las mayoría de las máquinas eléctricas tienen un comportamiento inductivo que genera una potencia reactiva indeseable. El factor de potencia, siendo inductivo, puede corregirse mediante condensadores dado que su potencia reactiva es de signo negativo. Este control permite reducir el ángulo entre el voltaje y la corriente y por lo tanto reduce también el consumo de energía reactiva.

La otra forma de control de factor del potencia se realiza mediante máquinas síncronas. Estas máquinas van a permitir una corrección activa del factor de potencia. En las industrias, este control es necesario debido a las penalizaciones



**Figura 2.14** Equivalente eléctrico de una fábrica con un motor de comportamiento inductivo. En la figura (b) se representa el equivalente eléctrico de la fuente y del motor. La tensión suministrada puede modelizarse con un generador de tensión alterna ideal y el motor se representa con una simple impedancia compleja. Esta hipótesis es válida cuando el motor funciona en régimen permanente.

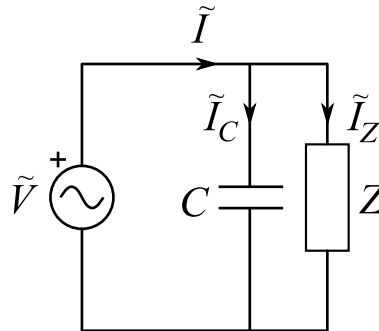
de las compañías eléctricas. Además, controlar este factor tiene otras ventajas prácticas y económicas como un menor calentamiento de las máquinas eléctricas y la mejora de la calidad de la red eléctrica. En algunas industrias esta corrección puede representar un término importante en la factura de energía eléctrica.

Se va a presentar aquí un ejemplo práctico de corrección de factor de potencia para una planta industrial que comporta mucha carga inductiva (típicamente motores). Se considera que el factor de potencia antes de la corrección es  $f_{pa}$ . Se quiere corregirlo para superar un cierto factor de potencia límite  $f_{pl}$  por debajo del cual la compañía de suministro eléctrico cobra un suplemento a la empresa. En la figura 2.14 aparece el esquema del dispositivo real y el modelo eléctrico equivalente. La impedancia equivalente del motor se escribe como:

$$Z = |Z| \angle \varphi_z$$

tendrá una parte real resistiva y una parte imaginaria inductiva.

Para reducir el factor de potencia del circuito se coloca a la llegada de las líneas de potencia un condensador en paralelo. Este condensador permite reducir



**Figura 2.15** Equivalente eléctrico del circuito inductivo con el condensador en paralelo para la corrección del factor de potencia.

la potencia reactiva total consumida por el motor. En el esquema de la figura 2.15 se muestra el nuevo sistema con el **condensador de compensación**. Se va ahora a calcular las características necesarias del condensador para reducir el factor de potencia. La corriente  $\tilde{I}$  se descompone ahora en una corriente  $\tilde{I}_C$  del elemento capacitivo y una corriente  $\tilde{I}_Z$  de la carga. La potencia del sistema total se puede escribir como:

$$S = \tilde{V}\tilde{I}^* = \tilde{V}(\tilde{I}_C + \tilde{I}_Z)^* = \tilde{V}\tilde{I}_C^* + \tilde{V}\tilde{I}_Z^* = S_c + S_Z$$

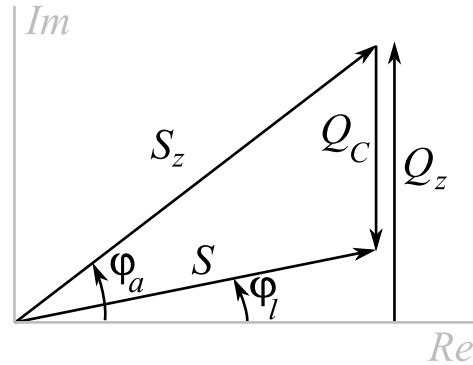
Es decir, se puede descomponer la potencia como la suma de la potencia de la carga más la potencia del condensador. Como la potencia del condensador es esencialmente reactiva ( $S_c = jQ_c$ ), la potencia total es:

$$S = S_c + S_Z = P_Z + j(Q_Z + Q_c)$$

La potencia reactiva del sistema es la suma de las potencias reactivas del condensador y del motor. La potencia reactiva de la carga es positiva por ser inductiva y el condensador conlleva un consumo de potencia reactiva negativa. La combinación de los dos reduce el total de potencia reactiva. Esta suma se puede apreciar también en la figura 2.16 con una suma de fasores. Se puede además ver la reducción del ángulo  $\varphi_l$  correspondiente a  $f_{pl}$  después de la suma. El factor de potencia depende directamente de la potencia reactiva, de este modo cambiando el condensador se puede controlar la potencia reactiva y por lo tanto actuar sobre el factor de potencia. Por otro lado, en nuestro problema la potencia activa permanece constante. El nuevo factor de potencia con la corrección se escribe como:

$$f_{pl} = \cos(\varphi_l) = \frac{P_Z}{|S|} = \frac{P_Z}{\sqrt{P_Z^2 + (Q_Z + Q_c)^2}} \quad (2.11)$$

La nueva potencia activa y reactiva se pueden expresar en función de la carga



**Figura 2.16** Diagrama de fasores del sistema, se dibuja aquí la potencia compleja  $S_Z$  y la potencia del condensador  $Q_c$ . La suma de los vectores nos da la nueva potencia reactiva. La nueva potencia compleja  $S$  tiene un ángulo  $\varphi_l$  inferior al ángulo  $\varphi_a$ .

compleja  $Z$ :

$$S_Z = \tilde{V} \tilde{I}_Z^* = Z |\tilde{I}_Z|^2 = \frac{|\tilde{V}|^2}{|Z|} \angle \varphi_z$$

$$P_Z = |\tilde{V}|^2 \frac{1}{|Z|} \cos(\varphi_z) \quad (2.12)$$

$$Q_Z = |\tilde{V}|^2 \frac{1}{|Z|} \sin(\varphi_z) \quad (2.13)$$

Despejando  $Q_c$  de la ecuación (2.11), aparece la potencia del condensador necesaria para obtener un factor de potencia  $f_{pl}$ :

$$Q_c = P_Z \sqrt{\frac{1 - f_{pl}^2}{f_{pl}^2}} - Q_Z$$

A partir de esta potencia y de los parámetros de la red (frecuencia y voltaje) se puede deducir el valor de la capacidad necesaria dado que:

$$|Q_c| = \frac{|\tilde{V}|^2}{X_c} = \omega C |\tilde{V}|^2.$$

Sin embargo en la industria se usan valores de kVAR para diseñar los condensadores porque se usa siempre la misma frecuencia y el mismo voltaje en toda la red eléctrica de baja tensión. Los constructores facilitan los valores de condensadores hablando de la potencia reactiva necesaria para el sistema en cuestión.

**Ejercicio 2.9** Una empresa consume una energía activa de  $P = 1500\text{kW}$  y una energía reactiva inductiva de  $Q = 1000\text{kVAR}$ . Calcular el actual factor de potencia y la batería de condensador necesaria para rectificar el factor de potencia hasta llegar a  $f_{pl} = 0,95$ .

**Solución del ejercicio 2.9**

El factor de potencia del sistema antes de la corrección es de:

$$f_{pa} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{1500 \cdot 10^3}{\sqrt{(1500 \cdot 10^3)^2 + (1000 \cdot 10^3)^2}} = 0,83$$

Se debe corregir este factor de potencia con el objetivo de rectificarlo por encima del 0.95. Para ello se coloca una batería de condensadores para absorber la potencia reactiva de la empresa. En este caso se puede usar la fórmula calculada antes para obtener la potencia reactiva necesaria de la batería de condensadores:

$$Q_c = P \sqrt{\frac{1 - f_{pl}^2}{f_{pl}^2}} - Q = 1500 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{(1 - 0,95^2)}{0,95^2}} - 1000 \cdot 10^3 = -507 \text{ kVAR}$$

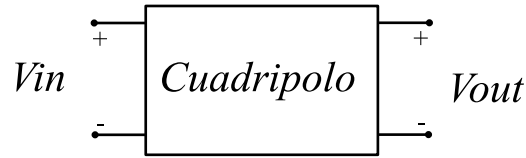
La potencia de la batería de condensador necesaria para alcanzar el factor de potencia deseado tiene que ser superior a 506kVAR. Sin embargo no hay que sobre-dimensionar el sistema. El efecto de un condensador demasiado potente sería empeorar otra vez el factor de potencia. Si el condensador supera los 1000kVAR entonces bajaría otra vez el factor de potencia.

**2.5 Comportamiento en frecuencia**

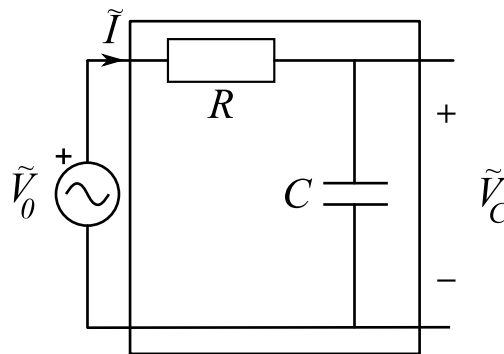
Los circuitos a base de elementos capacitivos o inductivos tienen una cierta respuesta en frecuencia cuando funcionan en régimen armónico. Es decir que al variar la frecuencia del circuito las magnitudes y fases de las corrientes y tensiones del circuito se van a modificar al tener una impedancia variable con la frecuencia.

En este apartado se van a considerar **cuadripolos**. Son elementos que disponen de cuatro polos, dos de los cuales corresponden a una tensión de entrada y los otros dos a una tensión de salida. Se representa en los diagramas como una caja tal como en la figura 2.17. El análisis en frecuencia con el método de Bode trata de analizar la relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal dada una onda sinusoidal a la entrada de cierta frecuencia. Esta relación se llama **función de transferencia**.

En régimen armónico se puede usar la expresión de las impedancias para analizar como la frecuencia puede influir sobre el módulo y la fase de cualquier tensión del circuito. Como ejemplo, se estudia la influencia de la frecuencia sobre la tensión de salida del circuito RC de la figura 2.18. La tensión de entrada es en este caso la tensión del generador y la tensión de salida la tensión del condensador, el circuito RC define así un cuadripolo. Tenemos la asociación de una resistencia en serie con un condensador, en esta configuración la impedancia equivalente vista



**Figura 2.17** Representación de un cuadripolo. Se trata de un dispositivo activo o pasivo que consta de dos polos de entrada (situados a la izquierda) y de dos polos de salida (a la derecha).



**Figura 2.18** Circuito RC en régimen sinusoidal. Se puede considerar  $\tilde{V}_0$  como la tensión de entrada y  $\tilde{V}_C$  la tensión de salida del cuadripolo equivalente.

desde el generador se escribe como:

$$Z_{eq} = R + Z_c = R + \frac{1}{jC\omega}$$

con  $\omega$  la frecuencia del generador. Hay que destacar también que la tensión de salida del circuito depende directamente de la frecuencia. Resolviendo el circuito se obtiene fácilmente la tensión  $\tilde{V}_C$ :

$$\tilde{V}_C = \frac{\tilde{V}_0 Z_c}{Z_{eq}} = \frac{\tilde{V}_0}{1 + jRC\omega}.$$

En esta ecuación aparece la dependencia de la tensión  $\tilde{V}_C$  con la frecuencia angular  $\omega$ . En los dos casos límites para la frecuencia:

- Para  $\omega \rightarrow 0$ :  $\tilde{V}_C \sim \tilde{V}_0$ , el circuito no tiene influencia en absoluto en corriente continua.
- Para  $\omega \rightarrow \infty$ :  $\tilde{V}_C \rightarrow 0$ , el circuito corta toda la tensión de entrada poniendo a cero la salida.

Para estudiar los casos intermedios, puede usarse el formalismo de la función de transferencia. El ratio entre los voltajes de entrada y de salida en forma fasorial se llama función de transferencia y depende de la frecuencia y de las

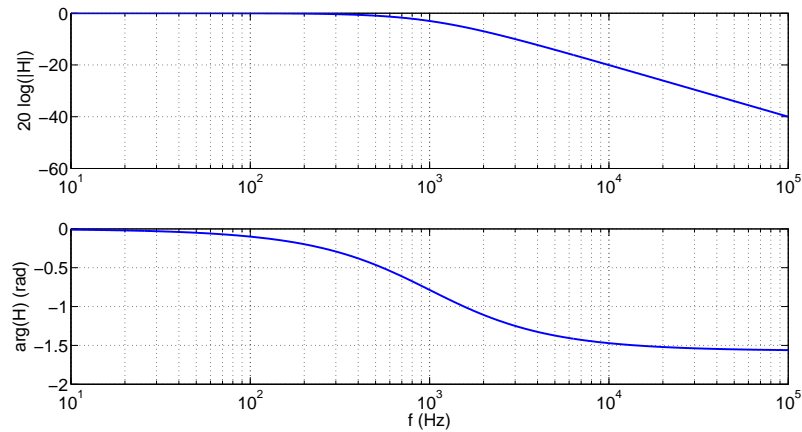


Figura 2.19 Diagrama de Bode de la función  $H$

características del circuito, se suele identificar como una función de  $\omega$ :

$$H(\omega) = \frac{\tilde{V}_C}{\tilde{V}_0} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Se analiza gracias a esta función la relación de las amplitudes complejas entre entrada y salida en función de la frecuencia. Se representa el módulo de la función compleja  $H(\omega)$  en dB y su fase en radianes en dos gráficas separadas. El módulo de la función se escribe como:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}.$$

Expresando este módulo en decibelios se aclara la dependencia de la ganancia con la frecuencia:

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(|H(\omega)|) = 20 \log_{10}(1) - 10 \log_{10}(1 + (RC\omega)^2) = -10 \log_{10}(1 + (RC\omega)^2).$$

Los dos casos inmediatos son :

- En bajas frecuencias ( $\omega \ll 1$ ) la ganancia es unidad, es decir 0 dB.
- En altas frecuencias ( $\omega \gg 1$ ) la ganancia depende básicamente del término:  $-20 \log_{10}(RC\omega)$ . Cuando se multiplica la frecuencia por 10 la caída de amplitud es de 20dB. En esta zona se dice que el la amplitud cae de 20dB por década.

La fase se expresa mediante:

$$\arg(H(\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 + (jRC\omega)}\right) = -\arg(1 + (jRC\omega)) = \text{atan}(-RC\omega)$$

Al igual que el caso anterior los dos casos límites son:

- En bajas frecuencias ( $\omega \ll 1$ ) la diferencia de fase va a ser nula.



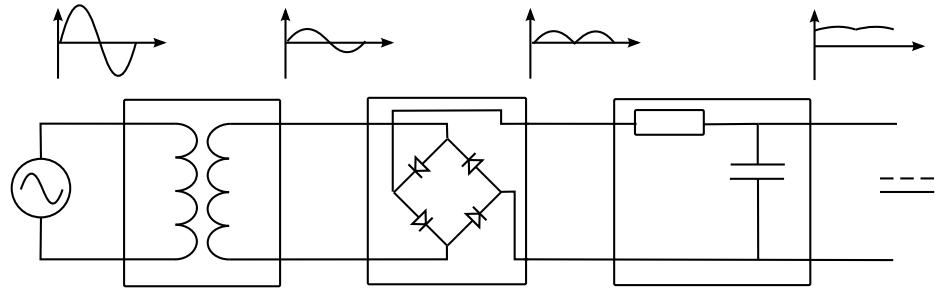
- En altas frecuencias ( $\omega \gg 1$ ) la diferencia fase va a tender a  $-\pi/2$ .

La ganancia  $|H(\omega)|_{dB}$  y la fase  $\angle H(\omega)$  se sintetizan en la figura 2.19. Se representa la figura en escala logarítmica para hacer aparecer la dependencia de la ganancia con la frecuencia. Cuando la ganancia empieza a disminuir, hay una pendiente de 20 dB por década, es decir se pierden 20dB cada vez que se multiplica la frecuencia por 10. Después de una cierta frecuencia, llamada frecuencia de corte, el sistema empieza a atenuar la señal de salida e introduce un desfase entre la entrada y salida. Esta frecuencia de corte para el circuito RC se define como la frecuencia para la cual la función de transferencia tiene una ganancia de -3 dB o en escala lineal una ganancia de  $1/2$ . Para nuestro circuito RC esta frecuencia corresponde a  $\omega = 1/(RC)$ . El sistema así definido elimina ciertas frecuencias de forma selectiva, se llama un **filtro**. Dado que deja pasar la ondas con frecuencias bajas a penas sin deformarlas, se dice que tenemos un filtro paso bajo.

Para ilustrar el uso de tales circuitos se presenta un ejemplo de uso muy común en electrotecnia. Muchos aparatos domésticos de uso diario usan un transformador para alimentarse. El transformador es un equipo que permite convertir una tensión alterna en otra tensión alterna de voltaje mayor o menor. Sin embargo lo que llamamos un transformador para un usuario doméstico en realidad convierte las tensiones alterna a tensiones continua, dado que la mayoría de los equipos electrónicos funcionan en este régimen. Este “transformador” se compone de un transformador de tensiones, un rectificador que permite obtener una tensión positiva y un filtro para alisar la tensión. Se representa el sistema en la figura 2.20.

El transformador de tensión se detalla en el capítulo 5 de este manual. Para resumir, el transformador permite rebajar la tensión de la red a una tensión inferior. Este bloque nos proporciona una tensión de frecuencia idéntica a la red (50 o 60 Hz) y de amplitud inferior por ejemplo entre 6 y 30V.

El segundo bloque nos permite rectificar la tensión, es decir calcular el valor absoluto de la tensión. Para rectificar las tensiones se usan unos componentes no lineales llamados diodos. Este componente dispuesto de una manera adecuada permite recuperar una tensión siempre positiva. El puente de diodos está representado en el segundo bloque de la figura 2.20. La tensión de salida tiene entonces una frecuencia doble de la frecuencia de la red. Esta tensión positiva tiene el doble de frecuencia, para alisarla y tener una tensión continua se filtra con un circuito RC de primer orden que se ha caracterizado antes. Se debe diseñar el circuito RC de tal manera a obtener la frecuencia de corte muy por debajo de la frecuencia del armónico (es decir por debajo de 50Hz). El filtro atenúa las oscilaciones de frecuencias superiores a su frecuencia de corte pero deja pasar las frecuencias más bajas. Equivale a recuperar a la salida del filtro la media temporal de la señal.



**Figura 2.20** Esquema de un sistema de rectificación completo. Se compone de un transformador de tensiones, un puente de diodo y un filtro para alisar la tensión. La tensión de salida es casi continua.

## 2.6 Resultados y fórmulas importantes

Fórmulas importantes	
Frecuencia angular	$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
Tensión eficaz	$V_{ef}^2 = 1/T \int_0^T f(t)^2 dt$
Fasor de una señal sinusoidal	$\tilde{V} = Ae^{j\phi_0} = A\angle\phi_0$
Potencia compleja	$\tilde{S} = \tilde{V}\tilde{I}^* = P + jQ$
Potencia real o activa	$P = V_{ef}I_{ef} \cos(\varphi)$
Potencia imaginaria o reactiva	$Q = V_{ef}I_{ef} \sin(\varphi)$
Desfase $\varphi$	$\varphi = \theta_v - \theta_i$ (fase de la tensión menos fase de la corriente).
Factor de potencia	$fp = \cos(\varphi) = P/ \tilde{S} $
Factor de potencia en atraso	$fp = \cos(\varphi)$ con $\varphi > 0$
Factor de potencia en adelanto	$fp = \cos(\varphi)$ con $\varphi < 0$

Fórmulas importantes (seguido)	
Impedancia de un condensador	$X_C = \frac{1}{j\omega_0 C}$
Impedancia de un inductancia	$X_L = Lj\omega_0$
Derivada de una señal	$d/dt A(t) \rightarrow j\omega \tilde{A}$
Integral de una señal	$\int A(t) dt \rightarrow \frac{1}{j\omega} \tilde{A}$

## 2.7 Ejercicios Resueltos

- Por un circuito formado por una bobina de 30 mH y un generador de corriente alterna, circula una intensidad de 1A (medida con un amperímetro). Calculad:
  - Si la frecuencia del generador es de 50 Hz, ¿Cuál es la tensión máxima en la bobina?
  - Si en  $t = 1$  segundos la intensidad instantánea en el circuito es de 1.414 A ¿cuánto vale la caída de potencial en la bobina en ese instante?

### Solución

a) Se dispone de un generador de 50Hz que nos proporciona una intensidad de 1A eficaces. La tensión de la bobina es:

$$\tilde{V}_L = jL\omega\tilde{I}$$

Para obtener la tensión máxima de la bobina, se calcula primero el módulo del fasor de su tensión:

$$|\tilde{V}_L| = |jL\omega\tilde{I}| = 30 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi 50 |\tilde{I}| = 9,42V$$

La tensión máxima es:

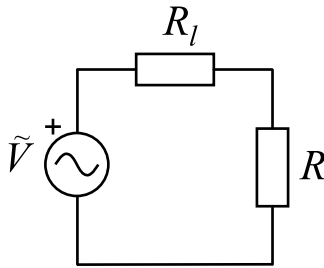
$$V_{max} = \sqrt{2} \cdot 9,42 = 13,3V$$

b) Para resolver este apartado se observa que en este instante la corriente está en su máximo. Siendo la tensión la derivada de la corriente, si la corriente está en su máximo significa que la tensión está en cero ( $LdI/dt = 0$ ).

2. En una línea de transporte de energía de resistencia lineal de  $0.03\Omega\cdot\text{km}^{-1}$  se quiere transportar en esta línea  $100\text{kW}$  a lo largo de  $100\text{km}$ . En un primer tiempo se elige una tensión de  $220\text{V}$  para alimentarla. En un segundo tiempo se elige una tensión de  $100\text{kV}$ . Calcular las pérdidas por efecto Joule en ambos casos y concluir sobre el uso de alta tensión para el transporte de energía.

### Solución

Para simplificar el análisis se representa el modelo del sistema con una carga  $R$  resistiva conectada a la línea:



La resistencia de la línea de transporte  $R_l$  es:

$$R_l = 100 \cdot 0,03 = 3\Omega$$

La intensidad de la línea se calcula a partir de la potencia:

$$P = \tilde{V}\tilde{I}^* = |V||I| = 100 \text{ kW}$$

$$|I| = \frac{100\text{kW}}{220} = 454,55 \text{ A}$$

Las pérdidas de la líneas son:

$$P = R_l|\tilde{I}|^2 = 619850 \text{ W}$$

Lo que es absurdo, dado que solo se quiere transportar  $100\text{kW}$ . Dicho de otro modo, todo se consume en la línea.

Ahora se comprueba lo mismo con una tensión de  $100\text{kV}$ :

$$|I| = \frac{100\text{kW}}{100\text{kV}} = 1 \text{ A}$$

Las pérdidas de la líneas son:

$$P = R_l|\tilde{I}|^2 = 3 \text{ W}$$

La pérdidas bajan considerablemente subiendo la tensión de alimentación de la línea.

3. Un circuito formado por un condensador y un generador de corriente alterna, tiene una intensidad máxima de 2 A. Si se reemplaza el condensador por otro con la mitad de capacidad, ¿Cuánto vale la intensidad eficaz que circula por el circuito?

### Solución

Por el circuito circula una intensidad de  $|\tilde{I}| = 2/\sqrt{2}$  A eficaces cuando el condensador tiene una capacidad  $C$ . La impedancia asociada a  $C$  es

$$Z_c = \frac{1}{jC\omega}$$

Cambiando este condensador por otro de mitad de capacidad, la impedancia asociada a este condensador es:

$$Z_{c2} = \frac{1}{j(C/2)\omega} = 2Z_c$$

La intensidad por lo tanto valdrá:

$$\tilde{I}' = \frac{\tilde{V}}{Z_{c2}} = \frac{\tilde{V}}{2Z_c} = \frac{\tilde{I}}{2}$$

La nueva intensidad es de  $1/\sqrt{2}$ A, es decir la mitad.

4. En un circuito con un generador y un condensador, la intensidad viene dada por la expresión:  $\tilde{I} = 10\angle 0$  A, con una frecuencia de 50Hz. Encontrad la expresión de la caída de potencial en bornes del condensador, sabiendo que tiene una capacidad de 1mF.

### Solución

En este problema un condensador se conecta a un generador de corriente alterna. La tensión del generador se puede expresar en función de la ley de Ohm en corriente alterna:

$$\tilde{V} = Z_C \tilde{I}$$

con

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{2\pi 50 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = -j3,18\Omega$$

Se dispone de la corriente por lo que la diferencia de potencial es:

$$\tilde{V} = -j3,18 \cdot 10 = -j31,8 \text{ V}$$

5. Un circuito formado por una bobina y un generador, tiene una frecuencia de 50 Hz y una intensidad máxima de 1 A. Si la potencia instantánea máxima es de 1 W:

- a) ¿Cuánto vale la inductancia?  
 b) ¿Cuánto vale la potencia media consumida?

**Solución**

a) La expresión de la inductancia compleja en corriente alterna es:

$$Z_L = jL\omega = jL2\pi50 = j100\pi L$$

la potencia instantanea máxima corresponde con la potencia aparente del circuito:

$$\tilde{S} = Q_L = |Z_L||\tilde{I}_L|^2 = \omega L|\tilde{I}_L|^2 = 1 \text{ VA}$$

Una corriente máxima de 1A circula por la bobina:  $|\tilde{I}_L| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A}$ . Se combina las ecuaciones anteriores para luego despejar el valor de  $L$ :

$$L = \frac{Q_L}{\omega|\tilde{I}_L|^2} = \frac{2}{100\pi} = 6,37 \text{ mH}$$

b) Para esta parte solo se necesita observar que la potencia media de una bobina es nula, no hay potencia activa consumida.

6. A partir del circuito de la figura siguiente con los datos:  $R = 100\Omega$ ,  $C = 32\mu\text{F}$ ,  $L = 1,26\text{H}$ ,  $\tilde{V}_0 = 50\angle 0\text{V}$  y  $f = 50\text{Hz}$ , responder a las siguientes preguntas:
- a) Calcular la impedancia equivalente del circuito visto desde el generador  $\tilde{V}$
- b) Dar la expresión en forma de fasor de la corriente  $\tilde{I}_2$  (se toma la tensión  $\tilde{V}_0$  como referencia de fase).
- c) Calcular la potencia activa proporcionada por el generador y el factor de potencia.

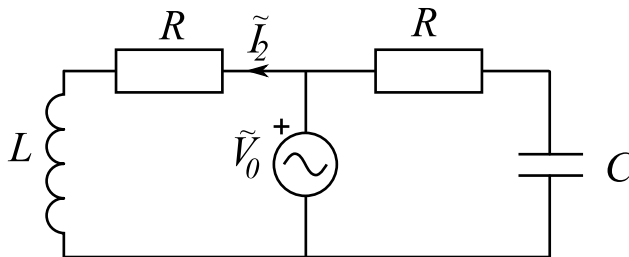


Figura del ejercicio 6.

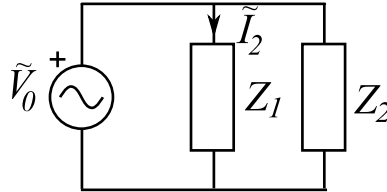
**Solución**

a) Para hallar la impedancia equivalente del circuito se debe de transformar la bobina y el condensador en su equivalente en impedancia compleja:

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j32 \cdot 10^{-6}2\pi50} = -j100\Omega$$

$$Z_L = jL\omega = j1,26 \cdot 2\pi 50 = j395\Omega$$

Primero se asocian las impedancias en serie en cada rama obteniendo el siguiente esquema:



Con las impedancias:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_C + R = 100 - j100\Omega \\ Z_2 &= Z_L + R = 100 + j395\Omega \end{aligned}$$

A partir de este esquema se calcula fácilmente la impedancia equivalente del circuito:

$$Z_{eq} = (Z_1 // Z_2) = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = 146,4 - j68,5\Omega$$

b) Para hallar la corriente  $\tilde{I}_2$  es razonable usar el esquema anterior. Aplicando la ley de Ohm a la impedancia  $Z_2$  se obtiene:

$$\tilde{V}_0 = Z_2 \tilde{I}_2$$

Teniendo en cuenta que la tensión  $\tilde{V}_0$  se toma como referencia de fase, el fasor asociado es:  $\tilde{V}_0 = 50\angle 0$  V. Sustituyendo se obtiene la corriente:

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_0}{Z_2} = \frac{50}{100 + j395} = 0,03 - j0,11 = 0,114\angle -74^\circ \text{ A}$$

c) La potencia y el factor de potencia se hallan gracias a la impedancia equivalente del circuito:

$$\tilde{S} = \tilde{V}_0 \tilde{I}^* = \frac{|\tilde{V}_0|^2}{Z_{eq}^*} = \frac{50^2}{146,4 + j68,5} = 14 - j6,5 \text{ VA}$$

La potencia activa es por lo tanto:  $P_a = 14$  W.

El factor de potencia es:

$$fp = \frac{14}{\sqrt{14^2 + 6,5^2}} = 0,907$$

7. En el circuito de la figura siguiente los dos generadores tienen la misma frecuencia. con los siguientes datos:  $Z_1 = 1 + j\Omega$ ,  $Z_2 = -j2\Omega$ ,  $Z_3 = 1 + j\Omega$ ,  $Z_C = -j2\Omega$ ,  $V_1(t) = 50\sqrt{2}\cos(\omega t)$  V y  $V_2(t) = 20\sqrt{2}\sin(\omega t)$  V. A partir de estos datos:



- Calcular las corrientes  $\tilde{I}_1$  e  $\tilde{I}_2$  del circuito
- Dibujar el diagrama de fasores incluyendo las tensiones de las fuentes y la tensión del condensador.
- Calcular la potencia producida por  $\tilde{V}_1$  y  $\tilde{V}_2$ .

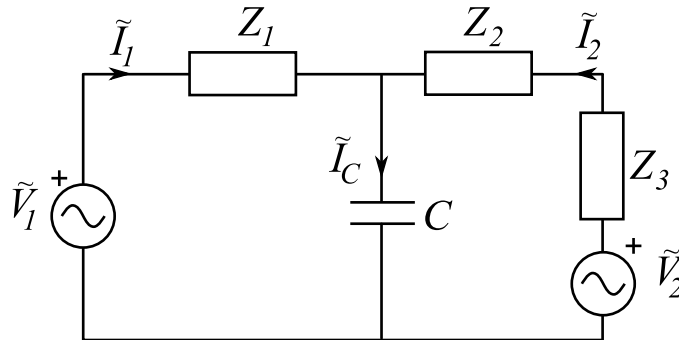


Figura del ejercicio 7.

**Solución**

a) Para hallar las intensidades  $\tilde{I}_1$  e  $\tilde{I}_2$  se han de establecer las ecuaciones con las leyes de Kirchhoff. Primero se va a expresar las tensiones  $\tilde{V}_1$  y  $\tilde{V}_2$ . La tensión  $\tilde{V}_1$  puede elegirse como referencia de fase. Entonces la tensión  $\tilde{V}_2$  tendrá un desfase de  $90^\circ$  con respecto a la otra tensión dado que  $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90^\circ)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= 50\angle 0^\circ V \\ \tilde{V}_2 &= 20\angle -90^\circ V\end{aligned}$$

Ahora se pueden escribir las ecuaciones del circuito con dos mallas y un nudo, con  $I_c$  la corriente del condensador en el centro del circuito:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 - \tilde{I}_1 Z_1 - \tilde{I}_c Z_c &= 0 \\ \tilde{V}_2 - \tilde{I}_2 (Z_3 + Z_2) - \tilde{I}_c Z_c &= 0 \\ \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 &= \tilde{I}_c\end{aligned}$$

El sistema se expresa en forma matricial para la resolución:

$$\begin{pmatrix} Z_1 & 0 & Z_c \\ 0 & Z_2 + Z_3 & Z_c \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo;

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+j & 0 & -2j \\ 0 & 1-j & -2j \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 50 \\ -j20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39+3j \\ -18+4j \\ 21+7j \end{pmatrix}$$

- Se procede a estudiar el diagrama de fasores del circuito con  $\tilde{V}_1$ ,  $\tilde{V}_2$  y  $\tilde{V}_c$

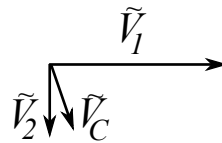
siendo tensión del condensador. Los tres fasores tienen la siguiente expresión:

$$\tilde{V}_1 = 50\angle 0 \text{ V}$$

$$\tilde{V}_2 = 20\angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\tilde{V}_c = \tilde{I}_c Z_c = (21 + 7j)(-2j) = 14 - 42j = 44,2\angle -71,5^\circ \text{ V}$$

El diagrama de fasores sería como sigue:



c) La potencia de las fuentes se calculan a partir de las tensiones y corrientes de cada una:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_1 &= \tilde{V}_1 \tilde{I}_1^* = 50(39 - 3j) = 1950 - 150j \text{ VA} \\ \tilde{S}_2 &= \tilde{V}_2 \tilde{I}_2^* = -j20(-18 - 4j) = -80 + 360j \text{ VA}\end{aligned}$$

8. Dado el circuito de la figura siguiente calcular la expresión (teórica) de la corriente  $\tilde{I}_n$  en función de los parámetros del circuito. Datos:  $Z_1 = 2 + j2\Omega$ ,  $Z_n = 1 + j3\Omega$ ,  $Z_2 = 2 + j2\Omega$ ,  $\tilde{V}_1 = 50\angle 0\text{V}$  y  $\tilde{V}_2 = 50\angle \theta\text{V}$

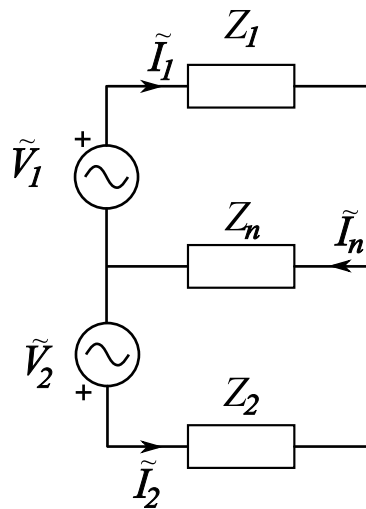


Figura del ejercicio 8.

### Solución

Para hallar la corriente  $\tilde{I}_n$  conviene aplicar las leyes de Kirchhoff. El circuito consta de dos mallas y un nudo independiente por lo que se obtienen las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 - Z_1 \tilde{I}_1 - Z_n \tilde{I}_n &= 0 \\ \tilde{V}_2 - Z_2 \tilde{I}_2 - Z_n \tilde{I}_n &= 0 \\ \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 &= \tilde{I}_n\end{aligned}$$

La formulación matricial del problema es:

$$\begin{pmatrix} -Z_1 & 0 & -Z_n \\ 0 & -Z_2 & -Z_n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{V}_1 \\ -\tilde{V}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se puede resolver esta matriz usando el teorema de Cramer o simplemente usando las ecuaciones iniciales y sustituir los valores. Se obtiene:

$$\tilde{I}_n = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_1 - Z_n \tilde{I}_n}{Z_1} + \frac{\tilde{V}_2 - Z_n \tilde{I}_n}{Z_2}$$

Se agrupan los terminos en  $\tilde{I}_n$ :

$$\tilde{I}_n \left( \frac{Z_n}{Z_1} + \frac{Z_n}{Z_2} \right) = \frac{\tilde{V}_1}{Z_1} + \frac{\tilde{V}_2}{Z_2}$$

Finalmente:

$$\tilde{I}_n = \frac{\frac{\tilde{V}_1}{Z_1} + \frac{\tilde{V}_2}{Z_2}}{Z_n \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)} = (0,05 - j0,15)(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2) = (2,5 - j7,5)(1 + 1\angle\theta)A$$

9. En el circuito de la figura siguiente la carga  $Z_1$  absorbe una potencia aparente de 10kVA y tiene un factor de potencia de 0.75 inductivo (es decir en atraso). Datos:  $Z_2 = 2 + j\Omega$ ,  $Z_C = -3j\Omega$ .

- Calcular la potencia activa y reactiva de la carga  $Z_1$ .
- Sabiendo que la corriente eficaz que circula por  $Z_1$  es de 100A, calcular la potencia activa y reactiva total del circuito, su factor de potencia y la impedancia total equivalente del circuito.

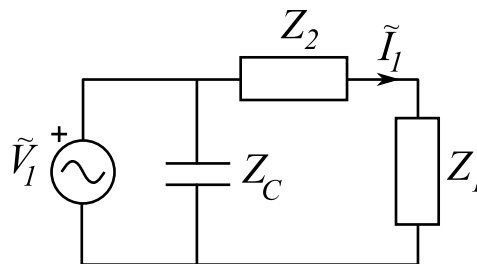


Figura del ejercicio 9.

### Solución

a) Se conoce el valor de la potencia aparente absorbida y el factor de potencia de la carga  $Z_1$ . Primero se halla su ángulo:

$$\cos \varphi = 0,75$$

Por lo que el ángulo de la carga vale:  $\varphi = \arccos(0,75) = 41,4^\circ$ . El ángulo es

positivo dado que el factor de potencia es inductivo. La potencia compleja se descompone como:

$$\tilde{S}_1 = |\tilde{S}_1| \cos \varphi + j|S_1| \sin \varphi = 10 \cdot 0,75 + j10 \cdot \sin 41,4 = 7,5 + j6,61 \text{ kVA}$$

Por lo tanto la potencia activa es de 7,5kVA y la reactiva de 6,61kVA.

b) Se conoce ahora la corriente que circula por  $Z_1$ . Es la misma corriente que circular por  $Z_2$ . La potencia consumida por esta carga es entonces:

$$\tilde{S}_2 = Z_2 |I_1|^2 = (2 + j)100^2 = 20000 + j10000 = 20 + j10 \text{ kVA}$$

La potencia total de las dos cargas es:

$$\tilde{S}' = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 = 27500 + j16610 \text{ VA}$$

El módulo es  $|\tilde{S}'| = 32126 \text{ VA}$ . Por otro lado el módulo de  $\tilde{S}'$  es igual a:

$$|\tilde{S}'| = |\tilde{V}_1| |\tilde{I}_1|$$

Por lo que el módulo de la tensión de alimentación es  $|\tilde{V}_1| = 321 \text{ V}$ . Se puede ahora calcular la potencia reactiva del condensador:

$$|\tilde{S}_C| = \frac{|\tilde{V}_1|^2}{Z_C^*} = \frac{321^2}{3j} = -j34407 \text{ VA}$$

La potencia total del sistema es:

$$\tilde{S}_T = \tilde{S}_C + \tilde{S}' = 27500 - j17794 \text{ VA}$$

El factor de potencia es:

$$fp = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{27500}{\sqrt{27500^2 + 17794^2}} = 0,84$$

y el ángulo asociado es:  $\varphi = \arccos(0,84) = -33^\circ$  (es capacitivo). La impedancia total del sistema también se puede hallar. Su módulo vale:

$$|Z_T| = \frac{|\tilde{V}_1|^2}{|\tilde{S}_T|} = \frac{321^2}{32722} = 3,14 \Omega$$

La impedancia total es entonces:

$$Z_T = 3,14 \angle -33^\circ \Omega$$

10. Un sistema eléctrico se compone de una red de alumbrado de 3000W y de 4 motores eléctricos consumiendo una potencia aparente de 4000VA cada uno con un factor de potencia de 0,8 inductivo.
- Calcular el factor de potencia del sistema.
  - Se quiere rectificar el factor de potencia del sistema hasta 0,95. Cual es la potencia de la batería de condensadores que se necesita?

**Solución**

a) Para calcular el factor de potencia se determina primero la potencia activa del sistema. El alumbrado tiene 3000W y es únicamente potencia activa. Los motores consumen 4000VA cada uno y su factor de potencia es de 0,8. La potencia activa de cada motor es:  $4000 \cdot 0,8 = 3200\text{W}$ . La potencia activa total es:

$$P_a = 3000 + 4000 \cdot 4 \cdot 0,8 = 15800 \text{ W}$$

La potencia reactiva se obtiene calculando el seno del ángulo del factor de potencia, teniendo  $\sin \varphi = \sin(\arccos(0,8)) = 0,6$ :

$$Q_a = 4000 \cdot 4 \cdot 0,6 = 9600 \text{ VAR}$$

El factor de potencia de la instalación es:

$$fp = \frac{P_a}{\sqrt{P_a^2 + Q_a^2}} = \frac{15800}{\sqrt{15800^2 + 9600^2}} = 0,85$$

b) Para rectificar el factor de potencia de la instalación se necesita añadir una batería de condensadores a la entrada de la instalación. Se usa la fórmula que nos proporciona directamente la potencia del condensador:

$$Q_c = P_a \sqrt{\frac{1 - f_{pl}^2}{f_{pl}^2}} - Q_a = 15800 \sqrt{\frac{1 - 0,95^2}{0,95^2}} - 9600 = -4406 \text{ VAR}$$

Una batería de condensadores superior a 4.4KVAR puede rectificar el factor de potencia hasta 0,95.

11. En el circuito de la figura siguiente los dos generadores y la fuente de corriente tienen la misma frecuencia. Datos del problema:  $Z_1 = 2 + j\Omega$ ,  $Z_2 = 2 + 2j\Omega$ ,  $Z_3 = 2 - 4j\Omega$ ,  $Z_4 = 2\Omega$ ,  $Z_5 = 2\Omega$ ,  $Z_6 = 1\Omega$ ,  $Z_7 = 8\Omega$ ,  $\tilde{V}_1 = 40\angle 0^\circ \text{ V}$  y  $\tilde{V}_2 = 10\angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $\tilde{I}_6 = 5 - 5j \text{ A}$ . Realizar las siguientes operaciones:
- Calcular las corrientes del circuito.
  - Comprobar que se cumple el balance de potencias del circuito mediante el teorema de Tellegen.

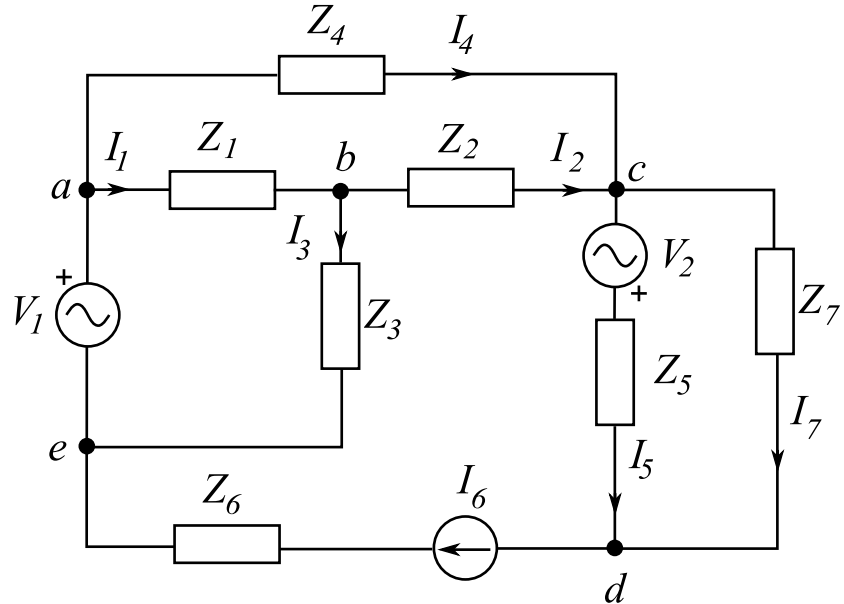


Figura del ejercicio 11.

**Solución**

a) Para resolver este circuito conviene primero simplificarlo al máximo. Si prestamos atención al nudo marcado  $c$ , se puede establecer una relación entre las corrientes de este nudo:

$$\tilde{I}_2 + \tilde{I}_4 = \tilde{I}_5 + \tilde{I}_7$$

Sin embargo si uno se fija bien en el nudo  $d$ , se deduce la ecuación:

$$\tilde{I}_6 = \tilde{I}_5 + \tilde{I}_7$$

Dado que se conoce el valor de la fuente de corriente  $\tilde{I}_6$ , se deduce directamente una de las ecuaciones del circuito:

$$\tilde{I}_2 + \tilde{I}_4 = \tilde{I}_6 = 5 - 5j \text{ A}$$

Dejando de momento las intensidades  $\tilde{I}_5$  e  $\tilde{I}_7$  se van a establecer las ecuaciones para determinar  $\tilde{I}_1$ ,  $\tilde{I}_2$ ,  $\tilde{I}_3$ ,  $\tilde{I}_4$ . Se aplica la ley de Kirchhoff en tensiones a dos mallas y el balance de corriente a dos nudos:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 - Z_1 \tilde{I}_1 - Z_3 \tilde{I}_3 &= 0 \\ Z_4 \tilde{I}_4 &= Z_1 \tilde{I}_1 + Z_2 \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_1 &= \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 \\ \tilde{I}_2 + \tilde{I}_4 &= \tilde{I}_6 \end{aligned}$$

Se obtiene la forma matricial del problema:

$$\begin{pmatrix} Z_1 & 0 & Z_3 & 0 \\ -Z_1 & -Z_2 & 0 & Z_4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_3 \\ \tilde{I}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{I}_6 \end{pmatrix}$$

Se puede invertir esta matriz usando por ejemplo un programa de cálculo numérico:

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_3 \\ \tilde{I}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+j & 0 & 2-4j & 0 \\ -2-j & -2-2j & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 5-5j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2j \\ -1-4j \\ 5+6j \\ 6-j \end{pmatrix}$$

Es tiempo ahora de calcular las corrientes  $\tilde{I}_5$  e  $\tilde{I}_7$ . A partir del circuito se obtiene:

$$\begin{aligned} Z_7 \tilde{I}_7 &= -\tilde{V}_2 + Z_5 \tilde{I}_5 \\ \tilde{I}_6 &= \tilde{I}_5 + \tilde{I}_7 \end{aligned}$$

Se resuelve:

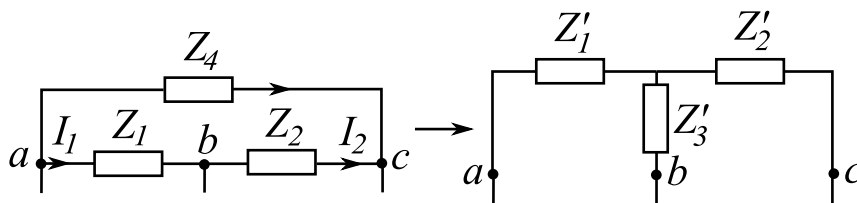
$$\begin{pmatrix} -Z_5 & Z_7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_5 \\ \tilde{I}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{V}_2 \\ \tilde{I}_6 \end{pmatrix}$$

Se obtienen las corrientes:

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_5 \\ \tilde{I}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -10 \\ 5-5j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4j \\ -j \end{pmatrix}$$

Notese que en ningún momento del problema se ha necesitado  $Z_6$  dado que en esta rama se tiene un generador de corriente en serie.

Esta resolución directa implica muchos cálculos, se puede resolver el circuito de una forma diferente usando primero el teorema de Kenelly para después usar el método de la mallas. Entre los nudos  $a$ ,  $b$  y  $c$  se puede transformar las tres impedancias  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_4$  conectadas en triángulo en tres impedancias equivalente conectadas en estrella tal como en la figura siguiente:



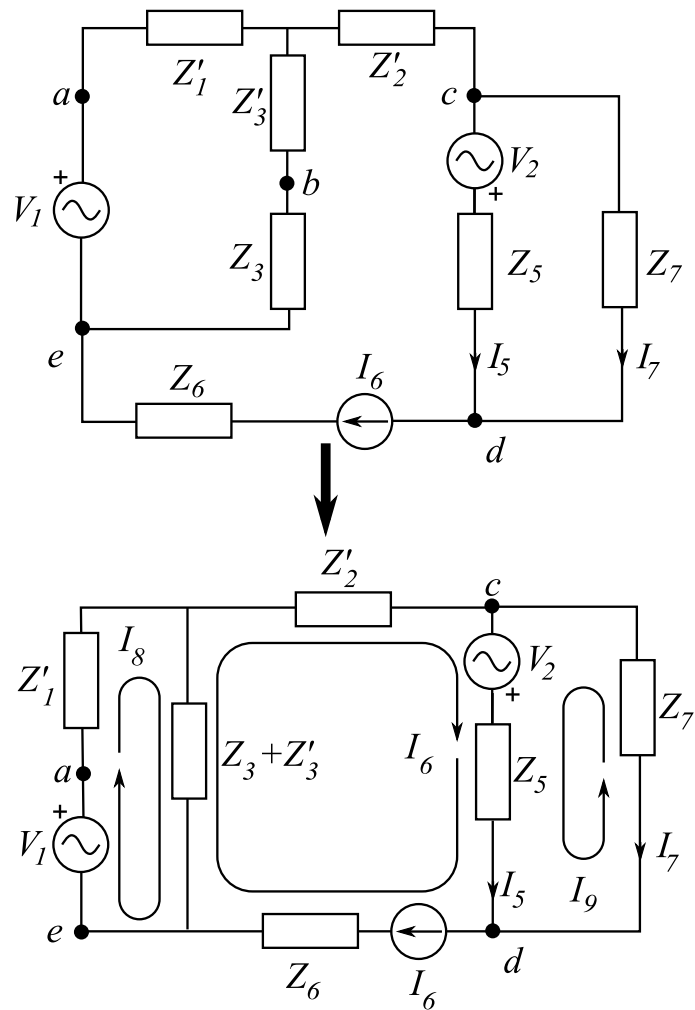
La impedancias se expresan como sigue:

$$Z'_1 = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_2 + Z_4} = \frac{2}{3}$$

$$Z'_2 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 + Z_2 + Z_4} = \frac{4}{15}(4 + j)$$

$$Z'_3 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_4} = \frac{2}{3}(1 + j)$$

El circuito una vez transformado se puede analizar con el método de las mallas:



En el circuito anterior se ha marcado las tres mallas con las corrientes  $I_6$ ,  $I_8$  e  $I_9$ . Las ecuaciones de las mallas son las siguientes:

$$V_1 - Z'_1 I_8 - (Z'_3 + Z_3)(I_8 - I_6) = 0$$

$$V_2 - Z_6(I_9 + I_6) - Z_7 I_9 = 0$$



Despejando  $I_8$  e  $I_9$ :

$$I_8 = \frac{V_1 + I_6(Z'_3 + Z_3)}{Z'_1 + Z'_3 + Z_3} = 10 + j \text{ A}$$

$$I_9 = \frac{V_2 + Z_6 I_6}{Z_5 + Z_7} = j \text{ A}$$

A partir de las corrientes anteriores se puede deducir fácilmente las otras corrientes cuyas ecuaciones son:

$$I_7 = -I_9 = -j \text{ A}$$

$$I_3 = I_8 - I_6 = 10 + j - (5 - 5j) = 5 + 6j \text{ A}$$

$$I_5 = I_9 + I_6 = j + 5 - 5j = 5 - 4j \text{ A}$$

$$I_1 + I_4 = I_8$$

$$Z_1 I_1 + Z_2 I_2 = Z_4 I_4$$

$$I_2 + I_4 = I_6$$

Después de unas operaciones elementales se pueden despejar las tres últimas corrientes:

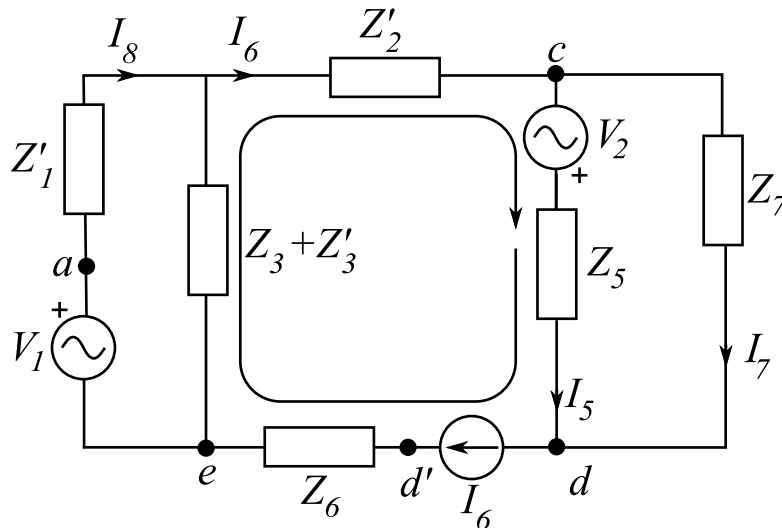
$$I_1 = 4 + 2j \text{ A}$$

$$I_2 = -1 - 4j \text{ A}$$

$$I_4 = 6 - j \text{ A}$$

Lo que se ha encontrado anteriormente.

b) Para aplicar el teorema de Telegen se necesita conocer todas las corrientes y tensiones del circuito. Falta únicamente la tensión  $V_{ed}$  que se puede hallar gracias a la malla del circuito modificado siguiente:



La ecuación de la malla es la siguiente:

$$V_{ed} + I_3(Z_3 + Z'_3) - I_6 Z'_2 + V_2 - I_5 Z_5 = 0$$

El resultado numérico de la ecuación es:

$$V_{ed} = -26,67 - 11,33j \text{ V}$$

La diferencia de potencial  $V_{d'd}$  de la fuente de corriente  $I_6$  es entonces:

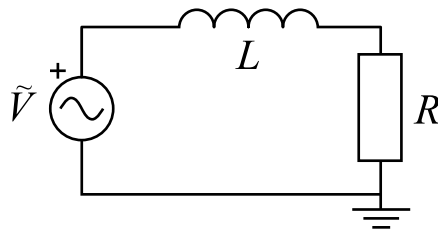
$$V_{d'd} = V_{ed} + Z_6 I_6 = -26,67 - 11,33j + 1(5 - 5j) = -21,67 - 16,33j \text{ V}$$

El teorema de Tellegen se aplica al circuito anterior para las fuentes por un lado y para las impedancias por otro lado:

$$V_1 I_8^* + V_2 I_5^* + V_{d'd} I_6^* = 40 \cdot (10 - j) + 10 \cdot (5 + 4j) + (-23 - 15j) \cdot (5 + 5j) = 423,3 - 190j \text{ VA}$$

$$Z'_1 |I_8|^2 + (Z_3 + Z'_3) |I_3|^2 + Z'_2 |I_6|^2 + Z_5 |I_5|^2 + Z_7 |I_7|^2 = 423,3 - 190j \text{ VA}$$

Se cumple el teorema de Tellegen para nuestro circuito, lo que en general es de esperar.



12.

Figura del ejercicio 12.

Dado el circuito de la figura anterior realizar las siguientes tareas:

- Calcular la impedancia equivalente del circuito.
- Calcular la potencia compleja consumida por el dispositivo
- Variando la resistencia  $R$  de 0 al infinito. ¿Como varia la potencia en el plano complejo PQ? (Pista: usar las transformaciones de la rectas por la aplicación  $f(z) = 1/z$ )
- ¿Cuál es el valor óptimo de la resistencia que maximiza la potencia activa consumida? Buscar la solución de forma geométrica en el plano PQ.

**Solución:**

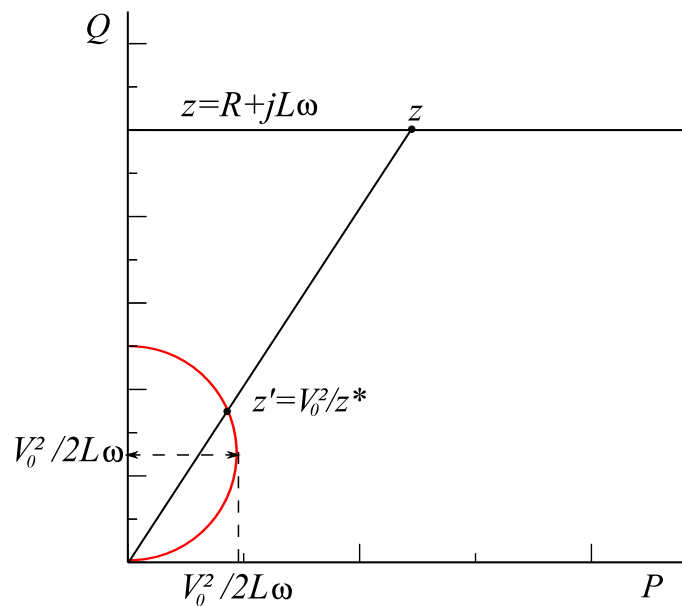
a) En regimen armónico se pueden escribir la impedancia equivalente del circuito como la suma en serie de la resistencia y de la autoinductancia:

$$Z_{eq} = R + jL\omega$$

b) Se supone una fuente de tensión alterna con la expresión:  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$  y con el fasor asociado:  $\tilde{V} = V_0 \angle 0$ . Se puede calcular a partir de ello la potencia consumida por el circuito:

$$\tilde{S} = \tilde{V} \tilde{I}^* = \frac{|\tilde{V}|^2}{Z_{eq}^*} = \frac{V_0^2}{R - jL\omega}$$

c) La potencia del circuito en forma fasorial tiene una componente real y imaginaria. Variando el valor de la resistencia  $R$  de 0 al infinito las componentes de la potencia varían en el plano complejo. Para poder tener una aproximación de esta evolución primero se puede remarcar que la ecuación  $z(R) = R - jL\omega$  representa una recta en el plano complejo. Existe un teorema de análisis compleja que permite encontrar el conjunto de puntos equivalente a la ecuación  $\frac{1}{z(R)}$ , es decir la inversa de una recta. En nuestro caso la (semi) recta es paralela al eje real, al variar únicamente la parte real. La imagen de una recta de ecuación  $z = x - jb$  con  $b$  constante por la aplicación  $z' \rightarrow \frac{1}{z^*}$  es el círculo de centro  $(0, 1/2b)$  y de radio  $1/2b$ . En la figura siguiente se enseña la recta y su imagen por la aplicación inversa. Para la potencia compleja  $S$  el círculo tendrá su centro en el punto  $(0, V_0^2/2L\omega)$  y como radio  $V_0^2/2L\omega$ . Solo se considera el semi círculo el semi plano derecho del plano complejo dado que  $R$  es siempre positivo.



Inversión de una recta y potencia compleja en el plano PQ.

d) Valor óptimo de la resistencia para obtener la potencia activa máxima. Gráficamente se puede ver que la potencia activa que se puede consumir es

$$P_{max} = \frac{V_0^2}{2L\omega}$$

En este caso es fácil demostrar que  $R = L\omega$  igualando  $P_{max}$  con la parte real de  $S$  e identificando:

$$\Re\{S\} = \Re\left\{\frac{V_0^2}{R - jL\omega}\right\} = \Re\left\{\frac{V_0^2(R + jL\omega)}{R^2 + (L\omega)^2}\right\} = \frac{V_0^2 R}{R^2 + (L\omega)^2} = \frac{V_0^2}{2L\omega}$$

De allí se obtiene:

$$R^2 + (L\omega)^2 - 2RL\omega = 0$$

resolviendo la ecuación en  $R$  resulta:  $R = L\omega$ .

## 2.8 Problemas adicionales

- Una resistencia se conecta a un generador de corriente alterna de 10V de f.e.m. máxima y una frecuencia de 50 Hz. Se observa que la resistencia consume una potencia de 5W. ¿Cuánto vale la resistencia?  
Respuesta: 10 ohmios
- Una resistencia y un condensador se conectan en paralelo a un generador de corriente alterna. El generador eléctrico suministra una f.e.m. de pico de 300 V con una frecuencia de 50 Hz, el condensador tiene una capacidad de  $50\mu\text{F}$  y la resistencia es de  $100\Omega$ . Calcular:
  - La impedancia equivalente del circuito.
  - La corriente que circula por cada elemento del circuito.
  - La corriente eficaz a través de la resistencia y el condensador.
 Respuesta: a)  $Z = 28,84 - j45,3\Omega$  b)  $\tilde{I}_g = 4\angle 57,5^\circ \text{A}$ ,  $\tilde{I}_R = 3/\sqrt{2}\angle 0 \text{A}$ ,  $\tilde{I}_C = 3,33\angle 90^\circ \text{A}$ .
- A un circuito serie RLC se le aplica una tensión  $\tilde{V} = 50/\sqrt{2}\angle 0\text{V}$  de 50Hz. Si  $R=100\Omega$ ,  $L=10\text{mH}$  y  $C=2\mu\text{F}$  calcular:
  - Impedancia equivalente.
  - El factor de potencia.
  - Dibujar el diagrama de fasores.
  - La potencia media consumida y la expresión de la potencia aparente.
 Respuesta: a)  $Z = 100 - j1585\Omega$ ; b)  $fp = 0,063$ ; c)  $P = 0,049 \text{ W}$ ,  $|\tilde{S}| = 0,787\text{VA}$
- Se tiene un circuito RCL serie, formado por un generador eléctrico de f.e.m. de pico 300 V y 50 Hz de frecuencia, un condensador de capacidad  $50\mu\text{F}$ , una bobina de coeficiente de autoinducción 10mH y una resistencia de  $70\Omega$ . Calcular:
  - La impedancia equivalente.
  - La intensidad de corriente que recorre el circuito.
  - Las caídas de potencial en cada elemento.
 Respuesta: a)  $Z = 70 - j60,5\Omega$  b)  $\tilde{I} = 2,3\angle 40,84^\circ \text{A}$ ; c)  $\tilde{V}_R = 161\angle 40,84 \text{V}$ ,  $\tilde{V}_L = 7,2\angle 130,84^\circ \text{V}$ ,  $\tilde{V}_C = 146,4\angle -49,16^\circ \text{V}$ .
- A un circuito RLC en paralelo de valores  $R=10\Omega$ ,  $L=4 \text{ mH}$  y  $C= 20\mu\text{F}$ , se le aplica una diferencia de potencial de  $V = 100/\sqrt{2}\angle 0\text{V}$  a 796Hz. Calculad:
  - La impedancia total.
  - La intensidad eficaz que se suministra al circuito.
  - El factor de potencia.
 Respuesta: a)  $Z = 8 - j4\Omega$ ; b)  $\tilde{I} = 7,91\angle 26^\circ \text{A}$ ; c)  $fp = 0,894$

6. Un generador eléctrico tiene una tensión eficaz de 300V y una frecuencia de 1000 Hz, alimenta, en serie a una bobina y una resistencia. La bobina tiene un coeficiente de autoinducción de  $5 \cdot 10^{-3}$  H, y la resistencia es de  $50\Omega$ . Determinar:
- La impedancia equivalente.
  - La intensidad de corriente que recorre el circuito.
  - Las caídas de potencial en cada elemento.
  - La potencia media suministrada por el generador y la consumida por cada elemento.
  - El factor de potencia del circuito.
  - Construir el diagrama de fasores del circuito.
  - La capacidad de un condensador que, colocado en serie con el resto de elementos del circuito, consiga que el factor de potencia sea igual a 1.
- Respuesta: a)  $Z = 50 + j31,4\Omega$ ; b)  $\tilde{I} = 5,08\angle-32^\circ$  A; c)  $\tilde{V}_R = 254\angle-32^\circ$  V,  $\tilde{V}_L = 159,6\angle58^\circ$  V, d)  $P_R = 1290$ W,  $P_L = 0$ W,  $P_{gen} = 1290$ W, e)  $fp = 0,846$ , f)  $C = 5\mu$ F

7. El taller de una empresa contiene:
- 10 máquinas herramientas de 3000 VA con un factor de potencia de 0.8.
  - Una iluminación de 2000W.
- Suponiendo que las máquinas funcionan un 60% del tiempo:
- Calcular el factor de potencia medio.
  - Calcular la potencia de los condensadores para rectificar el factor de potencia hasta el 90% de media.
- Respuesta: a)  $fp=0.835$  b)  $Q_c = -2857$ VAR.
8. Dado el circuito de la figura siguiente con los siguientes datos:  $R_1 = 500\Omega$ ,  $R_2 = 200\Omega$ ,  $C = 50\mu$ F,  $V_0 = 50\angle 0$ V y  $f = 50$ Hz.

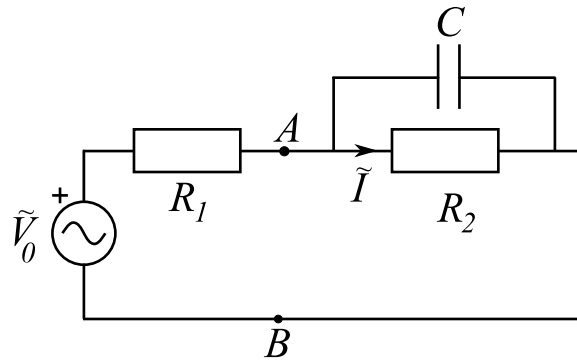


Figura ejercicio 8.

- Calcular la impedancia equivalente del circuito.
- Dar la expresión en forma de fasor de la corriente  $I$  (se toma la tensión  $V_0$  como referencia de fase).
- Se conectan los puntos A y B entre si con un cable de cobre. ¿Cuál es la nueva impedancia del circuito?

[Respuesta: a)  $Z_{eq} = 518,4 - j57,8\Omega$  b)  $I = 1,16 \cdot 10^{-2} - j2,6 \cdot 10^{-2}$  A]

9. A partir del circuito de la figura siguiente con los siguientes datos:  $Z_1 = ??\Omega$ ,  $Z_2 = 20 + j20\Omega$ ,  $Z_3 = 10 - j30\Omega$ ,  $C = 20\mu\text{F}$ ,  $\tilde{V}_1 = 150\angle 0^\circ\text{V}$  a 150Hz.

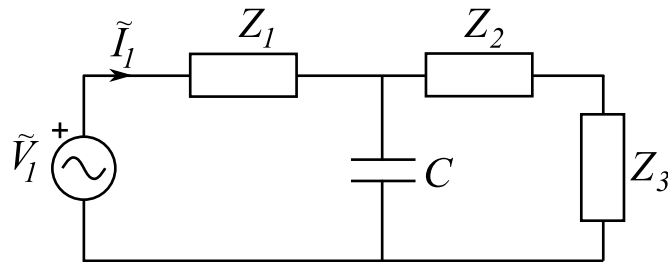


Figura ejercicio 9.

- Dar la expresión (teórica) de la impedancia equivalente del circuito dejando  $Z_1$  como variable.
- El módulo de la corriente  $I_1$  es de 4.5A, a partir de este dato hallar el módulo de la impedancia  $Z_{eq}$ .
- El elemento  $Z_1$  no consume potencia reactiva. Por otro lado el ángulo de la impedancia  $Z_{eq}$  es de  $\varphi = -7^\circ$ . A partir de esta información calcular el valor de  $Z_1$ .
- Calcular la potencia consumida por el circuito.

Respuesta: a)  $Z_{eq} = Z_1 + 17,3 - j16,6\Omega$ ; b)  $|Z_{eq}| = 33,3\Omega$  c)  $Z_1 = 13,4\Omega$  d)  $S = 670 - j82,2$  VA

10. Deducir la expresión impedancia equivalente del circuito de la figura 10.

- Resolver el circuito el circuito usando el teorema de superposición.
- Aplicar el teorema de Tellegen para verificar.

Respuesta: a)  $\tilde{I}_1 = -0,028 + j1,6\text{A}$ ,  $\tilde{I}_2 = 0,97 + j2,59\text{A}$ ,  $\tilde{I}_3 = 0,15 + j1,33\text{A}$ ,  $\tilde{I}_5 = 0,82 + j1,26\text{A}$

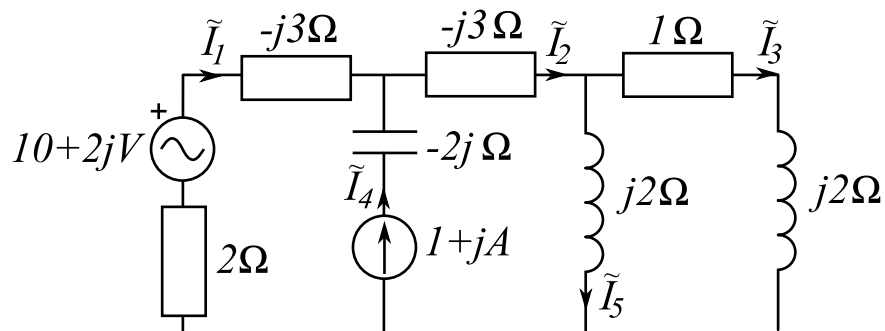


Figura ejercicio 10.

11. Deducir la expresión impedancia equivalente del circuito de la figura siguiente.

Respuesta:  $Z = R + jL\omega / (1 + (j\omega)^2 LC)$ .

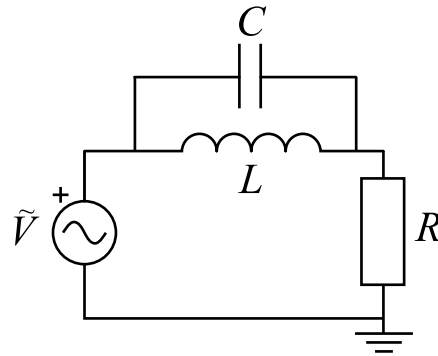


Figura ejercicio 12.

12. Deducir la expresión impedancia equivalente del circuito de la figura siguiente. Comparar con la expresión del ejercicio anterior

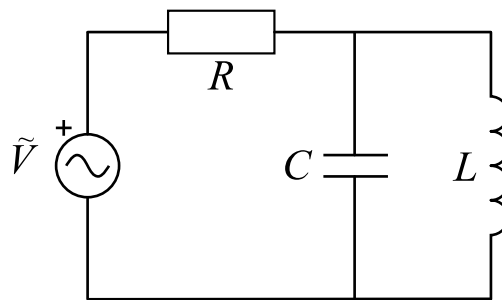


Figura ejercicio 13.

13. Calcular la tensión  $V_{out}$  en función de la tensión  $V_{in}$  y de los parámetros del circuito de la figura siguiente.

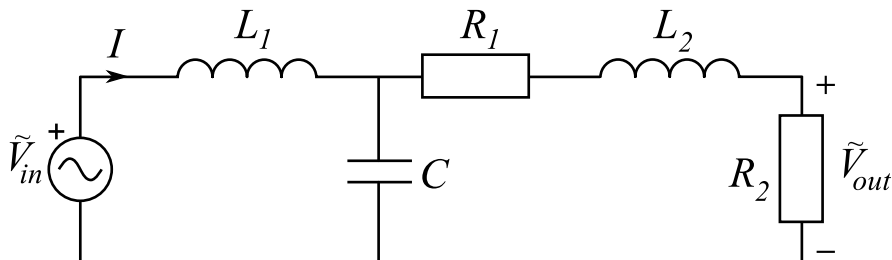


Figura ejercicio 14.

14. Deducir la expresión impedancia equivalente del circuito de la figura 14.  
 Respuesta:  $Z_{eq} = 1 + 2i\Omega$

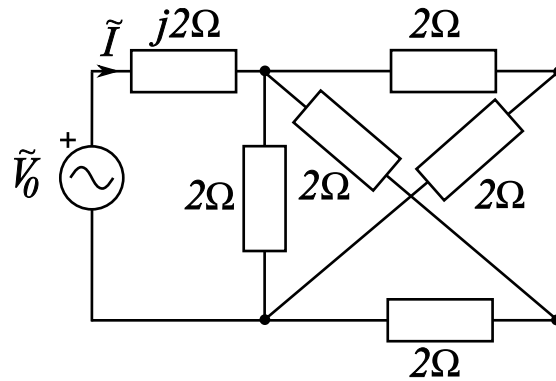


Figura ejercicio 14.

15. A partir del circuito de la figura 15:

a) Calcular la impedancia vista desde el generador  $\tilde{V}_0$ .

b) Calcular la corriente  $\tilde{I}$  y su desfase con respecto a  $\tilde{V}_0$

Respuesta: a)  $Z_{eq} = 3 - j3\Omega$  b)  $\tilde{I} = 0,5 + j1,5A$ .

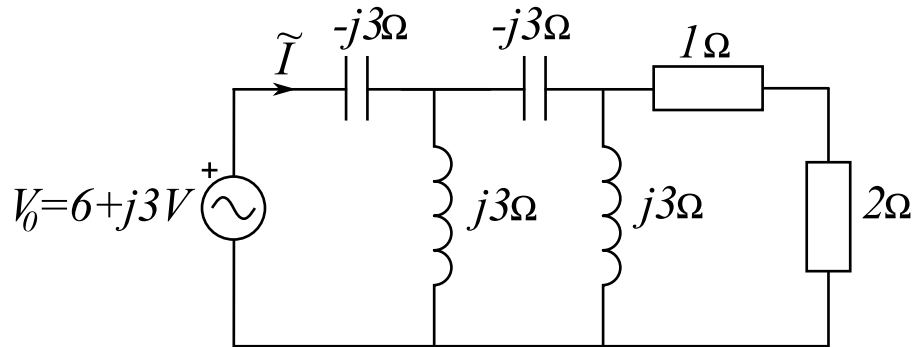


Figura ejercicio 15.

16. Deducir la corriente  $\tilde{I}$  de la figura 15 visto desde el generador. Datos:

$\alpha = 2V/A$ ,  $\tilde{V}_0 = 10\angle 0V$

Respuesta:  $\tilde{I} = 1,14 + j2,62A$

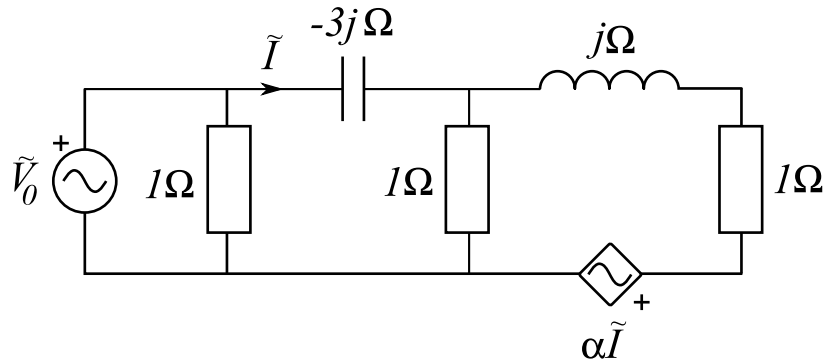


Figura ejercicio 16.





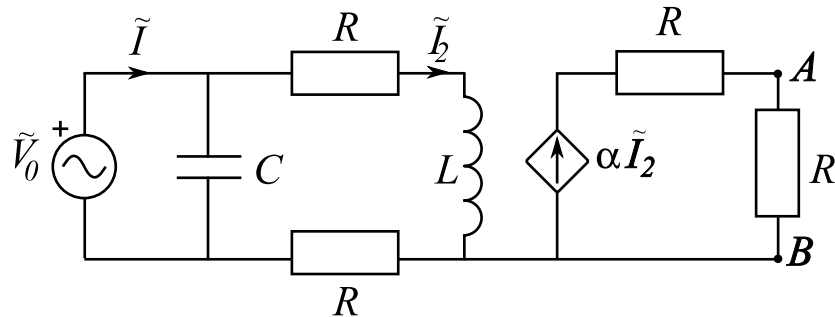


Figura ejercicio 19.

20. A partir del circuito de la figura 20 hallar:

- la impedancia equivalente vista desde el generador.
- la corriente producida por el generador.
- las corrientes marcadas en las figuras.
- la potencia activa y reactiva del generador.

Respuesta: a)  $Z_{eq} = 1 - j\Omega$  b)  $\tilde{I}_g = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 75^\circ \text{A}$  c)  $\tilde{I} = 2,35 \angle -15^\circ \text{A}$  d)  $S = 50 - j50 \text{VA}$ .

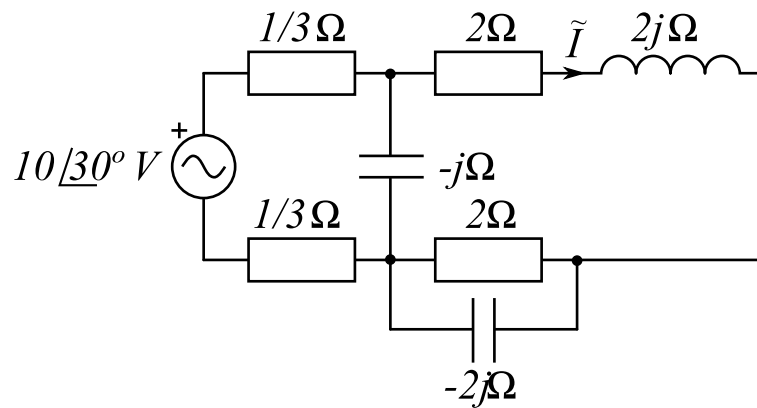


Figura ejercicio 20.

21. A partir del circuito de la figura 21 hallar:

- la impedancia equivalente vista desde el generador.
- la corriente producida por el generador.
- las corrientes marcadas en las figuras.
- la potencia activa y reactiva del generador.

Respuesta: a)  $Z_{eq} = 3,67 + j1,58\Omega$  b)  $\tilde{I}_0 = 5,03 \angle -23,4^\circ \text{A}$  c)  $\tilde{I}_1 = 3 \angle -55,3^\circ \text{A}$ ,  $\tilde{I}_2 = 2,94 \angle 9,1^\circ \text{A}$ , d)  $\tilde{S} = 92,3 + j40 \text{VA}$ .

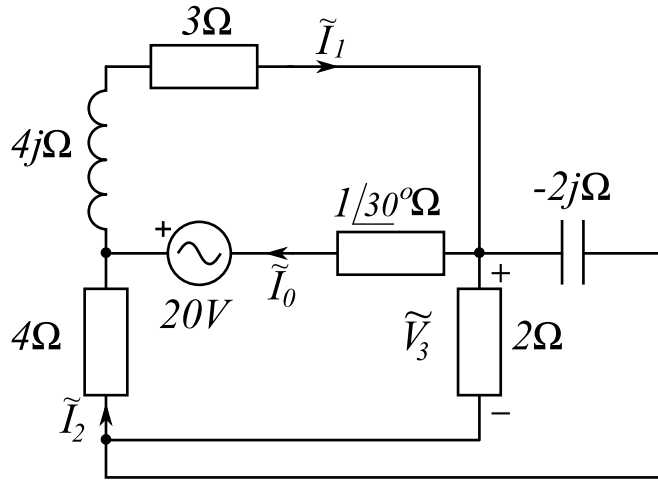


Figura ejercicio 21.

22. A partir del circuito de la figura 22 hallar:

- a) la impedancia equivalente vista desde el generador.
- b) la corriente producida por el generador.
- c) las corrientes marcadas en las figuras.
- d) la potencia activa y reactiva del generador.

«“iHEAD Respuesta: a)  $Z_{eq} = 1,71\Omega$  b)  $\tilde{I}_T = 1,16 + j1,16A$  c)  $\tilde{I}_1 = 0,83 + j/3A$ ,  $\tilde{I}_2 = 1/3 + j0,83A$ ,  $\tilde{I}_3 = 0,16 - j0,16A$ ,  $\tilde{I}_4 = 2/3 + j0,5A$ ,  $\tilde{I}_5 = -0,5 - j2/3A$  d)  $\tilde{S} = 4,66VA$ .

===== Respuesta: a)  $Z_{eq} = 1,71\Omega$  b)  $\tilde{I}_T = 1,16 + j1,16A$  c)  $\tilde{I}_1 = 0,83 + j/3A$ ,  $\tilde{I}_2 = 1/3 + j0,83A$ ,  $\tilde{I}_3 = 0,16 - j0,16A$ ,  $\tilde{I}_4 = 2/3 + j0,5A$ ,  $\tilde{I}_5 = -0,5 - j2/3A$  d)  $S = 4,66VA$ .

”»i2cd1714b281478b77308da7052147cca6593a2a

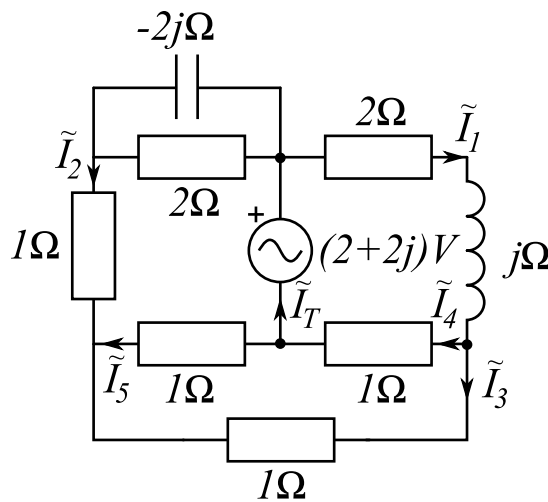


Figura ejercicio 22.

23. A partir del circuito de la figura 23 hallar:
- la impedancia equivalente vista desde el generador.
  - la corriente producida por el generador.
  - las corrientes marcadas en las figuras.
  - la potencia activa y reactiva del generador.

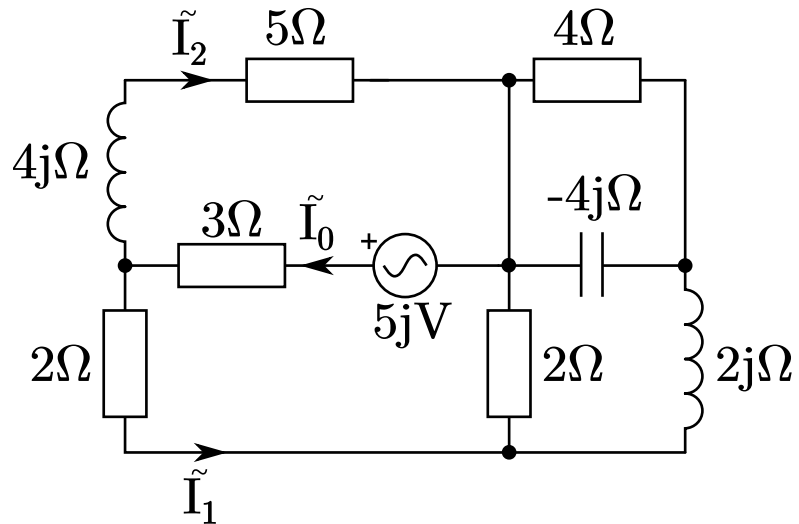
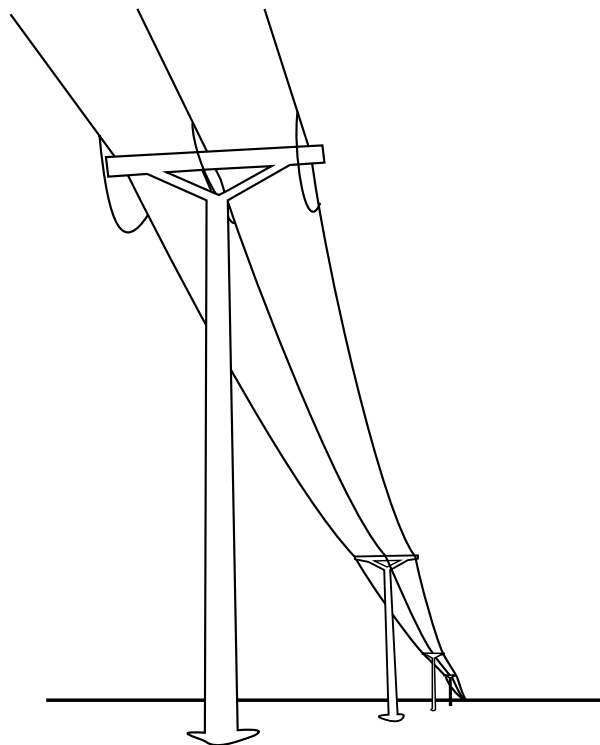


Figura ejercicio 23.

### 3 Corriente alterna trifásica

---



Las corrientes alternas trifásicas es la forma de suministro eléctrico más común en la industria. Presentan grandes ventajas frente a las corrientes continuas para el transporte de la energía. El uso de una corriente alterna permite la transformación y el transporte sobre grandes distancias de la electricidad. Otra ventaja reside en un mejor uso de la potencia en motores de alterna frente a una alimentación monofásica, gracias a la generación de campos magnéticos giratorios. Se estudiará también que la generación de estas corrientes es sencilla con el uso de máquinas eléctricas de tipo alternadores o máquinas síncronas en el capítulo 6. Cabe destacar que la gran ventaja de los sistemas trifásicos con respecto a los sistemas monofásicos es la potencia activa total constante en el tiempo. La po-

tencia de un sistema trifásico no varía en el tiempo<sup>1</sup> lo que resulta una ventaja para diseñar redes eléctricas y para el diseño de equipos industriales de potencia.

### 3.1 Fundamentos de la corriente trifásica

Un sistema trifásico consiste en tres magnitudes eléctricas sinusoidales con la misma amplitud y la misma frecuencia pero con fases distintas. Un ejemplo genérico de sistema de tensiones trifásico  $a$ ,  $b$  y  $c$  se puede escribir como:

$$\tilde{V}_a = V_0 \angle \theta, \quad (3.1)$$

$$\tilde{V}_b = V_0 \angle (\theta - 2\pi/3), \quad (3.2)$$

$$\tilde{V}_c = V_0 \angle (\theta + 2\pi/3). \quad (3.3)$$

Son tres fasores de misma amplitud y con desfases relativos de  $2\pi/3$  entre ellos. Si este sistema representa las tensiones de tres generadores con la misma tensión de referencia, se dispone entonces de una fuente trifásica con cuatro hilos como enseñado en la figura 3.1 (b). La línea de referencia se llama neutro en los sistemas eléctricos y viene marcada la letra  $n$ . Un sistema de tres corrientes con las mismas características forma también un sistema trifásico al igual que podemos concebir un generador de corrientes trifásico. Hay dos formas de organizar las tensiones (o corrientes), la sucesión de las fases puede ser una de las siguientes formas:

- $V_a \rightarrow V_b \rightarrow V_c$ , es el sentido directo de las fases.
- El sentido indirecto consiste en la secuencia  $V_a \rightarrow V_c \rightarrow V_b$ .

Siempre se mantiene la diferencia de fase de  $2\pi/3$  entre fases, pero el orden de asignación de este desfase puede variar.

Una propiedad importante de la fuente trifásica reside en que la suma de las tensiones es nula:

$$\tilde{V}_a + \tilde{V}_b + \tilde{V}_c = 0$$

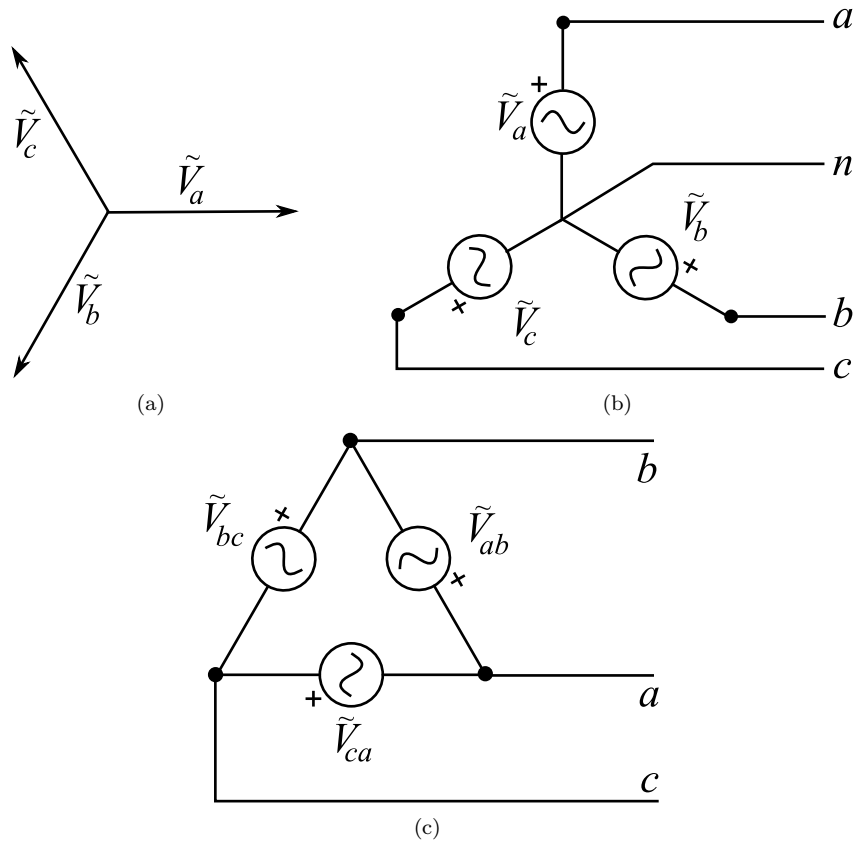
Este resultado se demuestra fácilmente de forma analítica, pero la demostración es inmediata cuando se observa el diagrama de fasores de la figura 3.2, la suma vectorial de los tres fasores es cero. Cabe destacar que para un sistema de corrientes, la suma es igualmente nula:

$$\tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c = 0 \quad (3.4)$$

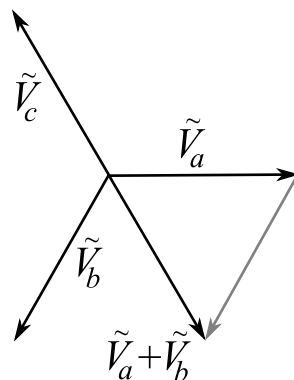
Esta ecuación tiene una importancia práctica cuando se conectan fuentes y cargas trifásicas juntas.

Existe otra forma de representar un generador trifásico. El generador de la figura 3.1.(b) se llama generador en estrella (representado con el símbolo Y), dado que los tres generadores monofásicos están conectados al neutro (la tensión de referencia).

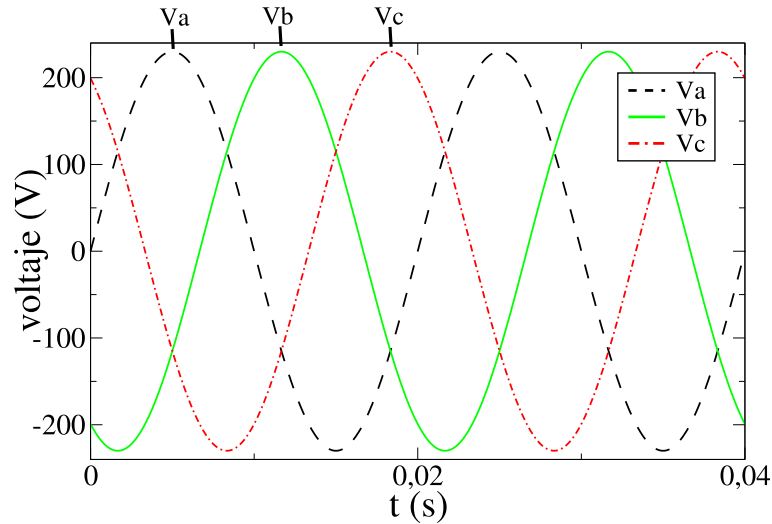
<sup>1</sup> Suponiendo que las características del sistema no cambian.



**Figura 3.1** Esquema de un generador de tensión trifásico con una conexión en estrella y una conexión en triángulo. (a) Diagrama de fasores para el sentido directo de las fases. (b) Generador en estrella. (c) Generador en triángulo, nótese que el neutro ha desaparecido.



**Figura 3.2** Suma de los tres fasores de un sistema de tensiones trifásico. Primero se suman los fasores  $\tilde{V}_a$  y  $\tilde{V}_b$ , esta suma consiste en un fasor opuesto y de misma magnitud que  $\tilde{V}_c$ . La suma de los tres es cero.



**Figura 3.3** Representación temporal de las tensiones con una secuencia de fase directa. Para decidir de la secuencia de fase a partir de la figura conviene fijarse en el orden en el que las tensiones cruzan el valor cero. Si las tensiones lo cruzan en el orden  $a,b,c$  entonces la secuencia de fase es directa

Sin embargo es posible conectar los generadores de tal manera que las tensiones estén referidas mutuamente. Es decir que un generador dado tiene sus bornes conectados a los otros dos generadores. La otra forma de conectar los generadores es en forma de triángulo, representado con el símbolo  $\Delta$  o D, como aparece en la figura 3.1.(c). El neutro no aparece explícitamente en esta forma dado que se consideran únicamente diferencias de tensión entre generadores, cada generador sirve de referencia al siguiente. Las dos formas son equivalentes, existe una transformación matemática para pasar de una forma a la otra. Es la transformación Y- $\Delta$  para los generadores (en el capítulo 1 se ha visto la versión para resistencias).

Las tensiones con referencia al neutro, como por ejemplo  $\tilde{V}_{an}$ ,  $\tilde{V}_{bn}$  y  $\tilde{V}_{cn}$  se llaman **tensiones simples**. Mientras las tensiones entre dos líneas, como  $\tilde{V}_{ab}$ ,  $\tilde{V}_{bc}$  y  $\tilde{V}_{ca}$  se llaman **tensiones compuestas**, también se suelen llamar **tensiones de línea**. Existe una relación entre estos dos tipos de tensiones en un sistema trifásico.

Hasta ahora se han considerado únicamente los generadores, sin embargo no tienen sentido si no se conectan a ninguna carga. Al igual que los generadores, las cargas se pueden conectar en forma de estrella o en forma de triángulo. Existen cuatro casos para la conexión de los generadores con las cargas:

- Y-Y
- Y- $\Delta$
- $\Delta$ -Y



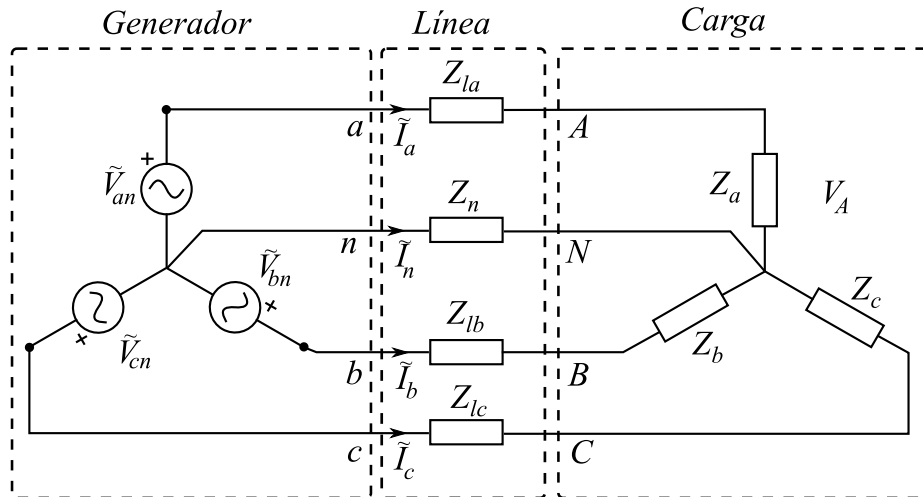


Figura 3.4 Esquema de una conexión Y-Y entre un generador trifásico y una carga.

- $\Delta$ - $\Delta$

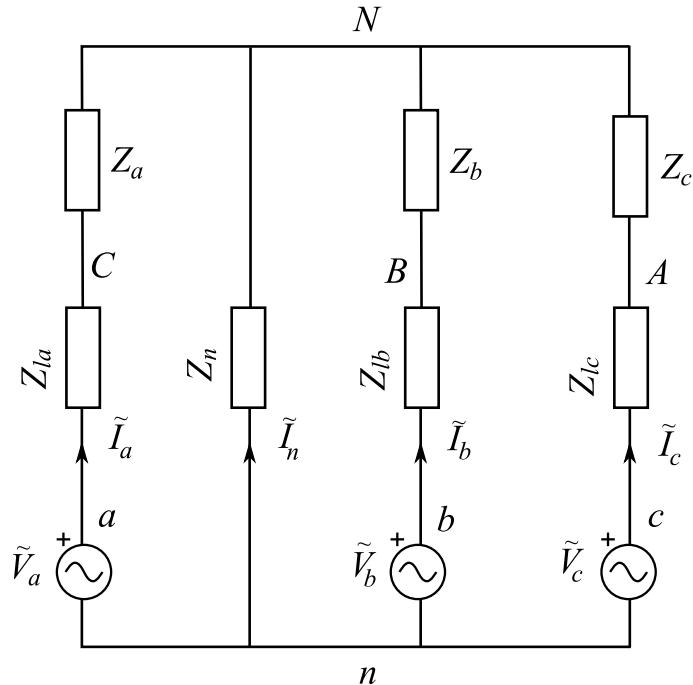
A continuación se describe el primer caso de conexión entre un generador y una carga, es decir la conexión Y-Y.

## 3.2 Conexión en estrella

Se conecta una carga en Y conectada a nuestro generador trifásico siguiendo el esquema de la figura 3.4. En esta figura se ha considerado también la impedancia de la línea de transporte. En todo este capítulo se contempla únicamente el caso de un **sistema equilibrado** que consiste en una simetría perfecta de las impedancias de línea y de la carga. Significa que las tres impedancias de la carga (y de la línea de transporte respectivamente) son iguales. Además, los generadores son ideales en todo el capítulo, aunque se podría también incluir una impedancia interna para mejorar el modelo. La carga de manera general se expresa como:  $Z = R + jX$ , es una carga compleja.

En la figura 3.4 se observan numerosas tensiones y impedancias que pasamos a detallar:

- $\tilde{V}_{an}$ ,  $\tilde{V}_{bn}$ ,  $\tilde{V}_{cn}$  son las tensiones del generador y corresponden con las tensiones simples. La expresión en forma de fasores está dada por las ecuaciones (3.1)-(3.3).
- $\tilde{I}_a$ ,  $\tilde{I}_b$ ,  $\tilde{I}_c$  son las **corrientes de línea**. El desfase entre ellas también es de  $2\pi/3$ , sin embargo el desfase entre las tensiones de alimentación y corriente depende de la impedancia de la línea y de la carga.
- $Z_{la}$ ,  $Z_{lb}$ ,  $Z_{lc}$  son las **impedancias de línea**. Estas dependen del medio de



**Figura 3.5** Representación de la conexión Y-Y en forma de tres ramas en paralelo

transporte de energía y se puede expresar como una impedancia compleja. Al ser el sistema equilibrado son las tres iguales.

- $Z_a, Z_b, Z_c$  son las impedancias de la carga trifásica. En el caso equilibrado las tres impedancias son iguales.
- $V_{AN}, V_{BN}, V_{CN}$  son las tres tensiones de la carga trifásica. Aquí también el desfase entre las tres se conserva pero el desfase con las tensiones del generador depende de la línea y de la impedancia de la carga.
- $I_n$  y  $Z_n$  son la impedancia del neutro y la corriente que circula en este cable.
- Para terminar,  $\tilde{V}_{ab}, \tilde{V}_{bc}, \tilde{V}_{ca}$  son las tres tensiones compuestas del sistema del lado de la fuente. Podríamos citar también las tensiones compuestas del lado de la carga  $\tilde{V}_{ab}, \tilde{V}_{bc}$  y  $\tilde{V}_{ca}$ .

Se va a demostrar ahora que si el sistema es equilibrado, no hay circulación de corriente en el neutro. Para ello se aplica el teorema de Millman a la tensión  $\tilde{V}_{Nn}$  dado que el circuito consiste en tres ramas en paralelo tal como se muestra en la figura 3.5:

$$\tilde{V}_{Nn} = \frac{\frac{\tilde{V}_a}{Z_{la} + Z_a} + \frac{\tilde{V}_b}{Z_{lb} + Z_b} + \frac{\tilde{V}_c}{Z_{lc} + Z_c}}{\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_{la}} + \frac{1}{Z_{lb}} + \frac{1}{Z_{lc}} + \frac{1}{Z_n}} \quad (3.5)$$

Sabiendo que el sistema es equilibrado ocurre:  $Z_{eq} = Z_{la} + Z_a = Z_{lb} + Z_b =$

$Z_{lc} + Z_c$ . El numerador se transforma como:

$$\tilde{V}_{Nn} = \frac{\frac{\tilde{V}_a + \tilde{V}_b + \tilde{V}_c}{Z_{eq}}}{\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_{la}} + \frac{1}{Z_{lb}} + \frac{1}{Z_{lc}} + \frac{1}{Z_n}} = 0 \quad (3.6)$$

sabiendo  $\tilde{V}_a + \tilde{V}_b + \tilde{V}_c = 0$ . Destacamos aquí una conclusión muy importante: **cuando el sistema es equilibrado no hay circulación de corriente en el neutro**. Entonces, no hay necesidad llevar el cable del neutro para transportar energía en corriente trifásica. Se ahorra una línea, representando una economía importante para el operador de red eléctrica.

Ahora se pueden deducir más relaciones a partir de nuestro circuito y de la hipótesis del sistema balanceado. Primero se deducen la relación entre las corrientes de línea:

$$\tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c = 0 \quad (3.7)$$

La suma vectorial de las corrientes es también nula, se puede deducir directamente de las leyes de Kirchhoff aplicadas al nudo  $N$ .

Al tener un circuito trifásico equilibrado se pueden referir todas las ramas al mismo potencial es decir el neutro  $N$  o  $n$ . Una forma de analizar las cantidades del circuito consiste en aislar una de las tres ramas de la figura 3.5. En cuanto se obtienen las tensiones y corrientes de esta rama aislada, se hallan las corrientes y tensiones del resto de las ramas al ser el desfase la única cantidad que varía. En el caso equilibrado el sistema trifásico se comporta como tres circuitos independientes e idénticos pero con tres fases distintas. El análisis se reduce al estudio de una de las ramas del circuito como se muestra en la figura 3.6. Este circuito se llama **equivalente monofásico** del circuito. La corriente de línea  $\tilde{I}_a$  se expresa como:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_a}{Z_a + Z_{la}} = |\tilde{I}_a| \angle \theta \quad (3.8)$$

A partir de esta corriente se deducen las otras corrientes de línea sabiendo que el desfase entre ella es de  $\pm 2\pi/3$ .

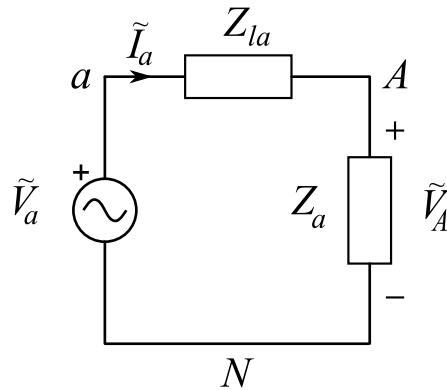
La última parte que nos queda por analizar son las tensiones de línea. Son las diferencias de potenciales entre las líneas  $a, b$  y  $c$ . Interesa en particular estudiar las tensiones  $\tilde{V}_{ab}$ ,  $\tilde{V}_{bc}$  y  $\tilde{V}_{ca}$ . Para ello se elige el sistema trifásico de las ecuaciones (3.1)-(3.3):

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{ab} &= \tilde{V}_a - \tilde{V}_b = V_0 \angle 0 - V_0 \angle -2\pi/3 = V_0 e^{j0} - V_0 e^{-j2\pi/3} = \dots \\ \dots &= V_0 (1 - (-1/2 - j\sqrt{3}/2)) = V_0 (3/2 + j\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} V_0 (\sqrt{3}/2 + j1/2) \end{aligned}$$

$$\tilde{V}_{ab} = \sqrt{3} V_0 \angle \pi/6$$

De este modo hemos demostrado que la relación entre el voltaje de generador y el voltaje de líneas para la secuencia directa es:

$$\tilde{V}_{ab} = \sqrt{3} V_0 \angle \pi/6 = \sqrt{3} \tilde{V}_a \angle \pi/6. \quad (3.9)$$



**Figura 3.6** Esquema equivalente de una de las ramas del circuito trifásico de conexión Y-Y.

Es un resultado general para los sistemas descritos por las ecuaciones (3.1)-(3.3), sean generadores o cargas. El diagrama de fasores se puede ver en la figura 3.7.(a) para la secuencia de fase directa y en la figura 3.7.(b) para la secuencia indirecta. En base a la gráfica, se observa que tenemos para la tensión  $\tilde{V}_{bc}$  y  $\tilde{V}_{ca}$  relaciones similares:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{bc} &= \sqrt{3}\tilde{V}_b \angle \pi/6 \\ \tilde{V}_{ca} &= \sqrt{3}\tilde{V}_c \angle \pi/6\end{aligned}$$

Encontramos de nuevo que la tensiones compuestas forman un sistema trifásico pero amplitud mayor y de desfase  $\pi/6$  con respecto al sistema de tensiones simples.

En el caso de la **secuencia indirecta** la relación de tensiones difiere en el desfase:

$$\tilde{V}_{ab} = \sqrt{3}\tilde{V}_a \angle -\pi/6 \quad (3.10)$$

donde  $\tilde{V}_{ab}$  es la tensión compuesta y  $\tilde{V}_a$  la tensión simple. Se puede hallar relaciones similares para  $\tilde{V}_{bc}$  y  $\tilde{V}_{ca}$ .

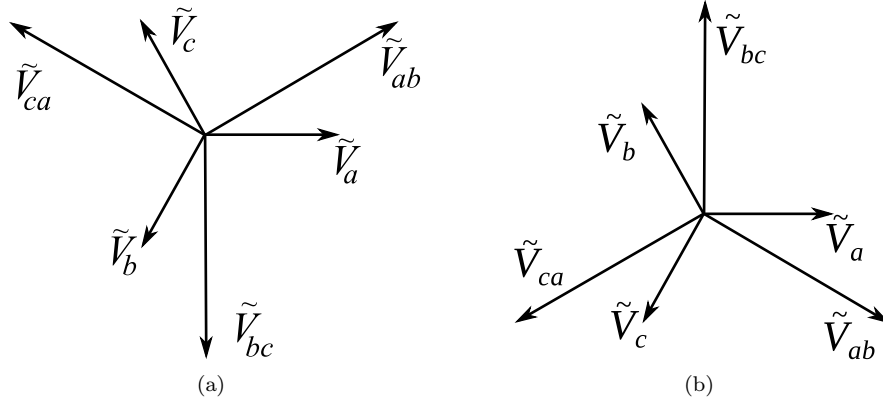
Estas fórmulas establecen el equivalente entre la tensión de un generador conectado en Y (tensión  $\tilde{V}_a$ ) y un generador en  $\Delta$  (con la tensión  $\tilde{V}_{ab}$ ).

### 3.3 Conexión en triángulo

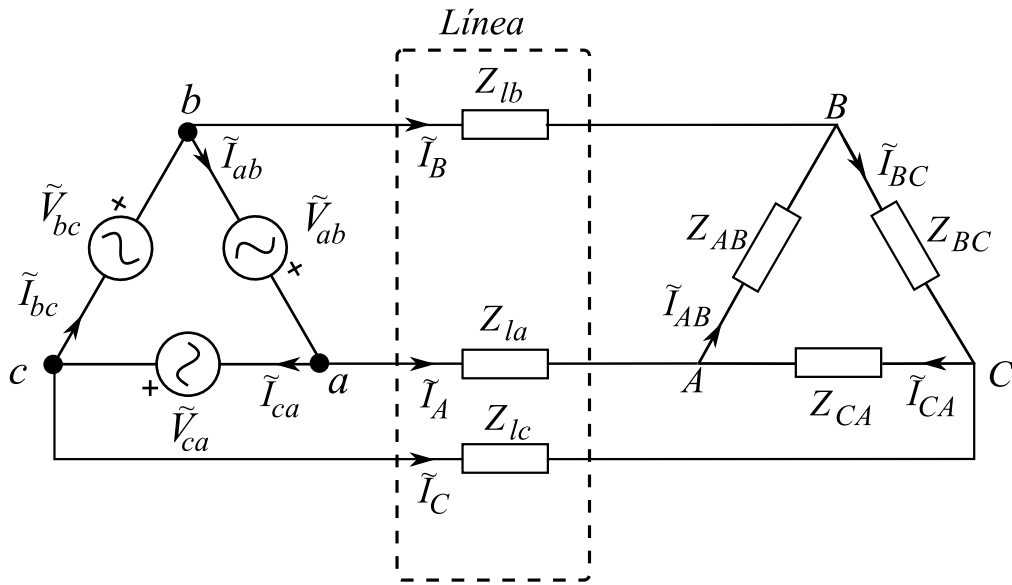
El otro esquema de conexión lógico de un sistema trifásico es la conexión en triángulo. En la figura 3.8 se muestra un ejemplo de conexión  $\Delta$ - $\Delta$  entre un generador y una carga. No es necesario volver a detallar aquí todas las corrientes y tensiones del sistema, pues básicamente son las mismas que en el caso de la conexión Y-Y. La hipótesis del sistema equilibrado se mantiene, concretamente:

$$Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} \quad (3.11)$$

$$Z_{Ia} = Z_{Ib} = Z_{Ic} \quad (3.12)$$



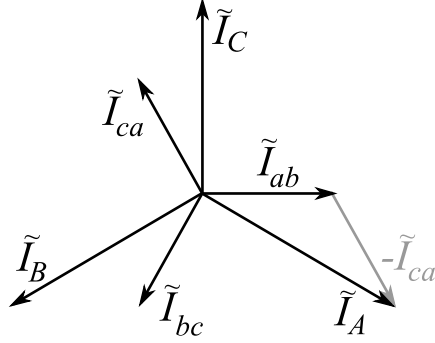
**Figura 3.7** Fasores del sistema trifásico con las tensiones del generador y las tensiones de línea para un sistema directo en (a) y para un sistema indirecto en (b)



**Figura 3.8** Conexión  $\Delta$ - $\Delta$  de un sistema trifásico

Observando la figura 3.8 se puede notar dos diferencias importantes con la conexión Y-Y:

- Las tensiones de línea corresponden con las tensiones de generadores:  $\tilde{V}_{ab}$ ,  $\tilde{V}_{bc}$  y  $\tilde{V}_{ca}$ .
- Las corrientes de línea ( $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ ) son diferentes de la corrientes de generadores ( $\tilde{I}_{ab}$ ,  $\tilde{I}_{bc}$  e  $\tilde{I}_{ca}$ ).



**Figura 3.9** Fasores de las corrientes de línea y del generador de un sistema y las tensiones de línea para un sistema directo.

De hecho existe un desfase entre las corrientes de generadores y las corrientes de línea que se deduce más abajo.

Las corrientes de los generadores, que también podemos llamar corrientes compuestas, se expresan a su vez como un sistema trifásico:

$$\tilde{I}_{ab} = I_0 \angle 0 + \varphi \quad (3.13)$$

$$\tilde{I}_{bc} = I_0 \angle -2\pi/3 + \varphi \quad (3.14)$$

$$\tilde{I}_{ca} = I_0 \angle 2\pi/3 + \varphi \quad (3.15)$$

Se puede obtener las corrientes de líneas con las leyes de Kirchhoff, eligiendo  $\varphi = 0$  sin perder generalidad:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_B &= \tilde{I}_{bc} - \tilde{I}_{ab} = I_0 \angle -2\pi/3 - I_0 \angle 0 = \dots \\ &\dots I_0(-1/2 - j\sqrt{3}/2 - 1) = \sqrt{3}I_0 \angle -5\pi/6 = \sqrt{3}I_0 \angle -4\pi/6 - \pi/6 = \dots \\ &\dots = \sqrt{3}\tilde{I}_{bc} \angle -\pi/6 \end{aligned}$$

En conclusión, las corrientes de línea tal como  $\tilde{I}_A$  están en retardo de  $\pi/6$  (o de 30 grados) sobre las corrientes del generador en triángulo (como  $\tilde{I}_{ab}$  y con una mayor amplitud de factor  $\sqrt{3}$ ):

$$\tilde{I}_A = \sqrt{3}\tilde{I}_{ab} \angle -\pi/6.$$

Esta relación es más obvia en la figura 3.9 donde aparece el sistema trifásico de las corrientes del generador y las corrientes de línea. Se ve claramente por construcción la relación  $\tilde{I}_A = \tilde{I}_{ab} - \tilde{I}_{ca}$ .

En el lado de la carga trifásica también se puede hallar una relación similar:

$$\tilde{I}_A = \sqrt{3}\tilde{I}_{AB} \angle -\pi/6.$$

Volviendo a la resolución del sistema trifásico, siempre se puede transformar el esquema de conexión  $\Delta$ - $\Delta$  usando las propiedades anteriores y el hecho que

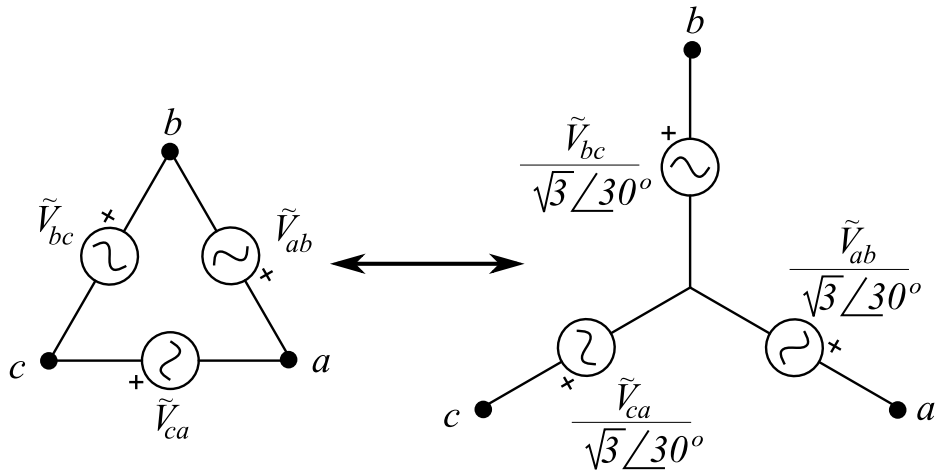


Figura 3.10 Equivalente triángulo-estrella para un generador trifásico equilibrado.

el sistema está equilibrado. El primer paso consiste en transformar el generador en triángulo en un generador en estrella.

Para obtener un generador en estrella produciendo las mismas tensiones de línea que el generador en triángulo, conviene dividir el voltaje máximo por  $\sqrt{3}$  y atrasarlo en  $\pi/6$ . El equivalente del generador en  $\Delta$  se muestra en la figura 3.10.

Para la carga es posible también pasar a un esquema en estrella. El teorema de Kennelly visto en el capítulo 1 permite pasar de una impedancia en triángulo a una impedancia en estrella. Para una carga equilibrada conectada en triángulo de impedancia  $Z_{\Delta}$ . Se aplica el teorema de Kennelly y se obtiene:

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta} \cdot Z_{\Delta}}{3Z_{\Delta}} = \frac{Z_{\Delta}}{3}$$

Aparece una relación sencilla entre la impedancia en estrella y la impedancia equivalente en triángulo:

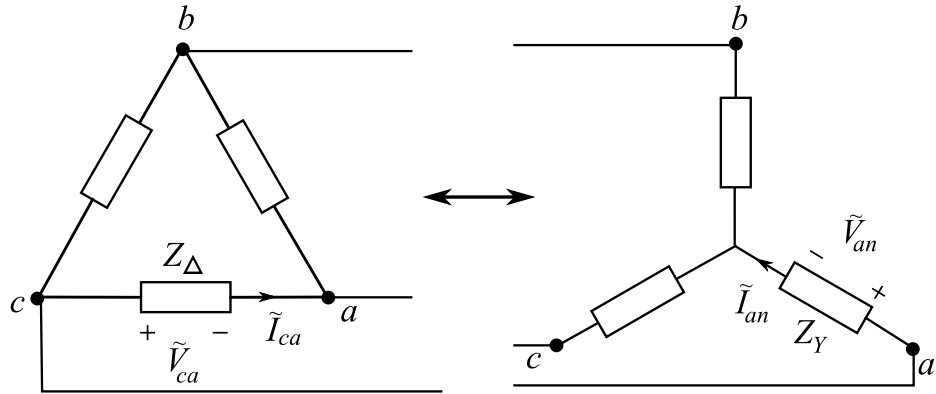
$$Z_{\Delta} = 3Z_Y$$

tal como se ilustra en la figura 3.11. Esta relación es únicamente válida para un sistema equilibrado.

Con las transformaciones del generador y de la carga se ha vuelto a un sistema Y-Y. El estudio se hace considerando solo el equivalente monofásico del circuito.

### 3.4 Potencia en sistemas trifásicos

Para calcular las potencias en un sistema trifásico primero se recuerda la evolución temporal de la tensión y de la corriente para un sistema equilibrado en



**Figura 3.11** Equivalente triángulo-estrella para una carga trifásica. Se puede transformar una carga en triángulo en una carga en estrella cuando la carga es equilibrada.

estrella:

$$V_a(t) = V_m \sin(\omega_0 t) \quad (3.16)$$

$$V_b(t) = V_m \sin(\omega_0 t - 2\pi/3) \quad (3.17)$$

$$V_c(t) = V_m \sin(\omega_0 t + 2\pi/3) \quad (3.18)$$

Se ha elegido la fase inicial nula para simplificar la notación. Para la corriente, la expresión general es:

$$I_a(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.19)$$

$$I_b(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi - 2\pi/3) \quad (3.20)$$

$$I_c(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi + 2\pi/3) \quad (3.21)$$

El ángulo  $\varphi$  de desfase entre tensiones y corrientes define el factor de potencia al igual que el sistema monofásico.  $\cos(\varphi)$  será el factor de potencia del sistema. Por otro lado definimos los valores eficaces:  $V_0 = V_m/\sqrt{2}$  y  $I_0 = I_m/\sqrt{2}$ .

La potencia instantánea suministrada a la carga en todo momento se escribe como:

$$P_a(t) = V_a(t)I_a(t) = V_m \sin(\omega_0 t)I_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.22)$$

$$P_b(t) = V_b(t)I_b(t) = V_m \sin(\omega_0 t - 2\pi/3)I_m \sin(\omega_0 t + \varphi - 2\pi/3) \quad (3.23)$$

$$P_c(t) = V_c(t)I_c(t) = V_m \sin(\omega_0 t + 2\pi/3)I_m \sin(\omega_0 t + \varphi + 2\pi/3) \quad (3.24)$$

Haciendo uso de las propiedades trigonométricas, se pueden simplificar las ex-



presiones de la potencia como:

$$P_a(t) = \frac{V_m I_m}{2} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega_0 t + \varphi)) \quad (3.25)$$

$$P_b(t) = \frac{V_m I_m}{2} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega_0 t - 4\pi/3 + \varphi)) \quad (3.26)$$

$$P_c(t) = \frac{V_m I_m}{2} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega_0 t + 4\pi/3 + \varphi)) \quad (3.27)$$

donde una parte de la potencia permanece constante y la otra parte oscila. Cuando se calcula la potencia total suministrada a la fuente debemos sumar las tres contribuciones  $P_t(t) = P_a(t) + P_b(t) + P_c(t)$  cuyo resultado es:

$$P_t(t) = P_a(t) + P_b(t) + P_c(t) = 3 \frac{V_m I_m}{2} \cos(\varphi)$$

Las contribuciones oscilantes se cancelan, eso significa que **la potencia total en un sistema trifásico es independiente del tiempo**. Es una de las ventajas de los sistemas trifásico, la potencia suministrada es constante en todos los instantes.

Se ha definido la potencia compleja para un sistema monofásico mediante un fasor. Del mismo modo, para un sistema trifásico se puede definir una cantidad compleja para una carga equilibrada:

$$P = 3 \frac{V_m I_m}{2} \cos(\varphi) \quad (3.28)$$

$$Q = 3 \frac{V_m I_m}{2} \sin(\varphi) \quad (3.29)$$

$$S = P + jQ \quad (3.30)$$

$$|S| = 3 \frac{V_m I_m}{2} \quad (3.31)$$

El triángulo de potencia se define de la misma manera. Se expresa también todas las fórmulas en función del valor eficaz, por lo que se obtiene:

$$P = 3V_0 I_0 \cos(\varphi) \quad (3.32)$$

$$Q = 3V_0 I_0 \sin(\varphi) \quad (3.33)$$

$$|S| = 3V_0 I_0 \quad (3.34)$$

### 3.5 Resultados formulas importantes

Fórmulas importantes	
Suma de las tensiones	$\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 = 0$
Suma de las corrientes de línea	$\tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c = 0$
Relación entre voltajes de generador y tensiones de línea	$\tilde{V}_l = \sqrt{3}\tilde{V}_g \angle \pi/6$
Relación entre corrientes de línea y corrientes de generador en triángulo	$\tilde{I}_l = \sqrt{3}\tilde{I}_{g\Delta} \angle -\pi/6$
Relación entre impedancia $\Delta$ y $Y$	$Z_\Delta = 3Z_Y$
Potencia activa	$P = 3V_{ef}I_{eff} \cos(\varphi)$
Potencia reactiva	$Q = 3V_{ef}I_{ef} \sin(\varphi)$
Potencia aparente	$S = 3V_{ef}I_{ef}$

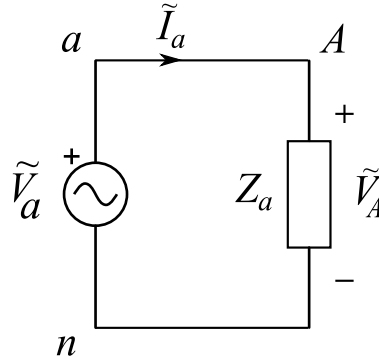
### 3.6 Ejercicios Resueltos

1. Un generador trifásico en estrella de secuencia directa con tensión de línea de 380V alimenta a una carga equilibrada en estrella de impedancia  $Z = 1 + j\Omega$ .

- Calcular las corrientes de línea.
- Calcular el factor de potencia.
- Calcular la potencia absorbida por la carga.

#### Solución

a) Para un sistema conectado en  $Y - Y$  se puede hallar directamente el equivalente monofásico del circuito de la figura siguiente:



La tensión de fase puede hallarse gracias al valor de la tensión compuesta, se elige una fase inicial nula por comodidad:

$$\tilde{V}_a = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ V}$$

La corriente de línea se halla por la ley de Ohm:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_a}{Z_a} = \frac{220}{1+j} = 155,5 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Las otras dos corrientes de línea se encuentran aplicando los desfases adecuados:

$$\tilde{I}_b = 155,5 \angle -45 - 120^\circ \text{ A}, \quad \tilde{I}_c = 155,5 \angle -45 + 120^\circ \text{ A}$$

b) El factor de potencia de la carga es simplemente el coseno de su ángulo:  
 $fp = \cos(45) = 0,707$ .

c) La potencia absorbida por la carga será tres veces la potencia de una fase siendo el sistema equilibrado:

$$S = 3\tilde{V}_a\tilde{I}_a^* = 3 \cdot 220 \angle 0^\circ \cdot 155,5 \angle 45^\circ = 102300 \angle 45^\circ \text{ VA}$$

2. Un generador trifásico equilibrado de secuencia directa conectado en estrella de 1200V alimenta una carga en triángulo de impedancia  $Z_\Delta = 9 + 3j\Omega$ . La carga se alimenta a través de una línea de impedancia  $Z_l = 0,1 + 0,1j$ .

- Calcular las corrientes de línea.
- Calcular la potencia absorbida por la carga y por la línea.
- Calcular la tensión en los bornes de la carga en triángulo.

### Solución

a) Para poder hallar las corrientes de línea primero se transforma la carga en su equivalente estrella:  $Z_Y = (1/3)Z_\Delta = (9 + 3j)/3\Omega$ . El circuito equivalente monofásico consiste entonces en una impedancia  $Z_Y$  en serie con la impedancia de línea  $Z_l$ . Elijiendo como referencia de fase la tensión  $\tilde{V}_{an}$ , la corriente de línea es:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_{an}}{Z_Y + Z_l} = \frac{1200 \angle 0^\circ}{0,1 + 9/3 + 0,1j + 3/3j} = 365 \angle -19,5^\circ \text{ A}$$

Para las corrientes  $\tilde{I}_b$  e  $\tilde{I}_c$  se resta y se suma  $120^\circ$  a la fase respectivamente.

b) La potencia absorbida por la carga se halla a partir de la impedancia equivalente en estrella y de la corriente de línea:

$$S_Y = 3Z_Y|I_a|^2 = Z_\Delta|I_a|^2 = (9 + 3j)365^2 = 1264\angle 18,4^\circ \text{ kVA}$$

La potencia perdida en la línea es:

$$S_l = 3Z_l|I_a|^2 = (0,3 + 0,3j)|I_a|^2 = 56,5\angle 45^\circ \text{ kVA}$$

c) Se puede calcular la tensión en los bornes de la carga en su equivalente estrella:

$$\tilde{V}_Y = Z_Y\tilde{I}_a = (3 + j)365\angle -19,5^\circ = 1154,2\angle -1^\circ \text{ V}$$

La tensión compuesta se halla sabiendo que existe un factor  $\sqrt{3}$  y un desfase de  $30^\circ$ .

$$\tilde{V}_\Delta = \sqrt{3} \cdot 1154,2\angle -1 + 30^\circ = 1999\angle 29^\circ \text{ V}$$

Para obtener la otras tensiones se aplica un desfase de  $120^\circ$  y  $-120^\circ$  respectivamente.

3. Un generador trifásico equilibrado de secuencia directa conectado en triángulo de 400V alimenta una carga en triángulo de impedancia  $Z_\Delta = 1 + 2j\Omega$ . La carga se alimenta a través de una línea de impedancia  $Z_l = 0,3 + 0,6j$ .

- Calcular las corrientes de línea.
- Calcular la potencia absorbida por la carga y por la línea.
- Calcular la tensión de línea del lado de la carga

### Solución

a) Para obtener las corrientes de línea primero es preciso transformar la fuente y la carga en su equivalente estrella:

$$|\tilde{V}_Y| = \frac{400}{\sqrt{3}} = 231 \text{ V}$$

Se puede elegir la referencia de fase como siendo la tensión  $\tilde{V}_{an}$  de la fuente. En cuanto a la carga:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}j\Omega$$

Ahora con la tensión y la impedancia podemos calcular las corrientes de línea:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_{an}}{Z_Y + Z_l} = \frac{231\angle 0}{0,3 + 1/3 + 0,6j + 2/3j} = 163\angle -63,4^\circ \text{ A}$$

Para las corrientes  $\tilde{I}_b$  e  $\tilde{I}_c$  se restan y se suman  $120^\circ$  a la fase respectivamente.

b) Para las potencias se procede como en el ejercicio anterior. La potencia

absorbida por la carga se halla a partir de la impedancia equivalente en estrella y de la corriente de línea:

$$S_Y = 3Z_Y|I_a|^2 = Z_\Delta|I_a|^2 = (1 + 2j)163^2 = 59410\angle 63,4^\circ \text{ VA}$$

La potencia perdida en la línea es:

$$S_l = 3Z_l|I_a|^2 = 3(0,3 + 0,6j)|I_a|^2 = 53469\angle 63,4^\circ \text{ VA}$$

c) La tensión de línea del lado de la carga se halla calculando primero la tensión en los bornes de la carga:

$$\tilde{V}_Y = Z_Y \tilde{I}_a = (1/3 + 2/3j)163\angle -63,4^\circ = 121,5\angle 0^\circ \text{ V}$$

La tensión compuesta se obtiene sabiendo que existe un factor  $\sqrt{3}$  y un desfase de  $30^\circ$ .

$$\tilde{V}_\Delta = \sqrt{3} \cdot 121,5\angle 30^\circ = 210,4\angle 30^\circ \text{ V}$$

4. En el circuito de la figura siguiente, 2 cargas trifásicas van conectadas a una línea de transporte:

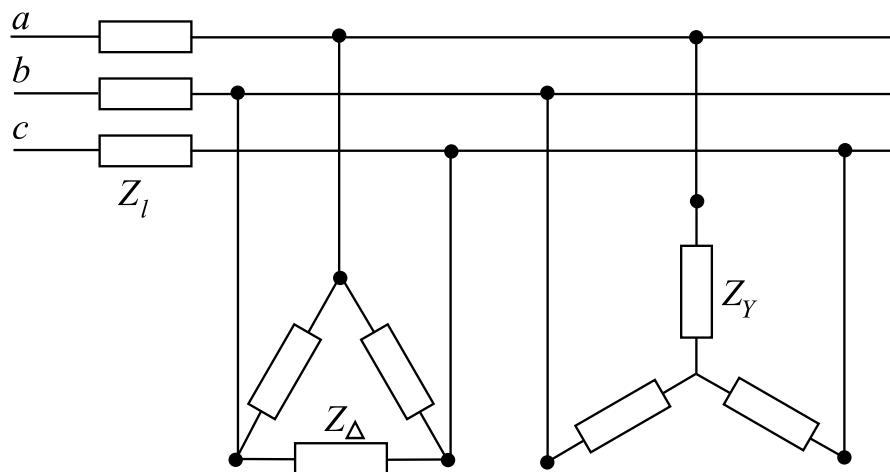


Figura del ejercicio 4.

Los datos del problema son:  $Z_Y = 10 + 4j\Omega$ ,  $Z_\Delta = 12 + 3j\Omega$ ,  $Z_l = 0,5 + 0,5j\Omega$ ,  $\tilde{V}_{ab} = 400\angle 0^\circ \text{ V}$ . Los sistemas son equilibrados y de secuencia directa.

- Calcular las corrientes de línea.
- Calcular las corrientes de las cargas.
- La potencia de cada carga.
- El factor de potencia visto desde la entrada.

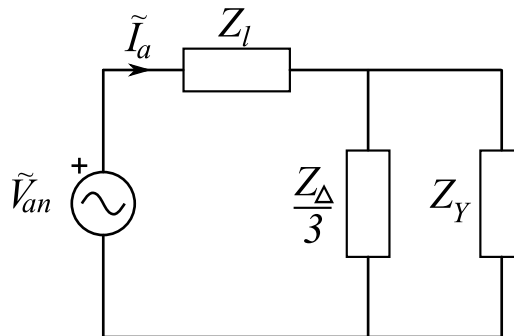
### Solución

- Para poder calcular las corrientes de línea se debe primero hallar un

equivalente monofásico del sistema trifásico. Con fin de obtenerlo se transforma la impedancia en triángulo en su equivalente estrella:

$$Z'_Y = \frac{Z_\Delta}{3} = 4 + j\Omega$$

Ahora son dos cargas trifásica en estrella en paralelo. El equivalente monofásico se puede representar como sigue:



La tensión  $\tilde{V}_{an}$  es:

$$\tilde{V}_{an} = \frac{\tilde{V}_{ab}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 231 \angle -30^\circ \text{ V}$$

Se puede hallar ahora la corriente  $\tilde{I}_a$  a partir de este esquema:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_{an}}{Z_l + (Z'_Y // Z_Y)} = \frac{231 \angle -30^\circ}{3,62 \angle 21,6^\circ} = 63,8 \angle -51^\circ \text{ A}$$

Para las corrientes  $\tilde{I}_b$  e  $\tilde{I}_c$  restando y sumando  $120^\circ$  a la fase respectivamente.

b) Para obtener la corrientes circulando en la cargas teniendo primero que hallar la tensión en los bornes de esta. Trabajando a partir del esquema de la figura anterior. En lo bornes de las cargas se obtiene la tensión:

$$\tilde{V}' = \tilde{V}_{an} - Z_l \tilde{I}_a = 231 \angle -30^\circ - (0,5 + 0,5j) 63,8 \angle -51^\circ = 190 \angle -35,5^\circ \text{ V}$$

La corriente en las cargas se puede hallar ahora:

$$\begin{aligned} \tilde{I}'_Y &= \frac{\tilde{V}'}{Z'_Y} = \frac{190 \angle -35,5^\circ}{4+j} = 46 \angle -49,5^\circ \text{ A} \\ \tilde{I}_Y &= \frac{\tilde{V}'}{Z_Y} = \frac{190 \angle -35,5^\circ}{10+4j} = 17,6 \angle -57,3^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Para terminar, se puede hallar la corriente circulando por la carga en triángulo. Esta corriente es:

$$\tilde{I}_\Delta = \frac{\tilde{I}'_Y}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = 26,5 \angle -19,5^\circ \text{ A}$$

c) Calculo de las potencias. Ahora que se dispone de la tensión y la corriente de cada carga se calculan las potencias sin dificultad:

$$\begin{aligned} S' &= 3\tilde{V}'\tilde{I}'_Y^* = 3 \cdot 190 \angle -35,5^\circ \cdot 46 \angle 49,5^\circ = 26220 \angle 14^\circ \text{ VA} \\ S &= 3\tilde{V}'\tilde{I}_Y^* = 3 \cdot 190 \angle -35,5^\circ \cdot 17,6 \angle 57,3^\circ = 10032 \angle 22^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

d) Para hallar el factor de potencia del sistema se usa la tensión y corriente a la entrada que hemos hallado anteriormente. El ángulo de desfase entre tensión y corriente es:

$$\varphi = -30 - (-51) = 21^\circ$$

El factor de potencia es por lo tanto:

$$fp = \cos \varphi = \cos(21) = 0,93$$

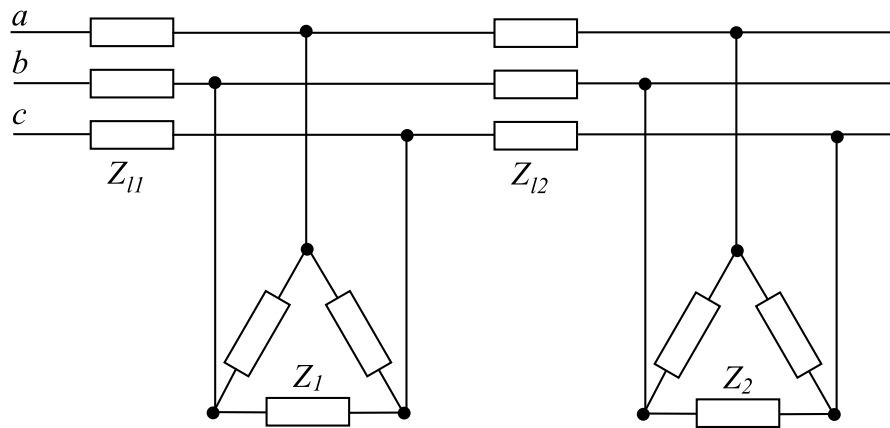


Figura del ejercicio 5.

5. Se dispone del circuito de la figura anterior y de los datos del problema siguientes:  $Z_{l1} = 0,1+0,4j\Omega$ ,  $Z_{l2} = 0,1+0,4j\Omega$ ,  $Z_1 = 9+3j\Omega$ ,  $Z_2 = 15+6j\Omega$ ,  $\tilde{V}_{ab} = 800\angle 0^\circ\text{V}$ . Los sistemas están equilibrados y de secuencia directa.
- Calcular el equivalente monofásico del sistema.
  - Calcular las corrientes de línea.

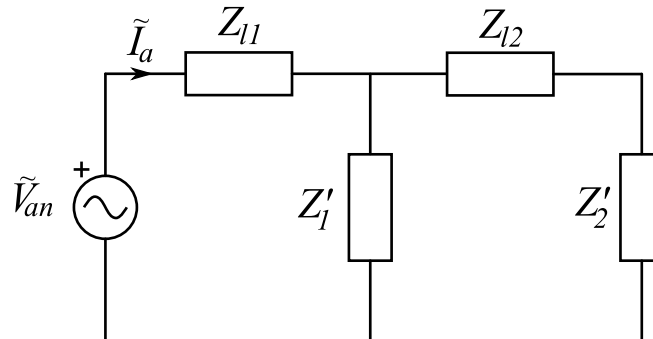
### Solución

a) Para calcular el equivalente de este circuito se necesita transformar las impedancias en triángulo a estrella:

$$Z'_1 = \frac{Z_1}{3} = 3 + j\Omega$$

$$Z'_2 = \frac{Z_2}{3} = 5 + 2j\Omega$$

Una vez las impedancias transformadas se puede calcular el equivalente monofásico del circuito:



b) Ahora se calcula la tensión  $\tilde{V}_{an}$  a la entrada del sistema:

$$\tilde{V}_{an} = \frac{\tilde{V}_{ab}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 462 \angle -30^\circ \text{ V}$$

La corriente de línea se deduce en base a los resultados anteriores:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_{an}}{Z_{l1} + (Z'_1 // (Z'_2 + Z_{l2}))} = \frac{462 \angle -30^\circ}{2,29 \angle 29,3^\circ} = 201,7 \angle -59,3^\circ \text{ A}$$

### 3.7 Ejercicios adicionales

- La ecuación en el dominio del tiempo para la fase  $a$  en los terminales de una carga conectada en Y es:  $v_{AN}(t) = 169,71 \cos(\omega t + 26) \text{ V}$ . Si el generador está conectado en una secuencia de fases directa ¿Cuáles son las ecuaciones en el dominio del tiempo para las tres tensiones de línea en carga ( $v_{AB}(t)$ ,  $v_{BC}(t)$  y  $v_{CA}(t)$ )?  
 Respuesta:  $v_{AB}(t) = 293,95 \cos(\omega t + 56) \text{ V}$ ,  $v_{BC}(t) = 293,95 \cos(\omega t - 64) \text{ V}$ , y  $v_{CA}(t) = 293,95 \cos(\omega t + 176) \text{ V}$
- La magnitud de la tensión de línea (es decir la tensión  $\tilde{V}_{AB}$ ) en los terminales de una carga equilibrada conectada en Y es de 660V. La impedancia de carga es  $30,48 + j22,86 \Omega$ . La carga está alimentada mediante una línea con una impedancia de  $0,25 + j2 \Omega$ .  
  - ¿Cuál es el módulo de la corriente de línea?
  - ¿Cuál es el módulo de la tensión de línea del lado de la fuente?
 Respuesta: a) 10 A, b) 684,6 V
- La magnitud de la tensión simple  $V_{an}$  de una fuente trifásica equilibrada con conexión en Y es de 125V. La fuente está conectada a una carga equilibrada con conexión en Y mediante una línea de distribución que tiene una impedancia de  $0,1 + j0,8 \Omega$ . La impedancia de carga es  $19,9 + j14,2 \Omega$ . La secuencia de fases es directa. Utilizando como referencia la tensión de fase  $a$  de la fuente, especifique la magnitud y el ángulo de los siguientes valores:  
  - Las tres corrientes de línea.
  - Las tres tensiones de línea en la fuente.



c) Las tres tensiones de fase en la carga.

d) Las tres tensiones de línea en la carga

Respuesta: a)  $I_{aA} = 5\angle -36,87^\circ$  A,  $I_{bB} = 5\angle -156,87^\circ$  A,  $I_{cC} = 5\angle 83,13^\circ$  A,

b)  $V_{ab} = 216,5\angle 30^\circ$  V,  $V_{bc} = 216,5\angle -90^\circ$  V,  $V_{ca} = 216,5\angle 150^\circ$  V, c)  $V_{AN} =$

$122,23\angle -1,36^\circ$  V,  $V_{BN} = 122,23\angle -121,36^\circ$  V,  $V_{CN} = 122,23\angle 118,64^\circ$  V,

d)  $V_{AB} = 211,71\angle 28,64^\circ$  V,  $211,71\angle -91,36^\circ$  V,  $211,71\angle 148,64^\circ$  V

4. Una carga equilibrada con conexión en triángulo tiene una impedancia de  $60 + 45j\Omega$ . La carga se alimenta a través de una línea cuya impedancia es igual a  $0,8 + 0,6j\Omega$ . La tensión en los terminales de la carga es de 480V (es decir la tensión compuesta  $V_{AB}$ ). La secuencia de fases es positiva. Utilizando  $V_{AB}$  como referencia, Calcule:

a) Las tres corrientes de fase de la carga.

b) Las tres corrientes de línea.

c) Las tres tensiones de línea en el lado del generador.

Respuesta: a)  $\tilde{I}_{AB} = 6,4\angle -36,87^\circ$  A,  $\tilde{I}_{BC} = 6,4\angle -156,87^\circ$  A,  $\tilde{I}_{CA} = 6,4\angle 83,13^\circ$

A, b)  $\tilde{I}_{aA} = 11,09\angle -66,87^\circ$  A,  $\tilde{I}_{bB} = 11,09\angle -186,87^\circ$  A,  $\tilde{I}_{cC} = 11,09\angle 53,13^\circ$

A, c)  $\tilde{V}_{ab} = 499,21\angle 0^\circ$  V,  $\tilde{V}_{bc} = 499,21\angle -120^\circ$  V y  $\tilde{V}_{ca} = 499,21\angle 120^\circ$  V



## **Parte II**

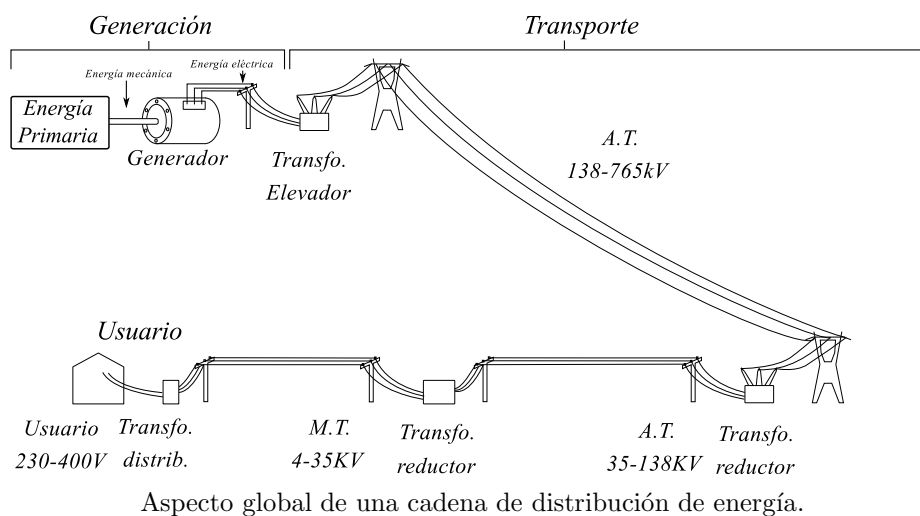
---

# **Máquinas Eléctricas**

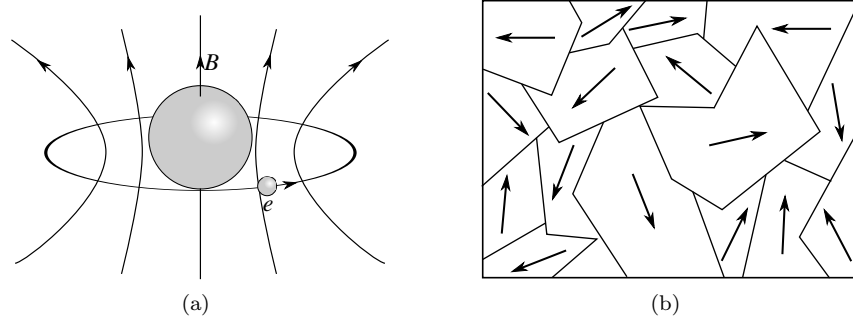


## 4 Principios físicos de las máquinas eléctricas

---



Las máquinas eléctricas se basan en principios físicos que fueron investigados en el siglo XVIII y XIX por físicos famosos como Faraday, Lenz, Helmholtz, Maxwell y por supuesto muchos otros contribuidores. El interés por el magnetismo fue creciendo gracias a los trabajos del físico inglés Michael Faraday, quien estableció las bases de la teoría de la inducción electromagnética. Además de descubrir una relación entre campo eléctrico y magnético, construyó prototipos de transformadores y de máquinas eléctricas. En el ambiente de la revolución industrial del siglo XIX, estos inventos se popularizaron y permitieron el desarrollo de los sistemas eléctricos tal como los conocemos hoy en día. Antes de la electricidad, la energía primaria se aprovechaba directamente. Por ejemplo, el agua, el viento o la energía animal activaba los molinos para moler el grano o prensar aceitunas. El desarrollo de la electricidad ha permitido transformar y distribuir esta energía. Hoy en día se siguen aprovechando estas fuentes básicas y otras para producir energía y transportar la energía hasta el usuario. En este capítulo se detallan los principios físicos que permiten la conversión de energía primaria a energía eléctrica y recíprocamente.



**Figura 4.1** (a) Esquema de un núcleo atómico con un electrón en órbita alrededor del núcleo produciendo un campo magnético. (b) Aspectos de los dominios magnéticos de un material ferromagnético. La escala de los dominios puede variar de 10 a  $100\mu\text{m}$  dependiendo del material.

## 4.1 Circuitos Magnéticos

En el estudio de las inductancias se ha discutido el hecho de que la circulación de una corriente llevaba a la generación de un campo magnético, y por tanto, de un flujo magnético. Las máquinas eléctricas usan circuitos magnéticos para canalizar los flujos magnéticos generados por las corrientes y así transformar la energía de una forma a otra.

Antes de estudiar las máquinas eléctricas, un paso previo consiste en explicar como se forman los campos magnéticos y como interactúan con la materia.

### 4.1.1 Ferromagnetismo

La mayoría de los materiales no interactúan apenas con el campo magnético. Sin embargo, existe una clase de materiales, llamados ferromagnéticos, que reaccionan muy bien al campo magnético. Son pocos elementos (hierro, cobalto, níquel entre otros) pero son muy abundantes en la tierra.

Para entender la naturaleza de esta interacción se representa una versión simplificada de un átomo en la figura 4.1. Según este modelo sencillo, los electrones giran en órbitas alrededor de un núcleo de protones y neutrones. Estos electrones en movimiento pueden interpretarse como una corriente eléctrica circulando en un anillo. Como tal, el movimiento del electrón produce un campo magnético en el entorno que puede asimilarse al campo producido por un anillo conductor recorrido por una corriente continua. Con este modelo, el átomo puede asemejarse un dipolo magnético elemental, es decir el equivalente de una pequeña espira recorrida por una corriente. Otra forma de verlo consiste en ver el átomo como un imán elemental. Este modelo, conocido como el magnetón de Bohr, tiene limitaciones evidentes pero permite entender los mecanismos básicos del ferromagnetismo.

El campo magnético creado por el átomo puede interactuar a su vez con el campo de los átomos vecinos y eventualmente con un campo magnético externo.

La forma en la que interactúan los átomos entre sí determinan las propiedades magnéticas del material. En muchos casos esta interacción es muy débil y el efecto sobre el campo magnético global de un material es pequeño. Sin embargo en los materiales ferromagnéticos la interacción entre átomos vecinos es muy fuerte y se forman estructuras llamadas dominios magnéticos. Estos dominios corresponden a un volumen pequeño del material en el que la mayoría de los átomos se alinean en la misma dirección creando así un campo magnético casi uniforme. En la figura 4.1 se enseña el aspecto de estos dominios magnéticos que pueden alcanzar hasta  $100\mu\text{m}$  según el material estudiado. A priori, los dominios magnéticos no tienen una orientación privilegiada, están orientados al azar y no se observa ningún campo magnético cerca del material<sup>1</sup>.

Los dominios magnéticos tienen la propiedad de poder interactuar con un campo magnético externo en el entorno del material. Creando un campo externo suficientemente fuerte como para cambiar la orientación de los dominios, aparece un campo adicional generado por la alineación de los dominios. Llamando el campo externo  $B_{ext}$  y el campo total  $B_T$ , existe una relación entre los dos campos:

$$B_T = B_{ext} + B_{mat}. \quad (4.1)$$

El campo  $B_{mat}$  es la parte del campo magnético creado por los dominios del material ferromagnético, suele llamarse también **campo de imanación**. Este campo se debe en gran parte a la acción del campo externo, por lo que existe una relación de proporcionalidad entre los dos campos. La ecuación anterior se puede expresar como:

$$B_T = B_{ext} + B_{mat} = B_{ext} + \chi_m B_{ext} = B_{ext}(1 + \chi_m). \quad (4.2)$$

El parámetro  $\chi_m$  se llama **susceptibilidad magnética** del material, es un parámetro adimensional que representa el incremento relativo del campo total gracias a la acción del material. Se puede expresar en función de un nuevo parámetro llamado **permeabilidad relativa** del material:

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (4.3)$$

Se define asimismo la permeabilidad del material como:

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1 + \chi_m), \quad (4.4)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío. Para introducir este parámetro  $\mu$  en la relación (4.2) definimos la excitación magnética  $H$ :

$$B_{ext} = \mu_0 H \quad (4.5)$$

De tal modo que la ecuación (4.2) se transforma en:

$$B_T = \mu H \quad (4.6)$$

<sup>1</sup> Esta situación cambia en los imanes permanentes donde se ha conseguido fijar la orientación de los dominios magnéticos.

Nombre	Composición %	Saturación G	Max. Perm.	Perm. inicial	Resistividad $\mu\Omega\cdot\text{cm}$
78 Permalloy	78.5 Ni	10,500	70,000	8,000	16
MoPermalloy	79 Ni, 4.0 Mo	8,000	90,000	20,000	55
Supermalloy	79 Ni, 5 Mo	7,900	900,000	100,000	60
48 % nickel-iron	48 Ni	16,000	60,000	5,000	45
Monimax	47 Ni, 3 Mo	14,500	35,000	2,000	80
Sinimax	43 Ni, 3 Si	11,000	35,000	3,000	85
Mumetal	77 Ni, 5 Cu, 2 Cr	6,500	85,000	20,000	60
Deltamax	50 Ni	15,500	85,000		45

**Cuadro 4.1** Algunos ejemplos de materiales ferromagnéticos comerciales con sus parámetros (Perm. es permeabilidad).

El campo total dependerá del material (el factor  $\mu$ ) y de la acción del campo externo (el vector  $H$ ). Se sabe que la relación entre campo total y campo externo de la ecuación (4.2) no es lineal en general. El modelo propuesto tiene sus límites, veremos cómo se puede mejorarlo incluyendo los efectos de las no linealidades en las ecuaciones.

#### 4.1.2 Circuitos magnéticos

En los materiales ferromagnéticos existe una relación entre el campo creado por un dispositivo externo (típicamente bobinas) y el campo total que aparece en el material estudiado. Esta relación es importante de por sus aplicaciones en ciencia y tecnología, determina entre otras cosas la calidad de un circuito magnético. El campo “externo” como se ha visto en el epígrafe anterior se llamará la **excitación magnética**. El campo total  $B_T$  se llama **inducción magnética** o **densidad de flujo magnético**.

Primero se recuerda la relación entre la excitación magnética  $H$ , la inducción magnética  $B$ :

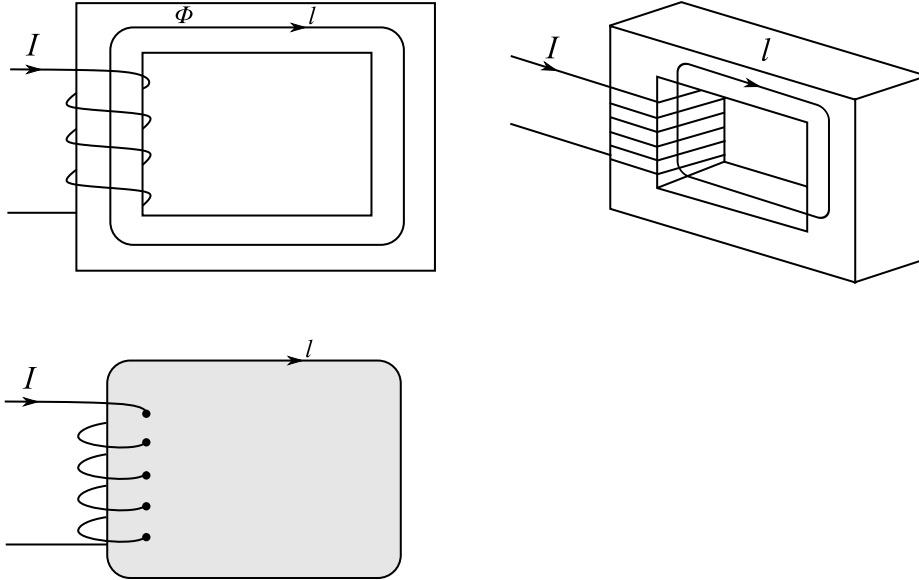
$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (4.7)$$

con  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío y  $\mu_r$  la permeabilidad relativa dependiendo del material, tiene como unidad el Henry por metro [ $H \cdot m^{-1}$ ]. La excitación,  $H$ , se mide en Amperios por metro [ $A \cdot m^{-1}$ ] en el sistema SI y la inducción magnética en Tesla [T] o a veces en Gauss ( $1T = 10000G$ ).

El parámetro  $\mu = \mu_0 \mu_r$  representa la sensibilidad de la materia al magnetismo. En la mayoría de los materiales, este parámetro se encuentra cerca de la unidad. Para los materiales ferromagnéticos  $\mu_r$  puede alcanzar hasta 100000 veces  $\mu_0$  y para el hierro convencional se encuentra alrededor de  $\mu_r = 5000$ . En la tabla 4.1 se dan algunos parámetros de materiales ferromagnéticos comerciales.

Se considera ahora el **circuito magnético** de la figura 4.2 sobre cual se dispone una bobina conductora enrollada alrededor de una de las columnas. Una corriente  $I$  circula en la bobina formada por  $N$  espiras. Un circuito magnético es un objeto formado por un material ferromagnético que permite la circulación de un flujo magnético en su interior. Permite canalizar el flujo magnético al antojo del diseñador. El campo se concentra en esta zona debido a la alta permeabilidad del material comparado con la del aire. Significa simplemente que el campo será mucho más intenso en el interior del material que en el exterior. En el caso de





**Figura 4.2** Ejemplo de circuito magnético con un devanado de  $N$  vueltas alimentado por una corriente  $I$ . El trayecto  $l$  nos permite establecer la relación entre corriente y excitación magnética en el circuito magnético.

la figura 4.2 se trata de una estructura en paralelepípedo con un hueco en su centro. Aplicando la ley de Ampère a este circuito aparece una relación entre la excitación magnética  $H$  y la corriente  $I$ . La ley de Ampère establece que la circulación del vector de la excitación  $\mathbf{H}$  sobre un contorno cerrado es igual a la suma de la corriente que encierra este contorno:

$$\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \quad (4.8)$$

El contorno de la figura 4.2 atraviesa el eje de la bobina y define una superficie (sombreada en la figura). La corriente  $I$  perfora  $N$  veces la superficie, lo que equivale a decir que el contorno encierra  $N$  veces la corriente  $I$ . Para un circuito cerrado como señalado en la figura 4.2 la excitación  $\mathbf{H}$  es casi constante y este vector tiene la misma dirección que el vector  $d\mathbf{l}$  sobre todo el trayecto<sup>2</sup>. La integral curvilínea tiene un resultado sencillo:

$$Hl = NI = \mathcal{F} \quad (4.9)$$

$\mathcal{F}$  es la fuerza magnetomotriz, corresponde al producto  $NI$ . Es la “fuerza magnética” que genera la excitación magnética  $H$ , su unidad es el amperio vuelta [ $Av$ ]. La excitación es directamente proporcional a la corriente mientras el campo  $B$  depende también de otros factores, en concreto del material.

<sup>2</sup> La excitación magnética  $\mathbf{H}$  va a ser paralela a los lados del circuito salvo cerca de los bordes.

Por otro lado, la inducción magnética  $B$  se relaciona con esta fuerza  $\mathcal{F}$  gracias a la ecuación (4.7) :

$$\mathcal{F} = NI = Hl = \frac{Bl}{\mu} \quad (4.10)$$

Para algunas aplicaciones es útil relacionar la fuerza magnetomotriz con el flujo magnético que circula en el circuito magnético<sup>3</sup>. El flujo de la inducción magnética en el circuito consiste en el producto de la superficie de una sección  $S$  del circuito por la densidad de flujo magnético  $B$ :

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = NBS, \quad (4.11)$$

su unidad es el Weber [Wb]. Introducimos esta expresión del flujo en la ecuación (4.10):

$$\mathcal{F} = \frac{l}{S\mu} \Phi. \quad (4.12)$$

En esta última ecuación el flujo magnético de una sección aparece como función de la fuerza magnetomotriz. Esta última expresión establece una relación entre flujo magnético y fuerza magnetomotriz que se generaliza con la **ley de Hopkinson**:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi, \quad (4.13)$$

siendo  $\mathcal{R}$  la **reluctancia** del circuito magnético, que es función de las propiedades del material utilizado ( $\mu$ ) y de la geometría ( $S$  y  $l$ ). Se mide en Amperios-vuelta entre Weber [ $Av \cdot Wb^{-1}$ ]. Esta ley establece una relación entre el flujo magnético y la corriente de alimentación de la bobina dado que  $\mathcal{F} = NI$ . Es una relación esencial para el diseño de las máquinas eléctricas dado que es el flujo magnético que transporta la energía. En el ejemplo precedente la reluctancia para un circuito magnético sin pérdidas se expresa como:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{S\mu}. \quad (4.14)$$

Depende de la geometría del circuito (longitud  $l$ , superficie  $S$ , número de vueltas  $N$ ) y de la permeabilidad magnética del material  $\mu$ . Nótese que si  $\mu$  aumenta entonces el flujo magnético  $\Phi$  es más intenso para una misma fuerza magnetomotriz (es decir para una misma corriente). De hecho, se puede escribir el flujo magnético en función de la corriente  $I$  que alimenta el devanado:

$$\Phi = \frac{NS\mu}{l} I. \quad (4.15)$$

El lector atento habrá quizás notado una similitud con la ecuación 1.30. Si consideramos el flujo total  $\Phi_B$  en la bobina demo multiplicar  $N$  veces el flujo anterior<sup>4</sup>

<sup>3</sup> La razón se basa en que se usa el flujo magnético en corriente alterna para expresar las tensiones inducidas gracias a la ley de Faraday.

<sup>4</sup> corresponde a la sección del circuito y podemos asimilar la sección del material con la sección de la bobina

Electricidad	Magnetismo
Corriente $A$	Flujo $Wb$
Fuerza electromotriz $V$	Fuerza magnetomotriz $A \cdot v$
Resistencia $\Omega$	Reluctancia $Av \cdot Wb^{-1}$

**Cuadro 4.2** Tabla de equivalente entre cantidades eléctricas y cantidades magnéticas para el cálculo de circuitos magnéticos.

y obtenemos:

$$\Phi_B = \frac{N^2 S \mu}{l} I. \quad (4.16)$$

¡Volvemos a encontrar la expresión de la inductancia de una bobina con un núcleo ferromagnético!

Para el diseño de máquinas conviene entonces ajustar los parámetros de la reluctancia para obtener la magnetización deseada. Esta reluctancia es generalmente una función no lineal muy compleja debido a los efectos del circuito ferromagnético, por lo que podemos confiar en los modelos lineales hasta cierto punto.

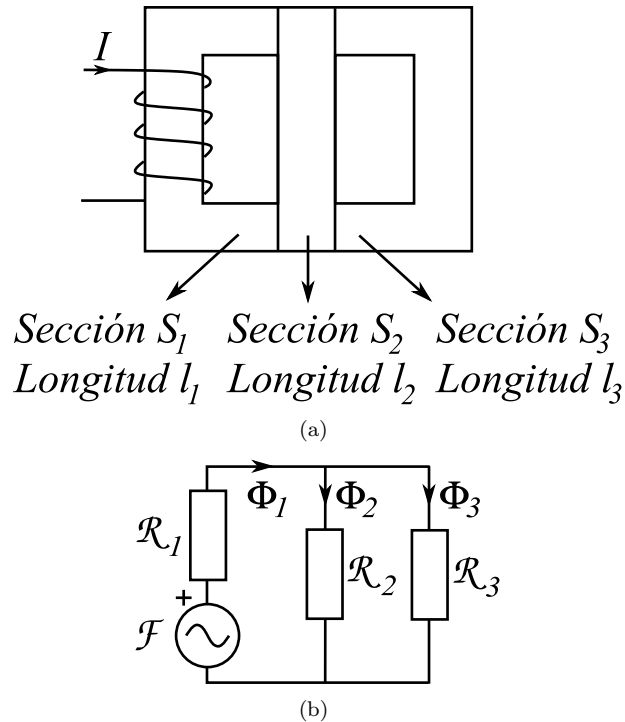
La ley de Hopkinson recuerda la ley de Ohm con la reluctancia  $\mathcal{R}$  siendo el equivalente de la resistencia, la fuerza magnetomotriz el análogo a la fuerza electromotriz y la corriente eléctrica el correspondiente al flujo magnético. El equivalente simbólico entre estas cantidades se representa en la tabla 4.2. Siendo los materiales lineales, se puede descomponer los circuitos magnéticos en distintas secciones para calcular la reluctancia total usando fórmulas tal como (4.14).

En la figura 4.3 se ha representado un circuito magnético descomponible en tres partes. Este circuito se compone de dos partes en forma de C y una en forma de I cuya reluctancia puede calcularse con la ecuación (4.14). Considerando la reluctancia lineal en el el circuito se puede estudiar nuestro dispositivo como un circuito de corriente eléctrica. Es decir, el flujo magnético obedecerá también a las leyes de Kirchhoff modificadas para este sistema. Así pues, la suma algebraica de los flujos en un nudo es cero. En nuestro ejemplo el circuito equivalente de la figura 4.3 consta de tres reluctancias  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_3$ , y una fuerza magnetomotriz  $\mathcal{F} = NI$ . El flujo  $\Phi_i$  de cada rama circula en el circuito tal como lo haría una corriente eléctrica. La otra regla de cálculo consiste en que la suma algebraica de las fuerzas magnetomotrices a lo largo de un circuito cerrado es cero. Por ejemplo, en la primera malla de la figura 4.3 (b) se suman las fuentes y las caídas de flujo al igual que en un circuito eléctrico:

$$\mathcal{F} - \mathcal{R}_1 \Phi_1 - \mathcal{R}_2 \Phi_2 = 0$$

Este planteamiento es valido cuando se sabe que la permeabilidad del circuito es lineal para un rango de valores de la fuerza magnetomotriz. La relación entre fuerza magnetomotriz y flujo magnético en general no es lineal para todas las excitaciones  $H$ .

Aparecen con frecuencia cortes en los circuitos magnéticos, consisten simplemente en ranuras que rompen la continuidad del circuito. Se llaman entrehierros



**Figura 4.3** (a) Descomposición del núcleo en tres partes con reluctancias diferentes dado que la longitud y la sección son diferentes. (b) Equivalente en forma de circuito eléctrico del circuito magnético de la figura (a).

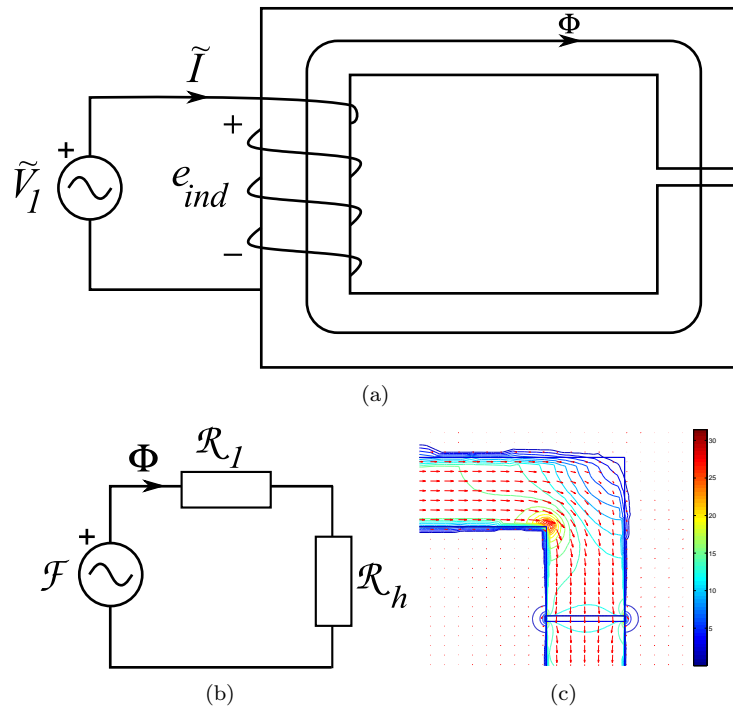
y son muy frecuentes y necesarios en las máquinas eléctricas tales como motores y generadores. En la figura 4.4 se ha dibujado un ejemplo de circuito magnético con un entrehierro. El modelo equivalente del circuito consiste en la reluctancia del circuito magnético en serie con la reluctancia del entrehierro. Siendo el entrehierro un espacio lleno de aire, su reluctancia es:

$$\mathcal{R}_h = \frac{l}{S\mu_0}. \quad (4.17)$$

Esta reluctancia suele tener un valor muy superior a la reluctancia del circuito magnético debido a que  $\mu_0 \ll \mu_r\mu_0$ . Provoca que el flujo magnético total circulando es muy inferior al flujo sin entrehierro. Para aclarar este punto consideramos el circuito de la figura 4.4 (a). Con la hipótesis del circuito lineal se obtiene como expresión del flujo:

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_h} \quad (4.18)$$

En la figura 4.4.(c) aparece una representación del campo magnético en un corte del circuito magnético. Esta simulación es interesante en varios aspectos. Primero se ve que el campo magnético de excitación  $\mathbf{H}$ , representado por las flechas es

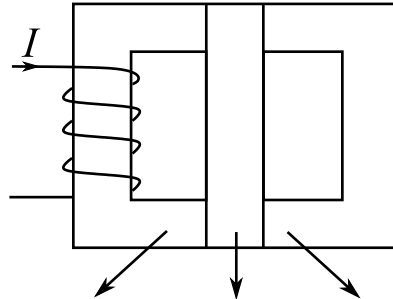


**Figura 4.4** (a) Circuito magnético con un entrehierro. En (b) se enseña el modelo del circuito con la reluctancia del entrehierro, suele ser mucho mayor que la reluctancia. En (c) se representa la simulación numérica del campo magnético en el circuito magnético.

más o menos constante en el todo el circuito. Por otro lado, la densidad de flujo  $\mathbf{B}$ , representado por colores y líneas de niveles, no es nada constante en el medio. Cerca de las esquinas surgen grandes variaciones de campo. En el entrehierro disminuye mucho el campo debido a la alta permeabilidad. Estos efectos llamados efectos de borde ocasionan pérdidas de energía en las máquinas eléctricas. Se intenta reducir todo lo posible estos cortes.

### Ejercicio 4.1

Calcular los flujos magnéticos en el circuito magnético de la figura siguiente dado los siguientes parámetros del circuito:  $l_1 = l_3 = 10\text{cm}$ ,  $l_2 = 4\text{cm}$ ,  $S_1 = S_2 = S_3 = 81 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$ ,  $\mu_r = 40000$ ,  $I = 40\text{mA}$ ,  $N = 500$ .



Sección  $S_1$    Sección  $S_2$    Sección  $S_3$   
 Longitud  $l_1$    Longitud  $l_2$    Longitud  $l_3$

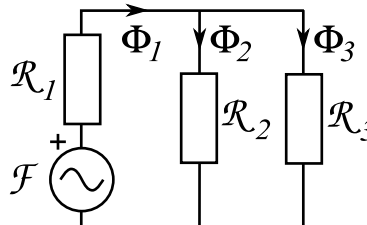
#### Solución del ejercicio 4.1

Primero se calcula las reluctancias de cada parte:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3 = \frac{l_1}{S_1 \mu} = 245,6 \text{ Av} \cdot \text{Wb}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{S_2 \mu} = 98,2 \text{ Av} \cdot \text{Wb}^{-1}$$

Por otro la fuerza magnetomotriz vale:  $\mathcal{F} = NI = 20 \text{ A} \cdot \text{vuelta}$ . Se establecen las relaciones entre flujos y reluctancias tal como si se tratará del circuito de corriente continua de la figura siguiente:



Se obtienen las ecuaciones:

$$\mathcal{F} - \Phi_1 \mathcal{R}_1 - \Phi_3 \mathcal{R}_3 = 0$$

$$\Phi_2 \mathcal{R}_2 = \Phi_3 \mathcal{R}_3$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas que se pueden resolver fácilmente.

Se resuelve:

$$\Phi_1 = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

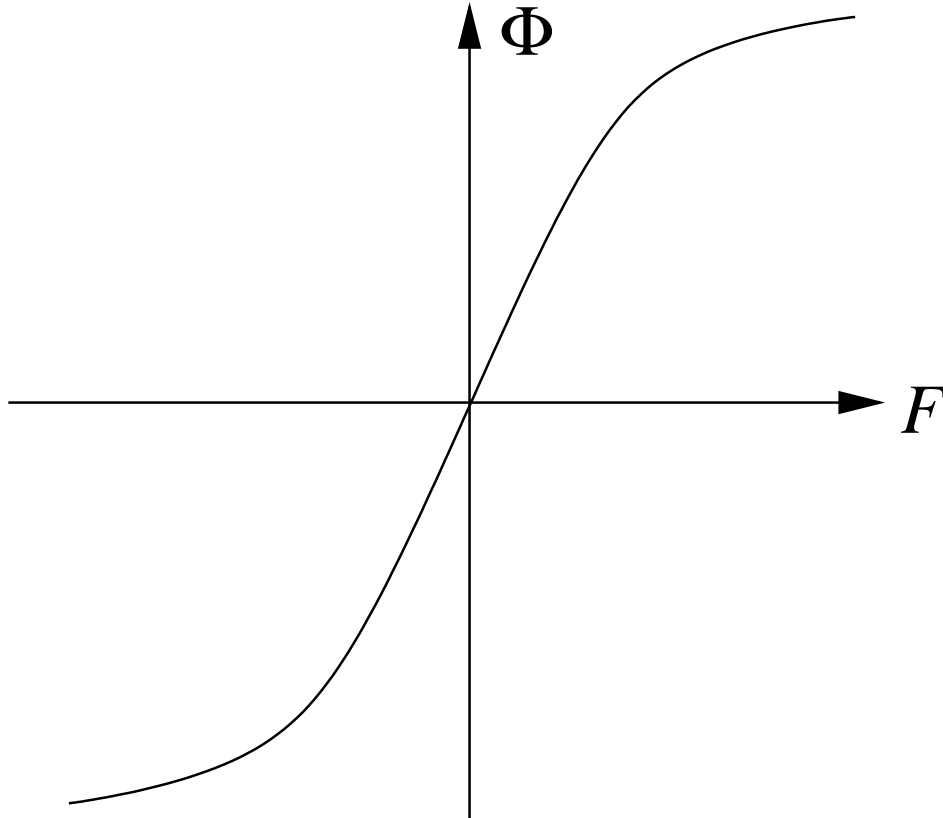
$$\Phi_3 = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

Si interesa saber la inducción  $B_i$  en cada parte, se puede dividir el flujo por la sección:

$$B_1 = 7,8 \text{ T}$$

$$B_2 = 5,5 \text{ T}$$

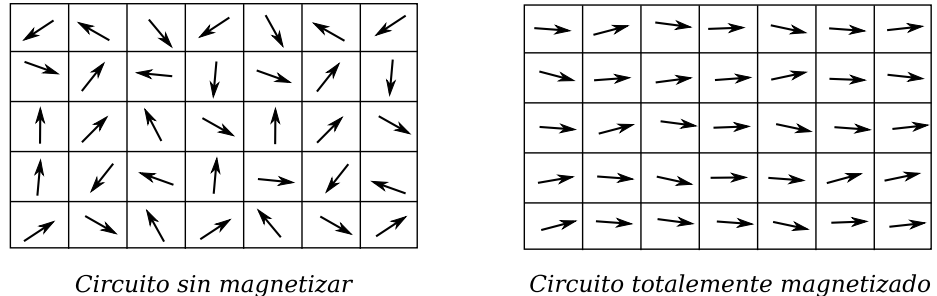
$$B_3 = 2,2 \text{ T}$$



**Figura 4.5** Expresión del flujo creado en el hierro en función de la fuerza magnetomotriz para una excitación de corriente continua.

### 4.1.3 Saturación del circuito

En la figura 4.5 se enseña un ejemplo de relación entre el flujo creado y la fuerza magnetomotriz en régimen de corriente continua. El circuito magnético satura a partir de un cierto valor de la fuerza magnetomotriz. Es decir, que si aumenta la corriente, a partir de cierto valor no hay aumento significativo de flujo en el circuito. Para ilustrar este fenómeno se toma el ejemplo la figura 4.6 donde se dibuja una idealización de un circuito magnético. Un pequeño trozo de hierro o de material ferromagnético puede considerarse como un conjunto de imanes elementales, llamados dominios, que pueden estar orientados en una dirección arbitraria. Al circular un flujo magnético por el circuito estos imanes tienden a alinearse en la dirección de la excitación magnética  $H$ . El campo total



**Figura 4.6** Magnetización del circuito ferromagnético sin y con presencia de un campo magnético. Sin presencia de campo, los dominios magnéticos están orientados en direcciones aleatorias (figura de izquierda). Si se aplica un campo magnético suficientemente fuerte todos los dominios se alinean en la misma dirección (es el fenómeno de saturación).

es la suma de la excitación más el propio campo generado por los dominios:

$$B = \mu_0(H + M), \quad (4.19)$$

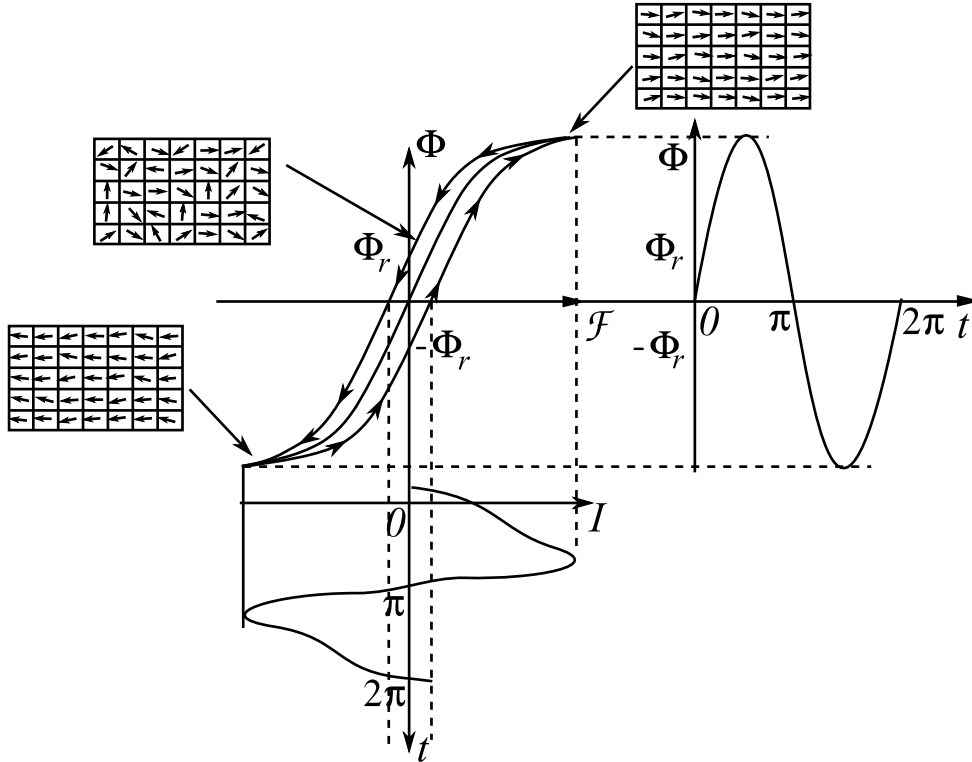
con  $M$  el campo creado por el material llamado **imanación** (corresponde al campo de  $B_{mat}$  de imanación visto anteriormente). Cuando todos los dominios están alineados, se dice que el hierro está saturado. Ya no puede haber creación de flujo por parte del material dado que  $M$  ha alcanzado su máximo. Esta propiedad limita el flujo de los circuitos magnéticos.

El fenómeno de saturación del hierro aparece para corrientes continuas y alternas. Sin embargo, para las corrientes alternas aparece otro fenómeno no lineal. Cuando se genera un campo externo y que se establece el flujo, todos estos imanes se alinean en la dirección de la excitación magnética. Si se interrumpe de repente la corriente, parte de los imanes elementales conservan su dirección. Hay un **magnetismo remanente** cuando el material guarda la memoria de su estado anterior. Para anular este flujo residual se necesita invertir la polaridad de la corriente y aumentarla hasta que desaparezca esta magnetización. Como se verá a continuación este efecto tiene consecuencias importante sobre el consumo de energía de las máquinas eléctricas. Sin embargo es este mismo fenómeno que permite la construcción de imanes permanentes.

#### 4.1.4 Perdidas por histéresis

En el apartado anterior se ha descrito el fenómeno de magnetización de un material ferromagnético. Aplicando una corriente alterna, el magnetismo remanente del circuito provoca un gasto de energía para alinear todos los dominios magnéticos en cada ciclo. Es decir, que se debe que emplear una parte de la energía para borrar la memoria del material. Este efecto se llama histéresis. La histéresis aparece en muchos fenómenos que guardan memoria de su estado anterior. En la figura 4.7 se enseña el ciclo de histéresis de un circuito magnético





**Figura 4.7** Histéresis del circuito magnético cuando se le alimenta con un generador de tensión alterna. El flujo es proporcional a la tensión sinusoidal por la ley de Faraday. La corriente generada depende de las características del circuito magnético (depende del ciclo de histéresis). Esto explica la deformación de la corriente de alimentación.

cuando la tensión que alimenta la bobina es sinusoidal. El flujo establecido es sinusoidal dado que la ley de Faraday impone:

$$V = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.20)$$

Dado que la tensión  $V$  viene impuesta por el generador, el flujo será necesariamente sinusoidal. La corriente sin embargo depende de la permeabilidad del material como se deduce de la ecuación (4.16) y se ve deformada por el comportamiento no lineal del material ferromagnético. Estas deformaciones de la corriente generan armónicos y desfase que provocan pérdidas y calentamientos de los bobinados<sup>5</sup>.

La energía consumida por este fenómeno es función del volumen del material,

<sup>5</sup> La magnetización del circuito magnético puede imaginarse como un partido de tenis en el que el público es la materia magnética y la pelota la excitación magnética. Los asistentes van siguiendo con la cabeza la pelota pero no todo el mundo sigue. Si oscila demasiado deprisa, al público le cuesta seguir (histéresis). Si la pelota llega más allá del terreno el público no puede girar más la cabeza (saturación).

Material	Coefficiente de Steinmetz $\eta$
Hoja de hierro o acero	600-800
Hierro fundido (hierro gris)	3265
Cobalto y Nickel	828
Hierro al silicio	200-300

**Cuadro 4.3** Coeficientes de Steinmetz para algunos materiales usados en fabricación de máquinas eléctricas.

de la frecuencia, de la intensidad de la corriente eléctrica y de la intensidad de la inducción magnética. Se pueden estimar estas pérdidas con aproximaciones empíricas como la **fórmula de Steinmetz** que expresa la energía disipada por ciclo en el material:

$$W_h = \eta B_{max}^{1,6}, \quad (4.21)$$

en  $[J.m^{-3}.Hz^{-1}]$  con el campo  $B_{max}$  en Gauss. El exponente puede variar según el material entre 1.4 y 1.8 (típicamente 1.6) y el coeficiente  $\eta$  se llama coeficiente de Steinmetz. Este coeficiente depende del material estudiado, por ejemplo en la tabla 4.3 se muestra algunos de los coeficientes medidos por C. P. Steinmetz<sup>6</sup>.

Las pérdidas totales en un núcleo se establecen en función de la frecuencia del ciclo y del volumen del material:

$$P_h = fV\eta B_{max}^{1,6}, \quad (4.22)$$

en [W], con el volumen  $V$  en  $m^3$ . Esta fórmula tiene una utilidad limitada dado que los constructores dan directamente las pérdidas totales del núcleo, incluyendo las pérdidas por histéresis, en Vatio por unidad de volumen o en Vatio por unidad de masa. Estas pérdidas afectan al rendimiento de las máquinas eléctricas y se trata de un parámetro de diseño importante.

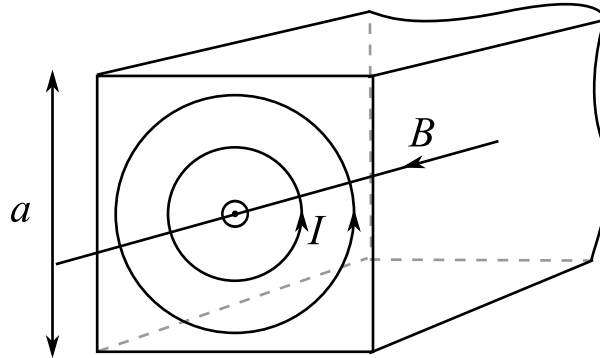
#### 4.1.5 Pérdidas por corrientes de Foucault

El otro tipo de pérdidas que se encuentran en el circuito magnético son las corrientes parásitas internas en el hierro. Al circular un campo magnético en el material, se producen corrientes de inducción que circulan dentro del conductor. Por lo tanto, solo calientan el circuito y no participan en la transformación de la energía. Son las llamadas corrientes de Foucault. En la figura 4.8 se ilustra el proceso de formación de estas corrientes internas. La circulación de esta corriente provoca un calentamiento del conductor y una disipación de energía.

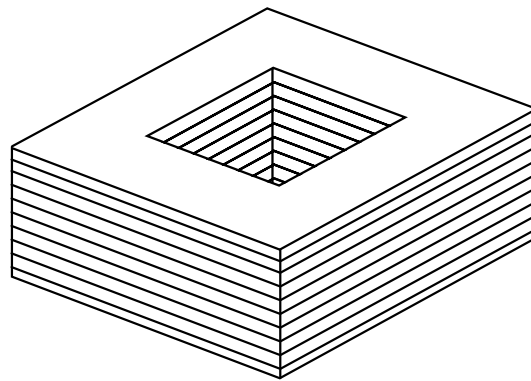
El valor de la potencia disipada depende del volumen, de la intensidad máxima del campo  $B_{max}$ , de la frecuencia  $f$  y de la conductividad del metal  $\sigma$ . La energía disipada por una lámina de espesor  $a$  y de volumen  $V$  es:

$$P_f = \frac{\pi^2}{6} V a^2 f^2 B_{max}^2 \sigma \quad (4.23)$$

<sup>6</sup> C. P. Steinmetz, Theory and Calculation of Electric Circuits, McGraw-Hill NY, 1917.



**Figura 4.8** Formación de corrientes de Foucault en un conductor en presencia de un campo magnético. Se representa la sección transversal de un circuito magnético en el cual circula un flujo magnético. Las corrientes internas se forman en el plano de la sección.



**Figura 4.9** Ejemplo de circuito magnético laminado

Para materiales más resistivos las pérdidas bajan. Aunque son imposible de evitar, una forma de reducir estas pérdidas consiste en disminuir el volumen donde circulan estas corrientes. Para ello, se corta el material en láminas y se recubren de un aislante eléctrico tal como se enseña en la figura 4.9. Se unen las laminas para formar el circuito magnético y de esta forma se reduce el volumen en el que circulan las corrientes, y por tanto las pérdidas. Las chapas metálicas tienen un espesor comprendido entre 0.1 a 0.38mm y se suele emplear también cintas de 0.0125 a 0.025mm de espesor para mejorar el rendimiento, a coste de una subida del precio de fabricación.

### Ejercicio 4.2

Se dispone de un circuito magnético formado por láminas de un material

ferromagnético de espesor 0,5mm. La inducción máxima en el circuito es de  $B_{max} = 1,5T$  y la frecuencia del campo es de 50Hz. Se superponen 100 láminas de superficie  $S = 10\text{cm}^2$  (superficie del material). La resistividad del material es  $\rho = 50 \cdot 10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$ . Calcular las pérdidas del circuito por corrientes de Foucault. Calcular las pérdidas si el circuito fuese macizo, es decir con una anchura de 5cm.

### Solución del ejercicio 4.2

Para calcular las pérdidas se debe emplear la fórmula (4.23). Se disponen de todos los elementos recordando que  $\sigma = 1/\rho$ , es decir la resistividad es el inverso de la conductividad. Calculamos las pérdidas para el material laminado:

$$P_f^l = \frac{\pi^2}{6}(NSa)a^2 f^2 B_{max}^2 \sigma = \frac{\pi^2}{6} 100 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 50^2 \cdot 1,5^2 \frac{1}{50 \cdot 10^{-8}} = 0,023W$$

Si el circuito magnético fuese macizo entonces las pérdidas serían:

$$P_f^m = \frac{\pi^2}{6}(NSa)(Na)^2 f^2 B_{max}^2 \sigma = \frac{\pi^2}{6} 100^3 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 50^2 \cdot 1,5^2 \frac{1}{50 \cdot 10^{-8}} = 231W$$

El hecho de laminar el circuito reduce mucho las pérdidas por corrientes internas de Foucault.

#### 4.1.6 Pérdidas de hierro

Las pérdidas por histéresis y por corriente de Foucault juntas se llaman pérdidas de hierro y se pueden modelizar de una forma sencilla como se verá a continuación en el modelo eléctrico del circuito. Conviene hacer una observación importante sobre las pérdidas del núcleo: dependen ambas del campo en el circuito magnético. Para simplificar, las pérdidas totales del circuito magnético se van a estimar sumando las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault:

$$P = P_h + P_f = \alpha B_{max}^{1,6} + \beta B_{max}^2, \quad (4.24)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes que dependen del material. Para simplificar todavía más los cálculos se elige un exponente igual 2 para las pérdidas por histéresis  $P_h$ . En primera aproximación, las pérdidas totales son proporcionales al cuadrado del campo:

$$P = P_h + P_f = \alpha B_{max}^2 + \beta B_{max}^2 = (\alpha + \beta) B_{max}^2, \quad (4.25)$$

Se pueden juntar los dos coeficiente en uno único que se determina experimentalmente con ensayos del material.

#### 4.1.7 Autoinductancia y modelo eléctrico de un circuito magnético

Suponemos ahora una excitación magnética aplicada al núcleo mediante una bobina alimentada en corriente alterna. Para determinar la relación entre la tensión y la corriente de alimentación de la bobina se aplican las leyes de los circuitos

descritas en los capítulos anteriores. La ley de Faraday expresa la tensión inducida en un conductor atravesado por un flujo magnético variable. Suponiendo una bobina conductora de resistencia  $r$  enrollada en torno en al circuito magnético, un primer modelo eléctrico consiste en la pérdida de tensión por la resistencia  $r$  y la tensión inducida:

$$V_1 = rI + e_{ind} \quad (4.26)$$

con  $r$  la resistencia de la bobina. Esta resistencia es muy pequeña y se puede despreciar frente a  $e_{ind}$  en muchos casos<sup>7</sup>.

En el caso de un circuito magnético tal como el de la figura 4.10, se puede expresar esta tensión inducida en función del flujo en el circuito y del número de vueltas de la bobina alrededor del circuito magnético:

$$e_{ind} = \frac{d\Phi_T}{dt} \simeq V_1 \quad (4.27)$$

Siendo  $\Phi_T$  el flujo total que atraviesa la bobina, es decir hay que contar las contribuciones de las  $N$  espiras de acuerdo con la ley de Faraday. La inducción magnética se aplica a toda la superficie de la espira que se puede considerar como una especie de hélice. Este flujo total de la bobina se relaciona con el flujo  $\Phi$  de la sección del circuito magnético:

$$\Phi_T = N\Phi \quad (4.28)$$

El flujo  $\Phi$ , también a veces llamado flujo de enlace.

Es importante aquí destacar que el flujo  $\Phi_T$  creado depende únicamente de la tensión de alimentación mientras que para una corriente continua el flujo depende de la circulación de la corriente en la bobina. En el caso de una tensión alterna, las características del circuito magnético determinan la corriente. Para aclarar esta diferencia fundamental, en la figura 4.7 se representa el flujo creado por una tensión alterna en una bobina acoplada a un núcleo ferromagnético. Este flujo se relaciona con la corriente de forma no lineal debido al fenómeno de histéresis del circuito magnético. La corriente es periódica pero muy deformada. Por la ley de Hopkinson se obtiene:

$$\mathcal{F} = NI = \Phi\mathcal{R}. \quad (4.29)$$

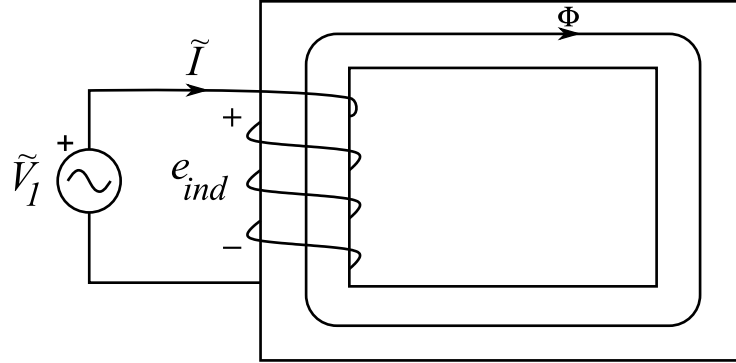
Si el flujo es sinusoidal, la corriente dependerá de la reluctancia  $\mathcal{R}$ . Sin embargo la reluctancia siendo una función no lineal, la corriente se deforma y aparecen armónicos no deseados (ver sección 4.1.4).

La relación entre el flujo total atravesando la bobina y la corriente se llama inductancia o autoinductancia de la bobina:

$$L = \frac{\Phi_T}{I} = \frac{N\Phi}{I} \quad (4.30)$$

este parámetro depende únicamente de la geometría de la bobina y del material.

<sup>7</sup> Sin embargo en los transformadores de potencia esta resistencia tiene efectos importantes sobre el consumo de energía



**Figura 4.10** Representación un circuito magnético alimentado por una corriente alterna junto con la tensión inducida en el circuito.

Usando la ley de Hopkinson y la fórmula anterior obtenemos la inductancia del complejo bobina+circuito magnético:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2\Phi}{\mathcal{R}\Phi} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \quad (4.31)$$

Es interesante remarcar que si sustituimos  $\mathcal{R} = l/\mu S$  volvemos a encontrar la expresión de una bobina con un núcleo ferromagnético. Podemos ahora relacionar la inductancia con la tensión de alimentación  $V_1$ .

Para un circuito lineal **sin pérdidas**, la tensión inducida puede expresarse en función de la autoinductancia del circuito:

$$e_{ind} = \frac{d\Phi_T}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}, \quad (4.32)$$

$I$  es la corriente que permite magnetizar el circuito, se llama por tanto **corriente de magnetización**  $I_m$ .

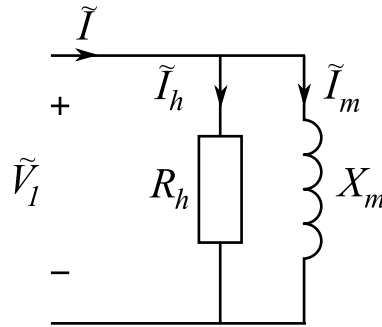
Si la tensión  $V_1$  es alterna, la corriente está en desfase de  $\frac{\pi}{2}$  con la tensión  $e_{ind}$ . En el dominio de fasores se obtiene la expresión:

$$\tilde{V}_1 = jL\omega\tilde{I}_m = jX_m\tilde{I}_m \quad (4.33)$$

El circuito magnético junto con la bobina se puede modelizar con una inductancia  $L$  que depende del número de espiras y de la reluctancia del circuito.

Nos falta incluir las pérdidas de hierro añadiendo un elemento que permita modelizarlas. En los apartados anteriores se ha visto como las pérdidas dependían de las características del circuito magnético y de la inducción magnética. Globalmente se considera que las pérdidas son proporcionales al cuadrado del campo magnético multiplicado por un coeficiente (ver la ecuación (4.25) del epígrafe anterior). Por suerte, la magnitud del campo magnético en el circuito es proporcional al tensión de entrada de nuestra bobina gracias a la ley de Faraday. Por lo que las pérdidas del núcleo se van a aproximar por la siguiente expresión:

$$P = P_h + P_f = \gamma|\tilde{V}_1|^2 \quad (4.34)$$



**Figura 4.11** Circuito eléctrico equivalente de un circuito magnético.

este coeficiente  $\gamma$  tiene como unidad  $\text{Ohmios}^{-1}$ . Se deduce de esta ecuación que las pérdidas se pueden modelizar con una resistencia ideal de valor  $R_h = \gamma^{-1}$ . La potencia disipada en esta resistencia es función del cuadrado de la tensión de alimentación  $V_1$  y vale:

$$P = \frac{|\tilde{V}_1|^2}{R_h} = R_h |\tilde{I}_h|^2, \quad (4.35)$$

con  $I_h$  la corriente que fluye por esta resistencia equivalente. Dado que la corriente de magnetización  $\tilde{I}_m$  y las pérdidas de hierro dependen directamente de  $\tilde{V}_1$ , conviene descomponer la corriente  $\tilde{I}$  de alimentación en dos componentes:

$$\tilde{I} = \tilde{I}_h + \tilde{I}_m = \frac{\tilde{V}_1}{R_h} + \frac{\tilde{V}_1}{jL\omega} \quad (4.36)$$

El modelo equivalente del circuito magnético consiste entonces en dos elementos en paralelo, una inductancia equivalente de magnetización y un elemento  $R_h$  modelizando las pérdidas de hierro. Las pérdidas de hierro en este caso van a ser representadas por una simple resistencia disipando una potencia proporcional al cuadrado de la tensión inducida. El esquema eléctrico equivalente del circuito magnético en corriente alterna se puede ver en la figura 4.11, consiste en la inductancia de magnetización  $jX_m = jL\omega$  en paralelo con la resistencia de pérdida de hierro  $R_h$ .

Este modelo se puede completar con dos efectos adicionales que se traducen en pérdidas:

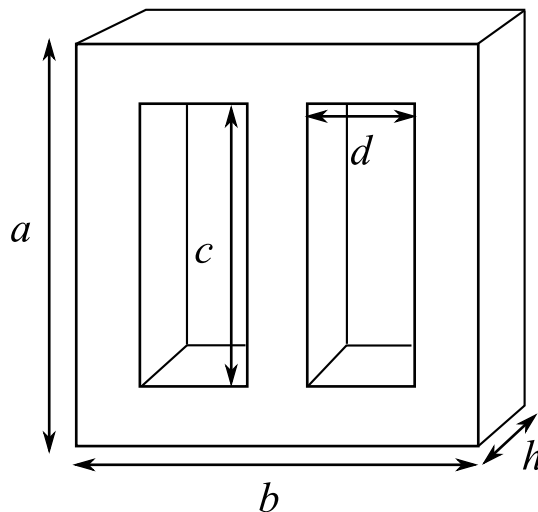
- Las pérdidas de cobre, sería una simple resistencia  $r$  en serie con la fuente de tensión.
- Las pérdidas de flujo magnético.

Las segundas se deben a que no todas las líneas de flujo se quedan dentro del circuito magnético, algunas se cierran en el aire a pesar de que la permeabilidad es muy inferior a la del hierro. En el circuito equivalente se plasma en una inductancia en serie con la fuente y la resistencia equivalente de pérdidas de

cobre. Para los modelos que vamos a tratar en este capítulo no tomaremos en cuenta estas pérdidas, sin embargo para el estudio de las máquinas eléctricas se volverán a incluir.

### Ejercicio 4.3

En este ejemplo se trata de deducir un modelo razonable de un circuito magnético a partir de los elementos de construcción del circuito siguiente:



Teniendo un circuito magnético construido a partir de láminas de una aleación de Hierro-Silicio cada lámina tiene las dimensiones indicadas en la figura anterior. Los datos relativos al circuito son:

- Geometría
  - Dimensiones:  $a = 20\text{cm}$ ,  $b = 20\text{cm}$ ,  $c = 12\text{cm}$ ,  $d = 4\text{cm}$ .
  - Ancho de las láminas  $0,5\text{mm}$ .
  - Ancho del circuito magnético:  $h = 4\text{cm}$  de ancho.
- Fuente
  - Bobina de  $N=200$  vueltas sobre la columna central.
  - Tensión de alimentación de  $U=100\text{V}$  eficaces y de frecuencia  $50\text{Hz}$ .
- Material
  - Resistividad del material es  $\rho = 50 \cdot 10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$
  - Pérdidas por histéresis:  $p_{his} = 0,02 \text{ W}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{Hz}^{-1}$ .
  - Masa volúmica:  $7,6 \cdot 10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .
  - Permeabilidad relativa del material:  $\mu_r = 60000$ .

### Solución del ejercicio 4.3

Primero se va a calcular la inducción máxima del campo producido por la



bobina. El flujo magnético se puede hallar dado que se conoce la tensión de alimentación, para ello se aplica la ley de Faraday en el dominio de los fasores:

$$\tilde{U} = j\omega N\tilde{\Phi} = j\omega SN\tilde{B},$$

con S la superficie de una sección del circuito. El módulo de esta expresión es:

$$U = 2\pi fSNB$$

Se busca la inducción máxima por lo que se multiplica por un factor  $\sqrt{2}$ . Se consigue así la **fórmula de Boucherot**:

$$U = 2\pi fSNB_{max}/\sqrt{2} = 4,44fSNB_{max}$$

Gracias a la figura del circuito, se puede comprobar que la sección transversal del circuito magnético es de 4cm por 4cm en todo sitio. La inducción máxima es:

$$B_{max} = \frac{U}{4,44fSN} = \frac{100}{4,44 \cdot 50 \cdot (0,04)^2 200} \simeq 1,4T$$

Se pasa a calcular las pérdidas del núcleo empezando por las corrientes de Foucault. El volumen del circuito se puede hallar con la figura 4.12 y el ancho del circuito. El volumen del sólido es:

$$V = (a \cdot b - 2c \cdot d) \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 1,21 \cdot 10^{-3} m^3$$

Se disponen de todos los elementos añadiendo que  $\sigma = 1/\rho$ . Se aplica la fórmula (4.23):

$$P_f = \frac{\pi^2}{6} \cdot (1,21 \cdot 10^{-3}) \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 50^2 \cdot 1,4^2 \cdot \frac{1}{50 \cdot 10^{-8}} = 4,8W$$

Las pérdidas por corrientes de Foucault son razonables. Ahora se van a calcular las pérdidas por histéresis del circuito. Se conoce el volumen y la masa volúmica del circuito, deducimos primero la masa:

$$m = 7,6 \cdot 10^3 \cdot 1,21 \cdot 10^{-3} = 9,2 \text{ kg}$$

Las pérdidas por histéresis del núcleo son:

$$P_{his} = p_{his} \cdot m \cdot f = 0,02 \cdot 9,2 \cdot 50 = 9,2W$$

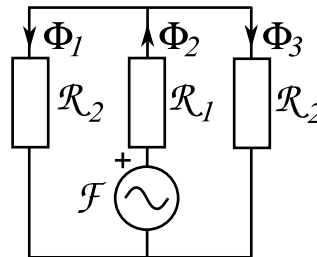
Siendo las pérdidas totales:

$$P_h = \frac{U^2}{R_h} = (9,2 + 4,8)W,$$

El modelo de pérdidas equivale a una resistencia en paralelo de:

$$R_h = \frac{100^2}{14} = 714,3\Omega$$

Falta hallar la inductancia de magnetización del circuito. Para calcular la impedancia equivalente primero se necesita saber cuanta corriente circula por la bobina para generar el campo magnético. Cuando se conecta la fuente de tensión a la bobina, una parte de la corriente se pierde en disipación (la potencia que se calculó anteriormente), y una parte genera el campo propiamente dicho. Se puede estimar esta corriente con la reluctancia del circuito magnético. Dado que el circuito consta de tres partes, una barra central y dos partes laterales en C, se puede calcular la reluctancia total a partir del circuito magnético equivalente.



*Circuito magnético equivalente para el cálculo de la reluctancia.*

Se identifica la reluctancia de la parte central  $\mathcal{R}_1$  y la reluctancia de las partes paralelas  $\mathcal{R}_2$  dado que son idénticas.

$$\mathcal{R}_1 = \frac{c + (a - c)/2}{S\mu_0\mu_r} = \frac{0,12 + (0,2 - 0,12)/2}{(0,04)^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60000} = 1326 \text{ Av} \cdot \text{Wb}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{2d + c + (a - c)/2}{S\mu_0\mu_r} = \frac{0,24}{(0,04)^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60000} = 1989 \text{ Av} \cdot \text{Wb}^{-1}$$

La reluctancia total del circuito es:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + (\mathcal{R}_2 || \mathcal{R}_2) = 1326 + \frac{1989}{2} = 2320 \text{ Av} \cdot \text{Wb}^{-1}$$

La fuerza magnetomotriz es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi = NI_m$$

Se conoce el flujo  $\Phi_{max}$  gracias al campo:  $\Phi_{max} = SB_{max} = (0,04)^2 1,4 = 2,2\text{mWb}$ . La corriente máxima es entonces:

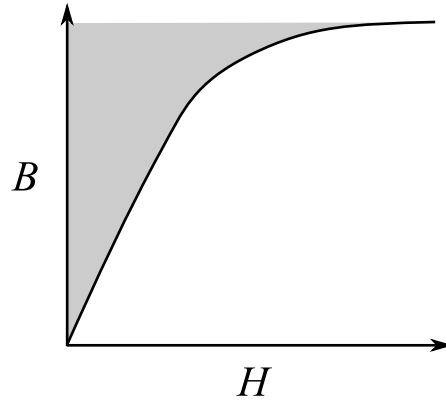
$$I_{max} = \frac{\mathcal{R}\Phi_{max}}{N} = \frac{2320 \cdot 2,2 \cdot 10^{-3}}{200} = 0,026 \text{ A},$$

la corriente eficaz de magnetización es:  $I_m = 18\text{mA}$ . Ahora que se conoce la corriente, se puede hallar la impedancia equivalente:

$$\tilde{U} = jX_m \tilde{I}_m$$

La impedancia sería entonces:

$$X_m = \frac{|\tilde{U}|}{|\tilde{I}_m|} = \frac{100}{18 \cdot 10^{-3}} = 5443 \Omega$$



**Figura 4.12** La energía que puede llevar el núcleo ferromagnético es proporcional al área debajo de la curva de magnetización multiplicada por el volumen del material.

Se ha obtenido un modelo aceptable del circuito magnético con la hipótesis de un circuito lineal:  $R_h = 714,3\Omega$ ,  $X_m = 5443\Omega$ .

#### 4.1.8 Potencia del flujo magnético

Las máquinas eléctricas se usan para transformar o aprovechar la potencia eléctrica y transformarla en potencia mecánica o en otra forma de potencia eléctrica. Es decir que el hecho de transformar una tensión eléctrica en campo magnético también implica transformar la energía eléctrica en energía magnética. Ahora se va a calcular cuanta energía puede llevar un circuito magnético dado.

Un campo magnético lleva una energía que se puede calcular gracias a la densidad volúmica de energía:

$$W_{\Phi} = Vol \int_0^{B_{max}} H dB \quad (4.37)$$

Dado que el campo  $H$  es una función de  $B$  en el caso general la integral no es inmediata. Considerando el caso de un núcleo ferromagnético lineal con  $B = \mu H$ , la ecuación anterior se simplifica mucho:

$$W_{\Phi} = Vol \frac{B^2}{2\mu} = Vol \mu \frac{H^2}{2} \text{ J} \quad (4.38)$$

Es la energía almacenada en el volumen  $Vol$  en forma de campo magnético. Cuando el circuito no es lineal, la energía es el área debajo de la curva de magnetización multiplicada por el volumen del material, ver figura 4.12.

Se puede relacionar esta potencia con la tensión de alimentación del núcleo. Se calcula la energía para un núcleo de sección  $S$  y de longitud media  $l$ . La tensión

inducida es:

$$e_{ind} = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.39)$$

Y la potencia es:

$$P = I e_{ind} = IN \frac{d\Phi}{dt} = NI \frac{dBS}{dt} \quad (4.40)$$

Para calcular la energía se manipula la expresión anterior:

$$P dt = NIS dB = S dB \quad (4.41)$$

La energía es la integral de la potencia dado un cierto tiempo. Además gracias a la ley de Ampère, se ha visto que  $NI = Hl$  en un circuito magnético. Integrando, llegamos a una expresión similar a la anterior para la energía:

$$W_{\Phi} = \int P dt = \int NIS dB = lS \int H dB = Vol \int_0^{B_{max}} H dB \quad (4.42)$$

Estas fórmulas vienen a expresar dos hechos:

- El campo magnético lleva la energía en el núcleo ferromagnético.
- Esta energía transportada también se limita por la saturación del núcleo ferromagnético.

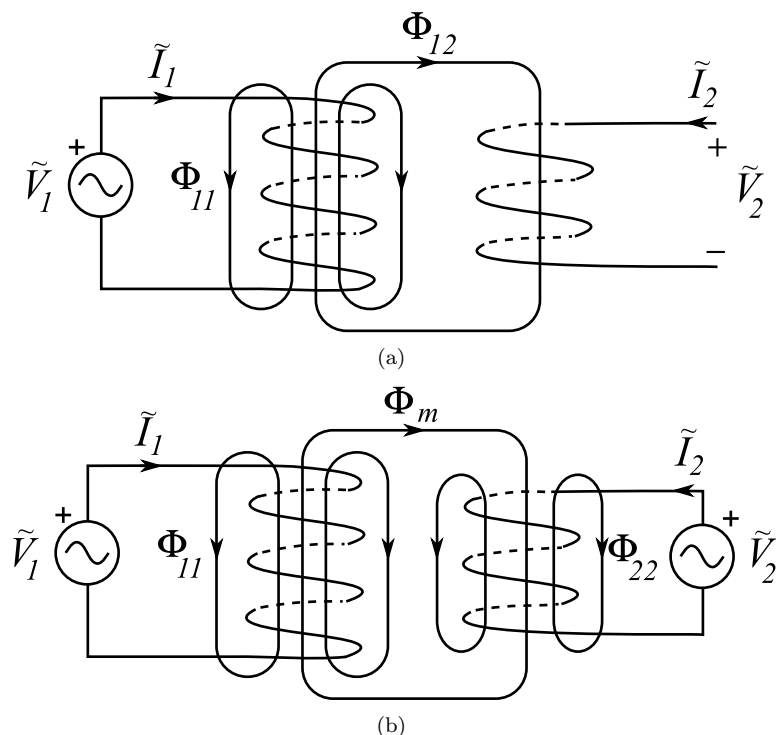
#### 4.1.9 Acoplamientos magnéticos

Una bobina produciendo un campo magnético variable va a inducir tensiones y corrientes en otros conductores cercanos por la ley de Faraday. A su vez, estos conductores o bobinas al tener corrientes inducidas pueden producir otro campo de reacción que influye a su vez a la primera bobina. En concreto, una bobina será influenciada por su propio campo magnético (la autoinductancia) y por los campos de otras bobinas (los acoplamientos). Esta acción mutua entre las bobinas debida al campo magnético se llama acoplamiento magnético. Este fenómeno, aparentemente sencillo, está a la base del funcionamiento de los transformadores de potencia. Es esencial entender este fenómeno con el objetivo de obtener un modelo eléctrico de los transformadores y de los elementos con acoplamiento electromagnético.

En la figura 4.13 (a) se ha dibujado el esquema de una bobina que produce un campo magnético variable. Parte de este campo se cierra en el aire y parte se cierra atravesando las espiras de una segunda bobina con la misma sección pero con un número de espiras diferente. El campo total producido por la primera bobina es:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad (4.43)$$

siendo  $\Phi_{11}$  la fracción del campo que se cierra en el aire y  $\Phi_{12}$  la parte del flujo de la bobina 1 que influye en la bobina 2. Este flujo  $\Phi_{12}$  es justamente el flujo común  $\Phi_m$  a las dos bobinas. Nos referimos aquí únicamente al flujo de una espira de la bobina, también llamado enlace de flujo magnético. Para tomar en cuenta el



**Figura 4.13** (a) La bobina a la izquierda produce un campo magnético que en parte se cierra en la segunda bobina. Si este campo varía, entonces aparece una tensión inducida en la segunda bobina. (b) Acoplamiento mutuo cuando la segunda bobina viene recorrida por una corriente alterna.

flujo total de una bobina, conviene multiplicar por el número de espiras. Para calcular la tensión autoinducida en la primera bobina debe de tomar en cuenta el flujo de una sección  $\Phi_1$  multiplicado por el número de espiras  $N_1$ , se consigue:

$$V_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.44)$$

Por otra parte la tensión inducida en la segunda bobina debida a la bobina 1 es:

$$V_2 = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt}. \quad (4.45)$$

Este flujo  $\Phi_{12}$  es una fracción  $k_{12} \leq 1$  del flujo producido por la corriente  $I_1$  que circula por la primera bobina es decir que  $N_2 \Phi_{12} = k_{12} N_1 \Phi_1 = k_{12} L_1 I_1 = M_{12} I_1$  con un  $M_{12}$  un coeficiente que tiene unidad de inductancia. La tensión inducida  $V_2$  se expresa como:

$$V_2 = M_{12} \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.46)$$

La tensión  $V_2$  es la consecuencia de la influencia de la corriente  $I_1$  mediante el acoplamiento magnético  $M_{12}$ .

En la situación inversa, circula una corriente en la bobina 2 gracias a una fuente de tensión y se deja abierto el circuito de la bobina 1. En este caso, se genera el flujo propio  $\Phi_2$  creado por la bobina 2 y un flujo  $\Phi_{21}$  que influye a su vez en la bobina 1. La expresión de las tensiones  $V_2$  y  $V_1$  sería:

$$V_1 = M_{21} \frac{d\Phi_{21}}{dt} \quad (4.47)$$

$$V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt},$$

$L_2$  corresponde a la autoinductancia de la bobina 2 y  $M_{21}$  al factor de acoplamiento entre la bobina 2 y 1. Es un hecho notable que para cualquier bobina, los coeficientes de inductancia mutua  $M_{12}$  y  $M_{21}$  son iguales y dependen únicamente de la geometría del problema y de los materiales empleados. Se puede demostrar gracias a las leyes del electromagnetismo esta reciprocidad de los campos magnéticos. Por lo tanto se puede notar  $M_{12} = M_{21} = M$ . Se define el factor de acoplamiento entre bobinas usando ese factor de inductancia mutua  $M$ :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (4.48)$$

$k$  es un factor de acoplamiento inferior a uno que depende únicamente de la geometría del problema.

Ahora se considera la figura 4.13.(b) donde circulan corrientes en las dos bobinas. En esta situación, surgen en cada bobina dos fenómenos: la autoinductancia generada por la propia corriente y la influencia del acoplamiento de la otra bobina. El flujo de cada bobina sería:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{21}, \quad (4.49)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} + \Phi_{12}. \quad (4.50)$$

Existen tres flujos de distintas naturaleza, primero el flujo  $\Phi_{ii}$  que solo afecta a la propia bobina. Aparecen luego otros dos flujos, el flujo  $\Phi_{ij}$  producido por la bobina  $i$  que influye en la bobina  $j$ , y el flujo  $\Phi_{ji}$  producido por la bobina  $j$  que influye en la bobina  $i$ . Las dos primeras contribuciones  $\Phi_{ii}$  y  $\Phi_{ij}$  corresponden al flujo de autoinducción de la bobina dado que todo este flujo se genera por la bobina. El tercer término es la parte de flujo mutuo de acoplamiento entre las dos bobinas, sería el flujo "ajeno". Combinando las ecuaciones anteriores (4.44),(4.45) y (4.47) a este caso se obtienen la tensiones de cada bobina:

$$V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} \quad (4.51)$$

$$V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt} \quad (4.52)$$

El signo de la segunda contribución depende del sentido de la corriente y del sentido del bobinado, se ha de determinar caso por caso.

Si las tensiones y corrientes involucradas son sinusoidales se puede usar la notación en forma de fasores, las impedancias asociadas son:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= jL_1\omega\tilde{I}_1 \pm jM\omega\tilde{I}_2 \\ \tilde{V}_2 &= jL_2\omega\tilde{I}_2 \pm jM\omega\tilde{I}_1\end{aligned}\quad (4.53)$$

Antes de poder usar los acoplamientos magnéticos en los circuitos de corriente alterna se debe precisar la orientación de las bobinas dado que el signo de las tensiones generadas depende del sentido del bobinado. Un método para determinar el sentido consiste en usar un convenio que determina la orientación con un punto en los esquemas.

Para determinar el sentido del devanado **se marca con un punto el lado de las bobinas de tal manera que corrientes entrantes por este lado generan un flujo magnético con el mismo sentido**. En la figura 4.14 se enseñan ejemplos típicos de bobinas acopladas con circuitos magnéticos (el principio es idéntico). Según el sentido de la corriente en estas bobinas la expresión de las tensiones generadas será distinta. En la figura 4.14 (b) y (c) se han dibujado dos bobinas que generan flujos en el mismo sentido, y en 4.14 (d) el esquema eléctrico correspondiente. Se representa el acoplamiento magnético con una flecha entre las dos bobinas acompañada del coeficiente de inducción mutua. Para el ejemplo de la figura 4.14 (d) las corrientes contribuyen de forma positiva mutuamente a las tensiones:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= jL_1\omega\tilde{I}_1 + jM\omega\tilde{I}_2, \\ \tilde{V}_2 &= jL_2\omega\tilde{I}_2 + jM\omega\tilde{I}_1.\end{aligned}\quad (4.54)$$

En la figura 4.15 se enseñan dos ejemplos de circuitos de corriente alterna con acoplamientos magnético. Para la figura 4.15 (a), las dos bobinas están atravesadas por la misma corriente pero la contribución mutua será negativa en este caso debido a que la corriente  $I_2$  entra por el punto marcado en la bobina  $L_1$  pero sale de la bobina  $L_2$ , el acoplamiento contribuye negativamente. Las tensiones de las dos bobinas serán:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= jL_1\omega\tilde{I}_2 - jM\omega\tilde{I}_2, \\ \tilde{V}_2 &= jL_2\omega\tilde{I}_2 - jM\omega\tilde{I}_2.\end{aligned}\quad (4.55)$$

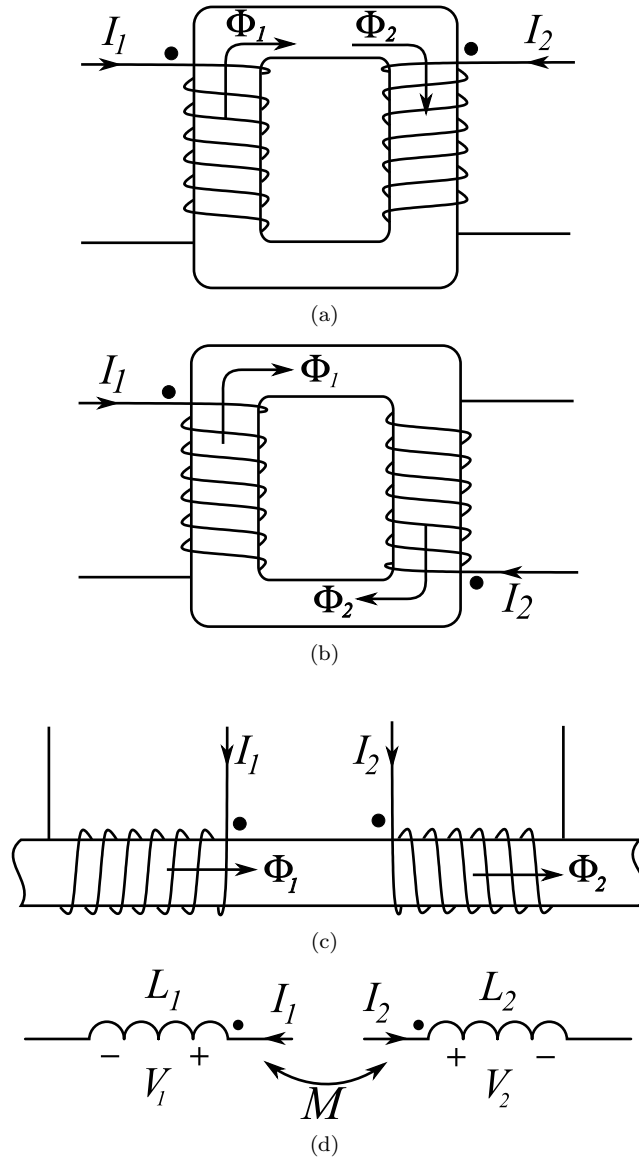
El flujo mutuo reduce el voltaje de cada bobina.

Para resolver el circuito se opera como un en un circuito de corriente alterna con la diferencia de que se debe de tomar en cuenta la influencia del acoplamiento magnético entre las bobinas.

Se resume en la tabla 4.4 los casos más comunes de acoplamientos magnéticos con sus tensiones correspondientes.

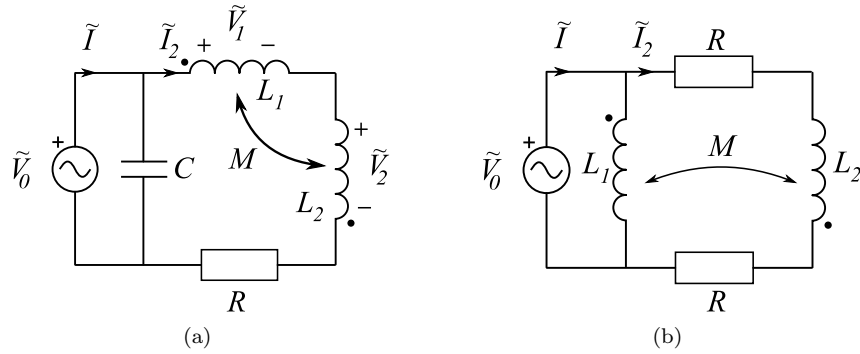
#### Ejercicio 4.4

Obtener la corriente  $\tilde{I}_2$  de la figura siguiente con los datos:  $L_1 = 1H$ ,  $L_2 = 2H$ ,  $M = 0,5H$ ,  $C = 1\mu F$ ,  $R = 1\Omega$   $\omega = 10\text{rad.s}^{-1}$  y  $\tilde{V}_0 = 100\text{ V}$ .

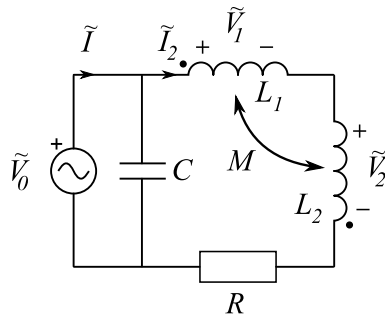


**Figura 4.14** Convenio del punto para distintas configuraciones. Los puntos marcan el sitio tal que las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  entrantes por el sentido marcado generan un flujo magnético circulando en el mismo sentido. En la figura (c) se enseña la representación de dos bobina con un acoplamiento y en (d) su representación en forma de circuito eléctrico.





**Figura 4.15** Ejemplo de circuito de corriente alterna con acoplamientos magnéticos. Existe una influencia de una bobina sobre otra.



#### Solución del ejercicio 4.4

Para obtener la corriente  $\tilde{I}_2$  se usan las leyes de Kirchhoff, con una única malla se deduce la ecuación necesaria:

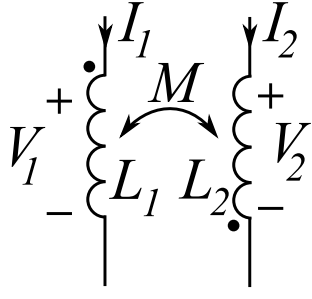
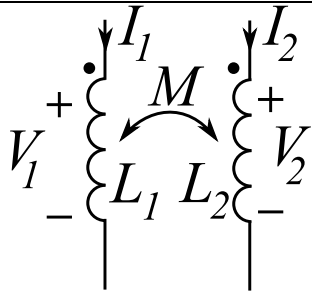
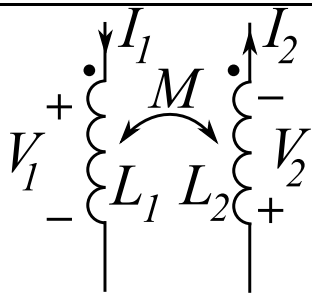
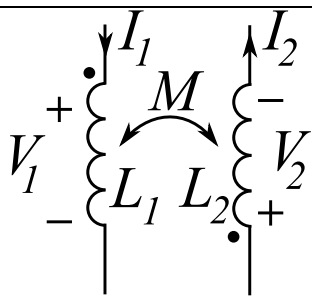
$$\tilde{V}_0 - (jL_1\omega\tilde{I}_2 - jM\omega\tilde{I}_2) - (jL_2\omega\tilde{I}_2 - jM\omega\tilde{I}_2) - R\tilde{I}_2 = 0$$

Despejando la corriente  $\tilde{I}_2$ :

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_0}{jL_1\omega - 2jM\omega + jL_2\omega + R} = \frac{100}{j10 - j10 + j20 + 1} = 5\angle -87,1^\circ \text{ A}$$

## 4.2 Principio del generador eléctrico

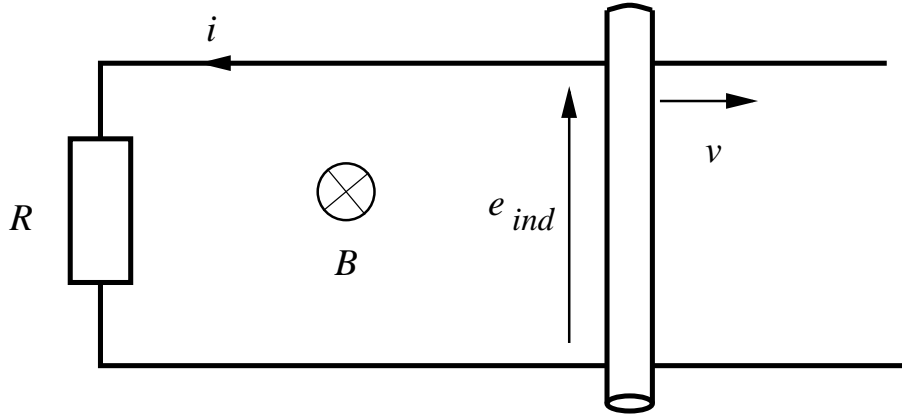
Un generador es un dispositivo capaz de transformar energía mecánica en energía eléctrica. La energía mecánica proviene de un mecanismo externo tal como un molino, una rueda, una turbina, etc. El generador convierte el movimiento en energía eléctrica aprovechable. El campo magnético permite efectuar la conversión de energía eléctrica ( $\mathcal{E}_e$ ) a energía mecánica ( $\mathcal{E}_m$ ) gracias a una interacción con las cargas eléctricas. Los mecanismos de esta transformación radican en los principios del electromagnetismo. Sin embargo no se necesita entender to-

	$\tilde{V}_1 = jL_1\omega\tilde{I}_1 - jM\omega\tilde{I}_2$ $\tilde{V}_2 = jL_2\omega\tilde{I}_2 - jM\omega\tilde{I}_1$
	$\tilde{V}_1 = jL_1\omega\tilde{I}_1 + jM\omega\tilde{I}_2$ $\tilde{V}_2 = jL_2\omega\tilde{I}_2 + jM\omega\tilde{I}_1$
	$\tilde{V}_1 = jL_1\omega\tilde{I}_1 - jM\omega\tilde{I}_2$ $\tilde{V}_2 = -jL_2\omega\tilde{I}_2 + jM\omega\tilde{I}_1$
	$\tilde{V}_1 = jL_1\omega\tilde{I}_1 + jM\omega\tilde{I}_2$ $\tilde{V}_2 = -jL_2\omega\tilde{I}_2 + jM\omega\tilde{I}_1$

**Cuadro 4.4** Casos más comunes de acoplamientos magnéticos con las tensiones correspondientes.

das las interacciones con detalle para poder entender las aplicaciones prácticas. Se remite el lector a la bibliografía para satisfacer su curiosidad acerca de estos principios. En este capítulo se estudiará como transformar  $\mathcal{E}_e$  en  $\mathcal{E}_m$  y  $\mathcal{E}_m$  en  $\mathcal{E}_e$  gracias al campo magnético.

El ejemplo de la figura 4.16 una barra de material conductor se desliza sin



**Figura 4.16** Esquema de un generador formada de una barra en movimiento en un campo magnético uniforme. La inducción electromagnética crea una diferencia de potencial en la barra generando así corrientes eléctricas en el circuito a partir del movimiento.

fricción sobre unos raíles conductores. Los raíles se cierran en un extremo y dejan circular la corriente de tal forma que el sistema de raíles con la barra forma un circuito cerrado. Al ser conductores, la barra y los raíles se puede modelizar con una simple resistencia.

Actúa una fuerza externa que mueve la barra en la dirección de los  $x$  positivos, es decir hacia la derecha en la figura. En presencia de un campo magnético estático y uniforme  $B$ , una diferencia de potencial va a aparecer entre los extremos de la barra. Es la inducción electromagnética que permite crear una energía eléctrica a partir de una energía mecánica.

Para poder hallar la tensión inducida en la barra se considera el circuito formado por la barra y los raíles. Este conjunto delimita una superficie  $S = lx(t)$  con  $l$  la separación de los raíles y  $x(t)$  la posición de la barra en el instante  $t$  (ver figura 4.16). Para simplificar, se supone el campo perpendicular al plano definido por el circuito barra+raíles. La superficie es atravesada por un campo magnético uniforme y constante que genera el flujo:

$$\Phi = BS = Blx(t). \quad (4.56)$$

Al moverse la barra con una velocidad constante  $v$ , el flujo a través de este circuito crece también dado que  $x$  crece. La ley de Faraday expresa la tensión inducida  $e_{ind}$  en un circuito cerrado como la variación temporal de flujo a través de la superficie definida por el circuito:

$$e_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv. \quad (4.57)$$

Se llega a una expresión simple de la tensión inducida:

$$e_{ind} = lBv. \quad (4.58)$$

Aparece en el circuito una fuerza electromotriz que depende de la longitud de la barra  $l$ , del campo uniforme  $B$  y de la velocidad  $v$ . En esta situación, los electrones en la barra están acelerados por la interacción con el campo magnético. Un metal contiene una gran cantidad de electrones libres que se mueven en el material de forma aleatoria cuando no existe ningún campo (eléctrico o magnético). En presencia de un campo magnético y de un movimiento de la barra, estos electrones se mueven en promedio en una dirección privilegiada. La fuerza creada por el campo magnético sobre las cargas de la barra se puede hallar cuando esta última se mueve:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.59)$$

con  $q$  la carga del portador y  $\mathbf{v}$  la velocidad de la barra. Las cargas eléctricas se ponen entonces en movimiento cuando la barra se mueve debido a la fuerza provocada por el campo  $\mathbf{B}$  sobre ellas. Las cargas en movimiento provocan la creación de una corriente eléctrica y de una fuerza electromotriz.

Se puede deducir el sentido de la corriente gracias a la ecuación (4.59) y a la regla de la mano derecha. En la figura 4.17.(a) se enseña el sentido de la tensión en la barra. Si el campo magnético se orienta hacia dentro de la página y la velocidad hacia la derecha, la corriente va a circular en el sentido directo. La fuerza  $\mathbf{F}_m$  sobre los electrones se orienta de  $b$  hacia  $a$  en la figura 4.17.(b), significa que los electrones circulan en el sentido indirecto<sup>8</sup> en el circuito de la figura 4.16. El sentido de la corriente por convenio tiene el sentido de las cargas positivas, por lo que  $I$  circula en el sentido directo.

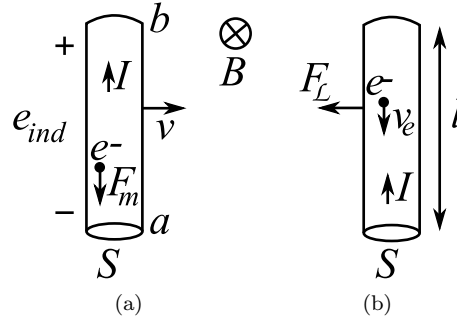
La fuerza electromotriz creada tendrá el signo positivo como indicado en la figura 4.16 y como módulo:

$$e_{ind} = lBv \quad (4.60)$$

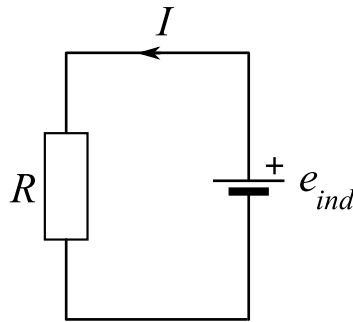
Es decir que la barra se comporta como un generador dado que la tensión es independiente de la resistencia del circuito. El circuito eléctrico equivalente es simplemente formado de un generador de tensión  $e_{ind}$  y una resistencia  $R$  como representado en la figura 4.18. La resistencia  $R$  puede representar nuestro sistema eléctrico que se quiere alimentar con una corriente continua.

Este primer principio permite la generación de una corriente en el circuito debido a la creación de la fuerza electromotriz. Sin embargo, esta corriente va a crear una fuerza de reacción que se opondrá al movimiento que le ha dado lugar, reacción conocida como la ley de Lenz. Si se aplica una fuerza  $F$  constante sobre la barra hacia la derecha, el principio de la dinámica nos indica que la aceleración es constante. Por lo tanto en ausencia de rozamiento la velocidad  $v$  crece sin parar. Si fuera así, tendríamos una velocidad que aumentaría hasta el infinito, algo absurdo del punto de vista de la energía. La ley de Lenz establece que la corriente inducida en el circuito circula de modo que se opone al fenómeno que le ha dado lugar (en este caso la variación de flujo y/o el movimiento de la barra). Por lo que el sistema se va a autoregular gracias a las fuerzas magnéticas.

<sup>8</sup> Recordamos que la carga de un electrón es  $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ .



**Figura 4.17** (a) Esquema del sentido de la tensión inducida cuando la barra se pone en movimiento junto con el sentido de la corriente. La tensión y la corriente tienen el mismo sentido. (b) Fuerzas de Laplace en un conductor atravesado por una corriente en presencia de un campo magnético uniforme.



**Figura 4.18** Equivalente eléctrico del generador. La tensión inducida por la ley de Faraday se representa con un generador de tensión ideal. La resistencia del circuito se modeliza con una resistencia en serie con el generador.

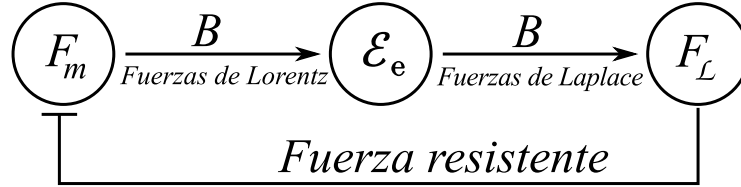
**Las fuerzas de Laplace** representan la fuerza de magnética a una escala macroscópica sobre un gran conjunto de cargas, típicamente corrientes eléctricas en conductores. Cuando un electrón se mueve en un conductor, la fuerza que el electrón ejerce sobre el conductor es la fuerza:

$$\mathbf{F}'_m = q\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \tag{4.61}$$

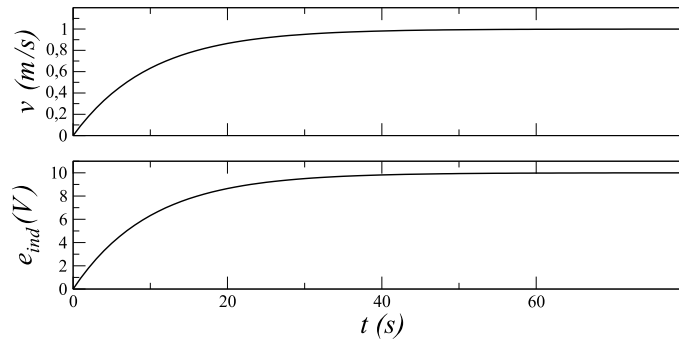
pero esta vez  $\mathbf{v}_e$  es la **velocidad del electrón** estudiado. Es el fenómeno dual, la fuerza magnética junto con el movimiento de la barra acelera los electrones, sin embargo, una vez en movimiento los electrones frenan la barra. En la figura 4.17 (b) se enseña un ejemplo de fuerza magnética creada por la carga en movimiento en el conductor. Se puede hacer un promedio de las fuerzas ejercidas por los electrones. El resultado de esta suma nos proporciona la fuerza de Laplace:

$$\mathbf{F}_L = l\mathbf{I} \times \mathbf{B} \tag{4.62}$$

Nuestro sistema se autolimita, es decir que la energía eléctrica creada por el



**Figura 4.19** Esquema de las transformaciones de energía en el generador. La fuerza motriz  $F_m$  genera un movimiento y en presencia de un campo magnético aparece una corriente eléctrica ( $E_e$  Energía eléctrica). Esta corriente en presencia de un campo magnético produce la aparición de fuerzas de Laplace  $F_L$  que se oponen a la fuerza motriz  $F_m$ .



**Figura 4.20** Integración numérica de la ecuación diferencial (4.64). Se representa la velocidad en función del tiempo así como la corriente y la tensión inducida del circuito. Parámetros para la simulación:  $R = 10\Omega$ ,  $B = 1\text{T}$ ,  $l = 10\text{m}$ ,  $m = 1\text{kg}$ ,  $F_M = 10\text{N}$ .

movimiento va a crear una fuerza que se opone al origen de este movimiento. Este fenómeno de autolimitación (o de retroalimentación) se simboliza en la figura 4.19. La fuerza de resistencia creada por la fuerza de Laplace se opone al movimiento de la barra.

Para poner otro ejemplo de aplicación suponemos una fuerza motor  $F_M$  constante que se ejerce hacia la derecha sobre la barra. Se puede calcular cual va a ser la velocidad final una vez que el sistema se pone en marcha. Para ello se aplica el principio de la dinámica a nuestra barra.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_L, \quad (4.63)$$

con  $v$  la velocidad de la barra y  $F_M$  una fuerza constante. Se desarrolla la ecuación en función de las expresiones anteriores:

$$m \frac{dv}{dt} = F_M + l\mathbf{I} \times \mathbf{B} \quad (4.64)$$

Se obtiene  $e_{ind} = RI$  y  $e_{ind} = Blv$ . Se proyectan ahora los vectores sobre el eje

$x$ , se obtiene:

$$m \frac{dv}{dt} = F_M - lBI = F_m - lB \frac{e_{ind}}{R} = F_M - lB \frac{Blv}{R} \quad (4.65)$$

Cuando el sistema está en equilibrio la velocidad es constante, la derivada de la velocidad es igual a cero y se despeja la siguiente relación:

$$F_M = lB \frac{Blv_f}{R} = (lB)^2 \frac{v_f}{R} \quad (4.66)$$

la velocidad final estacionaria  $v_f$  de la barra es:

$$v_f = \frac{RF_M}{(Bl)^2} \quad (4.67)$$

La velocidad final de la barra depende entonces directamente de la fuerza  $F_M$  y de la resistencia de carga  $R$  que se aplica al sistema. Este modelo ya nos indica que existe una relación entre la velocidad y la potencia eléctrica producida.

En la figura 4.20 se muestra la evolución de la velocidad así como la tensión inducida con los valores numéricos correspondientes. La velocidad y la tensión inducida se acercan al valor final de forma exponencial siguiendo la ecuación diferencial (4.63).

Estos efectos físicos describen la transformación de energía mecánica (mover la barra en el campo) en enérgica eléctrica (generación de la fuerza electromotriz).

Se puede calcular la potencia producida por esta barra en función de la potencia mecánica aportada (en régimen permanente):

$$P_e = e_{ind} \cdot I = \frac{e_{ind}^2}{R} = \frac{RF_M^2}{(Bl)^2} \quad (4.68)$$

Por otro lado, la potencia de esta fuerza mecánica es:

$$P_m = \frac{dW_{F_M}}{dt} = \frac{F_M dx}{dt} = v_e F_m = \frac{RF_M^2}{(Bl)^2} \quad (4.69)$$

Si no hay pérdidas de potencia en el sistema (rozamientos, disipaciones etc...) la potencia eléctrica y mecánica son iguales (también se puede deducir lo mismo usando el principio de conservación de la energía).

### 4.3 Principio del motor

Ahora se va a describir el efecto dual del generador que es la creación de movimiento a partir de energía eléctrica. Para ilustrar este estudio se presenta en la figura 4.22 una barra metálica que puede deslizarse sobre unos conductores idénticos al caso del generador. En el entorno donde se encuentra la barra se establece un campo magnético uniforme. En el circuito se inserta un generador en serie con una resistencia que representa la resistencia de los elementos conductores. Al establecer el voltaje una corriente va a circular en el circuito tal

que:

$$V = RI. \quad (4.70)$$

La corriente circulando va a crear una fuerza de arrastre sobre la barra debido a las fuerzas de Laplace. Se expresa la fuerza aplicada a la barra como:

$$\mathbf{F}_L = l\mathbf{I} \times \mathbf{B}, \quad (4.71)$$

con  $l$  la longitud de la barra. Siguiendo el sentido descrito por la figura se obtiene una fuerza orientada hacia la derecha, la barra acelera y se pone en movimiento: es la transformación de energía eléctrica en energía mecánica.

Al igual que el caso del generador, las consideraciones energéticas nos llevan a aplicar la ley de Lenz. Si la fuerza de Laplace actúa sola, la barra acelera hasta tener una velocidad infinita. Por lo que de alguna forma la naturaleza restablece el balance y aparece un nuevo fenómeno que limita la velocidad.

Una fuerza electromotriz va a aparecer en la barra al moverse en un campo magnético, debido a los efectos de la inducción descritos en la sección 4.2. Esta fuerza electromotriz inducida va a provocar una disminución de la corriente y por lo tanto reducir las fuerzas de Laplace que mueven la barra. La inducción va a depender de la velocidad  $v$  de la barra :

$$e_{ind} = Blv. \quad (4.72)$$

Es la tensión inducida que aparece en el caso de un generador. El sentido de esta tensión es tal que se va a oponer a la causa que la da lugar, es decir se va a oponer a la corriente  $I$ . Es la reacción del sistema provocado por el principio de conservación de la energía. Se puede observar en el circuito de la figura 4.23 el sentido de las tensiones y de las corrientes generadas en el dispositivo. Según aumenta la tensión  $e_{ind}$  la corriente  $I$  disminuye, se puede comprobar con la ecuación del circuito:

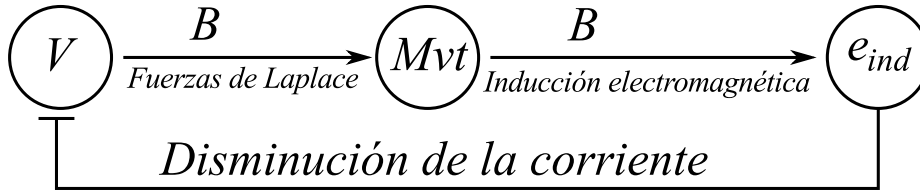
$$I = (V - e_{ind})/R. \quad (4.73)$$

En la figura 4.21, se enseña la cadena de transformación de la energía. Primero el generador de tensión impone la circulación de una corriente en el circuito. Esta corriente interactúa con el campo magnético y las fuerzas de Laplace resultante mueven la barra. Una vez que la barra conductora se pone en movimiento aparece una diferencia de potencial en sus extremos debido a la ley de Faraday (inducción electromagnética). Esta tensión reduce la corriente circulando en el circuito y por tanto reduce las fuerzas mecánicas.

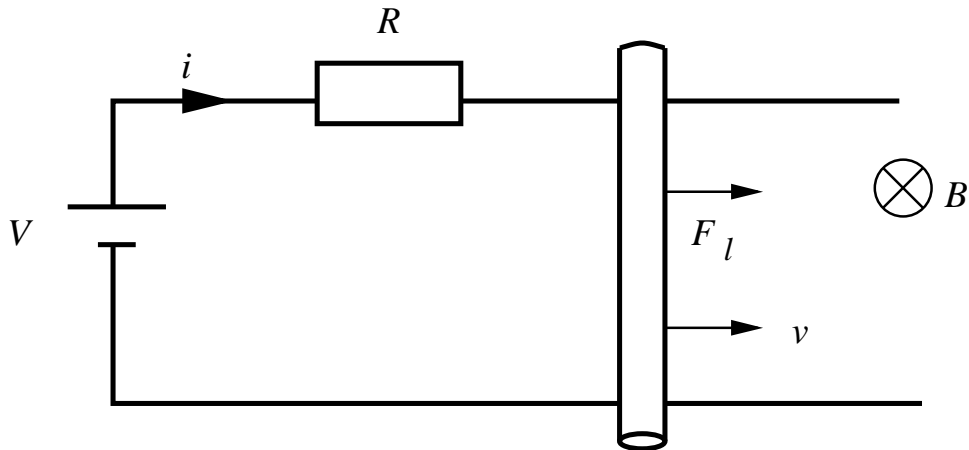
Se puede escribir la ecuación de movimiento de la barra a partir de estos dos fenómenos antagonistas. Se aplican para ello el principio de la dinámica a la barra, donde la fuerza actuando es la fuerza de Laplace:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_L \quad (4.74)$$





**Figura 4.21** Esquema de las transformaciones de energía en el motor. La tensión del generador  $V$  origina una corriente eléctrica en el circuito y por lo tanto en la barra. Esta corriente en presencia de un campo establece una fuerza mecánica que mueve la barra (fuerzas de Laplace). En cuanto se mueve la barra conductora en el campo magnético una diferencia de potencial aparece en la barra debido a la inducción electromagnética. Esta tensión inducida va a provocar una reducción de la corriente y a su vez se van a reducir las fuerzas de Laplace.



**Figura 4.22** Esquema de motor formado por unas barras deslizante sobre unos conductores. El generador produce una corriente  $I$  que pone en movimiento la barra en el campo magnético.

Expresando la corriente en función de la inducción electromagnética, a partir de la figura 4.23 se deduce:

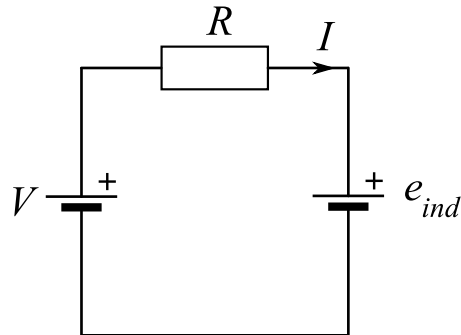
$$I = (V - e_{ind})/R \quad (4.75)$$

y para terminar:

$$m \frac{dv}{dt} = Bl \frac{(V - e_{ind})}{R} = Bl \frac{V}{R} - (Bl)^2 \frac{v}{R}. \quad (4.76)$$

La ecuación diferencial que rige el movimiento de la barra es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Bl}{mR} (V - Blv) \quad (4.77)$$



**Figura 4.23** Equivalente eléctrico del motor. La tensión inducida depende de la velocidad de la barra y de la fuerza de arrastre.

La velocidad va a aumentar hasta alcanzar un régimen permanente igual a:

$$v_f = \frac{V}{Bl} \quad (4.78)$$

Por lo que en la barra sin carga mecánica, la velocidad es proporcional a la tensión del generador. Cuando la barra alcanza la velocidad estacionaria, la tensión inducida es:

$$e_{ind} = Blv_f = Bl \frac{V}{Bl} = V \quad (4.79)$$

La tensión inducida llega a alcanzar la tensión de alimentación  $V$ . Sin embargo la corriente de alimentación se expresa como  $I = (V - e_{ind})/R$ , por lo que la corriente es nula cuando se alcanza la velocidad estacionaria. Resultaría imposible la aparición de una fuerza de Laplace sin circulación de corriente, por lo que no se alcanza nunca esta velocidad estacionaria. Por otro lado existen rozamientos que hacen que esta velocidad nunca se alcanza sino que este siempre por debajo. Ahora se puede expresar la nueva velocidad cuando se añade una fuerza opuesta al movimiento llamada también carga mecánica.

Se puede “cargar” la barra con una fuerza resistente al movimiento. Se elige esta fuerza dirigida hacia la izquierda y opuesta al movimiento. Se introduce esta fuerza  $F_r$  en el balance:

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_r \quad (4.80)$$

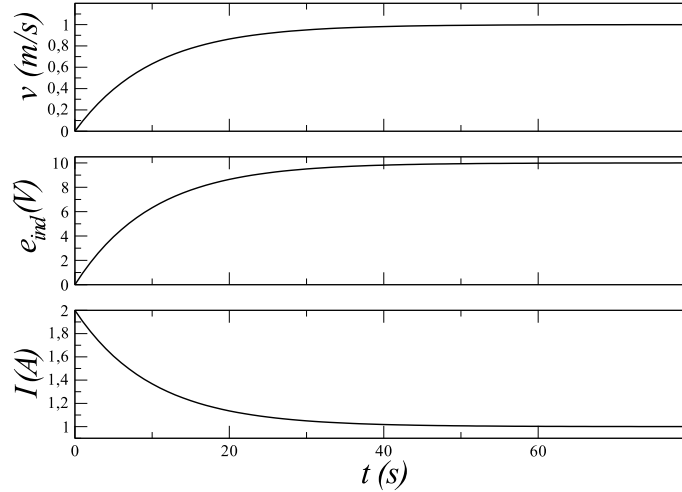
ayudandonos de los desarrollos anteriores se obtiene:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{Bl}{R}(V - Blv) - F_r \quad (4.81)$$

Cuando el sistema es estacionario la nueva velocidad es:

$$v_e = \frac{V}{Bl} - \frac{RF_r}{(Bl)^2}, \quad (4.82)$$

en el caso  $dv/dt = 0$ . En la figura 4.24 se ha simulado un ejemplo de evolución



**Figura 4.24** Integración numérica de la ecuación diferencial (4.81). Se ha dibujado la velocidad en función del tiempo así como la corriente y la tensión inducida del circuito. Parámetros:  $R = 10\Omega$ ,  $B = 1T$ ,  $l = 10m$ ,  $V = 20V$ ,  $m = 1kg$ ,  $F_r = 10N$ .

de la tensión inducida así como de la velocidad en función del tiempo. En esta gráfica se observa que existe un transitorio durante el cual la corriente disminuye exponencialmente. Hay que tener cuidado con el valor de pico de esta corriente en el momento del arranque  $t = 0$ . Se tiene que controlar para no destruir los conductores y los sistemas de seguridad.

Se tiene una fuerza resistente límite para que la barra se pueda mover con la acción de las fuerzas de Laplace. Este límite físico se puede deducir a partir de la ecuación diferencial del sistema (4.81). Para obtener una velocidad positiva hacia la derecha, la condición siguiente debe cumplirse:

$$\frac{VBl}{R} > F_r. \quad (4.83)$$

La fuerza resistente límite por encima de la cual nuestro sistema no puede arrancar. Se obtiene de esta última desigualdad la fuerza máxima que puede soportar el motor:

$$F_{r\lim} = \frac{VBl}{R}. \quad (4.84)$$

Fíjense que la fuerza resistente límite para este caso no depende de la masa de la barra. Si la condición no se cumple y la fuerza resistente supera este límite la velocidad se puede volver negativa, por lo que la barra se moverá en el otro sentido (siempre que esta resistencia no sean fuerzas de fricción).

La corriente eléctrica que circula por el circuito puede expresarse en función de los distintos parámetros del sistema. Cuando el sistema está en equilibrio, las fuerzas de Laplace igualan las fuerzas resistentes. Es decir:

$$F_{\mathcal{L}} = F_r = BlI \quad (4.85)$$

Despejando la corriente:

$$I = \frac{F_r}{Bl} \quad (4.86)$$

La corriente es directamente proporcional a la fuerza de arrastre  $F_r$ .

La potencia eléctrica proporcionada por el generador es:

$$P_e = V \cdot I = V \cdot \frac{F_r}{Bl} \quad (4.87)$$

La potencia disipada en la resistencia es:

$$P_c = R \cdot I^2 = R \cdot \frac{F_r^2}{(Bl)^2} \quad (4.88)$$

Se llama a esta potencia  $P_c$  con el subíndice c para simbolizar que son pérdidas debidas a la disipación de energía en los conductores. Por lo tanto la potencia mecánica proporcionada por el sistema es:

$$P_m = P_e - P_c = V \cdot \frac{F_r}{Bl} - R \cdot \frac{F_r^2}{(Bl)^2} = v_e \cdot F_r \quad (4.89)$$

Un aspecto interesante de este sistema es su reversibilidad. Cambiando de sentido la fuerza  $F_r$  de tal manera que se ayuda al sistema en vez de frenarlo, el sentido de la corriente cambia y aparece una corriente alimentando a la fuente  $V$ . El motor se transforma en generador. Esta reversibilidad es una ventaja técnica de este tipo de motores.

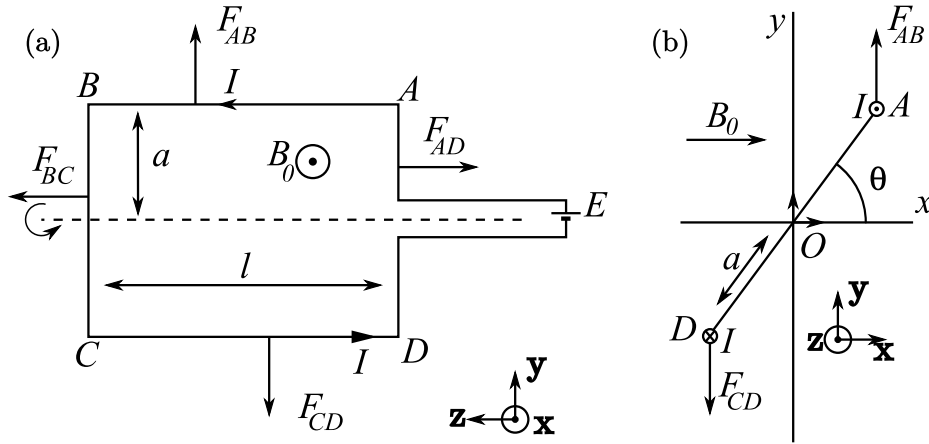
#### 4.4 Principios físicos de motores rotativos

Los dos ejemplos anteriores de motor y generador son poco prácticos para una aplicación industrial. Se usan motores y generadores rotativos que aplican estos principios básicos de transformación de la energía.

Para iniciar el estudio de los motores rotativos se considera el ejemplo más sencillo que consiste en una espira de un material conductor, en general de cobre, recorrida por una corriente generada por un dispositivo externo. La espira se coloca sobre un soporte rotativo llamado **rotor**. En el caso general el rotor consta de muchas espiras enrollada y entrelazada de forma muy compleja.

El rotor se coloca con su eje perpendicular a un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}_0$  generado por otro dispositivo. Aparece una fuerza de Laplace en el alambre debida a la interacción del campo magnético con las corrientes. Se puede hacer el balance de las fuerzas ejercidas sobre la espira calculando las fuerzas de Laplace en cada lado de la espira. En la figura 4.25 se representa el esquema de la espira situada dentro el campo magnético uniforme. Puede girar alrededor de un eje dibujado con una línea discontinua. La fuerza de Laplace en un alambre rectilíneo de longitud  $l$  se escribe como:

$$\mathbf{F}_L = I \times \mathbf{B}_0, \quad (4.90)$$



**Figura 4.25** (a) Esquema de una espira sencilla atravesada por una corriente  $I$  con una f.e.m generada  $E$ . La espira se encuentra en un campo magnético  $B_0$  apuntando hacia fuera de la página. (b) Esquema de la misma espira pero vista de perfil en el plano  $xy$ . El sentido de las corrientes en las espiras esta indicado en la figura, entra por el punto D y sale por el punto A.

con  $B_0$  el campo magnético,  $l$  la longitud del conductor considerado e  $\mathbf{I}$  un vector que indica el sentido de la corriente recorriendo el conductor su modulo siendo el valor de la intensidad. En la figura 4.25, la espira consta de cuatro segmento ABCD, en cada segmento podemos escribir las fuerzas de Laplace correspondientes:

$$\mathbf{F}_{AB} = lIB_0\mathbf{y} \quad (4.91)$$

$$\mathbf{F}_{BC} = -2aIB_0\mathbf{z} \quad (4.92)$$

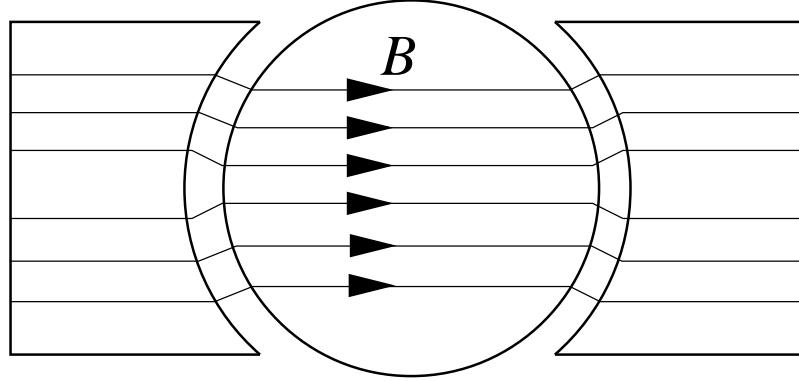
$$\mathbf{F}_{CD} = -lIB_0\mathbf{y} \quad (4.93)$$

$$\mathbf{F}_{DA} = 2aIB_0\mathbf{z} \quad (4.94)$$

$\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$  son los vectores de base del sistema de coordenadas. Se pueden despreciar la parte de los cables saliendo hacia la fuente de alimentación, dado que en la practica no se encuentran en el campo magnético. Las fuerzas  $F_{BC}$  y  $F_{DA}$  son antagonistas y no participan al movimiento dado que están alineadas en el sentido del eje de rotación. Sin embargo las fuerzas  $F_{AB}$  y  $F_{CD}$  crean un torque en la espira. El momento (o el torque) de cada fuerza se puede deducir fácilmente con ayuda de la figura 4.25 (b). El momento de una fuerza que se aplica en el punto  $A$  con referencia a un pivote  $O$  se define como:

$$\mathbf{M}_{F_A}(O) = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}, \quad (4.95)$$

con  $\mathbf{M}_{F_A}(O)$  en [N.m]. En nuestro sistema, las fuerzas son constantes en dirección y en modulo. El vector  $\overrightarrow{OA}$  sin embargo va a depender de la posición de la espira, hay que proyectar sobre el sistema de coordenadas cartesianas indicado en la



**Figura 4.26** Esquema de un rotor y un estator con las líneas de campo generada por el estator atravesando el rotor. El campo puede estar generado por un imán permanente o por bobinas alimentadas en corriente continua.

figura 4.25 (b). El momento de  $F_{AB}$  en O es:

$$\mathbf{M}_{F_{AB}}(O) = \vec{OA} \times \mathbf{F}_{AB} = \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ a \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 l I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

Se puede hallar los momentos:

$$\mathbf{M}_{F_{AB}}(O) = a B_0 l I \cos \theta \mathbf{z} \quad (4.97)$$

$$\mathbf{M}_{F_{CD}}(O) = a B_0 l I \cos \theta \mathbf{z} \quad (4.98)$$

Los momentos se suman y participan al mismo movimiento, es decir que el momento total de la espira es:

$$\mathbf{M} = 2a B_0 l I \cos \theta \mathbf{z} \quad (4.99)$$

El torque es máximo cuando el plano de la espira y el plano del campo magnético forman un ángulo nulo y es mínimo cuando forman un ángulo de  $90^\circ$  (lo que equivale a alinear el campo generado por la bobina con el campo uniforme).

Para obtener un movimiento circular continuo conviene cambiar la orientación del campo magnético, o bien el sentido de la corriente. Si no se cambia el sentido de la corriente, la espira se mantendrá en una posición vertical y no se moverá. La solución empleada en la máquinas de corriente continua consiste en cambiar la polaridad de la fuente cada media vuelta para invertir el par y seguir con el movimiento. En el capítulo 6 se explica como alternar mecánicamente esta polaridad. En tal caso, el torque varía de forma sinusoidal con el tiempo. Es una desventaja para las máquinas eléctricas dado que en general se desea un torque lo más constante posible para evitar vibraciones y otros problemas mecánicos.

El campo magnético se crea gracias a una estructura fija alrededor de las espiras llamado **estator**. Se genera el campo gracias a otro juego de bobinas o

bien con imanes permanentes. En la figura 4.26 se enseña una vista de perfil de un estátor generando el campo magnético estático. El rotor consiste en la parte circular que puede girar libremente entorno al eje transversal.

La potencia mecánica producida por una máquina eléctrica de este tipo se define en función del momento producido  $M$  y de la velocidad angular de rotación  $\omega$  de la máquina:

$$P_m = M\omega. \quad (4.100)$$

Para una sola espira la potencia es:

$$P_m = 2aB_0li\omega |\cos \omega t| \quad (4.101)$$

dado que  $\theta = \omega t$  cuando el movimiento es sinusoidal y de pulsación  $\omega$ . Esta variación del par es problemática para los elementos mecánicos. Genera vibraciones indeseables y dañinas para el material. Se resuelve este problema añadiendo más espiras en el motor.

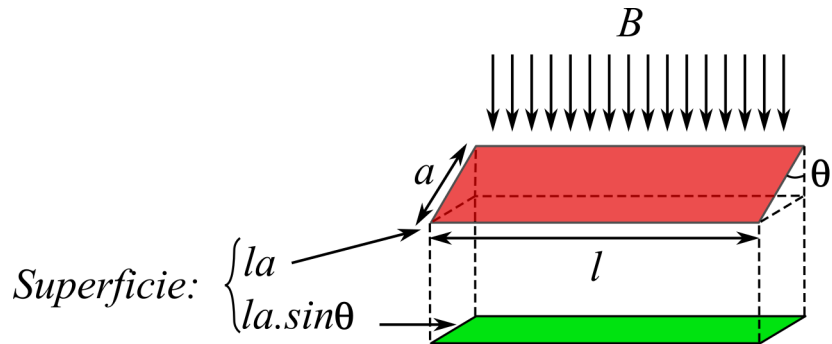
## 4.5 Principios físicos de generadores rotativos

En la sección anterior se ha descrito la generación de energía mecánica a partir de energía eléctrica. Para efectuar la conversión inversa, es decir la obtención de energía eléctrica a partir de energía mecánica se estudia una sola espira pero esta vez accionada por un mecanismo externo (turbina, cadena, etc). Es decir la espira gira en un campo uniforme y el flujo del campo magnético atravesando la espira varía en función de la posición relativa de la espira con el campo. Si la espira gira en el campo en función del tiempo se genera una variación de flujo magnético que a su vez origina una fuerza electromotriz.

Se supone, para simplificar el estudio, que el eje de rotación de la espira y el campo magnético son perpendiculares. El flujo a través de la espira dependerá directamente del ángulo formado entre el campo y el plano definido por la espira. Por ejemplo, cuando la espira es perpendicular al campo magnético el flujo será proporcional a la superficie  $S = la$  con  $l$  la longitud y  $a$  el anchura de la espira. Si la espira se encuentra paralela al campo, el flujo es nulo.

Aquí se considera la “sección proyectada” como la superficie de la espira vista desde la perspectiva del campo magnético cuando la espira forma un ángulo  $\theta$  con el campo magnético. Para calcular esta cantidad se representa en la figura 4.27 la superficie que atraviesa el campo magnético  $B$ . Cuanto más cercano a la vertical se encuentra la espira, más reducida es la sección proyectada. Para tomar una analogía con la luz, el campo ilumina la espira inclinada. La sombra proyectada por la espira sobre un plano perpendicular al campo equivale a la sección proyectada. En el caso de la figura 4.27, la sección proyectada en función del ángulo es:

$$S(\theta) = al \sin(\theta) \quad (4.102)$$



**Figura 4.27** Esquema de la sección proyectada de la espira cuando forma un ángulo  $\theta$  con la vertical. El campo magnético “ilumina” una sección  $la \sin \theta$ .

Suponiendo el movimiento de la espira a velocidad angular constante entorno al eje, se obtiene:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4.103)$$

con  $\omega$  la velocidad angular del rotor. En la figura 4.28, la sección proyectada por la espira depende del ángulo  $\theta$  que forma la espira con el campo siguiendo la fórmula (4.102). El ángulo en función del tiempo se obtiene sencillamente a partir de la ecuación (4.103):  $\theta(t) = \omega t$  (con  $\theta(0) = 0$ ). El flujo sería la sección proyectada  $S(\theta)$  por el campo magnético  $B_0$ :  $\Phi(t) = B_0 \cdot S(\theta)$ . Aplicando la ley de Faraday se obtiene la fuerza electromotriz en los bornes de la espira:

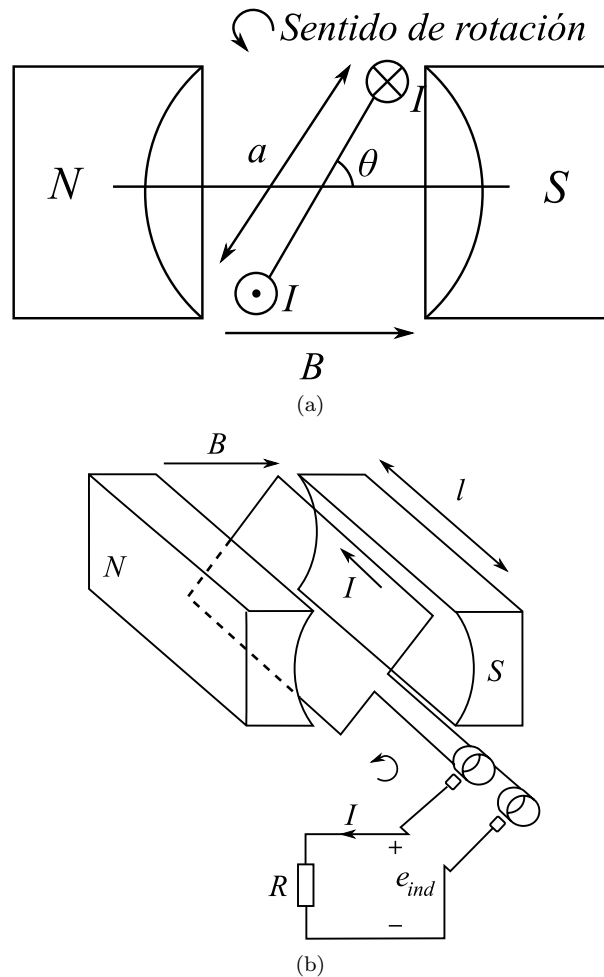
$$e_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(B_0 a l \sin(\omega t))}{dt} = B_0 a l \omega \cos(\omega t), \quad (4.104)$$

la tensión es sinusoidal a la salida de la espira. En la figura 4.29 se dibuja el valor de la tensión inducida en la espira en función del ángulo. La tensión es máxima o mínima cuando el flujo a través de la espira es nulo al ser la tensión  $e_{ind}$  proporcional a la derivada del flujo.

El hecho de que **la tensión inducida es proporcional a la velocidad** es otro aspecto importante de la fórmula (4.104). Para obtener una amplitud constante se necesita un control de la velocidad, lo que requiere una regulación mecánica precisa del generador.

En general, para aprovechar la energía producida se conecta un equipo que se modeliza con una resistencia  $R$ . La circulación de una corriente por las espiras supone la aparición de fuerzas de Laplace en los conductores. Estas fuerzas van a ser proporcional a la corriente y por lo tanto a la tensión inducida  $e_{ind}$  si la carga es resistiva pura. En la figura 4.28 (b) aparece un ejemplo de carga conectada al generador rotativo. La corriente circula como indicado en la figura (a). Las fuerzas de Laplace en los dos conductores **se van a oponer al movimiento**





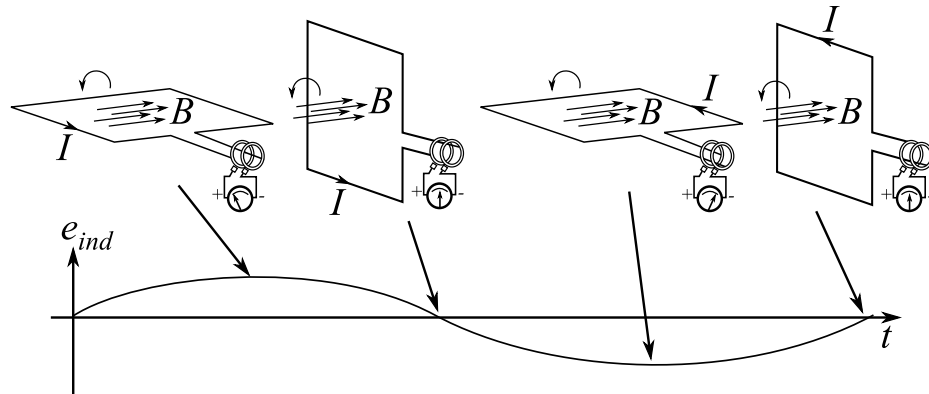
**Figura 4.28** Esquema de una espira en rotación en un campo magnético uniforme. (a) En esta figura se representa una espira en un campo magnético visto de perfil.  $\theta$  es el ángulo entre el plano horizontal y la espira (el plano definido por las líneas de campo). (b) Espira accionada por un mecanismo externo. Se encuentra en un campo magnético estático uniforme. Al girarla aparece una tensión en los conductores.

de la espira y tienen el siguiente módulo:

$$F_L = \frac{(lB_0)^2}{R} a\omega \cos(\omega t) \quad (4.105)$$

Estas fuerzas son máximas para  $\theta = 0$  y mínimas para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Se puede calcular el momento de resistencia que estas fuerzas ejercen sobre el mecanismo que mueve la espira, y a partir de allí deducir cuál es la potencia mecánica necesaria en función de la carga  $R$ .

Para la producción de electricidad a grandes escalas, la tensión y la frecuencia



**Figura 4.29** Valor de la fuerza electromotriz inducida en la espira en función del ciclo de la espira. Cuando la espira es vertical, el flujo es máximo y como consecuencia la tensión es mínima. Al revés, cuando el flujo es mínimo, la espira paralela al campo, la tensión es máxima.

suministrada tienen que ser constantes para cualquier carga de la red. Se necesita entonces un control de la potencia y de la velocidad de rotación preciso para evitar variaciones fuera de unas tolerancias determinadas de ante mano. La ingeniería de control trata estos problemas con sensores y actuadores que regulan estas variables.

Suponiendo que en el ejemplo anterior la velocidad de rotación del generador es constante y controlada, se pueden obtener resultados analíticos sobre las potencias del generador.

El par resistente debido a las fuerzas de Laplace en el eje se calcula como el producto de la fuerza por el brazo del momento, para ayudarnos se dispone del esquema del generador en la figura 4.28 (a). La expresión de este torque resistente es:

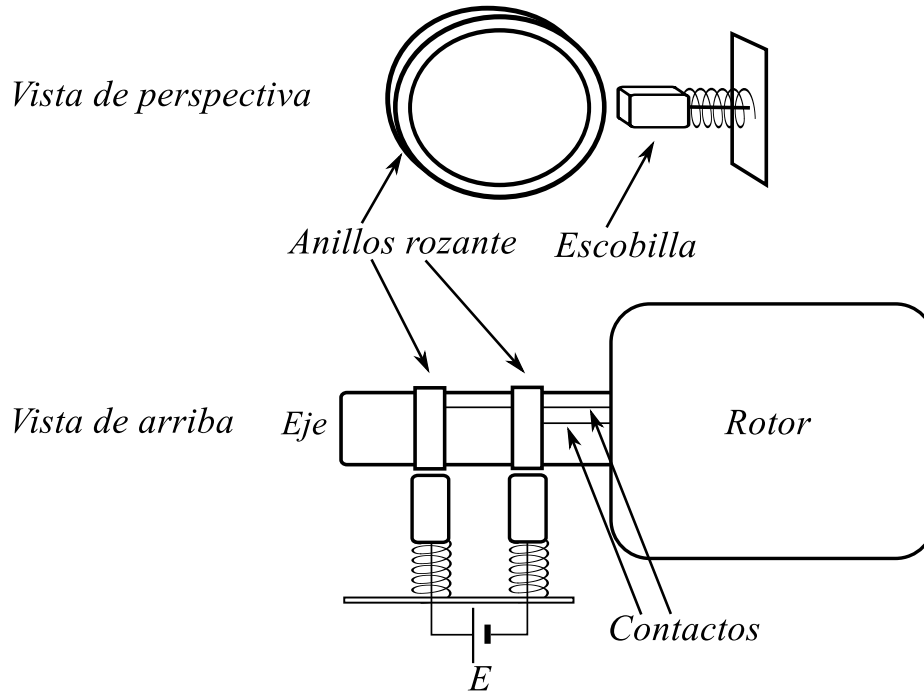
$$\tau_r = 2 \frac{a}{2} F_{LZ} = a^2 \frac{(B_0 l)^2}{R} \omega |\cos(\omega t)| = \frac{(B_0 S)^2}{R} \omega |\cos(\omega t)| \quad (4.106)$$

El principio fundamental de la dinámica para sistemas en rotación establece una relación entre la aceleración angular y los pares aplicados al sistema. Para un sólido rígido con un solo eje de rotación este principio se simplifica:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum_{eje} \tau_{eje} \quad (4.107)$$

con  $I$  el momento de inercia del rotor. Para tomar el caso más sencillo, si la velocidad de rotación  $\omega$  es constante la derivada  $d\omega/dt$  es nula. El principio de la dinámica equivale a equilibrar los dos pares (motor y resistente):

$$\sum_{eje} \tau_{eje} = 0 \quad (4.108)$$



**Figura 4.30** Esquema de escobillas sujetadas al estator. Las escobillas están mantenidas en contacto con el anillo con el ayuda de un muelle que los empuja hacia el anillo rozante. Aquí se muestra un generador conectado pero podría ser una resistencia o cualquier otro sistema que queremos alimentar.

Siendo esta suma nula, el par motor compensa el par resistente:

$$\tau_m = -\tau_r = -\frac{(B_0 S)^2}{R} \omega |\cos(\omega t)| \quad (4.109)$$

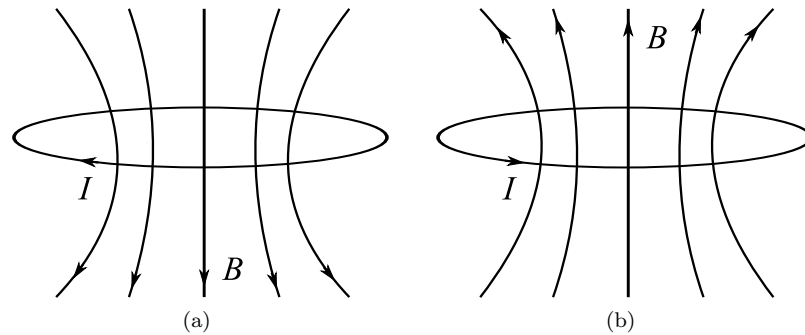
La potencia mecánica aportada es el producto del par motor por la velocidad angular dado por la ecuación (4.100):

$$P_m = \frac{(B_0 S)^2}{R} \omega^2 |\cos(\omega t)| \quad (4.110)$$

Si no existe ninguna pérdida por fricción u otras disipaciones, aplicando el principio de conservación de la energía la potencia eléctrica consumida por la resistencia tendrá la misma expresión:

$$P_e = P_m = \frac{(B_0 S)^2}{R} \omega^2 |\cos(\omega t)|. \quad (4.111)$$

En la figura 4.30 se dibuja un dispositivo para recuperar la tensión en los terminales de la espira evitando que todos los cables giren con la espira. Se trata de dos anillos de cobre llamados anillos rozante montados sobre el eje de



**Figura 4.31** Aspecto del campo magnético cuando una corriente circula en una espira. El campo en el centro de la espira es vertical y su sentido se deduce con la regla de la mano derecha.

rotación y conectados cada uno a un terminal de la espira. Para poder hacer contacto con un circuito exterior se usan unos electrodos de carbón llamados escobillas que deslizan sobre el cobre. El contacto se establece con el rozamiento de uno contra el otro. En la figura 4.30 se enseña el sistema de anillos rozantes con mas detalles. Aunque es un sistema muy ingenioso, supone algunos problemas cuando se trabaja con tensiones altas. Las escobillas se desgastan más y aparecen chispazos en la superficie de contacto. También introducen pérdidas de energía y de tensiones al deslizar.

## 4.6 Generación de un campo giratorio

En los ejemplos anteriores, el estátor produce un campo magnético estático y uniforme para generar electricidad o movimiento. En otros tipos de máquinas eléctricas, el estátor produce un campo variable que va a interactuar con el rotor. Es el caso de los motores asíncronos y síncronos que se estudiarán en el capítulo 6. En estas máquinas eléctricas el estátor no se mueve, sin embargo genera un campo magnético dinámico. Este campo puede generarse fácilmente a partir de una alimentación trifásica. En la figura 4.32 se dibuja un ejemplo de estátor con tres bobinas alimentados con un juego de tensión trifásica.

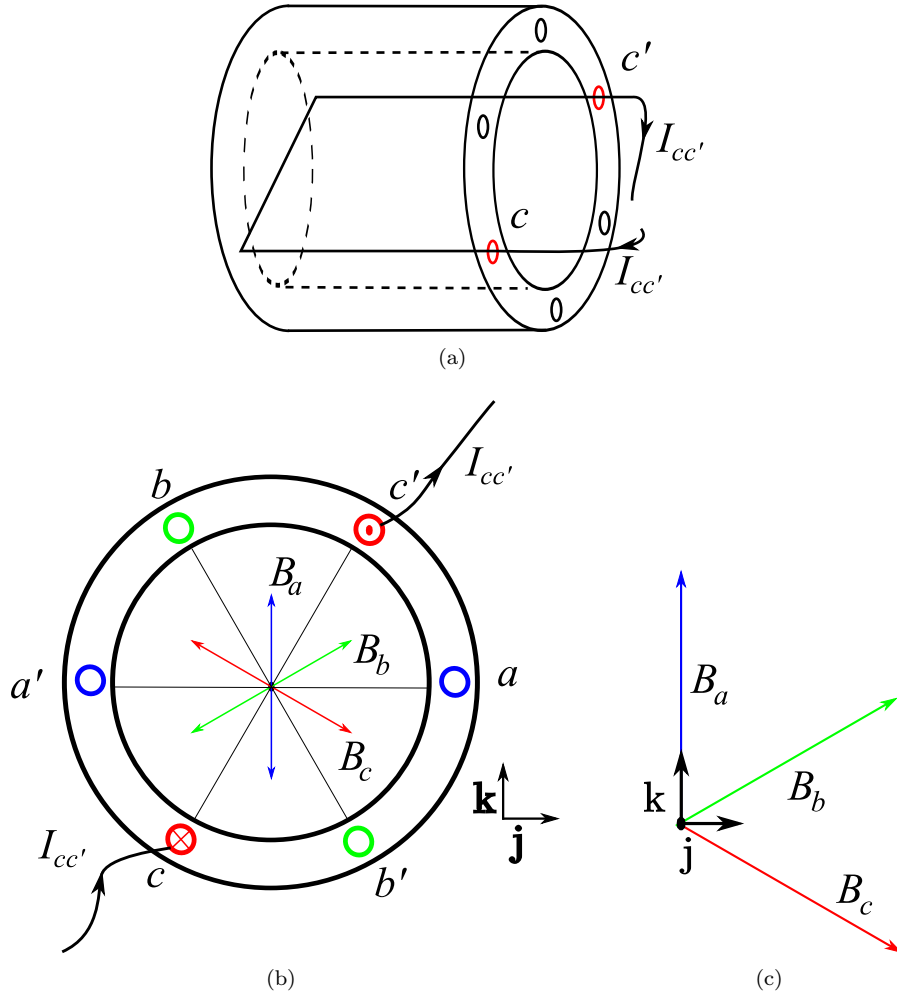
Las tres bobinas se disponen con un ángulo de  $2\pi/3$  entre cada espira en ranuras paralelas al eje en la armadura del estátor. Las corrientes del sistema trifásico se escriben como:

$$I_{aa'}(t) = I_m \sin(\omega t) \quad (4.112)$$

$$I_{bb'}(t) = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.113)$$

$$I_{cc'}(t) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.114)$$

Los devanados  $aa'$ ,  $bb'$  y  $cc'$  están colocados en el estátor con un ángulo de  $2\pi/3$



**Figura 4.32** (a) Vista de un estator con una espira (en un caso práctico la espira da varias vueltas). (b) Esquema de un estator trifásico visto de perfil con el sentido de las corrientes para la generación de un campo magnético giratorio. Los devanados del estator tienen un ángulo de  $2\pi/3$  entre sí. Se indica la dirección del campo magnético generado por cada espira. El campo es normal (perpendicular) a la superficie definida por cada espira. En (c) se representan los vectores del campo generado por las tres espiras con los vectores de base  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ .

entre sí, con las letras  $a, b$  y  $c$  sucediendo en orden directo (sentido anti-horario). El sentido de circulación de las corrientes en los bobinados aparece en la figura 4.32 (a); una corriente  $I_{cc'}$  positiva entra por  $c$  y sale por  $c'$ .

Cada espira genera un campo magnético perpendicular al plano definido por la espira cuyo sentido se puede hallar con la regla de la mano derecha. Sin embargo la expresión general del campo en un punto arbitrario se debe calcular

análiticamente o numéricamente con las leyes de Maxwell. Aunque es complicado descubrir la expresión del campo en todo el espacio se puede deducir el campo en el centro de la espira. En este punto el campo es normal al plano definido por la espira como se enseña en la figura 4.31. La superposición del campo de las tres espiras en el estátor va a provocar un efecto interesante que estudiamos aquí.

Por razones de simetría nos interesamos únicamente a un corte transversal del cilindro del estátor. En este plano, el campo magnético en el centro se puede expresar en función de dos vectores de base  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{j}$  del plano representado en la figura 4.32. Existe una descripción matemática del campo en el centro que refleja el comportamiento en el resto del cilindro. Basándonos en la figura 4.32, el campo generado por la espira  $aa'$  oscila en la dirección vertical. El campo generado por la espira  $bb'$  oscilará en el plano con ángulo de  $\pi/3$  con respecto al vector  $\mathbf{j}$  y para el campo de la espira  $cc'$  con un ángulo de  $-\pi/3$ . La expresión de estos campos en la base elegida es:

$$\mathbf{B}_a = B_0 \sin(\omega t) \mathbf{k} \quad (4.115)$$

$$\mathbf{B}_b = B_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} - \frac{1}{2} \mathbf{k}\right) \quad (4.116)$$

$$\mathbf{B}_c = B_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} - \frac{1}{2} \mathbf{k}\right) \quad (4.117)$$

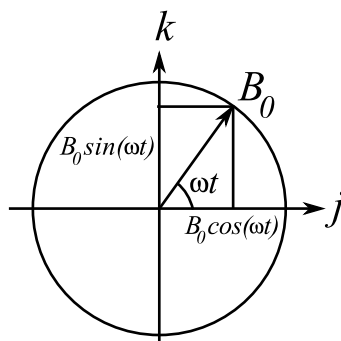
Sumando las tres contribuciones de los campos se obtiene el campo magnético total en el centro:

$$\mathbf{B}_N = B_0 (\cos(\omega t) \mathbf{j} + \sin(\omega t) \mathbf{k}) \quad (4.118)$$

Esta ecuación define un campo giratorio en este punto. El vector  $\mathbf{j}$  corresponde al eje horizontal mientras  $\mathbf{k}$  el eje vertical. Aparece de manera clara un vector de módulo  $B_0$  gira a una velocidad  $\omega$ . En la figura 4.33 se puede descomponer el vector  $\mathbf{B}_N$  sobre el eje horizontal en la componente  $B_0 \cos(\omega t)$  y en la componente vertical  $B_0 \sin(\omega t)$ . La evolución en función del tiempo del campo es un vector de módulo  $B_0$  que da vuelta a una velocidad angular  $\omega$ .

En la figura 4.34 se detallan los vectores del campo magnético para seis instantes de un periodo, de  $\omega t = 0^\circ$  hasta  $\omega t = 300^\circ$  en pasos de  $60^\circ$ . Los instantes han sido elegidos de tal forma que una de las componentes del campo es nula. Como se puede observar el campo global es la suma vectorial de los campos generados por cada bobinas. Este va rotando en el sentido anti-horario.

Para un instante dado se ha simulado el campo en el interior de la cavidad, en la figura 4.35 se muestra la excitación magnética  $H$  simulada para el ángulo  $\omega t = 60$ . El campo es casi uniforme dentro del estátor salvo cerca de las bobinas. A pesar de haber calculado el campo solo en el centro para simplificar el análisis, es una buena aproximación del campo en todo el interior del estátor. Existen cerca de los bordes deformaciones debido a la presencia de los cables llevando corriente.



**Figura 4.33** En esta figura se representa el vector  $B$  en un sistema de coordenadas  $(O,j,k)$ . El vector describe un círculo de radio  $B_0$  en función del tiempo.

El campo  $B_0$  se puede asimilar a un imán girando, se ha creado un polo norte y un polo sur.

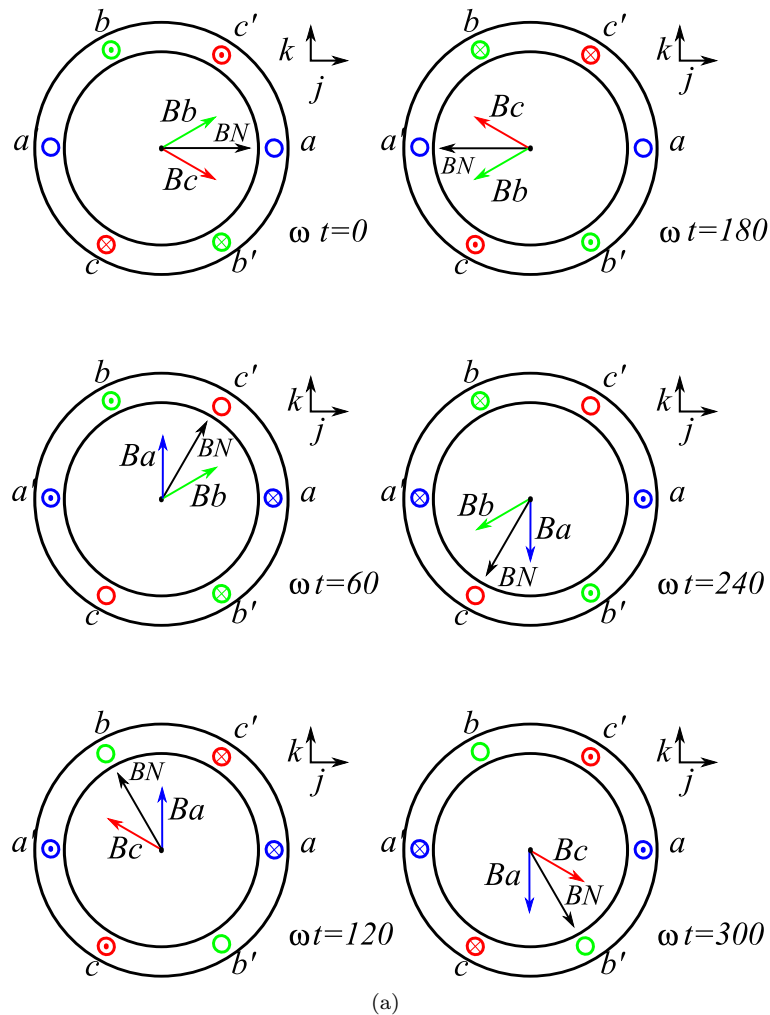
Se pueden poner más de tres devanados en el estátor y alimentarlo con el mismo sistema trifásico, asimismo se obtiene más de un juego de tensiones trifásicas. El campo giratorio puede representarse como un imán que gira a la velocidad de la frecuencia eléctrica. La relación entre la frecuencia eléctrica y la velocidad de rotación del campo cambiará debido al número de polos magnéticos así creado. En el caso de un único juego de tensiones trifásicas el estátor se comporta como un imán con dos polos, uno norte y uno sur. Duplicando el número de devanados, es decir repitiendo los devanados seguidamente dos veces, aparecen dos nuevos polos. Se dice que el estátor tiene 4 polos (ver figura 4.36). El sentido de los devanados se puede observar en la figura 4.36, y se alimentan con corrientes trifásicas de la ecuación (4.112). En la misma figura se representa el aspecto de la excitación magnética en el estátor. Este campo de vectores se puede descomponer en cuatro zonas según la dirección del campo: centrípeta (polo sur) o centrífuga (polo norte).

El número de ciclos de la tensión eléctrica no se corresponde con la velocidad del rotor. En la figura 4.36, cuando se cumple un ciclo eléctrico, se ha cumplido solo media vuelta del rotor. Se necesita entonces dos periodos eléctricos para cumplir un periodo del campo. El número de devanados del estátor (o del rotor) esta relacionado con el número de polos  $P$ . La relación general entre la frecuencia eléctrica y la velocidad de rotación es:

$$f_e = \frac{P}{2} f_m \quad (4.119)$$

con  $f_m$  la velocidad de rotación en Hz. Es decir que con 4 polos, dos vueltas de la tensión eléctrica genera una rotación del campo magnético. Se expresa la velocidad de rotación en vueltas por minutos se obtiene:

$$n_r = \frac{120 f_e}{P} \text{ [r.p.m]} \quad (4.120)$$



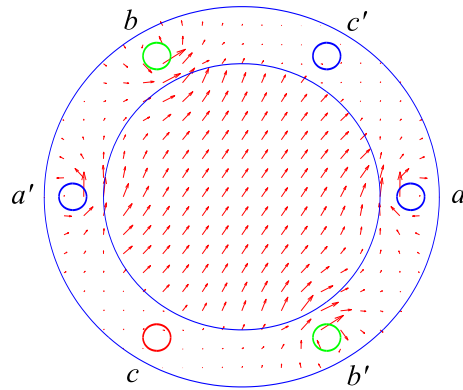
**Figura 4.34** Evolución temporal de los campos magnéticos cuando se alimentan los devanados con una tensión trifásica. Se observa que el campo total  $B_N$  es siempre de misma magnitud y cumple una vuelta a la vez que la frecuencia eléctrica.

El número de polos del estátor y del rotor pueden ser distintos. Por ejemplo puede tener un estátor con un devanado trifásico y un rotor con cuatro polos. En el ejemplo de la figura 4.36, se obtiene un estátor con cuatro polos magnéticos.

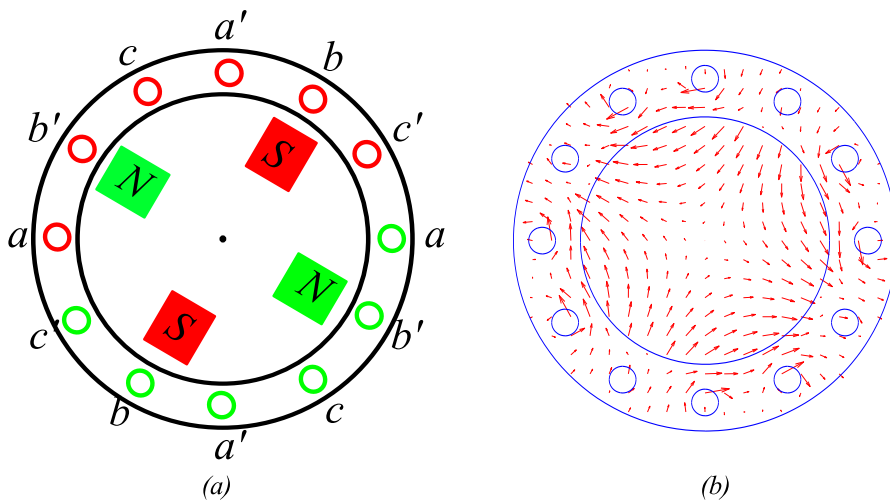
## 4.7 Ejercicios Resueltos

1. Se dispone de una anillo de material ferromagnético de longitud  $d = 12\text{cm}$ , y de sección  $S = 9\text{cm}^2$ . El material es hierro al silicio de permeabilidad





**Figura 4.35** En esta figura se representa la excitación magnética dentro de un estator alimentado con corriente trifásica para un instante del ciclo. Se puede observar que el campo es casi uniforme dentro del estator.



**Figura 4.36** Esquema de un estator con dos devanados trifásicos, cuando se alimentan los dos con una tensión trifásica se forman cuatro polos magnéticos. Junto con este esquema se dibuja el aspecto de la dirección local campo en el estator con flechas.

relativa  $\mu_r = 8000$ . Alrededor de esta barra se enrolla 200 vueltas de un cable recorrido por una corriente de  $I = 1\text{A}$ .

- Calcular la reluctancia del anillo.
- Calcular el flujo producido por la bobina en dentro del material ferromagnético (suponiendo el material lineal).

### Solución

a) Se aplica directamente la fórmula de la reluctancia:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{S\mu_0\mu_r} = \frac{0,12}{9 \cdot 10^{-4} \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 8000} = 13263 \text{ Av Wb}^{-1}$$

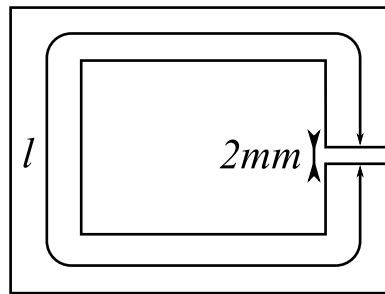
b) Para encontrar el flujo circulando por el material se va a utilizar la fórmula de Hopkinson:

$$\mathcal{F} = NI = \mathcal{R}\Phi$$

Despejamos y sustituimos en la fórmula:

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}} = \frac{200 \cdot 1}{13263} = 1,51 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

2. Se dispone de un circuito magnético con un corte tal como en la figura siguiente. La longitud total del circuito es de 40cm y el entrehierro de 2mm.



Calcular la reluctancia total del circuito. La sección del circuito es de  $16\text{cm}^2$  y la permeabilidad relativa de  $\mu_r = 10000$ .

### Solución

Se calcula la reluctancia total del circuito considerando que el circuito es la suma de dos reluctancias en serie: la reluctancia de material ferromagnético mas la reluctancia del entrehierro.

Las dos reluctancias son:

$$\mathcal{R}_h = \frac{l}{S\mu_0\mu_r} = \frac{0,4}{16 \cdot 10^{-4} \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 10000} = 19894 \text{ Av Wb}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{l}{S\mu_0} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-4} \cdot 4\pi 10^{-7}} = 994718 \text{ Av Wb}^{-1}$$

La reluctancia total es:

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_h + \mathcal{R}_0 = 1014612 \text{ Av Wb}^{-1}$$

El entrehierro aumenta mucho la reluctancia total del circuito, por lo tanto el flujo disminuye.

3. Un constructor estima las pérdidas de hierro de su material ferromagnético a  $p_u = 8 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$  para una frecuencia de 50 Hz y una inducción de 1 T en el material. Se construye una máquina eléctrica con este material, la inducción de 1 T se obtiene con una tensión de 100 V eficaz al alimentar la bobina.

Sabiendo que la máquina tiene una masa de  $M = 10 \text{ kg}$ , hacer un modelo del núcleo ferromagnético (no se incluye la corriente de magnetización).

### Solución

Las pérdidas de hierro de esta máquina son  $P_h = p_u \cdot M = 10 \cdot 8 = 80 \text{ W}$ . Por otro lado se considera el núcleo lineal, las pérdidas se expresan en función de la tensión de entrada:

$$P_h = \frac{U^2}{R_h} = \frac{100^2}{R_h} = 80 \text{ W}$$

La resistencia equivalente de pérdidas de hierro es:

$$R_h = \frac{100}{80^2} = 125 \Omega$$

El modelo del núcleo sería entonces una resistencia de  $125 \Omega$ .

4. En un núcleo ferromagnético circula una inducción máxima de 1,5 T. Dado que la tensión de alimentación es alterna de 150 V eficaces, calcular la energía reactiva consumida.

Datos:  $\mathcal{R} = 4000 \text{ A} \cdot \text{v} \cdot \text{Wb}^{-1}$ ,  $N = 30$  Vueltas,  $S = 10 \text{ cm}^2$ .

### Solución

Para hallar la energía reactiva necesaria para mantener el flujo en el circuito magnético se puede calcular:

- el flujo magnético.
- La corriente de alimentación.

El flujo se halla gracias a la inducción máxima  $B_{max}$  y la sección del núcleo:

$$\Phi = \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} S = \frac{1,5}{\sqrt{2}} 10^{-3} = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

La ley de Hopkinson permite determinar la corriente en el circuito suponiendo que el circuito no se satura:

$$\mathcal{F} = NI = \mathcal{R}\Phi$$

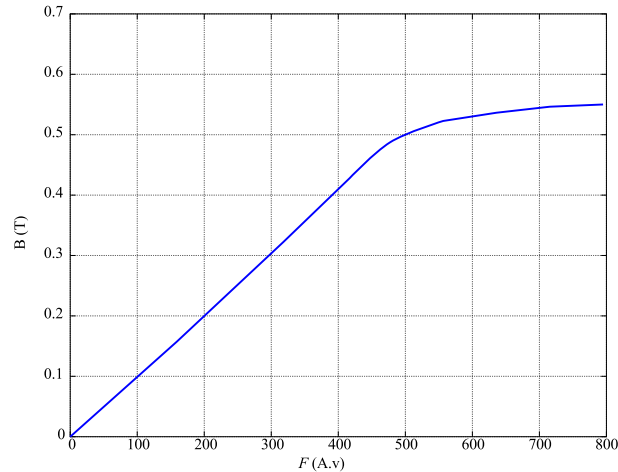
Despejando la corriente se obtiene:

$$I = \frac{\mathcal{R}\Phi}{N} = \frac{4000 \cdot 1,06 \cdot 10^{-3}}{300} = 0,14 \text{ A}$$

La potencia reactiva es en este caso el producto de la tensión de alimentación por la corriente que se necesita para establecer el flujo (toda la potencia es reactiva):

$$Q = UI = 150 \cdot 0,14 = 21,2 \text{ VAR}$$

5. Se construye una máquina eléctrica con un material con la curva de imanación siguiente:



- ¿Cuál es la fuerza magnetomotriz máxima que se puede aplicar al núcleo sin que haya saturación.
  - Considerando la zona lineal del material, hallar la reluctancia.
  - Cuanta energía puede llevar el flujo magnético en la zona lineal.
  - Si la frecuencia es de 100Hz, ¿cuanta potencia puede transmitir el flujo?
- Datos: Sección equivalente:  $S = 1\text{m}^2$ , .

### Solución

a) En la gráfica se busca el punto que nos permite hallar la fuerza magnetomotriz sin saturar el núcleo. Se supone que el núcleo empieza a saturar justo cuando empieza el codo de la saturación entonces la excitación máxima es:

$$\mathcal{F}_{max} = 500 \text{ A.v}$$

b) En la zona lineal del material, un pequeño incremento de la fuerza magnetomotriz  $\mathcal{F}$  provoca un pequeño incremento de la excitación magnética  $B$ . Si la sección del circuito magnético es constante, se usa la ley de Hopkinson:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi = \mathcal{R}BS$$

En esta zona la reluctancia se halla gracias a la curva:

$$\mathcal{R} \simeq \frac{\Delta\mathcal{F}}{S\Delta B} = \frac{400}{0,4} = 1000 \text{ A.v.Wb}^{-1}$$

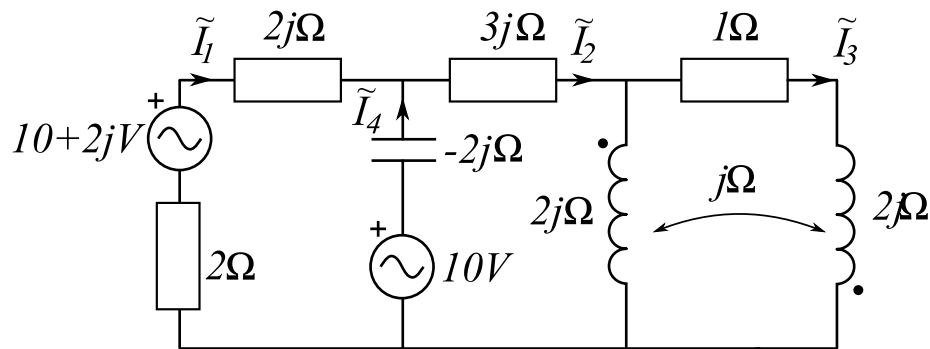
c) Se calcula ahora la energía que puede llevar el campo magnético en el circuito. Recordando la ecuación (4.41) podemos despejar la energía en función de los elementos de los que disponemos:

$$W = S \int NI dB = S \int \mathcal{F} dB = (400 \cdot 0,4)/2 = 80J$$

d) Suponiendo la tensión alterna, tenemos para un semi-ciclo la energía transportada de 80J. Entonces para un ciclo completo la potencia es de 160J. Para cien ciclos por segundos la potencia es:

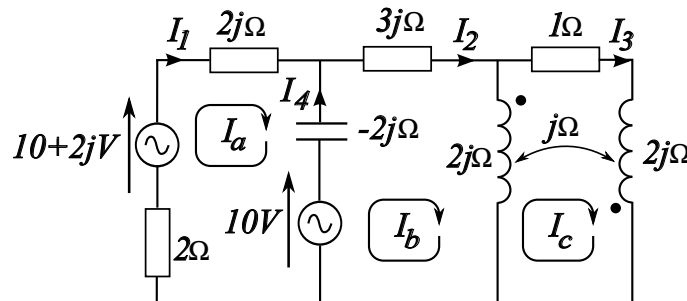
$$P = 160 \cdot 100 = 16kW$$

6. Resolver el circuit con acoplamientos magnéticos siguiente:



### Solución

Para resolver el circuito se puede usar el método de las mallas. En la siguiente figura se dibuja el sentido de las corriente de mallas:



Se plantea ahora las ecuaciones y resolver el sistema. La primera malla no presenta ninguna dificultad:

$$10 + 2j - 2j\tilde{I}_a + 2j(\tilde{I}_a - \tilde{I}_b) - 10 - 2\tilde{I}_a = 0$$

Para la segunda y la tercera ecuación se debe de tener cuidado con el acoplamiento magnético. Al tener un sentido opuesto para el devanado, la influencia que va a tener una bobina sobre otra será negativa. La ecuación de la segunda malla es:

$$10 - 2j(\tilde{I}_a - \tilde{I}_b) - 3j\tilde{I}_b - (2j(\tilde{I}_b - \tilde{I}_c) - j\tilde{I}_c) = 0$$

Para la tercera malla también debe de tener en cuenta el acoplamiento magnético:

$$2j(\tilde{I}_b - \tilde{I}_c) - j\tilde{I}_c - 1\tilde{I}_c - (2j\tilde{I}_c - j(\tilde{I}_b - \tilde{I}_c)) = 0$$

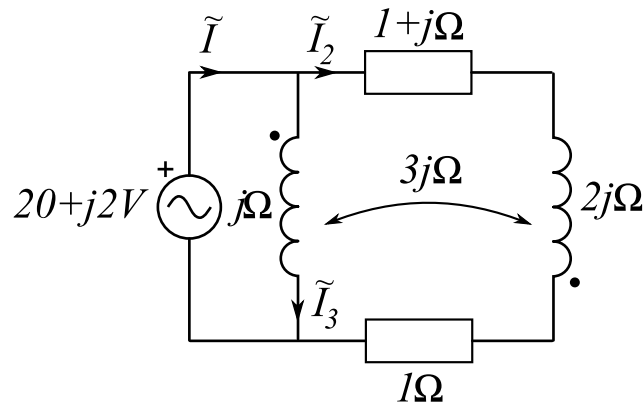
El sistema de ecuaciones que se obtiene es:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2j & 0 \\ -2j & -3j & 3j \\ 0 & 3j & -1-6j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2j \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Después de resolver obtiene:  $\tilde{I}_a = -2,5 - j2,6\text{A}$ ,  $\tilde{I}_b = 3,6 - j2,5\text{A}$ ,  $\tilde{I}_c = 6,13 + j0,14\text{A}$ . Además se disponen de las siguientes relaciones entre las corrientes de lazo y las corrientes de rama:  $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_a$ ,  $\tilde{I}_2 = \tilde{I}_b$ ,  $\tilde{I}_3 = \tilde{I}_c$ ,  $\tilde{I}_4 = \tilde{I}_b - \tilde{I}_a$ .

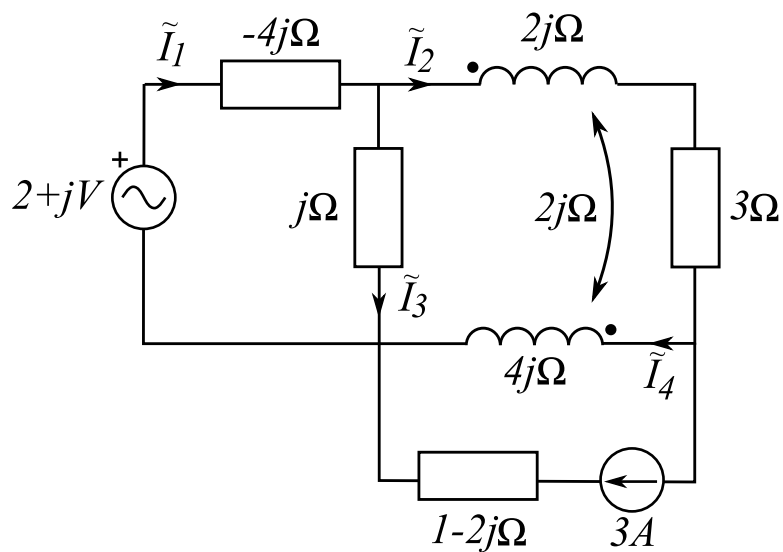
## 4.8 Ejercicios adicionales

1. Calcular las corrientes del circuito de la figura siguiente:



[Respuesta:  $\tilde{I}_2 = 2,8 + j12,4\text{A}$ ,  $\tilde{I}_3 = 10,4 + j17,2\text{A}$ ]

2. Calcular las corrientes del circuito de la figura siguiente:



[Respuesta:  $\tilde{I}_1 = -0,81 + j0,52\text{A}$ ,  $\tilde{I}_2 = 1,44 + j0,44\text{A}$ ,  $I_4 = -2,25 + j0,08\text{A}$ ].

3. Calcular el flujo en una sección del circuito magnético con las características siguientes:

- Bobina de 200 espiras
- Corriente  $I = 10\text{A}$
- Reluctancia  $\mathcal{R} = 900 \text{ Av.Wb}^{-1}$

[Respuesta:  $\Phi = 2,2\text{Wb}$ ]

4. Calcular la corriente necesaria para obtener un flujo de  $1\text{Wb}$  el circuito magnético con la características siguiente:

- Bobina de 1000 espiras
- Longitud del circuito magnético  $l = 1\text{m}$
- Sección del circuito magnético  $S = 1 \cdot 10^{-2}\text{m}^2$ .
- Permeabilidad relativa del material  $\mu_r = 10000$ .

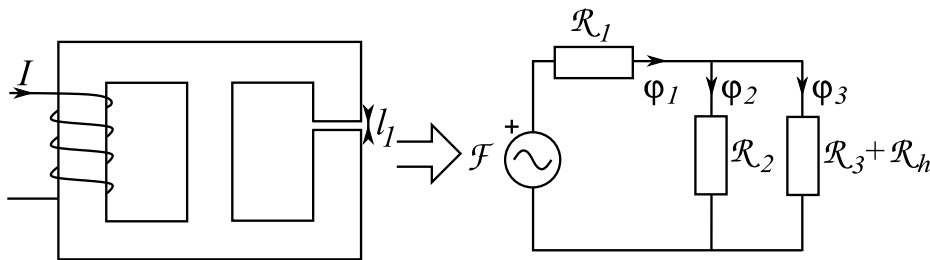
[Respuesta:  $I \simeq 8\text{A}$ ]

5. Obtener el modelo eléctrico del circuito magnético con los parámetros siguientes:

- Bobina de 500 espiras
- Corriente  $I = 2\text{A}$
- Perdidas de potencia en el núcleo:  $P_h = 1000\text{W}$
- Reluctancia  $\mathcal{R} = 3000 \text{ Av.Wb}^{-1}$

[Respuesta:  $L = 83,3\text{H}$ ,  $R_h = 250\Omega$ ]

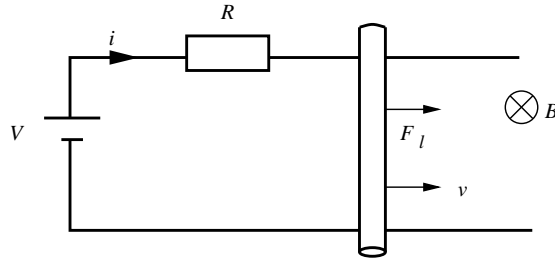
6. Calcular el flujo en la ramas del siguiente circuito magnético:



Parámetros:  $\mathcal{R}_1 = 1000 \text{ Av.Wb}^{-1}$ ,  $\mathcal{R}_2 = 2000 \text{ Av.Wb}^{-1}$ ,  $\mathcal{R}_3 = 1000 \text{ Av.Wb}^{-1}$ ,  $\mathcal{R}_h = 20000 \text{ Av.Wb}^{-1}$ ,  $\mathcal{F} = 2000\text{Av}$ .

[Respuesta:  $\varphi_1 = 0,71\text{Wb}$ ,  $\varphi_2 = 0,64\text{Wb}$ ,  $\varphi_3 = 0,06\text{Wb}$  ]

7. Se quiere analizar la máquina lineal en la figura siguiente. Se alimenta con una tensión de  $120\text{V}$  y una resistencia de  $0,3\Omega$  la barra tiene una longitud de  $10\text{m}$  y se coloca en un campo magnético de  $B = 0,1\text{T}$ .



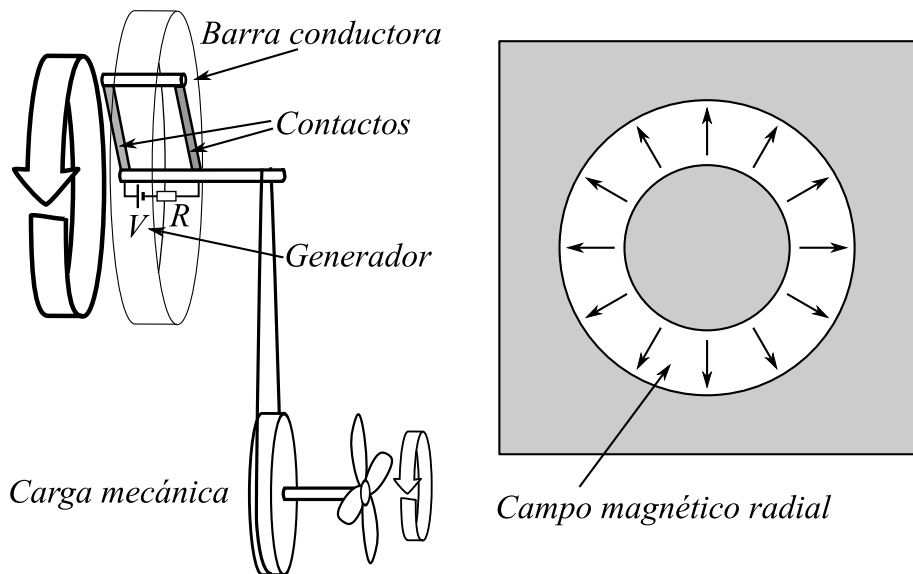
- Calcular la corriente de arranque de la máquina.
- Calcular la velocidad estacionaria de la máquina.
- ¿Si se aplica una fuerza de 30N hacia la izquierda, cual es la nueva velocidad estacionaria? ¿Cual va a ser la potencia absorbida por la barra?
- ¿Si se aplica una fuerza de 30N hacia la derecha, cual es la nueva velocidad estacionaria? ¿Cual va a ser la potencia producida por la barra?

[Respuesta: a)  $I=400\text{A}$  b)  $v_e = 120\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  c)  $v_e = 111\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $P=3330\text{W}$  d)  $v_e = 129\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $P=3870\text{W}$  ]

8. Un generador compuesto de una espira montada sobre un eje, se encuentra en un campo magnético uniforme de 0.1T (perpendicular al eje de la espira). La espira se mueve con una fuerza mecánica a una velocidad constante de  $n = 300$  r.p.m. Los bornes de la espira se conectan a una resistencia de valor  $10\Omega$ . (superficie de la espira:  $0.5\text{m}^2$ ).

- Expresar la potencia activa consumida.
- Expresar el par motor y resistente.

[Respuesta: a)  $P_a = 0,123\text{W}$  b)  $\tau_m = \tau_r = 7,9 \cdot 10^{-3} |\cos(10\pi t)| \text{N}\cdot\text{m}$  ]

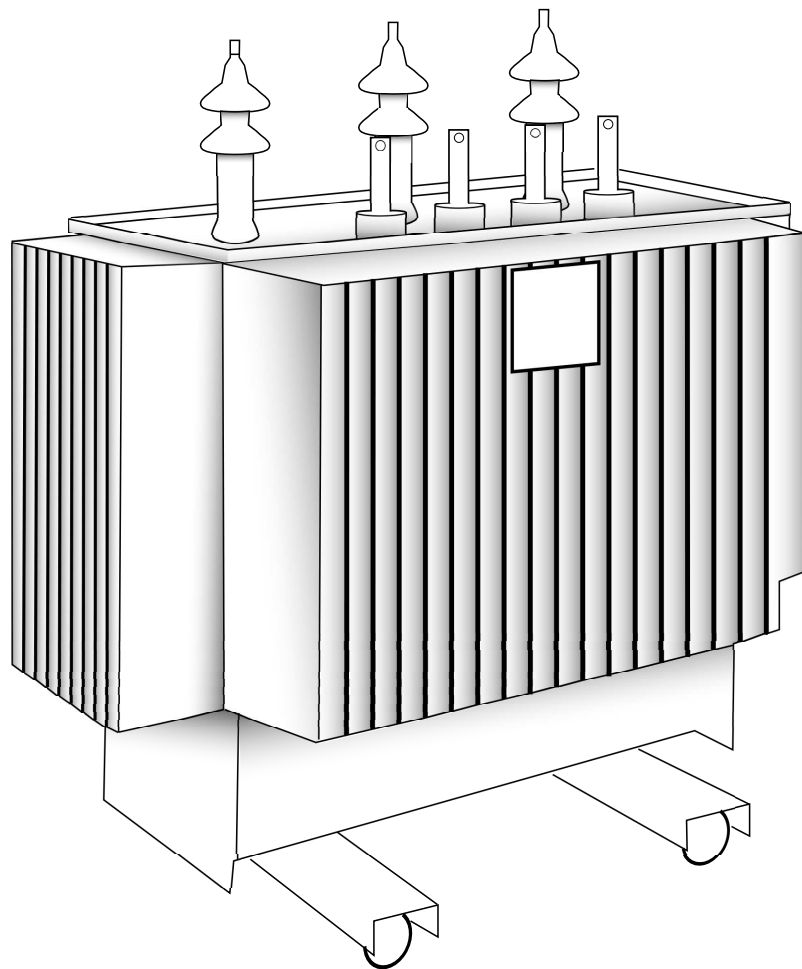




- 
9. En la figura anterior se muestra un motor sencillo formado de una barra conductora alimentada en corriente continua. La barra se coloca en un campo magnético radial tal que el campo sea siempre perpendicular al desplazamiento de la barra conductora. El campo magnético constante tiene una intensidad de 2T, la longitud de la barra es de 0.5m, el el voltaje de alimentación es de 100V continuo y el radio del brazo de la rueda es de un 0.5m. El par resistente del mecanismo acoplado es de 20 N.m. La resistencia equivalente del circuito eléctrico es  $R = 1\Omega$ .
- a) Expresar la velocidad de rotación (estacionaria) de la barra.
  - b) La potencia eléctrica consumida.
  - c) El par resistente máximo que puede aguantar la barra.
- [Respuesta: a)  $\omega = 120 \text{ rad/s}$  b)  $P_e = 4000\text{W}$  c)  $\tau_m = 50\text{N.m}$ ]
10. Una máquina eléctrica de 6 polos esta alimentada por una tensión alterna trifásica de 50Hz. Dar la velocidad de rotación del campo en Hz y en r.p.m. [Respuesta:  $n = 1000\text{r.p.m}$ ]

## 5 Transformadores

---



Muchas veces, los recursos energéticos (carbón, agua, etc) no están en el lugar del consumo de la energía sino lejos. Se necesita entonces un dispositivo que permite transportar la energía sobre grandes distancias. Un cable conductor siempre presenta una cierta resistencia lineica que depende del material. Al pasar una corriente por este cable, el calentamiento por efecto Joules disipa una parte de la energía que se quiere transportar. La disipación por efecto Joules se expresa

en función de la longitud de la línea:

$$P(d) = \rho d \cdot I^2 \quad (5.1)$$

con  $\rho$  la resistencia lineal del cable en  $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$ . Entonces para reducir estas pérdidas existen dos soluciones: reducir la resistividad del material o reducir la corriente.

El número de materiales para el transporte de la energía es limitado. El cobre, el material clásico para el transporte, es ahora un metal muy caro y se han buscado alternativas más económicas. Se usan ahora cables híbridos formados de hebras de acero y aluminio trenzadas. El aluminio es buen conductor (aunque peor que el cobre) pero es demasiado dúctil. El acero da la solidez requerida del cable. Sin embargo resulta difícil rebajar la resistividad de las líneas.

La otra solución, rebajar la corriente, implica aumentar la tensión de alimentación. La potencia aparente transportada en un sistema de corriente alterna es:

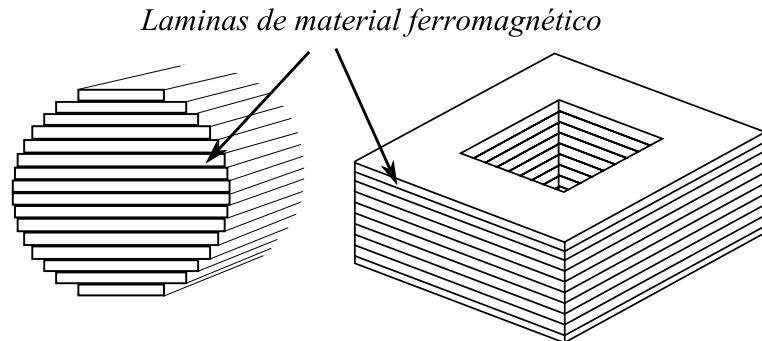
$$S = V_{ef} I_{ef} \quad (5.2)$$

Para mantener entonces la potencia, hay que elevar la tensión. Los transformadores tienen el papel de elevar una tensión alterna para el transporte y luego rebajar la tensión para que el usuario pueda conectarse con tensiones menos peligrosas. Los problemas de las altas tensiones se ven compensados por el ahorro energético realizado en las líneas.

Los transformadores fueron inventados al final del siglo XIX por dos ingenieros, Lucien Gaulard y John Gibbs, consiguieron elevar una tensión alterna hasta los 2000 voltios sobre 40km y luego rebajarla. Este invento fue luego desarrollado y mejorado para el transporte de la energía sobre largas distancias. La elevación de la tensión permite reducir las pérdidas por calentamiento en los cables de transporte.

El uso de transformador es únicamente posible en corriente alterna debido a la naturaleza de su funcionamiento. Hace uso de los principios de la inducción electromagnética para transformar la tensión, lo que restringe al empleo de tensiones dinámicas y más en concreto a tensiones alternas para los usos prácticos. Sin embargo, existen ahora dispositivos capaces de elevar tensiones continuas a muy altas tensiones para el transporte de energía llamados HVDC (High-Voltage Direct Current). Estos sistemas se usan por ejemplo en cables submarinos para largas distancias, pero se basan en la electrónica de potencia para su funcionamiento. Tienen dos ventajas decisivas, primero solo se necesitan dos cables (comparado con el trifásico), y es más eficiente que la corriente alterna.

Otra clase muy extendida de transformadores son los transformadores de pequeña potencia alimentados por una tensión de 110V o 220V eficaz y con salidas de hasta 30V. Estos transformadores bobinados de pequeña potencia tienden a desaparecer con el desarrollo de la electrónica de potencia. Las fuentes conmutadas modernas tienen un alto rendimiento y un peso mucho menor que los



**Figura 5.1** Esquema de un núcleo ferromagnético de un transformador. Se colocan láminas muy finas para reducir las corrientes de Foucault en el conductor. A la izquierda se muestra un perfil circular de un circuito magnético.

transformadores clásicos que contienen pesados núcleos ferromagnéticos.

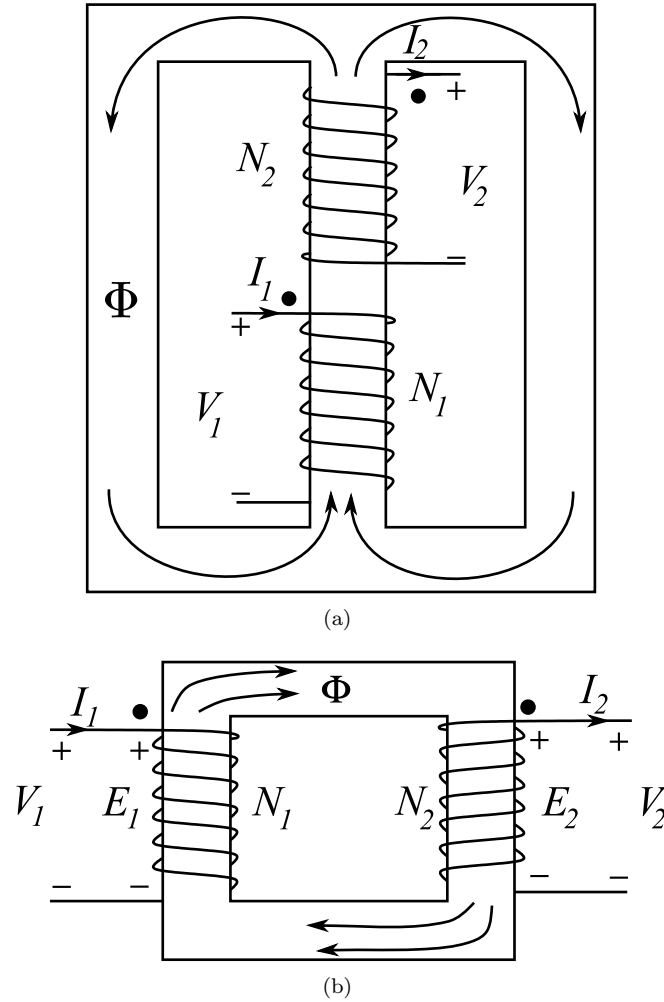
Los transformadores son equipos destinados a elevar o rebajar una tensión alterna. Básicamente, consisten en dos bobinas acopladas por un circuito magnético. Una de las bobinas genera un campo mientras en la segunda se produce una inducción electromagnética provocada por el campo de la primera bobina. El circuito magnético está hecho de un material ferromagnético, actúa como un conductor del campo magnético generado por las bobinas. Sin este material, la casi totalidad del flujo magnético se perdería en el aire; sirve de “canal” por el cual circula y se amplifica el flujo magnético. En el transformador más común, el núcleo se presenta como laminas de material ferromagnéticos (hierro etc) pegadas entre sí y aisladas eléctricamente con un tratamiento termo-químico como se puede observar en la figura 5.1 tal como discutido en el capítulo 4. No se suelen usar bloques macizos por una cuestión de pérdidas de energía por corrientes de Foucault. Primero se estudia el transformador ideal sin pérdidas en el proceso de transformación. A continuación se completa el modelo para tomar en cuenta todo los efectos que afectan al rendimiento. En la tercera parte se estudian casos prácticos de transformadores conectados a una red de tensión trifásica.

## 5.1 Transformadores ideales

### 5.1.1 Modelo eléctrico

En la figura 5.2 se enseña el esquema de transformadores monofásicos de dos tipos. En la figura 5.2 (a) aparece un transformador de tipo acorazado en el cual se dispone dos devanados en el mismo eje de un circuito magnético. En la figura 5.2 (b) se representa el transformador de tipo núcleo, en el cual los devanados están unidos por un circuito magnético circular o cuadrado.

Se alimenta la bobina de entrada de los transformadores, llamada **bobina**



**Figura 5.2** Esquema de transformadores físicos. En la figura (a) se muestra un transformador de tipo acorazado, los devanados de este transformador pueden ser concéntricos o entrelazados. En la figura (b) tenemos un transformador de tipo núcleo con devanados en dos columnas distintas.

**primaria**, con una corriente alterna. En un primer tiempo, la segunda bobina llamada **bobina secundaria** se deja en circuito abierto, no circula ninguna corriente en ella. Como se ha demostrado en el capítulo 4, las bobinas alimentadas con una corriente alterna producen un flujo magnético que se expresa gracias a la ley de inducción de Faraday:

$$E_1(t) = N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (5.3)$$

con  $N_1$  el número de espiras al primario y  $\Phi$  el flujo de una espira. En la figura 5.2

(b), la fuerza electromotriz  $E_1$  de la bobina es igual a la tensión de alimentación  $V_1$ .

En el capítulo 4 se han descritos los procesos físicos que llevan a la creación y a la canalización del flujo magnético en el núcleo ferromagnético. Se ha visto como la tensión y el flujo del transformador a la entrada están relacionada por esta ecuación diferencial (5.3). El flujo así creado al atravesar la **bobina del secundario** va a inducir también una tensión alterna acorde con la ley de Faraday:

$$E_2(t) = N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.4)$$

Dado que el flujo magnético  $\Phi$  es común a las dos bobinas<sup>1</sup>, existe una relación entre las tensiones  $E_1$  y  $E_2$ :

$$\frac{E_1(t)}{E_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (5.5)$$

Aparece una relación simple entre las tensiones de entrada y salida. Volveremos sobre esta importante relación que hace todo el interés del transformador.

En la figura 5.2.(b) se muestra el transformador con el sentido de las corrientes de entrada y de salida. La bobina de entrada tiene un convenio receptor mientras la bobina de salida tiene un convenio generador. La corriente del secundario ha de aparecer en convenio generador para poder proporcionar energía a una posible carga conectada. El sentido de bobinado de los devanados es importante para la polaridad de los transformadores. El punto negro en la figura 5.2.(b) indica el sentido del devanado. Siguiendo el convenio de los acoplamientos magnéticos explicado en el capítulo 4, si fluye una corriente entrante hacia el punto los flujos creados por ambas bobinas irían en el mismo sentido.

En el caso del transformador de la figura 5.2.(b), el secundario crea un flujo que se opone al flujo del primario según sale  $I_2$  del devanado.

Según la ecuación (5.5) relación entre la tensión de entrada y la tensión de salida depende del número de espiras del primario y del secundario. Este cociente se llama **relación de transformación** del transformador:

$$m = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1(t)}{E_2(t)} \quad (5.6)$$

Según función del valor de  $m$  se clasifican los transformadores en dos categorías:

- Para  $m < 1$  y  $V_1 < V_2$ . El transformador es un transformador **elevador**.
- Para  $m > 1$  y  $V_1 > V_2$ . El transformador es un transformador **reductor**.

Asímismo existe una relación entre las corrientes. Gracias al circuito magnético se pueden relacionar las fuerzar magnetomotrices de las dos bobinas mediante la ley de Hopkinson:

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \mathcal{R} \Phi. \quad (5.7)$$

<sup>1</sup> Se llama  $\Phi$  a veces “enlace de flujo” entre las bobinas.

Se resta la contribución de la segunda bobina debido a la producción de un flujo contrario al flujo del primario. Para un transformador bien diseñado, la reluctancia toma un valor parámetro pequeño, tendiendo al caso ideal  $\mathcal{R} \simeq 0$ . La relación entre las corrientes de primario y de secundario se simplifica como:

$$N_1 I_1 \simeq N_2 I_2. \quad (5.8)$$

Despejando se obtiene:

$$\frac{I_1}{I_2} \simeq \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m}. \quad (5.9)$$

De nuevo se encuentra la relación de transformación  $m$ , esta vez para las corrientes.

En el transformador ideal no hay pérdidas de potencia, por lo que la potencia aparente a la entrada tiene que ser la misma que la potencia de salida del transformador. Esta igualdad se expresa como:

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2 = \tilde{V}_1 \tilde{I}_1^* = \tilde{V}_2 \tilde{I}_2^* \quad (5.10)$$

a partir de este razonamiento sobre las potencias se despeja la relación entre la corriente de entrada y de salida:

$$\frac{\tilde{I}_1^*}{\tilde{I}_2^*} = \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = \frac{\tilde{V}_2}{\tilde{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m} \quad (5.11)$$

La relación de transformación para la corriente es inversa a la relación de las tensiones tal como se ha deducido antes. En la figura 5.3 se muestran unos esquemas estandarizados de transformadores ideales monofásicos. Existen varios convenios para representarlos, sin embargo siempre aparecen la relación de transformación así como el sentido de los devanados representados por los puntos.

Por motivos de diseño del transformador, puede interesar saber la cantidad de flujo magnético que circula por el circuito magnético. El tamaño del circuito magnético debe ir acorde con este flujo magnético. A partir de las ecuaciones precedentes se expresa la diferencia de potencial en el primario cuando circula un flujo magnético sinusoidal de expresión:

$$\Phi(t) = \Phi_m \sin(\omega t) \quad (5.12)$$

Usando la ley de Faraday y la tensión  $V_1$  de alimentación:

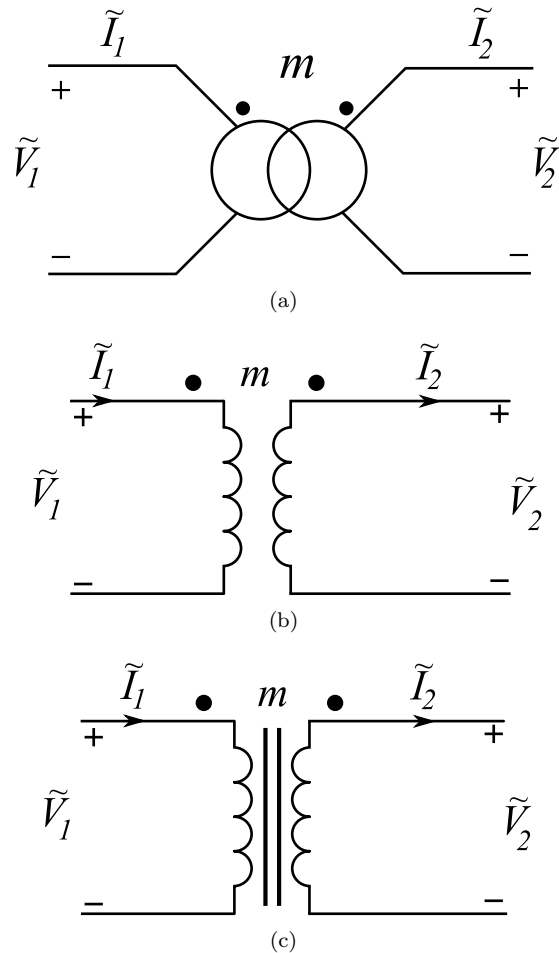
$$V_1(t) = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = N_1 \omega \Phi_m \cos(\omega t) = 2\pi f N_1 \Phi_m \cos(\omega t) \quad (5.13)$$

Si la tensión es sinusoidal, de forma que  $V_1(t) = V_1 \cos(\omega t)$ , el flujo máximo está determinado por la fórmula:

$$\Phi_m = \frac{V_1}{2\pi f N_1}. \quad (5.14)$$

En otra forma esta ecuación se llama fórmula de Boucherot:

$$V_1 = 2\pi f N_1 \Phi_m. \quad (5.15)$$



**Figura 5.3** Esquema normalizado de transformadores ideales con una relación de transformación  $m$ . Los dos esquemas (a), (b) y (c) son equivalentes. El esquema (c) representa un circuito magnético laminado.

### 5.1.2 Valores asignados

Un transformador se utiliza para una aplicación concreta en un contexto preciso. Sus características se deben adaptar al uso planificado o al revés. Entre las características importantes están los valores asignados del transformador. Permiten elegir el transformador para el uso previsto.

#### Potencia asignada

La potencia asignada, o potencia nominal, de un transformador es la potencia aparente para la que ha sido diseñado. En la especificación de un transformador, en su placa de características, tiene que aparecer su tensión nominal así como su potencia nominal. Es importante respetar estos valores de tensión y potencia.



En caso de que se superen estos valores el transformador se puede calentar y se acorta el tiempo de funcionamiento del equipo. Si se supera de mucho puede incluso quemarse si no se han previsto los mecanismos de protección adecuados.

El significado de potencia asignada difiere entre Europa y América del Norte. La norma de la IEC (International Electrotechnical Commission) especifica:

*Cuando la tensión de primario asignada se aplica y la corriente asignada circula en el devanado de secundario, el transformador recibe entonces la potencia asignada.*  
(IEC-60076-1)

Significa que la potencia asignada incluye el consumo de potencia del propio transformador (las pérdidas de cobre y hierro, etc).

La definición de la ANSI (American National Standards Institute) define la potencia asignada como:

*La potencia asignada en kVA de un transformador es la potencia de salida que puede proporcionar [...] con la tensión de secundario asignada y frecuencia asignada sin sobrepasar la temperatura límite.*  
(ANSI-IEEE-C57.12.00)

En este caso, el transformador se tiene que diseñar para obtener la potencia de salida asignada deseada. Se toman en cuenta la caídas de tensión y de potencia en el transformador para dar el servicio deseado.

Intentaremos levantar la ambigüedad sobre la potencia asignada usando la definición de la IEC en el resto del capítulo.

### Tensión asignada

La tensión asignada puede ser a la entrada o a la salida. A la entrada es la tensión con la que se debe alimentar el transformador para el funcionamiento deseado. A la salida, la tensión asignada es la tensión medida en el secundario en los bobinados cuando el transformador no tiene ninguna carga conectado (se dice que el transformador funciona en vacío). Siempre se dan en valor eficaz.

Gracias a las tensiones asignada de primario y secundario se puede estimar la relación de transformación del transformador, es decir:  $m \simeq V_1/V_2$ . Las tensiones asignadas del primario y del secundario se escriben de forma condensada como  $V_1/V_2$ , como por ejemplo 220/20V.

### Corriente asignada

La corriente asignada se deduce a partir de la potencia asignada y de la tensión asignada. La corriente asignada al primario o al secundario se halla usando la tensión asignada correspondiente:

$$I = \frac{S}{V}, \quad (5.16)$$

con  $S$  la potencia aparente asignada y  $V$  la tensión asignada. Se puede hallar tanto la corriente del primario como la del secundario con esta fórmula.

**Ejercicio 5.1**

Dado un transformador de valores asignados siguiente: voltajes de primario y secundario 8000/240V (eficaces) y potencia de 20kVA:

- (a) Calcular la relación de transformación, la corriente nominal de primario y corriente nominal de secundaria.
- (b) Se alimenta el transformador con un generador de 8000V eficaces y se carga con un equipo de impedancia de valor  $Z = 3 + 2j \Omega$ . Calcular la intensidad  $I_1$  e  $I_2$  de primario y secundario, la potencia aparente al secundario y el factor de potencia (no se consideran las pérdidas en este ejercicio).

**Solución del ejercicio 5.1**

a) La relación de transformación se calcula gracias a las tensiones asignadas al primario y secundario es:

$$m = \frac{V_1}{V_2} = \frac{8000}{240} = 33,3 \quad (5.17)$$

La corriente nominal de secundario puede calcularse con la expresión de la potencia aparente y la tensión asignada de secundario:

$$|S| = |\tilde{V}_2| |\tilde{I}_2| \quad (5.18)$$

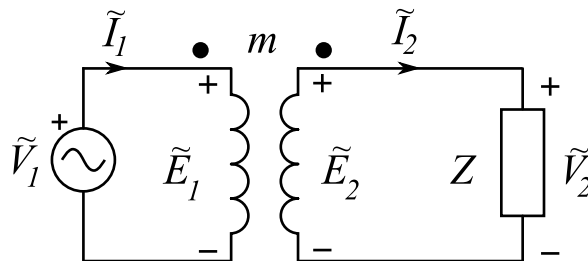
La corriente tiene entonces como expresión:

$$|\tilde{I}_2| = \frac{|S|}{|\tilde{V}_2|} = \frac{20000}{240} = 83,2 \text{ A} \quad (5.19)$$

La corriente nominal de primario puede expresarse con la relación de transformación en corriente:

$$|\tilde{I}_1| = |\tilde{I}_2|/m = 33,3 \text{ A} \quad (5.20)$$

b) En la figura siguiente se enseña un esquema del transformador ideal cargado con la impedancia  $Z$ . Se elige a continuación la tensión del generador como referencia de tensión:  $\tilde{V}_1 = 8000 \angle 0V$ .



Primero se calculan la corriente  $\tilde{I}_2$  con la ley de Ohm en el secundario:

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_2}{Z} \quad (5.21)$$

Usamos la relación de transformación anterior para obtener la corriente:

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_1}{mZ} = \frac{8000}{33,3(3 + j2)} = 55,44 - j36,96 = 66,63\angle -33,7^\circ \text{ A} \quad (5.22)$$

Ahora se halla la corriente de primario a partir de  $I_2$  con la relación de transformación en intensidad:

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{I}_2}{m} = \frac{66,63\angle -33,7}{33,3} = 2\angle -33,7^\circ \text{ A} \quad (5.23)$$

La potencia aparente en el primario se puede calcular ahora la potencia aparente del primario:

$$S_1 = \tilde{V}_1 \tilde{I}_1^* = 8000 \cdot 2\angle +33,7^\circ = 13295 - j8863 \text{ VA} \quad (5.24)$$

El valor absoluto de la potencia aparente es:

$$|S_1| = 16000 \text{ VA} \quad (5.25)$$

El transformador esta en un régimen inferior a sus capacidades, funciona a 80 % de sus carga nominal. El factor de potencia corresponde aquí al ángulo de la carga conectada (dado que el transformador se considera ideal no introduce ningún desfase adicional).

$$fp = \cos(33,7) = 0,83 \quad (5.26)$$

### 5.1.3 Transformación de impedancias

Se considera ahora un transformador ideal conectado a una carga de impedancia  $Z$  y a una fuente de tensión alterna al otro lado. Esta impedancia se representa en la figura 5.4 junto con el transformador. Se puede escribir la ley de Ohm en el secundario:

$$\tilde{V}_2 = Z\tilde{I}_2 \quad (5.27)$$

Sin embargo usando las relaciones de transformación para el transformador ideal se pueden sustituir la tensión  $\tilde{V}_2$  y la corriente  $\tilde{I}_2$  por  $\tilde{V}_1$  e  $\tilde{I}_1$ . La ecuación anterior se reescribe como:

$$\frac{\tilde{V}_1}{m} = mZ\tilde{I}_1 \quad (5.28)$$

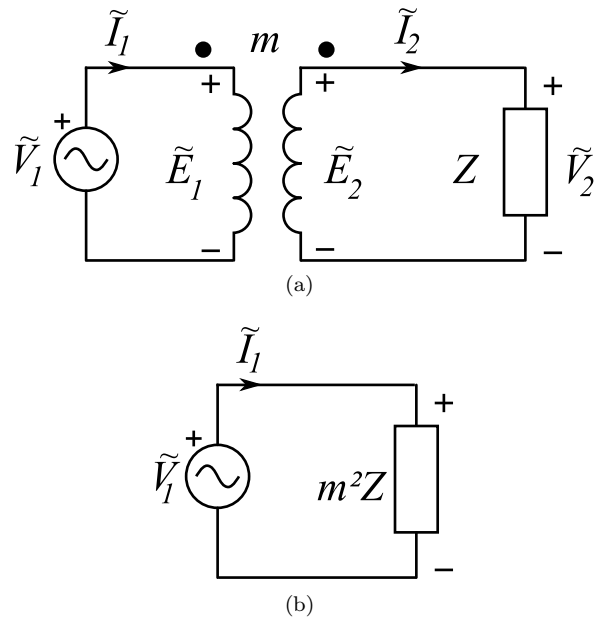
Despejamos:

$$\tilde{V}_1 = m^2 Z \tilde{I}_1 \quad (5.29)$$

Es decir que visto desde el primario se podría medir una carga equivalente de valor:

$$Z' = m^2 Z \quad (5.30)$$

Esta sustitución permite reducir el esquema a un circuito de corriente alterna sin transformador, lo que simplifica mucho los cálculos de tensiones y corrientes. Más



**Figura 5.4** Efecto de una impedancia vista desde el primario. En (a) aparece un transformador con una carga en el secundario. (b), considerando el transformador como una caja negra, se puede observar que desde el primario una impedancia  $z$  conectada al secundario se verá como una impedancia de valor  $m^2 z$  visto desde los puntos del primario.

adelante se describe el mecanismo para generalizar a cualquier transformador gracias a un método de reducción parecido.

## 5.2 Transformador real

En un transformador real existen muchos fenómenos que llevan a afectar la tensión y la corriente de primario y secundario. Esos defectos se deben en parte a la magnetización del circuito magnético. Los efectos no lineales de los circuitos magnéticos se estudiaron en detalle en el capítulo 4. Se resumen los principales efectos a continuación:

- El circuito consume una corriente solo para establecer el flujo magnético del circuito magnético. Estas corrientes de magnetización pueden influir en el rendimiento de los transformadores.
- La magnetización no se hace linealmente con la corriente. El flujo producido en el núcleo satura a partir de un cierto valor de la corriente. Es decir, cuando el núcleo se satura, un incremento fuerte de corriente no produce apenas cambios en el flujo. Por lo que la zona útil del transformador está limitada a la zona lineal.

- Cuando el flujo varía en el tiempo, el circuito magnético absorbe parte de la energía. Este fenómeno se debe a un magnetismo residual en el núcleo. Cuando el flujo cambia de sentido, existe un campo remanente en el núcleo que se opone al cambio. Hay que aportar una energía adicional para eliminar este magnetismo residual, lo que provoca un calentamiento del circuito magnético. Este fenómeno se llama histéresis del circuito magnético (ver capítulo 4). Las histéresis aparecen cuando el sistema tiene memoria de su estado anterior, es el caso del circuito magnético del transformador que guarda una traza de su magnetización anterior.
- Además de estos efectos no lineales, se deben que añadir las múltiples pérdidas que se pueden acumular durante la transformación. Estas pérdidas tienen varios orígenes, como por ejemplo el calentamiento de los devanados por efecto Joule debido a una cierta resistividad de los conductores. Por otro lado se pierde parte del flujo magnético generado en el aire, y como consecuencia parte de la energía no se transforma (dado que el flujo no atraviesa el secundario).

Se describen todos los otros tipos de pérdidas a continuación y se discuten los modelos con un circuito equivalente.

### 5.2.1 Modelo en tensión alterna

Un transformador consiste en un circuito magnético conectado por un lado (el primario) a una bobina alimentada por un generador y al otro lado (el secundario) a una bobina conectada a una impedancia, también llamada carga. El transformador en si es la asociación de dos elementos que hemos estudiado en el capítulo 4: un circuito magnético y un acoplamiento magnético. Sin embargo se añadirá otros elementos en el modelo responsables de las pérdidas de rendimiento del transformador.

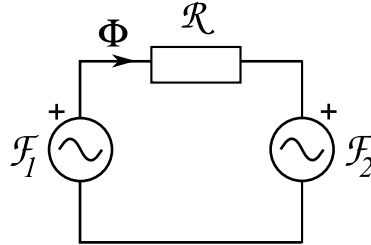
El circuito magnético del transformador se alimenta a través de su bobina primaria con una tensión  $V_1$  variable. Despreciando de momento la resistencia propia de la bobina, la tensión  $V_1$  es igual a la tensión autoinducida  $E_1$ . La relación entre el flujo y estas tensiones se debe, como lo hemos visto a la ley de Faraday:

$$V_1 \simeq E_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.31)$$

El flujo común  $\Phi$  es **todo** el flujo que circula en el circuito magnético, incluso cuando se conecta una carga a la salida. Es un hecho notable que la magnetización del circuito dependa poco o nada de la carga del secundario<sup>2</sup>, lo que nos permite asumir un flujo constante en el hierro.

Las corrientes de primario y de secundario van a provocar una fuerzas magnetomotrices que afectarán al balance de energía pero no al flujo  $\Phi$ . Por construc-

<sup>2</sup> Es justamente la formulación de la hipótesis de Kapp que estudiaremos más adelante: la magnetización es independiente de la carga del transformador.



**Figura 5.5** Esquema del circuito magnético del transformador con las fuerzas magnetomotrices del primario y secundario.

ción asumimos que el factor de acoplamiento magnético entre el primario y el secundario es cercano a 1 lo que permite despreciar por ahora las posibles fugas de flujo magnético que trataremos después. El esquema equivalente del circuito magnético con las fuerzas magnetomotrices  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  aparece en la figura 5.5.  $\mathcal{F}_1 = N_1 I_1$  es la fuerza magnetomotriz del primario,  $\mathcal{F}_2 = N_2 I_2$  la del secundario y  $\mathcal{R}$  es la reluctancia del circuito. Aplicando la relación de Hopkinson, la ecuación del circuito es:

$$N_1 I_1 - \mathcal{R} \Phi - N_2 I_2 = 0. \quad (5.32)$$

Despejamos la corriente  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{\mathcal{R}}{N_1} \Phi + \frac{N_2}{N_1} I_2 = I_m + \frac{N_2}{N_1} I_2. \quad (5.33)$$

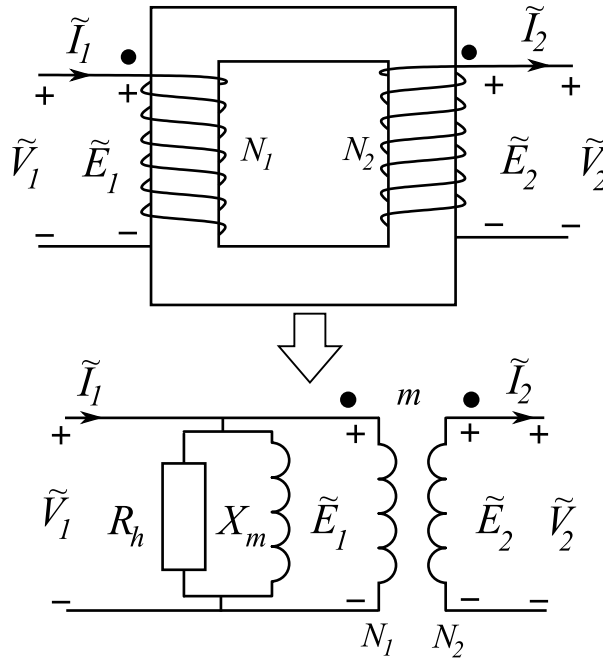
El primer término del lado derecho de la ecuación corresponde a la corriente de magnetización  $I_m$  necesario para establecer el flujo mutuo  $\Phi$  del circuito entre las bobinas y se expresa con  $\Phi = L_m I_m$ . La reluctancia del circuito se relaciona a su vez con la inductancia mediante la ecuación (4.31):

$$L_m = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}. \quad (5.34)$$

El segundo término de la ecuación (5.33) relaciona la corriente de la  $I_2$  con la corriente  $I_1$  de acuerdo con la relación de transformación  $m = N_1/N_2$ . Ocurre aquí un fenómeno con consecuencias prácticas importantes para los transformadores: **cualquier incremento de la corriente creada por el secundario es la responsable de un aumento directo de la corriente de primario**. El modelo del transformador en este caso será una inductancia  $L_m$  en paralelo con un transformador ideal de relación  $m$ .

Examinamos ahora el funcionamiento en régimen de alterna. Las ecuaciones del transformador tal como las hemos establecidas se transforman en:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= j\omega \tilde{\Phi} = jL_m \omega \tilde{I}_m, \\ \tilde{I}_1 &= \tilde{I}_m + \frac{N_2}{N_1} \tilde{I}_2. \end{aligned} \quad (5.35)$$



**Figura 5.6** Equivalente eléctrico del circuito magnético del transformador, se incluye en el esquema la inductancia equivalente de corriente de magnetización y las pérdidas de hierro. Fijense ahora en las tensiones  $V_1$  y  $E_1$ , ya no son las mismas, sino que  $E_1$  representa la tensión de entrada del transformador ideal. Todavía este modelo no está completo, faltan por incluir otros elementos.

En resumen, la corriente de primario  $\tilde{I}_1$  en la ecuación (5.35) se descompone en dos partes:

- Una inductancia  $X_m = jL_m\omega$  de magnetización en desfase de  $\pi/2$  con respecto a la tensión  $\tilde{E}_1$ . Se llama corriente de magnetización del transformador  $\tilde{I}_m$  que hemos encontrado en la ecuación (4.33). Suele representar de 2 a 3% de la corriente de un transformador funcionando en régimen nominal.
- La segunda parte  $\frac{1}{m}\tilde{I}_2$ , corresponde a la corriente transformada por el transformador ideal de relación  $m$  y tendrá un desfase y modulo dependiente de la carga conectada al secundario.

Se va a completar el modelo ahora incluyendo las pérdidas que hemos despreciado por hipótesis sin por tanto afectar a las conclusiones anteriores.

### Pérdidas de hierro

Como se ha mencionado en la introducción, la relación entre la corriente y el flujo generado no es lineal. Se incluyen las pérdidas por histéresis y las pérdidas correspondientes a las corrientes de Foucault. Las pérdidas de hierro de un transformador engloban estos dos fenómenos. Globalmente, son proporcionales al

cuadrado de la tensión  $\tilde{E}_1$ . Recordamos la ecuación (4.35) hallada en el capítulo 4:

$$P_h = \frac{|\tilde{E}_1|^2}{R_h}.$$

Por la resistencia  $R_h$  circula una corriente  $\tilde{I}_h = \tilde{E}_1/R_h$  que influye en el rendimiento del transformador como se verá adelante. Estas pérdidas de hierro aparecen en el modelo equivalente del circuito magnético de la figura 5.6 donde se ha modelizado el circuito magnético incluyendo el efecto de la transformación, la inductancia de magnetización y las pérdidas de hierro. Estos dos elementos suelen llamar la rama en paralelo del modelo de transformador. El modelo está todavía incompleto, faltan por incluir otros dos efectos importantes que influyen el rendimiento de la transformación.

#### Pérdidas de cobre

Las pérdidas de cobre se representan como dos resistencias en serie de valor  $R_1$  y  $R_2$  para el primario y el secundario. Representan la resistencia del cobre de los devanados, que pueden llegar a tener varios kilómetros de hilos conductores. Las pérdidas son proporcionales al cuadrado de la corriente ( $P = RI^2$ ) y se trata de una energía que se transforma en calor. Las resistencias aparecen en el esquema de la figura 5.8, se colocan en serie con la bobina para simbolizar la resistencia de la bobina de primario y de secundario. Las resistencias de pérdidas de cobre provocan caídas de tensión en la entrada y la salida del transformador. Como consecuencia, la tensión de salida será inferior a la tensión asignada.

#### Pérdidas de flujo magnético

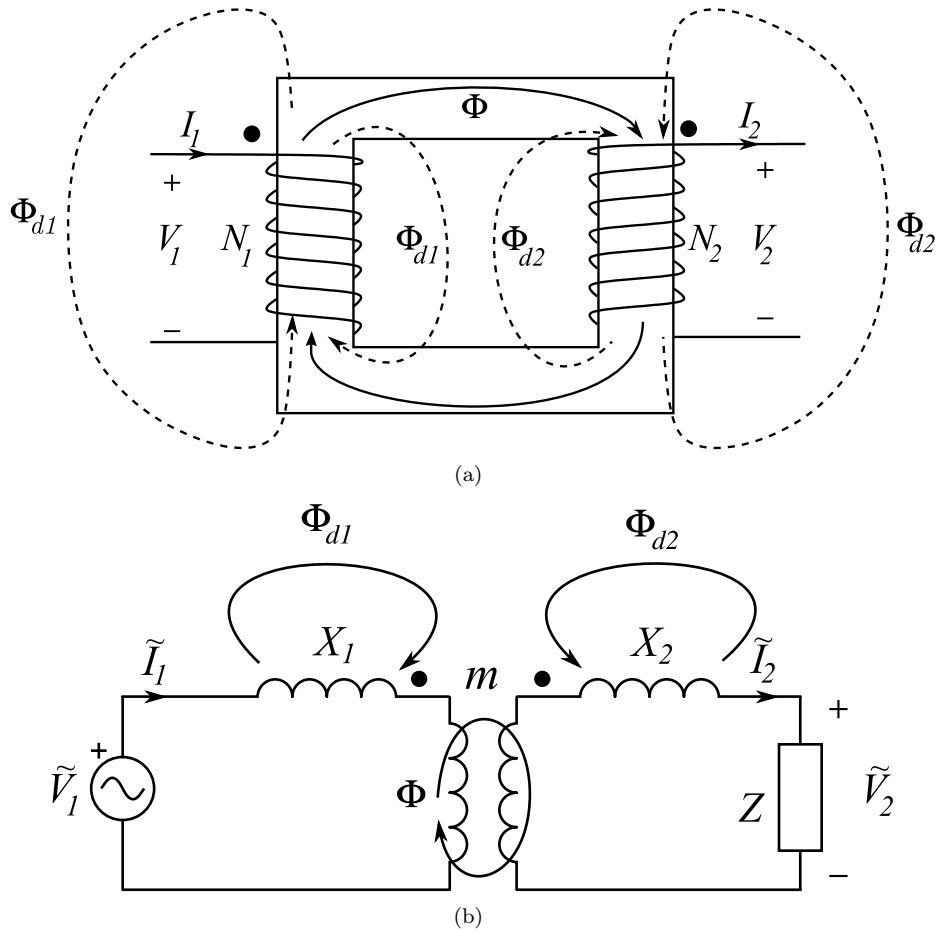
El acoplamiento magnético del circuito no es perfecto, no todo el flujo generado circula como debería en el circuito sino que una parte se disipa. El flujo en el primario y en el secundario se pueden descomponer como:

$$\Phi_1 = \Phi + \Phi_{d1} \quad (5.36)$$

$$\Phi_2 = \Phi + \Phi_{d2} \quad (5.37)$$

es la suma de un flujo común  $\Phi$  a ambos lados más un flujo de dispersión  $\Phi_{di}$  al primario y al secundario. Este flujo de dispersión corresponde al campo magnético que se dispersa en el aire dado que el circuito magnético no canaliza todo el flujo magnético. Comparando el circuito magnético con un tubo llevando una corriente de agua, las pérdidas de flujo serían equivalente a unas fugas de agua del tubo. En la figura 5.7 se ilustran de manera gráfica las pérdidas de flujo del transformador. El flujo común es el que participa a la transformación de la energía. Para calcular las tensiones inducidas del transformador se debe calcular en un





**Figura 5.7** (a) Pérdidas de flujo en el aire, una parte del flujo común  $\phi$  a los dos núcleos se desvía hacia el aire y no participa a la transformación. Estas líneas de campo se cierran sobre si mismas pero no participan a la conversión. (b) Estas pérdidas de flujo se traduce en una inductancia suplementaria en el esquema equivalente del transformador

primer paso la derivada con respecto al tiempo de las ecuaciones (5.36)-(5.37):

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\Phi_{d1}}{dt} \tag{5.38}$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\Phi_{d2}}{dt} \tag{5.39}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $N_1$  y la segunda por  $N_2$  se obtiene la expresión de las tensiones:

$$V_1 = E_1 + V_{\Phi_{d1}} \tag{5.40}$$

$$V_2 = E_2 + V_{\Phi_{d2}} \tag{5.41}$$

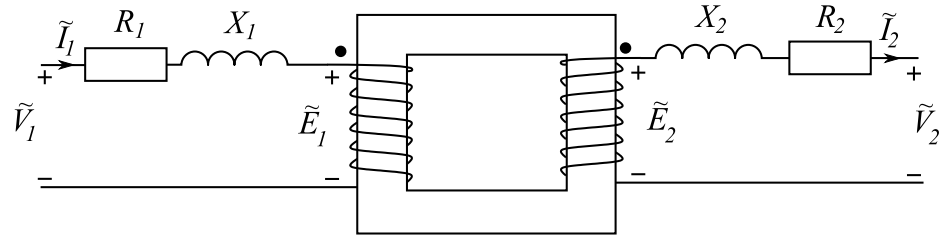


Figura 5.8 Transformador con las pérdidas de cobre y las pérdidas de flujo magnético.

Las pérdidas de flujo serán entonces equivalentes a una caída de tensión en el circuito del primario y del secundario. Esta caída de tensión se debe a la autoinducción de este flujo de dispersión en las bobinas de primario y de secundario. De acuerdo con la definición de la inductancia se puede definir una inductancia equivalente responsable de este flujo tal que:

$$V_{\Phi_{d1}} = L_{d1} \frac{dI_1}{dt} = N_1 \frac{\Phi_{d1}}{dt} \quad (5.42)$$

$$V_{\Phi_{d2}} = L_{d2} \frac{dI_2}{dt} = N_2 \frac{\Phi_{d2}}{dt} \quad (5.43)$$

Para un transformador en régimen sinusoidal, se incluye en serie una impedancia compleja equivalente de pérdida de flujo al primario y al secundario:

$$X_1 = jL_{d1}\omega \quad (5.44)$$

$$X_2 = jL_{d2}\omega \quad (5.45)$$

Estas impedancias producirían un flujo magnético equivalente a las pérdidas de flujo sin participar al transporte de energía del primario al secundario. Su efecto es de reducir el voltaje de salida y empeorar las prestaciones del sistema. Las pérdidas de tensión en corriente alterna en estas bobinas son:

$$\tilde{V}_{\Phi_{d1}} = X_1 \tilde{I}_1 \quad (5.46)$$

$$\tilde{V}_{\Phi_{d2}} = X_2 \tilde{I}_2 \quad (5.47)$$

Aparecen estas dos impedancias en la figura 5.8.

### Modelo completo

Los cuatro elementos de pérdidas (cobre y flujo) se encuentran en el esquema de la figura 5.8. Se han extraído del núcleo hasta obtener en el centro solo un circuito acoplado magnéticamente. Este circuito se sustituye por el modelo anterior de la figura 5.6, a saber una inductancia  $X_m$  en paralelo con una resistencia  $R_h$  junto al transformador ideal.

Haciendo una síntesis de todos estos efectos se obtiene el modelo del transformador completo en la figura 5.9. Se conserva en el centro el transformador ideal pero se le ha añadido los distintos efectos del circuito alrededor. Las propiedades

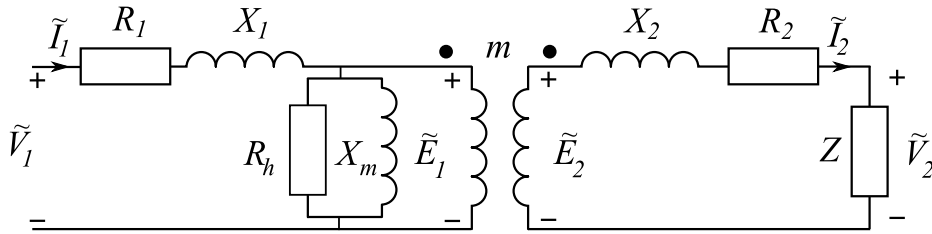
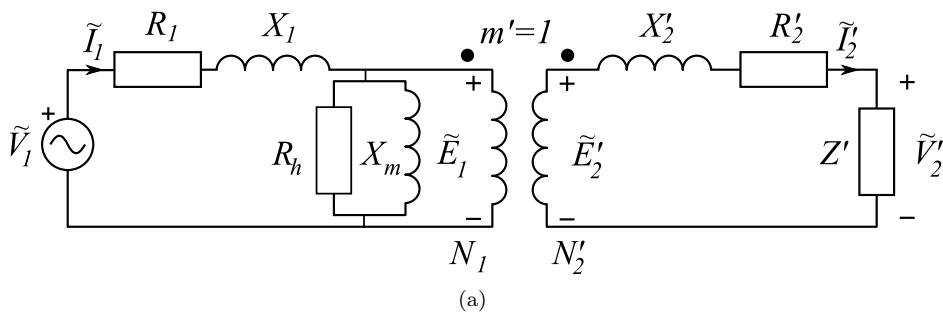
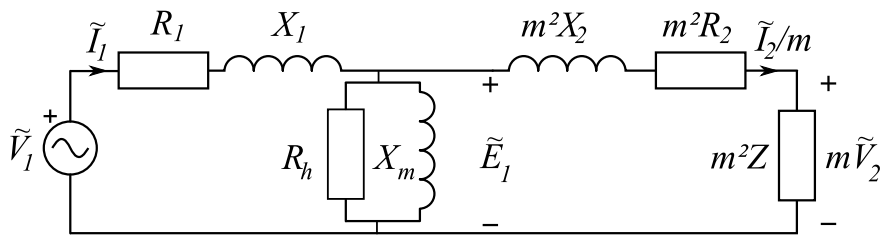


Figura 5.9 Esquema equivalente completo de un transformador real con una carga  $Z$ .



(a)



(b)

Figura 5.10 (a) Esquema de un transformador real reducido. (b) Esquema equivalente de un transformador reducido al primario.

del transformador ideal enunciadas antes se conservan, es decir:  $E_1/E_2 = m$ . Sin embargo conviene recordar aquí, que la relación de transformación  $\tilde{V}_1/\tilde{V}_2 = m$  **no es válida** cuando se tienen en cuenta los defectos del transformador.

### 5.2.2 Circuito equivalente de un transformador

Se ha estudiado en un apartado anterior como una carga  $Z$ , visto desde el primario, se podía transformar en una nueva carga de valor  $m^2 Z$ , con  $m$  la relación de transformación. Se va a proceder a las mismas operaciones pero esta vez incluyendo los elementos del transformador real. Para obtener el circuito equivalente es preciso hacer una operación de reducción del transformador. Esta operación consiste en hacer desaparecer el transformador ideal, suponiendo un nuevo número de espiras al secundario ficticio  $N'_2$  igual al número de espiras

del primario  $N_1$ . Aparecen entonces en el secundario tensiones e impedancias distintas que llamaremos:  $\tilde{E}'_2, \tilde{V}'_2, \tilde{I}'_2, X'_2, R'_2$ , etc.

Con este artificio se pueden escribir todas las tensiones y corrientes en función de la relación de transformación  $m$ . Por ejemplo, para la tensión del transformador se deduce:

$$\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}'_2} = \frac{N_1}{N'_2} = 1 \quad (5.48)$$

la relación de transformación  $\tilde{E}_1 = m\tilde{E}_2$  sigue siendo válida y se deduce:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}'_2 = m\tilde{E}_2 \quad (5.49)$$

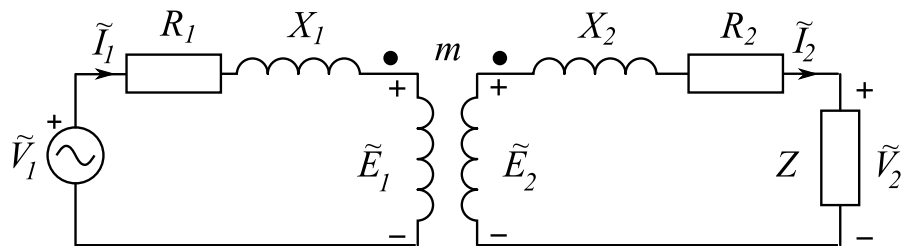
En la figura 5.10(a) se muestra un equivalente del transformador con la nueva relación de número de espiras. Siguiendo el mismo razonamiento que las tensiones se obtienen todas las impedancias y cantidades equivalentes reducidas al secundario:

$$\begin{aligned} \tilde{E}'_2 &= m\tilde{E}_2 \\ \tilde{V}'_2 &= m\tilde{V}_2 \\ \tilde{I}'_2 &= \tilde{I}_2/m \\ Z'_2 &= m^2 Z_2 \\ R'_2 &= m^2 R_2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

El circuito equivalente **visto desde el primario** del transformador permite hacer cálculos y diseños usando la teoría de circuitos. Ahora el transformador consiste en una red de elementos pasivos y se puede calcular su impedancia equivalente. El esquema equivalente reducido se puede ver en la figura 5.10.(b) donde ha desaparecido el transformador de relación  $m' = 1$ . Nótese que todas las impedancias situadas a la derecha del transformador ideal se multiplican por  $m^2$ .

### Ejercicio 5.2

Se dispone de un transformador de distribución monofásico representado en la figura siguiente:



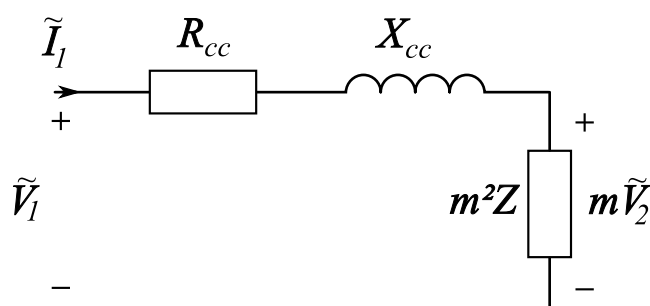
La potencia asignada es de 40kVA y las tensiones nominales son 10kV/230V eficaces con una frecuencia de  $f = 50\text{Hz}$ . Los parámetros equivalentes del transformador son los siguientes: las resistencias equivalentes de cobre son

$R_1 = 5\Omega$  y  $R_2 = 2,62m\Omega$ . Las inductancias de pérdidas de flujo al primario y al secundario son  $X_1 = j10\Omega$  y  $X_2 = j5,3m\Omega$ .

- Determinar la tensión de secundario sabiendo que modulo de la impedancia de la carga es  $|Z| = 1,4\Omega$  con un factor de potencia en atraso de 0,7.
- Determinar el factor de potencia total del dispositivo.
- Calcular la caída de tensión  $\Delta V$  debida a los defectos del transformador.
- ¿Cual es la potencia disipada en las resistencias de cobre?

### Solución del ejercicio 5.2

a) Para empezar este problema conviene primero representar el transformador y su modelo equivalente así como se enseña en la figura siguiente:



En el esquema equivalente se ha definido la impedancia  $R_{cc}$  y  $X_{cc}$  de la siguiente forma:

$$R_{cc} = R_1 + m^2 R_2 \quad (5.51)$$

$$X_{cc} = X_1 + m^2 X_2 \quad (5.52)$$

la relación de transformación es:

$$m = \frac{V_1}{V_2} = \frac{10 \cdot 10^3}{230} = 43,4 \quad (5.53)$$

Por lo tanto la impedancias equivalentes anteriores valen:

$$R_{cc} = 5 + 43,4^2 \cdot 2,62 \cdot 10^{-3} \simeq 10\Omega \quad (5.54)$$

$$X_{cc} = j10 + j43,4^2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-3} \simeq j20\Omega \quad (5.55)$$

La carga tiene un factor de potencia en atraso, significa que la corriente está detrás de la tensión y por lo tanto la carga es inductiva. El ángulo es  $\theta = \arccos(0,7) = 45,5^\circ$  y la carga tiene la expresión siguiente:

$$Z = 1,4 \angle 45,5^\circ \Omega \quad (5.56)$$

Para determinar el valor de la corriente  $\tilde{I}_1$  hay que aplicar la segunda ley de Kirchhoff al circuito de la figura anterior:

$$\tilde{V}_1 = R_{cc}\tilde{I}_1 + X_{cc}\tilde{I}_1 + m^2 Z \tilde{I}_1 = (R_{cc} + X_{cc} + m^2 Z)\tilde{I}_1 \quad (5.57)$$

La tensión es  $\tilde{V}_1 = 10 \cdot 10^3 \angle 0^\circ \text{V}$  y se despeja la corriente  $\tilde{I}_1$ :

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}_1}{R_{cc} + X_{cc} + m^2 Z} = \frac{10 \cdot 10^3}{10 + j20 + 43,4^2 \cdot 1,4 \angle 45,5} = 3,76 \angle -45,7^\circ \text{A} \quad (5.58)$$

Ahora podemos determinar el valor de la tensión de secundario, a partir de la figura del transformador reducido se deduce:

$$m\tilde{V}_2 = m^2 Z \tilde{I}_1 \quad (5.59)$$

La tensión  $\tilde{V}_2$  vale entonces:

$$\tilde{V}_2 = m Z \tilde{I}_1 = 43,4 \cdot 1,4 \angle 45,5 \cdot 3,76 \angle -45,6 = 228,4 \angle -0,1^\circ \text{V} \quad (5.60)$$

La tensión eficaz es cercana a la tensión nominal de 230V.

b) El factor de potencia total del sistema es el coseno de la diferencia del ángulo entre tensión y corriente de primario:

$$fp = \cos(0 - (-45,6)) = \cos(45,6) = 0,69 \quad (5.61)$$

c) La caída de tensión en las resistencias de cobre y las inductancias de pérdida de flujo se puede calcular como:

$$\Delta V = (R_{cc} + X_{cc}) \tilde{I}_1 = (10 + j20) 3,76 \angle -45,6^\circ = 84,0 \angle 17,8^\circ \quad (5.62)$$

Hay una caída de tensión de 84V en módulo (referida al primario) en los elementos de pérdidas del transformador.

d) La potencia disipada en las resistencias equivalentes de cobre es:

$$P_c = |\tilde{I}_1|^2 R_{cc} = 10(3,76)^2 = 141,3 \text{W} \quad (5.63)$$

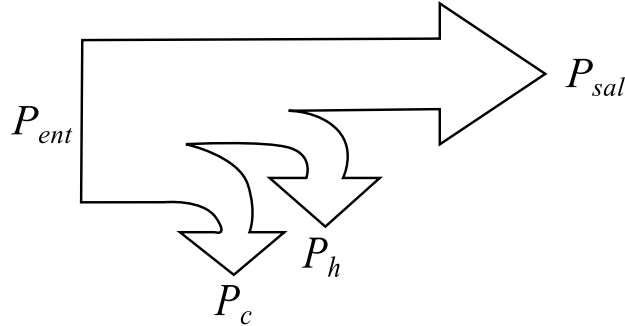
Se pierden 141,3 W por disipación en el transformador.

### 5.2.3 Potencia y rendimiento de un transformador

El rendimiento de un transformador se expresa con la relación entre la potencia activa a la entrada y la potencia activa a la salida:

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \quad (5.64)$$

Es un número inferior a 1 que nos indica la eficiencia del sistema. Cuando este número se acerca a uno, el transformador se puede considerar ideal, convierte la energía sin desperdicios. En los transformadores de potencia modernos los rendimientos son cercanos al 99 % para un amplio rango de régimen de funcionamiento.



**Figura 5.11** Flujo de potencia en el transformador, la potencia de entrada se encuentra a la izquierda y la potencia de salida a la derecha. Se deriva en el camino las diversas pérdidas del transformador. Son las pérdidas de hierro y de cobre.

Para un transformador la potencia activa de salida depende de la carga  $Z = |Z|\angle\varphi$ . Esta potencia se escribe como:

$$P_{sal} = |\tilde{V}_2||\tilde{I}_2| \cos(\varphi_2) = |Z||\tilde{I}_2|^2 \cos \varphi \quad (5.65)$$

y la potencia de entrada como:

$$P_{ent} = |\tilde{V}_1||\tilde{I}_1| \cos(\varphi_1) \quad (5.66)$$

con  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  los desfases entre tensión y corriente a la entrada y salida respectivamente. Los desfases de las tensiones de salida y de entrada son distintos debidos a los defectos del transformador, hay que tener cuidado a la hora de calcularlos. El rendimiento se calcula con la razón de estas dos potencias:

$$\eta = \frac{|\tilde{V}_2||\tilde{I}_2| \cos(\varphi_2)}{|\tilde{V}_1||\tilde{I}_1| \cos(\varphi_1)} \quad (5.67)$$

Las diversas pérdidas de potencia activa del transformador se encuentran modelizadas en las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_h$ . Son las pérdidas de cobre  $P_c$  y las pérdidas de hierro  $P_h$  las potencias que se disipan en el transformador. Una representación útil para entender la relación entre potencias aparece en la figura 5.11, en la cual entra la potencia  $P_{ent}$  a la izquierda y sale a la derecha  $P_{sal}$ . Las pérdidas se simbolizan por flechas que se desvian entre los dos extremos. La potencia de entrada se puede descomponer como la suma de la otras tres potencias:

$$P_{ent} = P_{sal} + P_c + P_h = |\tilde{V}_2||\tilde{I}_2| \cos(\varphi_2) + P_{co} + P_h \quad (5.68)$$

Sustituyendo, el rendimiento se puede expresar también como:

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{sal} + P_c + P_h} = \frac{|\tilde{V}_2||\tilde{I}_2| \cos(\varphi_2)}{P_c + P_h + |\tilde{V}_2||\tilde{I}_2| \cos(\varphi_2)} \quad (5.69)$$

Con  $P_c$  y  $P_h$  las pérdidas de cobre y de hierro. El rendimiento del transformador depende entonces de la pérdidas de cobre y hierro así como de las potencia de

salida.

Es útil calcular la corriente de secundario necesaria para que el rendimiento del transformador sea el óptimo. Para calcular el valor de esta corriente de carga conviene calcular la derivada del rendimiento con respecto a la corriente  $I_2$ :

$$\frac{\partial \eta}{\partial I_2} = \frac{V_2 \cos \phi_2}{(V_2 \cos \phi_2 + R_c I_2 + P_h / I_2)^2} (R_c - P_h / I_2^2) = 0 \quad (5.70)$$

Por lo que el único término no nulo es:

$$R_c - \frac{P_h}{I_2^2} = 0 \quad (5.71)$$

Las pérdidas de hierro deben de ser iguales a las pérdidas de cobre para obtener el rendimiento óptimo, es decir:  $R_c I_2^2 = P_h$ . No es siempre fácil obtener este punto de funcionamiento, en la mayoría de los casos se calcula el rendimiento para varias corrientes de secundario, es decir para varias cargas útiles del transformador.

Un parámetro útil para realizar cálculos rápidamente de transformadores es el **índice de carga  $C$** . Se trata de la relación entre la corriente de secundario y la corriente nominal:

$$C = \frac{I_2}{I_{2n}} \simeq \frac{I_1}{I_{1n}} \quad (5.72)$$

Este índice suele ser inferior a uno pero en casos excepcionales podría ser superior a la unidad, caso en el cual el transformador tiene una carga superior a la potencia nominal. Usando este índice podemos reescribir la expresión del rendimiento:

$$\eta = \frac{C |\tilde{V}_2| |\tilde{I}_{2n}| \cos(\varphi_2)}{C |\tilde{V}_2| |\tilde{I}_{2n}| \cos(\varphi_2) + P_h + P_c} \quad (5.73)$$

Los factores  $C$  e  $I_{2n}$  pueden servir de factor de diseño.

### Ejercicio 5.3

Se quiere hallar el rendimiento de un transformador monofásico de potencia 10 kVA y de tensiones nominales 2.3kV/230V eficaces. La resistencia equivalente de primario es  $R_1 = 4\Omega$  y de secundario  $R_2 = 0,04\Omega$ . Las inductancias equivalentes de pérdidas de flujo tienen como valor numérico:  $X_1 = j4\Omega$  y  $X_2 = j0,04\Omega$ . Las pérdidas por histéresis y por corriente de Foucault son de 120W en funcionamiento nominal. Se conecta al transformador una carga  $Z = 5,3\Omega$  resistiva consumiendo 10kW.

- Calcular  $\tilde{I}_1$  e  $\tilde{I}_2$  las corrientes de primario y secundario (despreciar la rama de corriente de magnetización y de pérdidas de hierro).
- Calcular las pérdidas de cobre y hallar el rendimiento.



**Solución del ejercicio 5.3**

a) Para calcular  $\tilde{I}_2$  se usa el valor de la carga  $Z$  (resistiva) así como su consumo. La potencia es:

$$P = Z|\tilde{I}_2|^2$$

Por lo tanto:

$$|\tilde{I}_2| = \sqrt{\frac{P}{Z}} = \sqrt{\frac{10000}{5,3}} = 43,43A$$

La relación de transformación se deduce a partir de los valores nominales del transformador:

$$m = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2300}{230} = 10$$

La corriente  $\tilde{I}_1$  se calcula ahora fácilmente (despreciando la rama en paralelo del transformador):

$$|\tilde{I}_1| \simeq \frac{|\tilde{I}_2|}{m} = 4,34 A$$

Tomando  $\tilde{I}_1$  como referencia de fase su expresión numérica es  $\tilde{I}_1 = 4,34\angle 0 A$  e  $\tilde{I}_2 = 43,4\angle 0 A$ .

b) Las pérdidas de cobre se calculan a partir de las corrientes precedentes:

$$P_c = R_1|\tilde{I}_1|^2 + R_2|\tilde{I}_2|^2 = 4|4,34|^2 + 0,04|43,43|^2 = 150W$$

El rendimiento se expresa en función de la potencia de salida y de la pérdidas como:

$$\eta = \frac{P_s}{P_s + P_c + P_h} = \frac{10000}{10000 + 150 + 120} = 0,97 \quad (5.74)$$

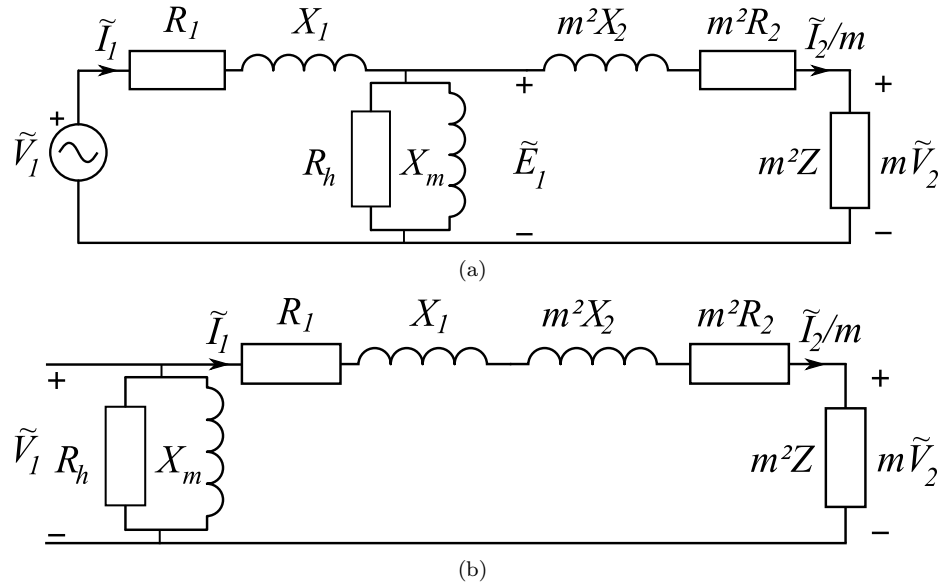
El rendimiento del transformador es de  $\eta = 0,97$ .

Notese que en este ejercicio no se han necesitado  $X_1$  y  $X_2$  debido a la aproximación del enunciado. A partir de las corrientes  $\tilde{I}_1$  e  $\tilde{I}_2$  se han obtenido las respuestas del ejercicio.

**5.2.4 Hipótesis de Kapp, modelo aproximado del transformador**

El esquema equivalente del transformador que se dedujo antes no resulta práctico a la hora de calcular las caídas de potencial en el transformador. En concreto las corrientes de magnetización y las pérdidas de hierro hacen más difícil el cálculo de las tensiones. El modelo aproximado del transformador permite acelerar estos cálculos. A partir del modelo reducido de la figura 5.12 (a) se halla la relación entre  $\tilde{V}_1$  e  $\tilde{I}_1$  en función de la carga  $Z$ . Aplicando la ley de Kirchhoff a la malla principal:

$$\tilde{V}_1 - (R_1 + X_1)\tilde{I}_1 - (m^2 R_2 + m^2 X_2)\frac{\tilde{I}_2}{m} - m\tilde{V}_2 = 0 \quad (5.75)$$



**Figura 5.12** (a) Modelo completo equivalente del transformador reducido al primario. (b) Esquema equivalente aproximado del transformador con las hipótesis de Kapp. La rama de pérdidas de hierro y de corriente de magnetización se coloca a la entrada del esquema. Este cambio permite simplificar mucho los cálculos numéricos.

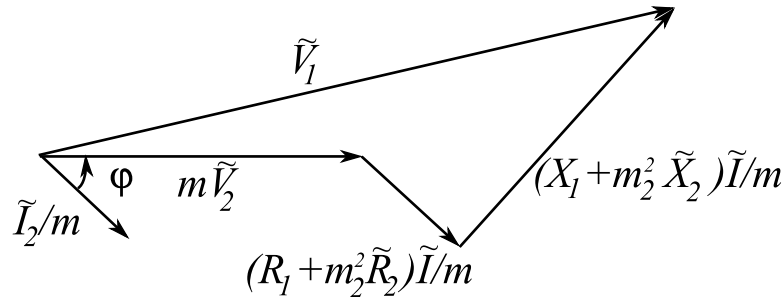
Para poder determinar una relación entre la corriente y la tensión del primario, se debe tener en cuenta la deriva de corriente debida a la resistencia de hierro e impedancia de magnetización.

Una simplificación para resolver este problema ha sido formulada por Kapp, consiste en considerar que las caídas de tensión en  $R_1$  y  $X_1$  son despreciable frente a la tensión  $\tilde{E}_1$ <sup>3</sup>. En este caso, no hay mucha diferencia en colocar las impedancias  $R_h$  y  $X_m$  a la entrada del circuito. Las dos corrientes de hierro y de magnetización no serán muy distintas si las calculamos con el modelo exacto o el modelo aproximado. Esta hipótesis permite simplificar mucho los cálculos.

El circuito equivalente del transformador, usando la hipótesis, se puede observar en la figura 5.12. Como cualquier aproximación simplificadora, sólo es válida para un cierto margen de funcionamiento. Es decir, si las pérdidas de cobre y de flujo son demasiadas importantes no se pueden despreciar las caídas de tensión. Siguiendo el nuevo esquema equivalente de la figura 5.12 se puede escribir la ecuación del circuito de manera más sencilla:

$$\tilde{V}_1 - (R_1 + X_1 + m^2R_2 + m^2X_2 + m^2Z)\frac{\tilde{I}_2}{m} = 0 \quad (5.76)$$

<sup>3</sup> Dicho de otro modo, equivale a considerar  $\tilde{E}_1 \simeq \tilde{V}_1$ .



**Figura 5.13** Esquema de fasores del transformador equivalente con las hipótesis de Kapp para una carga con un factor de potencia en atraso. Las pérdidas han sido exageradas para poder apreciar el triángulo de Kapp.

O lo que es equivalente:

$$\tilde{V}_1 - (R_1 + X_1 + m^2 R_2 + m^2 X_2) \frac{\tilde{I}_2}{m} = m\tilde{V}_2 \quad (5.77)$$

con una carga  $Z = |Z|\angle\varphi$ . En la figura 5.14, el esquema del transformador aparece con las distintas pérdidas agrupadas para simplificar el análisis del circuito. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} R_{cc} &= R_1 + m^2 R_2 \\ X_{cc} &= X_1 + m^2 X_2 \\ Z_p &= R_h || X_m \end{aligned}$$

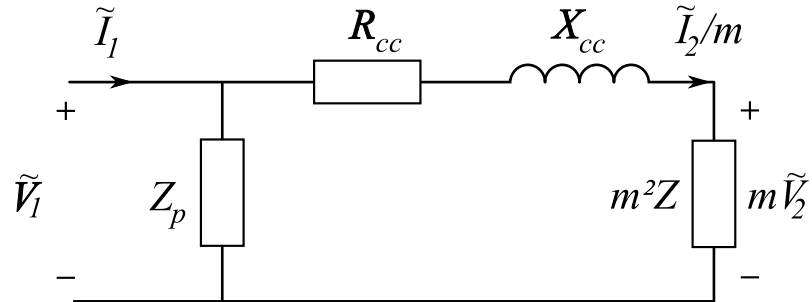
En este esquema el transformador aparece como un cuadripolo con tres elementos, si se lleva la simplificación hasta el extremo se puede definir una impedancia  $Z_{cc} = R_{cc} + X_{cc}$  para agrupar los elementos en serie. **¡El transformador aproximado se puede caracterizar con dos impedancias complejas!**

Otra representación útil consiste en representar las pérdidas en forma vectorial con fasores como en el ejemplo de la figura 5.13. Es una manera gráfica de apreciar las pérdidas en el transformador. En esta figura, el triángulo formado por las caídas de tensiones en las impedancias  $R_{cc}$  y  $X_{cc}$  se llama triángulo de Kapp, permite estimar las pérdidas de tensiones en el transformador. En el siguiente apartado se utiliza justamente este triángulo de Kapp para calcular la caída de tensión en el secundario debido a los distintos elementos del transformador.

### 5.2.5 Regulación de voltaje

En un transformador en plena carga, la tensión de salida difiere de la tensión de salida en vacío debido a las múltiples pérdidas de transformación. Cuando se alimenta el transformador con una tensión al primario  $\tilde{V}_{1n}$ , se define la caída de tensión en el transformador como:

$$\Delta V_2 = |\tilde{V}_{20}| - |\tilde{V}_2|, \quad (5.78)$$



**Figura 5.14** Esquema equivalente del transformador agrupando las diversas pérdidas del núcleo.

con  $|\tilde{V}_{20}|$  la tensión de secundario en vacío (también es la tensión nominal o asignada) y  $|\tilde{V}_2|$  el voltaje del secundario en plena carga. Para simplificar la notación se escriben a continuación los módulos de las tensiones sin la notación fasorial, por ejemplo:  $|\tilde{V}_2| = V_2$ . La diferencia de tensión anterior se suele expresar en porcentaje de la tensión en vacío:

$$\varepsilon = \frac{V_{20} - V_2}{V_{20}} \quad (5.79)$$

Esta diferencia de voltaje se puede igualmente expresar en función del voltaje de primario nominal  $V_{1n}$ :

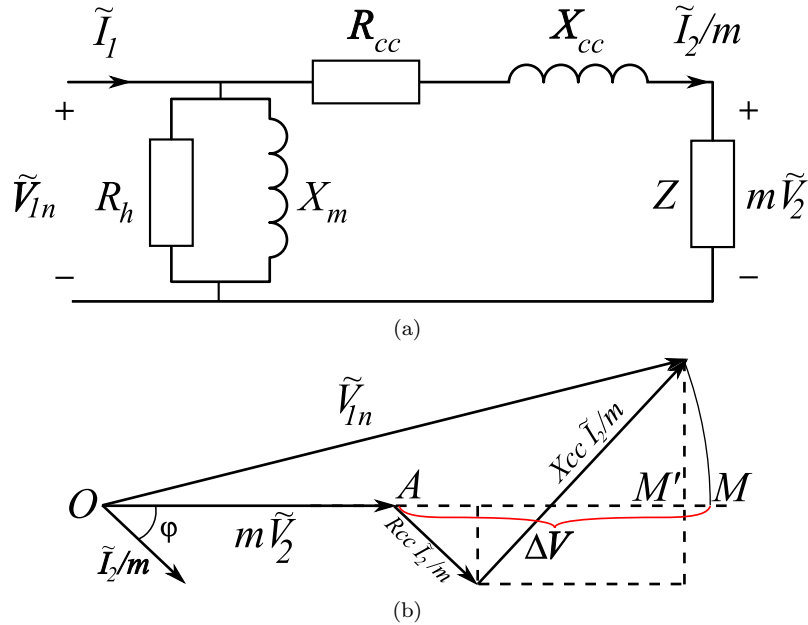
$$\varepsilon = \frac{V_{1n} - mV_2}{V_{1n}} \quad (5.80)$$

La caída de tensión se puede aproximar con los parámetros del circuito equivalente de la figura 5.15 (a), donde se han aplicado las hipótesis de Kapp para simplificar el circuito. El diagrama de fasores de este circuito se encuentra en la figura 5.15 (b) con un transformador en plena carga y con una diferencia de fase entre tensión y corriente de secundario  $\varphi$ . Este desfase se debe a la carga  $Z$  conectada. La caída de tensión  $\Delta V$  se encuentra tomando el arco con centro que prolonga  $\tilde{V}_1$  hasta la horizontal definida por el fasor  $\tilde{V}_2$ . El módulo segmento  $AM$  representa la caída de tensión entre  $V_{1n}$  y  $mV_2$ . La expresión analítica de esta caída no es obvia. Sin embargo, si tomamos la proyección ortogonal de  $V_1$  sobre el eje horizontal cuyo punto resultante es  $M'$ , se obtiene el segmento  $AM'$  que representa una buena aproximación de la caída de tensión  $\Delta V$ . Este segmento  $AM'$  se expresa en función de las caídas en  $R_{cc}$  y  $X_{cc}$  usando un poco de trigonometría:

$$\Delta V \simeq AM' = R_{cc} \left| \frac{\tilde{I}_2}{m} \right| \cos \varphi + |X_{cc}| \left| \frac{\tilde{I}_2}{m} \right| \sin \varphi \quad (5.81)$$

La regulación de voltaje se expresa en función de los parámetros del transformador:

$$\varepsilon \simeq \frac{R_{cc} |\tilde{I}_2| \cos \varphi + |X_{cc}| |\tilde{I}_2| \sin \varphi}{mV_{1n}} = C |\tilde{I}_{2n}| \frac{R_{cc} \cos \varphi + |X_{cc}| \sin \varphi}{mV_{1n}} \quad (5.82)$$



**Figura 5.15** (a) Esquema equivalente aproximado de un transformador. (b) Diagrama de fasores equivalente, en este diagrama aparece la caída de tensión debida a las pérdidas de flujo y de cobre.

Este parámetro es importante en las máquinas de alta potencias para reducir las eventuales corrientes de cortocircuito, llamadas también corrientes de falta<sup>4</sup>. Para aclarar este punto, es necesario volver al esquema equivalente del transformador de la figura 5.15 (a). En caso de falta en el secundario (es decir un corto circuito en vez de la impedancia  $Z$ ), la corriente de corto circuito sería:

$$|I_{cc}| = \frac{|V_{1n}|}{|R_{cc} + X_{cc}|} \quad (5.83)$$

con  $R_{cc}$  las resistencias de cobre equivalente y  $X_{cc}$  las pérdidas de flujo equivalente. Esta corriente con el voltaje nominal en la entrada es muy elevada y peligrosa para la máquina. El dispositivo no puede aguantar esta corriente mucho tiempo sin destruirse. Por otro lado los mecanismos de protección son caros y el precio crece con la corriente máxima de protección. Una solución sencilla para reducir esta corriente de falta consiste en aumentar las caídas de tensión. En máquinas de alta potencia se introducen pérdidas de flujo adicionales para aumentar el valor de  $X_{cc}$ . Al aumentar este valor, disminuye  $I_{cc}$  y aumentan las caídas de tensión como lo demostrado en la fórmula (5.81) a coste de un rendimiento más bajo.

<sup>4</sup> Una corriente se produce cuando una fase entra en contacto con otra fase o con la tierra.

### Ejercicio 5.4

Hallar la regulación de voltaje en % del siguiente transformador: voltajes nominales 2kV/10kV, potencia nominal 40kVA, cargado a 80 % de la carga nominal, factor de potencia de la carga 0.8 en atraso. Impedancia equivalente  $R_{cc} = 1\Omega$  y  $X_{cc} = j2\Omega$ .

### Solución del ejercicio 5.4

En este ejercicio la falta de datos sobre la carga no permite realizar un cálculo exacto. Podemos hallar sin embargo una buena aproximación usando las tensiones y corrientes nominales.

Para calcular la regulación de voltaje, primero se calcula la corriente que circula por la carga. El módulo de la corriente nominal al secundario vale:

$$|\tilde{I}_{2n}| = \frac{|\tilde{S}_n|}{|\tilde{V}_{2n}|} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} = 4 \text{ A}$$

Dado que el transformador esta cargado al 80 %, la corriente al secundario en este funcionamiento es:

$$|\tilde{I}_2| = 4 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ A}$$

El ángulo del factor de potencia por su parte es:  $\varphi = \arccos(0,8) = 37^\circ$  y la relación de transformación es:  $m = 2/10 = 0,2$ . Con estos elementos se calcula la regulación de voltaje:

$$\varepsilon \simeq \frac{3,2 \cdot 0,8 + 2 \cdot 3,2 \cdot 0,6}{0,2 \cdot 2000} = 0,016$$

Es decir una regulación de voltaje de aproximadamente 1.6 %.

## 5.3 Pruebas de un transformador

Para el diseñador es importante tener una información sobre las características internas de un transformador. Es posible identificar los parámetros de un transformador real a partir de dos pruebas. La primera es la prueba en circuito abierto, es decir sin carga al secundario.

### 5.3.1 Pruebas en circuito abierto

El transformador en circuito abierto (en vacío) sigue consumiendo energía por el propio funcionamiento del circuito magnético. A partir de los modelos y de las medidas se pueden identificar los parámetros responsables de estas pérdidas. Estas pérdidas se llaman **pérdidas de vacío** (“no-load loss” en inglés) y corresponden a las pérdidas que no dependen de la carga sino únicamente del

transformador.

En la figura 5.16 se muestra un esquema del transformador en circuito abierto al secundario. Se aplica a la entrada del transformador una tensión  $V_1$  que debe de ser la tensión nominal de funcionamiento con el fin de obtener los parámetros para un régimen nominal. Sin embargo, para evitar riesgos durante el experimento, se puede alimentar el lado de baja tensión del transformador. Se obtendrán resultados idénticos. Para el análisis, se alimenta el primario con la tensión nominal.

Se miden la tensión y la corriente de primario con un amperímetro y un vatímetro mientras la potencia activa se mide al primario con un vatímetro. Se obtienen tres medidas:  $V_{1ca}$ ,  $I_{1ca}$  y  $P_{ca}$ .

Al secundario la corriente  $I_2$  es nula, no circula ninguna corriente en esta parte al no tener carga. Toda la corriente fluye entonces por la resistencia equivalente de las pérdidas de hierro  $R_h$  y la inductancia de magnetización  $X_m$ . Estas inductancias suelen tener un valor mucho más altos que las resistencias de los devanados  $R_1$  y de inductancia de pérdidas de flujo  $X_1$ . Se desprecian entonces las caídas de tensión en estos dos últimos elementos frente a las caídas de tensiones en  $R_h$  y  $X_m$ . El modelo del transformador se simplifica como muestra la figura 5.16 (b). Se identifica primero la impedancia equivalente del circuito:

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R_h} + \frac{1}{X_m}, \quad (5.84)$$

con  $Z_e$  la impedancia equivalente de este circuito. El ángulo de desfase entre la tensión  $V_1$  y la corriente  $I_1$  puede deducirse a partir de la definición de la potencia activa:

$$\cos \theta = \frac{P_{ca}}{V_{1ca} I_{1ca}} \quad (5.85)$$

$V_{1ca}$  y  $I_{1ca}$  se miden en valores eficaces con los aparatos. El ángulo de desfase tendrá como expresión:

$$\theta = \arccos\left(\frac{P_{ca}}{V_{1ca} I_{1ca}}\right), \quad (5.86)$$

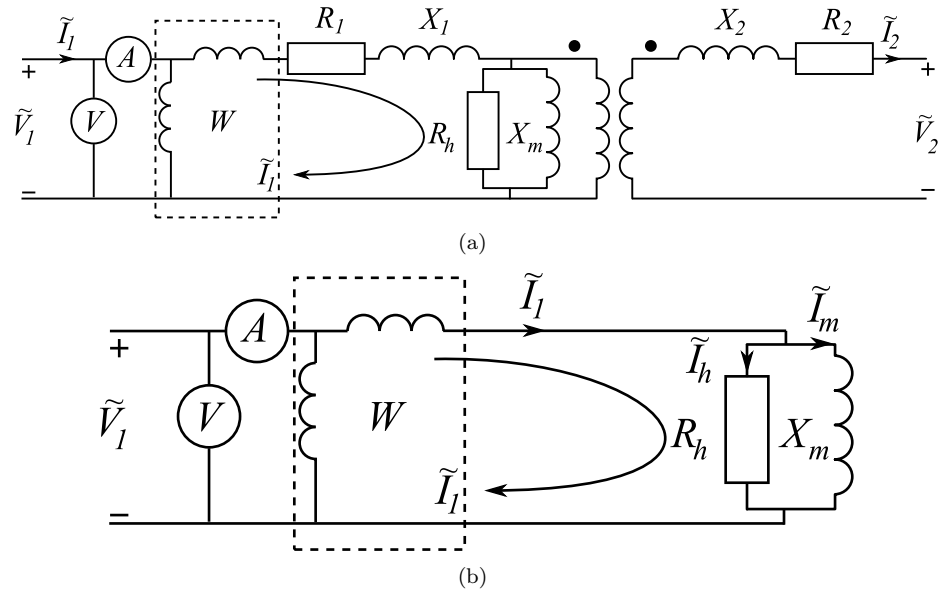
con  $\theta > 0$  Este ángulo corresponde también al ángulo de la impedancia  $Z_e$ :

$$Z_e = |Z_e| \angle \theta \quad (5.87)$$

Se puede determinar el módulo de este número complejo a partir de las medidas:

$$|Z_e| = \frac{|\tilde{V}_{1ca}|}{|\tilde{I}_{1ca}|}. \quad (5.88)$$

Se disponen ahora de todos los elementos para identificar a  $R_h$  y  $X_m$ , siendo  $R_h$  un número real y  $X_m$  un complejo basta con identificar la parte real y imaginaria



**Figura 5.16** Esquema de las pruebas de un transformador en circuito abierto. (a) El transformador en circuito abierto al secundario no tiene ninguna corriente al secundario, toda la corriente pasa por la rama en paralelo del transformador. (b) Modelo equivalente del transformador en vacío con los aparatos de medidas colocados para determinar los parámetros del ensayo.

de  $1/Z_e$  con los dos elementos, tenemos:

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R_h} + \frac{1}{X_m} = \frac{1}{|Z_e|} e^{-j\theta} = \frac{1}{|Z_e|} (\cos \theta - j \sin \theta). \quad (5.89)$$

Y por lo tanto:

$$R_h = \frac{|Z_e|}{\cos \theta} \quad (5.90)$$

$$X_m = j \frac{|Z_e|}{\sin \theta} \quad (5.91)$$

Otro modo de calcular la resistencia  $R_h$  consiste en descomponer la corriente  $I_1$  en dos corrientes  $I_h$  e  $I_m$  en la rama de la resistencia de pérdidas de hierro y de corriente de magnetización. La potencia se expresa como:

$$\tilde{S} = \tilde{V}_1 \tilde{I}_1^* = \tilde{V}_1 (\tilde{I}_h + \tilde{I}_m)^* = \tilde{V}_1 \tilde{I}_h^* + \tilde{V}_1 \tilde{I}_m^* \quad (5.92)$$

con la ley de Ohm en cada elemento se consigue:  $\tilde{V}_1^* = R_h \tilde{I}_h^*$  y  $\tilde{V}_1^* = X_m^* \tilde{I}_m^*$ . Sustituyendo en la ecuación de la potencia:

$$\tilde{S} = \frac{|\tilde{V}_1|^2}{R_h} + \frac{|\tilde{V}_1|^2}{X_m^*} = P_{ca} + \frac{|\tilde{V}_1|^2}{X_m^*} \quad (5.93)$$



La parte activa de la potencia (el primer término de cada miembro) permite hallar la resistencia  $R_h$ :

$$R_h = \frac{|\tilde{V}_1|^2}{P_{ca}} \quad (5.94)$$

### 5.3.2 Pruebas en cortocircuito

El segundo tipo de pruebas que se puede realizar para identificar los parámetros de un transformador son las pruebas en cortocircuito. Esta prueba permite identificar las **pérdidas de carga** (“load loss” en inglés) y dependen de la carga conectada al secundario.

En esta prueba, el secundario del transformador se conecta en cortocircuito. Como en el caso del ensayo en circuito abierto se dispone de un equipo de medidas que nos proporciona la tensión y corriente de primario, así como la potencia activa consumida a la entrada. El dispositivo experimental se puede observar en la figura 5.17. Ahora la corriente  $\tilde{I}_2$  fluye en el secundario al tener un circuito cerrado en la salida. La tensión de entrada se establece de tal manera que  $\tilde{I}_2$  sea la corriente nominal de funcionamiento con el fin de obtener los parámetros del transformador en su zona de funcionamiento normal.  $\tilde{V}_1$  debe reducirse considerablemente al tener un corto circuito a la salida, las corrientes pueden ser muy elevadas. En esta prueba solo bastan tres medidas:  $P_{cc}$ ,  $V_{1cc}$  e  $I_{1cc}$ .

Se conoce la relación de transformación de las corrientes para el transformador:  $I_2 = mI_1$ . Ahora, la corriente que fluye en la resistencia equivalente de pérdidas  $R_h$  y la inductancia de magnetización se pueden despreciar. La impedancia equivalente de estos dos elementos es muy alta frente a  $R_1$  y a las inductancias del secundario. Poquísima corriente se va a desviar por este camino. Después de unas transformaciones se puede llegar al circuito equivalente de la figura 5.17 (b). Existe una relación entre la corriente y la tensión del primario:

$$\tilde{V}_1 = (R_1 + X_1 + m^2 R_2 + m^2 X_2) \tilde{I}_1 = Z_e \tilde{I}_1. \quad (5.95)$$

Se define la impedancia equivalente  $Z_e$ :

$$Z_e = R_1 + X_1 + m^2 R_2 + m^2 X_2. \quad (5.96)$$

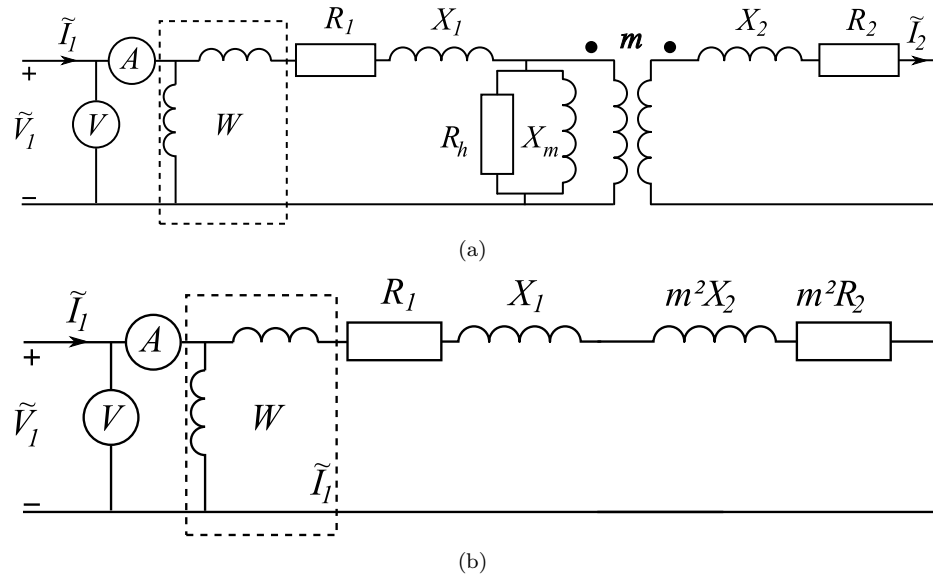
De manera idéntica a las pruebas en circuito abierto, el ángulo  $\theta$  entre la tensión y la corriente se determina con la fórmula:

$$\cos \theta = \frac{P_{cc}}{V_{1cc} I_{1cc}} \quad (5.97)$$

Por otro lado la relación entre la tensión y la corriente proporciona el módulo:

$$Z_e = \frac{|\tilde{V}_1|}{|\tilde{I}_1|} \angle \theta, \quad (5.98)$$

con  $\theta$  positivo, dado que el circuito es inductivo, a partir de las medidas se



**Figura 5.17** Esquema de las pruebas de un transformador en corto-circuito, (a) modelo completo, (b) modelo equivalente aproximado.

puede entonces identificar el módulo y el ángulo de la impedancia. La parte real e imaginaria de la impedancia  $Z_e$  se corresponde con los elementos constitutivos del circuito:

$$\Re(Z_e) = R_1 + m^2 R_2 = R_{cc} \quad (5.99)$$

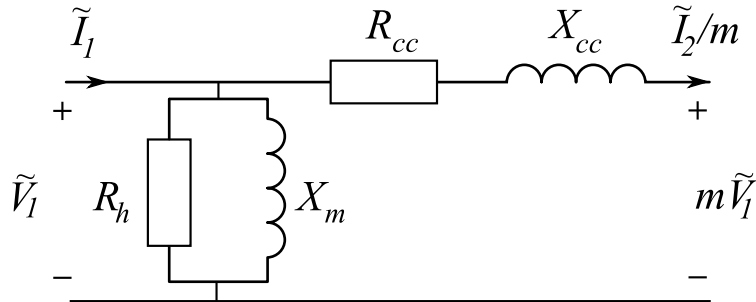
$$j\Im(Z_e) = X_1 + m^2 X_2 = X_{cc} \quad (5.100)$$

Por desgracia no se pueden separar la contribución del primario y del secundario en este caso, sin embargo, se obtiene una buena aproximación de las pérdidas de carga.

Con las medidas hechas en circuito abierto y en corto circuito se consigue un circuito equivalente del transformador aceptable. En la figura 5.18 se observa el circuito del transformador reducido al primario. Usando las hipótesis de Kapp se pueden pasar las pérdidas de hierro y la inductancia de magnetización al primario.

Los constructores suelen proporcionar algunos de los datos de estos ensayos. Los dos datos más importantes son:

- Las pérdidas en circuito abierto. Estas pérdidas son independientes de la carga, aparecen cuando el transformador se pone a funcionar. Se llaman a veces pérdidas “No Load losses”, es decir pérdidas sin carga.



**Figura 5.18** Esquema equivalente de un transformador con los parámetros obtenidos de las pruebas en circuito abierto y en corto circuito.

- La corriente de ensayo en vacío. Permite hallar junto con las pérdidas en circuito abierto el modelo de la rama en paralelo.
- Las pérdidas de corto-circuito. Miden las pérdidas de cobre del transformador cuando funciona a plena carga o en una fracción de la plena carga. Se llaman en inglés pérdidas “Load losses”, es decir pérdidas en carga.
- La tensión de corto-circuito. Con esta tensión y las pérdidas de carga se puede calcular la impedancia en serie del transformador.

Las pérdidas de corto circuito  $P_{cc}$  se miden para el régimen nominal del transformador. En una situación práctica, se halla la corriente de secundario usando el índice de carga del transformador tal que  $I_2 = CI_{2n}$ . Las pérdidas de cobre cuando el transformador está cargado se calculan como:

$$P_{co} = R_{cc} \left| \frac{I_2}{m} \right|^2 = R_{cc} \left| C \frac{I_{2n}}{m} \right|^2 = C^2 P_{cc}. \quad (5.101)$$

Es decir que las pérdidas de cobre de un transformador con un índice de carga  $C$  son una fracción de las pérdidas del ensayo en corto-circuito:

$$P_{co} = C^2 P_{cc}. \quad (5.102)$$

Permite así expresar el rendimiento en función de este parámetro  $C$  y de los datos de los ensayos:

$$\eta = \frac{C |\tilde{V}_2| |\tilde{I}_{2n}| \cos(\varphi_2)}{C |\tilde{V}_2| |\tilde{I}_{2n}| \cos(\varphi_2) + P_0 + C^2 P_{cc}}, \quad (5.103)$$

Siendo  $P_0$  la potencia del ensayo en vacío. Esta última fórmula permite hacer una estimación rápida del rendimiento y puede ser muy útil para un dimensionamiento rápido.

### Ejercicio 5.5

Se dispone de los siguientes resultados de un ensayo en vacío de un transformador de 20kVA y tensión nominal 2300/230V eficaces:

- Corriente de primario:  $I_{10} = 95,5\text{mA}$
- Potencia activa consumida:  $P_{10} = 176\text{W}$

Los ensayos del transformador en corto-circuito han dado los siguientes resultados:

- Tensión de primario:  $V_{1cc} = 73,7\text{V}$
- Corriente de primario:  $I_{1cc} = 8,6\text{A}$ .
- Potencia activa consumida:  $P_{1cc} = 453\text{W}$

Deducir a partir de ellos la impedancia equivalente de pérdidas de hierro, la impedancia de magnetización, las resistencias de pérdidas de cobre y la inductancias de pérdidas de flujo.

### Solución del ejercicio 5.5

Se procede primero el ensayo en vacío del transformador. Se calcula el ángulo de la impedancia equivalente. Para ello se usa la definición de potencia activa en primario:

$$P_{10} = |V_{10}| |I_{10}| \cos \varphi \quad (5.104)$$

El ángulo  $\varphi$  se puede entonces despejar:

$$\varphi = \arccos \frac{P_{10}}{|V_{10}| |I_{10}|} = \arccos \frac{176}{2300 \cdot 0,0955} = 36,7^\circ \quad (5.105)$$

Por otro lado el módulo de la impedancia equivalente del transformador es:

$$|Z_{eq}| = \frac{|V_{10}|}{|I_{10}|} = \frac{2300}{0,0955} = 24089\Omega \quad (5.106)$$

Como ha descrito anteriormente la impedancia de magnetización y la resistencia de pérdidas de hierro se deducen con estas fórmulas:

$$R_h = \frac{|Z_{eq}|}{\cos \varphi} = \frac{24089}{\cos 36,7} = 30045\Omega \quad (5.107)$$

$$X_m = j \frac{|Z_{eq}|}{\sin \varphi} = j \frac{24089}{\sin 36,7} = j40308\Omega \quad (5.108)$$

En segundo lugar se procede a analizar los datos de ensayo en corto-circuito. Se deduce directamente el valor de las impedancias de pérdidas de cobre:

$$P_{1cc} = (R_1 + m^2 R_2) |I_{1cc}|^2 \quad (5.109)$$

Se despeja la resistencia  $R_{cc}$ :

$$R_1 + m^2 R_2 = \frac{P_{1cc}}{|I_{1cc}|^2} = \frac{453}{8,6^2} \simeq 6\Omega \quad (5.110)$$

Para determinar la impedancia de pérdida de flujo primero se debe hallar el ángulo de la impedancia equivalente:

$$\varphi = \arccos \frac{P_{1cc}}{|V_{1cc}| |I_{1cc}|} = \arccos \left( \frac{453}{73,7 \cdot 8,6} \right) = 44,3^\circ \quad (5.111)$$

El modulo de la impedancia equivalente vale:

$$|Z_{eq}| = \frac{|V_{1cc}|}{|I_{1cc}|} = \frac{73,7}{8,6} = 8,47\Omega \quad (5.112)$$

Y la impedancia de pérdida de flujo vale:

$$X_{cc} = X_1 + m^2 X_2 = j|Z_e| \sin \varphi = j8,47 \cdot \sin 44,3 \simeq j5,9\Omega \quad (5.113)$$

No se puede distinguir entre  $R_1$  y  $R_2$  ni tampoco entre  $X_1$  y  $X_2$  por lo que se dejan así.

### Ejercicio 5.6

Con los datos del transformador anterior, calcular el rendimiento para los siguientes casos:

1. Carga de 80 % con un factor de potencia de 0,8
2. Carga de 90 % con un factor de potencia de 0,9

Calculen el rendimiento en un primer caso sin tomar en cuenta la regulación de tensión y luego considerando la pérdida de tensión al secundario.

**Solución del ejercicio 5.6** Para hallar el rendimiento necesitamos en un primer tiempo calcular la corriente nominal:

$$I_{2n} = \frac{S}{V_{2n}} = \frac{20000}{230} = 87 \text{ A}$$

Podemos ahora calcular el rendimiento en los dos casos propuestos usando la fórmula (5.103) conociendo las pérdidas de vacío  $P_{10}$  y las pérdidas de carga  $P_{1cc}$ .

Caso 1:

$$\eta = \frac{0,8 \cdot 230 \cdot 87 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 230 \cdot 87 \cdot 0,8 + 176 + 453} = 0,952$$

Caso 2:

$$\eta = \frac{0,9 \cdot 230 \cdot 87 \cdot 0,9}{0,9 \cdot 230 \cdot 87 \cdot 0,9 + 176 + 453} = 0,96$$

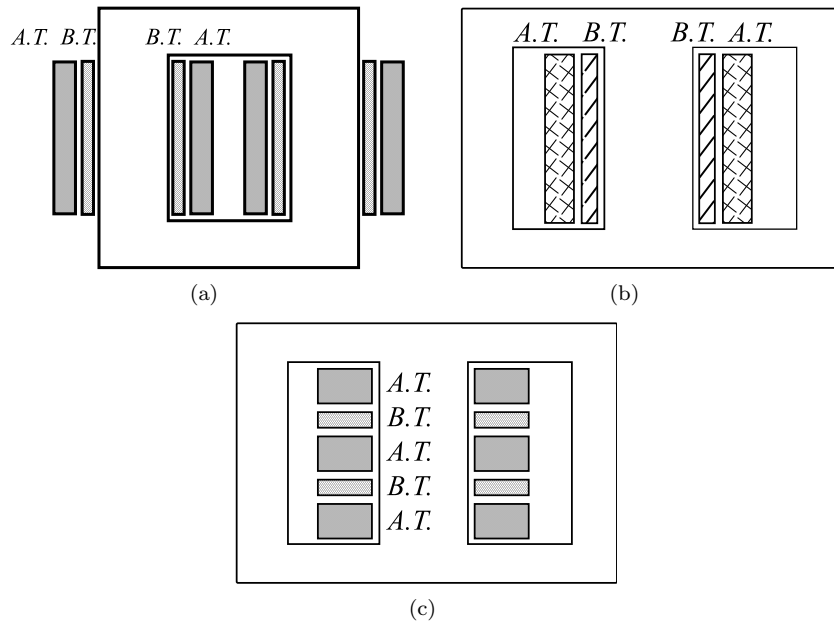
En una segunda estimación más precisa podemos usar la ecuación (5.82):

$$\varepsilon_1 = 0,8 \cdot 87 \cdot \frac{6 \cdot 0,8 + 5,9 \cdot 0,6}{10 \cdot 2300} = 0,025$$

Es decir la tensión de secundario baja un 2.5 % y valdrá  $V_2 = 224,2\text{V}$ . El rendimiento en el primer caso baja a:

$$\eta = \frac{0,8 \cdot 224,2 \cdot 87 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 224,2 \cdot 87 \cdot 0,8 + 176 + 453} = 0,952$$

La diferencia aparece en la tercera decimal, la primera aproximación es bastante precisa.



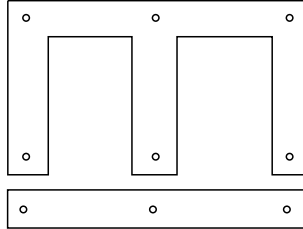
**Figura 5.19** Distintos esquemas de devanados en transformadores. En (a) se muestra un transformador de columnas con los devanados concéntricos. En (b) y (c) se dibuja un transformador acorazado con devanados concéntricos en (b) y apilados en (c)

## 5.4 Aspectos constructivos

### 5.4.1 Circuitos magnéticos y devanados

Los transformadores monofásicos son generalmente destinados a aplicaciones de pequeñas potencia, para potencias más importantes se usan transformadores trifásicos. Los transformadores monofásicos son de dos tipos: de columnas (5.19 (a)) o acorazado (5.19 (b) y (c)). La segunda forma es la más común aunque se puede encontrar de los dos tipos. En los dos casos los devanados están entrelazados. Es decir, primero se dispone un devanado de bajo voltaje y se recubre después con el bobinado del alto voltaje. Entre los dos devanados se dispone un aislante (un papel o cartón típicamente). Esta disposición de los devanados reduce las pérdidas de flujo, al estar los devanados compartiendo el área de la inducción. Existen otros tipos de disposición como se muestra en la figura 5.19.(c). En esta configuración se disponen los devanados de AT y BT en capas apiladas. El nivel de aislamiento eléctrico entre primario y secundario es más elevado en este caso, significa que se puede aumentar la diferencia de potencial entre el primario y el secundario sin riesgo de arcos eléctricos.

El circuito magnético se compone de láminas de metal apiladas. En la figura 5.20 se enseña la formación de un circuito magnético con la configuración “EI”



**Figura 5.20** Formación del circuito magnético con laminas formadas de una parte en “E” y otra parte en forma de “I”.

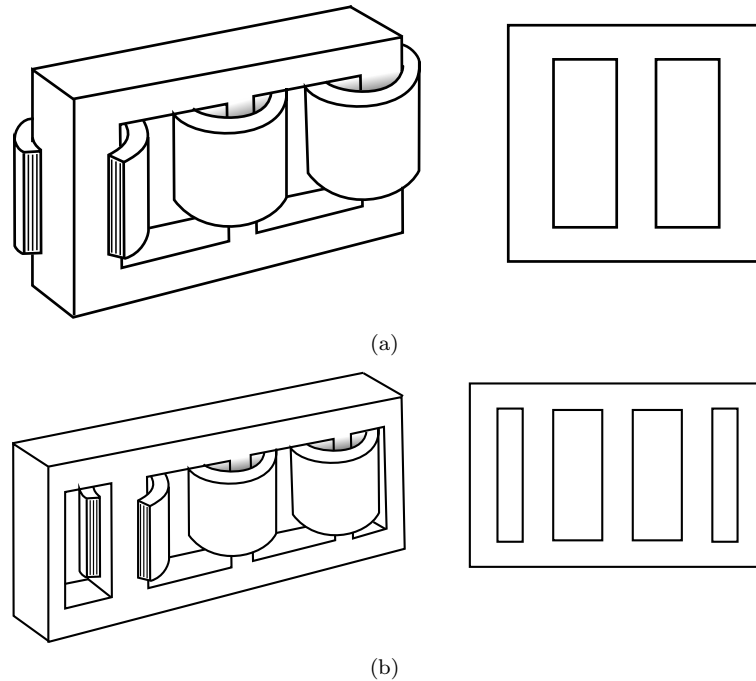
clásica en los transformadores monofásicos. Se apilan finas láminas de estos dos elementos hasta obtener la anchura deseada del circuito magnético. Esta configuración permite la introducción de las bobinas ya preparadas en la culata (la parte del E). Los devanados se pueden disponer sobre un carrete de plástico que luego se introduce sobre la culata.

## 5.5 Transformadores trifásicos

Con el desarrollo de los generadores de corriente alterna se desarrollaron también transformadores capaces de transformar la tensión trifásica generada. El transformador trifásico se puede entender como la asociación de tres transformadores monofásicos. A cada uno de los transformadores se le conecta una de las fases del sistema trifásico al primario. Se obtiene un nuevo sistema trifásico al secundario pero con una tensión distinta del primario (y probablemente con una fase distinta). Puede existir una diferencia de fase entre el primario y el secundario en función del tipo de conexión de las bobinas. Estas posibles conexiones se detallan más adelante pudiéndose conectar tanto el primario como el secundario en estrella o en triángulo.

Para obtener un transformador trifásico basta con utilizar transformadores monofásicos independientes y conectarlos adecuadamente. Otra manera consiste en formar un único circuito magnético con los seis devanados del primario y del secundario. En la figura 5.21 se enseña dos configuraciones típicas para un circuito magnético trifásico. En la configuración de la figura 5.21 (a), existen tres columnas con los devanados de primario y de secundario concéntrico (se bobina el secundario sobre el primario o al revés). Esta configuración es la más común y la más económica. En la segunda configuración de cinco columnas de la figura 5.21 (b), se disponen los bobinados en las tres columnas centrales y las dos columnas externas cierran el circuito magnético. Esta configuración tiene una ventaja cuando las cargas del secundario están muy desequilibradas. El flujo debido al desequilibrio tiene un camino de retorno<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Este flujo, llamado homopolar, en el caso del transformador de tres columnas puede cerrar-



**Figura 5.21** Esquema del circuito magnético de los transformadores trifásicos. En (a) se muestra el esquema de tres columnas, cada columna tiene los devanados del primario y del secundario. En (b) tenemos el esquema de cinco columnas. Cada uno de estas disposiciones tiene sus ventajas e inconvenientes.

Este transformador se coloca en una caja metálica junto con una serie de dispositivos para su refrigeración. El calentamiento de los transformadores causa problemas en la transformación de energía, las propiedades de los conductores y del circuito magnético cambian con la temperatura. Las pérdidas aumentan con la temperatura y también acorta la vida útil del dispositivo. Los mecanismos de refrigeración que se describen más adelante deben adecuarse al uso del transformador. Por el momento se puede decir que existen dos grandes clases de transformadores: los transformadores rellenos de aceite y los transformadores secos. Se llena el casco del transformador con aceite mineral para mejorar la transferencia de calor y su evacuación. En la figura 5.22 se muestra un transformador de distribución trifásico típico. Los bornes de conexión del lado de alta tensión se aíslan con unas piezas de cerámica separadas entre ellas lo suficiente como para evitar arcos eléctricos entre bornes. Las conexiones del lado baja tensión son más pequeñas al ser la tensión más baja. El transformador cuenta con numerosas aletas de disipación para evacuar el calor por convección, y se puede añadir ventiladores para mejorar la evacuación de calor.

se en el aire o en la caja metálica que encierra el transformador. Este flujo solo contribuye a calentar el transformador y por tanto es indeseable.



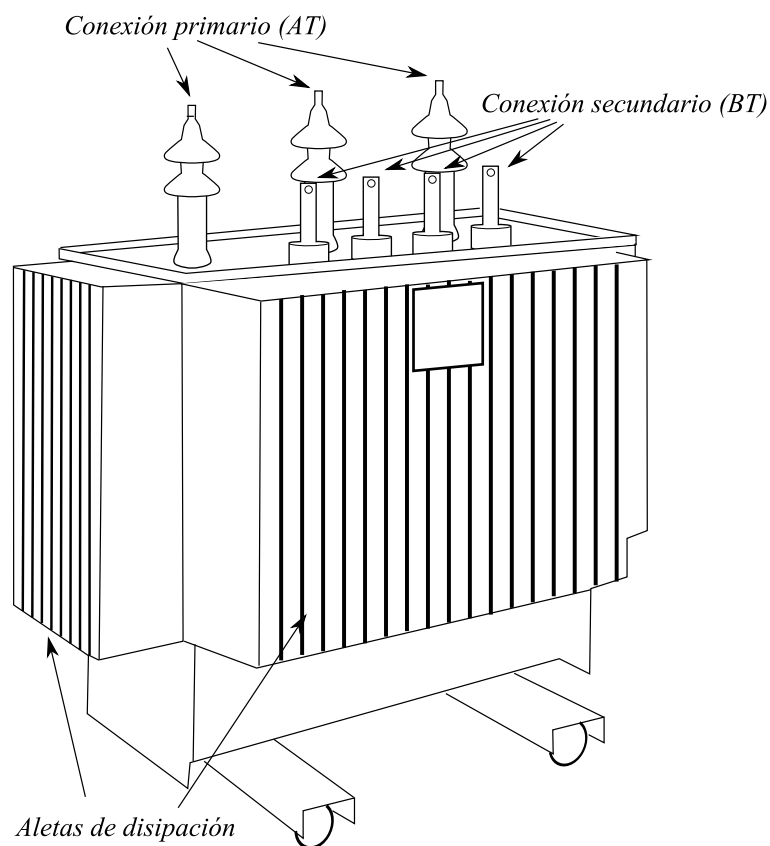


Figura 5.22 Esquema de un transformador de distribución trifásico.

Las características eléctricas relevantes de los transformadores trifásicos son:

- La potencia asignada.
- Tensión asignada (tensiones entre líneas).
- La conexión del primario y secundario.
- La tensión de cortocircuito.
- La regulación de tensión.

Otros parámetros pueden aparecer tales como las pérdidas de hierro y de cobre (también llamadas pérdidas de vacío y de corto-circuito debido a los ensayos correspondientes). En la tabla 5.1 se enseñan las características eléctricas de un transformador de distribución 20KV/400V para un rango amplio de potencias asignadas. A continuación se describen brevemente los parámetros de esta tabla:

- Potencia asignada (kVA): potencia de diseño del transformador en kVA.
- Tensión entre líneas: tensión medida entre dos fases del transformador
- Aislamiento de primario: sobretensión máxima admitida al primario.

- Conexión: tipo de conexiones al primario y al secundario (ver apartado 4.6.1).
- pérdidas de vacío: pérdidas independientes de la carga (típicamente las pérdidas de hierro).
- pérdidas de carga: pérdidas en el transformador cuando la tensión nominal circula al secundario.
- Tensión de corto-circuito: tensión de primario en el ensayo en corto circuito en % de la tensión nominal de primario.
- Corriente de vacío: corriente de primario en el ensayo en vacío en % de la corriente nominal de primario.
- Caída de tensión en plena carga: caída de tensión al secundario en % de la tensión nominal.
- Rendimiento: rendimiento para varios factores de potencia y distintas cargas.
- Ruido: intensidad acústica del ruido del transformador.

### Ejercicio 5.7

Extraer los valores del transformador de 250kVA de la tabla 5.1 y identificar los parámetros eléctricos: resistencia de pérdida de hierro y cobre, inductancia de pérdida de flujo y de magnetización.

### Solución del ejercicio 5.7

Para analizar este transformador primero tenemos que fijarnos en que su conexión es Dyn 11 (ver grupos de conexiones). El primario se conecta en triángulo con una tensión entre líneas de 20kV. Cada devanado del primario tiene una diferencia de 20kV entre sus extremos. Al secundario la tensión en cada devanado es de  $400/\sqrt{3} = 230V$  dado que el secundario está conectado en estrella y la tensión asignada se da con tensiones entre líneas.

La potencia por fase es de 250kVA entre 3, la corriente asignada del transformador es:

$$I_1 = \frac{S_1}{3V_1} = \frac{250 \cdot 10^3}{3 \cdot 20 \cdot 10^3} = 4,16A \quad (5.114)$$

En el ensayo en vacío se alimenta el transformador con la tensión asignada y se miden la potencia y la corriente de vacío. Los datos del constructor son:  $P_0 = 650W$  (para las tres fases) e  $I_0 = 2,1\%$  (en por ciento de la corriente nominal). El módulo de la impedancia equivalente en vacío es:

$$|Z_0| = \frac{V_1}{I_0} = \frac{20 \cdot 10^3}{0,021 \cdot 4,16} = 228,9 \cdot 10^3 \Omega \quad (5.115)$$

El coseno del ángulo de la impedancia equivalente se deduce a partir de la potencia (de una fase), de la tensión y de la corriente:

$$\cos(\theta) = \frac{P_0}{V_1 I_0} = \frac{650/3}{20 \cdot 10^3 \cdot 0,021 \cdot 4,16} = 0,124 \quad (5.116)$$

P. asignada (kVA)		100	160	250	315	400	500	1000
Tensión (entre líneas)	Primario	20 kV						
	Secundario (en vacío)	400 V entre fases, 231 V entre fase y neutro						
Aislamiento (primario)		17,5 kV						
Conexión Dyn 11		(triángulo ; estrella con neutro )						
pérdidas (W)	de vacío	210	460	650	800	930	1100	1470
	de carga (*)	2150	2350	3250	3900	4600	5500	13000
Tensión CC(**) (%)		4	4	4	4	4	4	6
Corriente de vacío (%)		2,5	2,3	2,1	2	1,9	1,9	2,4
Caída de tensión en plena carga (%)	$\cos \varphi = 1$	2,21	1,54	1,37	1,31	1,22	1,17	1,47
	$\cos \varphi = 0,8$	3,75	3,43	3,33	3,30	3,25	3,22	4,63
Rendimiento (%)	Carga 100 %, f.p. = 1	97,69	98,27	98,46	98,53	98,64	98,70	98,57
	Carga 100 %, f.p. = 0,8	97,13	97,85	98,09	98,17	98,30	98,387	98,22
	Carga 75 %, f.p. = 1	98,14	98,54	98,70	98,75	98,84	98,89	98,84
	Carga 75 %, f.p. = 0,8	97,69	98,18	98,37	98,44	98,56	98,62	98,56
Ruido (dBA)		53	59	62	64	65	67	68

**Cuadro 5.1** Ejemplo de parámetros de transformador de distribución 20KV/400V para varias potencias. (\*) pérdidas de carga con la corriente nominal en los devanados. (\*\*)Tensión CC es la tensión de cortocircuito

Se puede hallar ahora la resistencia equivalente de las pérdidas de hierro y la inductancia de magnetización:

$$R_h = \frac{|Z_0|}{\cos \theta} = \frac{228,9 \cdot 10^3}{0,124} = 1846 \cdot 10^3 \Omega \quad (5.117)$$

$$X_\mu = \frac{j|Z_0|}{\sin \theta} = j \frac{228,9 \cdot 10^3}{0,992} = j230,6 \cdot 10^3 \Omega \quad (5.118)$$

En el ensayo en corto circuito se alimenta el transformador de tal forma que circule en sus devanados la corriente asignada. Los resultados del ensayo son:  $P_{cc} = 3250W$  para las tres fases y  $V_{cc} = 4\%$  en por ciento de la tensión nominal.

El modulo de la impedancia equivalente de corto-circuito es:

$$|Z_{cc}| = \frac{V_{cc}}{I_1} = \frac{0,04 * 20 \cdot 10^3}{4,16} = 192,3 \Omega \quad (5.119)$$

El coseno del ángulo de la impedancia equivalente se deduce a partir de la potencia (para una fase), de la tensión y de la corriente:

$$\cos(\theta) = \frac{P_{cc}}{V_{cc} I_1} = \frac{3250/3}{0,04 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 4,16} = 0,325 \quad (5.120)$$

Se puede deducir a partir de los datos la resistencia del cobre y las pérdidas de flujo:

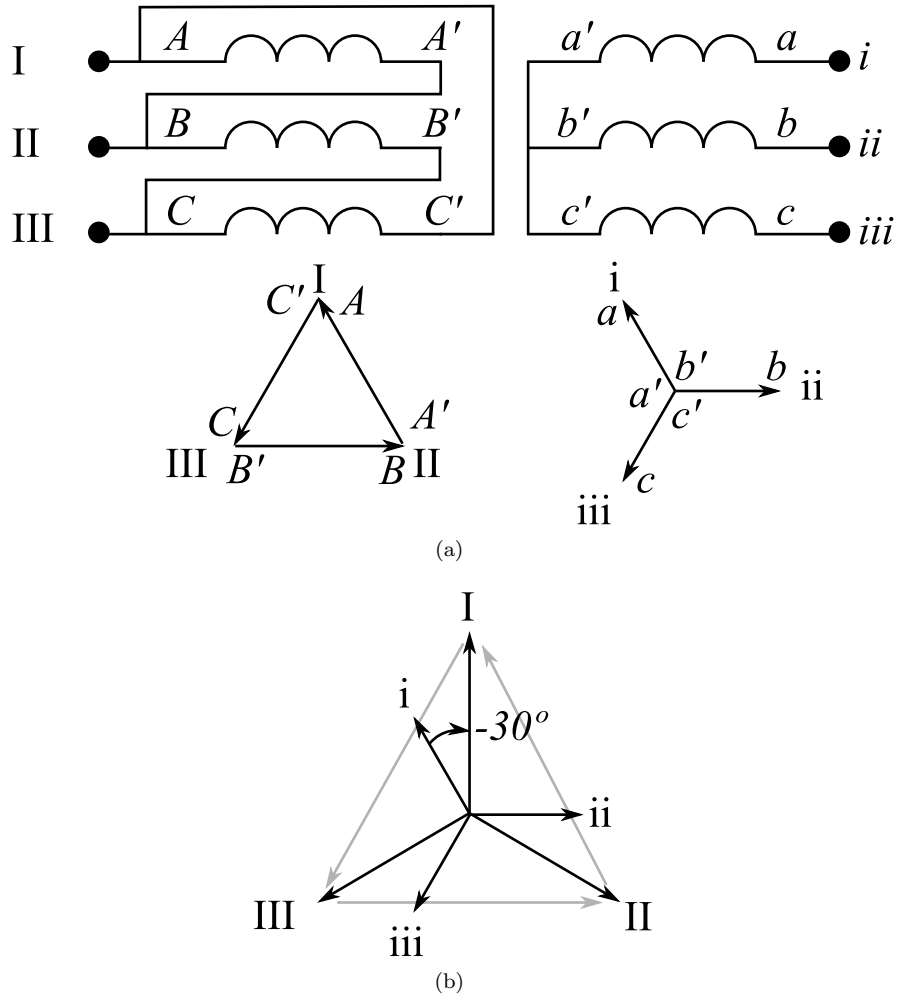
$$R_{cc} = |Z_{cc}| \cos \theta = 192,3 \cdot 0,325 = 62,49 \Omega \quad (5.121)$$

$$X_{cc} = j|Z_{cc}| \sin \theta = j192,3 \cdot 0,945 = j181,8 \Omega \quad (5.122)$$

### 5.5.1 Conexiones de los transformadores

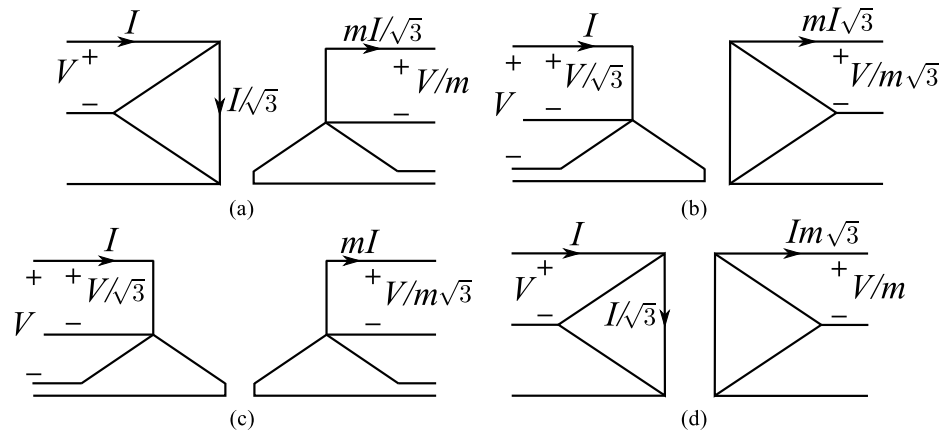
Los transformadores trifásicos pueden conectarse de forma distinta al secundario y al primario. Por ejemplo dependiendo del tipo de aplicaciones conviene conectar los devanados del primario y del secundario en estrella o en triángulo. La notación estandarizada para designar los grupos de conexiones consiste en denominar el primario por un letra mayúscula con el tipo de devanado (Y para estrella y D para triángulo), y el devanado del secundario con una letra minúscula (y para estrella y d para triángulo). Aún así existen distintas formas de conectar los devanados en estrella y en triángulo, se añade un **índice horario** que indica el desfase entre las tensiones fase a neutro de primario y de secundario de una misma columna del circuito magnético.

Se estudia el ejemplo de la figura 5.23 (a), un caso con tres devanados al primario llamados I, II e III, y tres devanados al secundario llamados i,ii e iii. Se alimenta el primario con un sistema trifásico directo. Si el primario se conecta en triángulo y el secundario en estrella, el retraso de la tensión simple  $V_i$  con respecto



**Figura 5.23** (a) Representación de la conexión Dy11 de un transformador trifásico. El primario se conecta en triángulo y el secundario en estrella. Esta conexión origina un desfase de  $-30^\circ$  entre tensiones simples del primario y secundario. Como se puede observar las tensiones de los devanados  $V_{AA'}$  y  $V_{aa'}$  permanecen en fase al ser las tensiones de una misma columna del transformador. Es decir  $CC'$  y  $cc'$  tienen la misma dirección y el mismo sentido. Sin embargo se origina un desfase entre las tensiones simples de primario y secundario. En (b) tenemos una representación de los fasores de las tensiones simples. La tensión  $V_I$  al primario tiene un desfase de  $30^\circ$  con  $V_i$ .

a la tensión simple  $V_I$  es de  $330^\circ$ , es decir 11 veces  $30^\circ$ . Para darse cuenta de ello hay que transformar la tensión de primario de triángulo a estrella. La tensión  $V_{AA'}$  tiene un desfase de  $-30^\circ$  con la tensión simple  $V_I$  referida al neutro, es decir  $V_{AA'} = \sqrt{3}V_I \angle 30^\circ$ . Es una simple transformación triángulo estrella. Las dos tensiones de una misma columna del transformador  $V_{aa'}$  y  $V_{AA'}$  están en fase



**Figura 5.24** En esta figura se representan la relación entre los módulos de las tensiones y corrientes al primario y al secundario en función de la conexión del transformador.

debido a la ley de Faraday y provoca  $\varphi_{AA'} = \varphi_{aa'}$ , las dos fases coinciden. En la figura 5.23 (b), La tensión  $V_i$  está en desfase de  $30^\circ$  con respecto  $V_I$ . Además del desfase se aprovecha la relación de transformación entre tensiones:

$$\frac{\tilde{V}_{AA'}}{\tilde{V}_{aa'}} = m \quad (5.123)$$

La relación entre tensiones simples sería entonces:

$$\frac{\sqrt{3}\tilde{V}_I \angle 30^\circ}{\tilde{V}_i} = m \quad (5.124)$$

O también:

$$\tilde{V}_I = \frac{m}{\sqrt{3}} \tilde{V}_i \angle -30^\circ \quad (5.125)$$

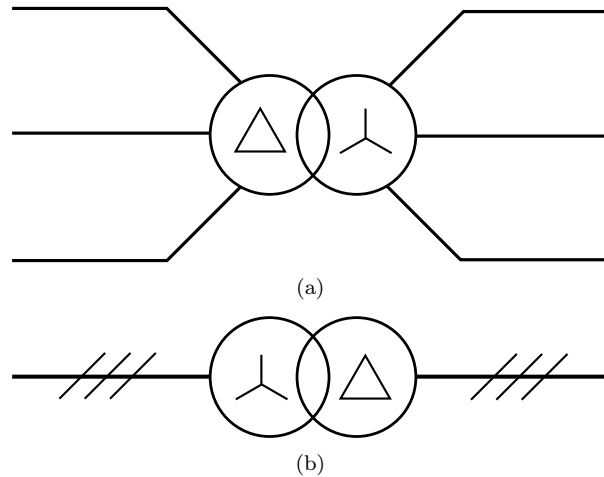
Para entender mejor la relación entre corriente y tensión al primario y al secundario se enseña en la figura 5.24 como se transforman el módulo de las tensiones y corrientes al primario y al secundario. Hacemos la distinción entre tensiones simples y compuestas. Se ve ahora que ocurre con la corriente. Al igual que la tensión, la corriente de cada columna sigue la relación de transformación:

$$\frac{\tilde{I}_{AA'}}{\tilde{I}_{aa'}} = \frac{1}{m} \quad (5.126)$$

Haciendo un análisis similar al anterior se despeja una relación entre las corrientes de línea al primario y al secundario:

$$\tilde{I}_i = \frac{m}{\sqrt{3}} \tilde{I}_I \angle 30^\circ \quad (5.127)$$

En resumen, se cuenta el desfase como **el retraso de la tensión simple baja con respecto a la tensión simple alta en múltiplos de  $30^\circ$** . El índice



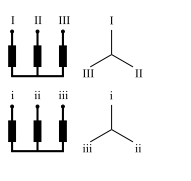
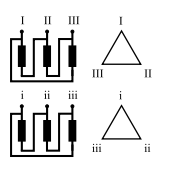
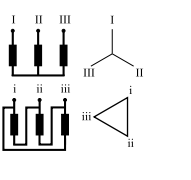
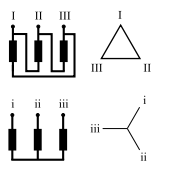
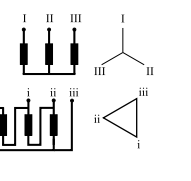
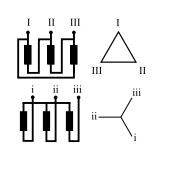
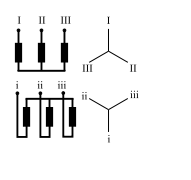
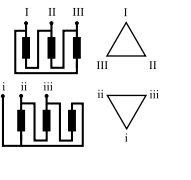
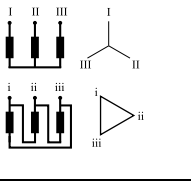
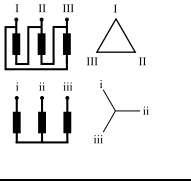
**Figura 5.25** (a) Se representa un esquema simplificado del transformador trifásico para realizar esquemas simplificados. El neutro y la tierra se pueden añadir al esquema si hiciera falta. (b) El esquema representado se llama unifilar, las líneas de tensión trifásicas se juntan en un único hilo de tal manera que los esquemas de los sistemas trifásicos se parezcan a un esquema monofásicos. Este tipo de diagramas se llaman unifilar.

**horario** de esta conexión será entonces 11 y su nombre en clave será Dy11. Si se saca el neutro al secundario se añade la letra n y el nombre sería Dyn11. En el caso de un primario con neutro sacado sería YNyn0 por ejemplo. En función de las conexiones el desfase entre primario y secundario puede llegar a ser distinto. Para determinar el índice horario de una conexión hay que representar los devanados del transformador y los diagramas de fase correspondiente. El estudio de los diagramas permite determinar el índice horario de la configuración. En la tabla 5.2 se resumen los grupos de conexión más usuales. Añadimos a esta tabla la figura 5.24 que relaciona las tensiones de primario y secundario para las cuatro configuraciones más usuales de transformadores.

Para simplificar los esquemas eléctricos con transformadores trifásico se usan símbolos como los de la figura 5.25. En la figura (a) Se representan las líneas y la conexión interna del transformador. La figura (b) es más esquemática, las conexiones están condensadas en un único hilo. Este tipo de diagrama, llamado unifilar, permite evitar el dibujo de todas las conexiones para razonar sobre esquemas complejos.

### Ejercicio 5.8

Se considera un transformador trifásico con índice horario Dy11 de tensiones asignadas 2kV/400V y potencia asignada 20kVA conectado a una carga equilibrada en Y de impedancia  $Z = 2 + j1\Omega$ . Se alimenta el transformador

Grupo 0 ( $0^\circ$ )	 Yy0	 Dd0
Grupo 1 ( $30^\circ$ )	 Yd1	 Dy1
Grupo 5 ( $150^\circ$ )	 Yd5	 Dy5
Grupo 6 ( $180^\circ$ )	 Yy6	 Dd6
Grupo 11 ( $330^\circ$ )	 Yd11	 Dy11

**Cuadro 5.2** Resumen de los grupos de conexión mas comunes para los transformadores trifásicos.

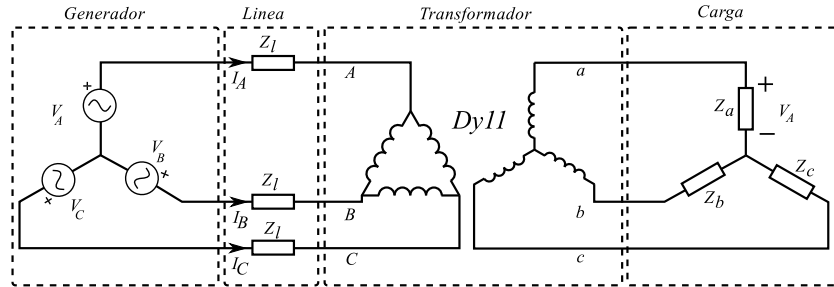
con un generador trifásico de tensión fase-neutro de 2kV a través de una línea de impedancia  $Z_l = 0,1 + j0,1\Omega$ :

- Dibujar el esquema completo del circuito.
- Calcular el equivalente de la carga visto de desde el primario.
- Calcular las pérdidas en la línea.
- Calcular la potencia consumida por la carga.

### Solución del ejercicio 5.8

- Se dibuja el circuito eléctrico del sistema a continuación:





b) Para calcular el circuito equivalente de la carga visto del primario del transformador se debe estudiar como se transforman las tensiones en el transformador. Se fijan unas tensiones simples al primario  $\tilde{V}_{AN}$ ,  $\tilde{V}_{BN}$  y  $\tilde{V}_{CN}$  y al secundario  $\tilde{V}_{an}$ ,  $\tilde{V}_{bn}$  y  $\tilde{V}_{cn}$ . Dado el índice horario 11, aparece un desfase de  $330^\circ$  o de  $-30^\circ$  entre las tensiones simples de primario y secundario. Sin embargo la relación de transformación se aplica entre devanados, es decir:

$$\frac{|\tilde{V}_{AB}|}{|\tilde{V}_{an}|} = m = \frac{2000}{400} = 5$$

Por otro lado se consigue la relación entre tensiones simples y compuestas:  $\tilde{V}_{AB} = \sqrt{3}\tilde{V}_{AN}\angle 30^\circ$ . En definitiva se consigue:

$$\frac{\tilde{V}_{AN}}{\tilde{V}_{an}} = \frac{5}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ$$

En cuanto a la corriente, ayudándonos de la figura 5.24 encuentra la relación:

$$\tilde{I}_a = \frac{5}{\sqrt{3}}\tilde{I}_A\angle 30^\circ$$

Se puede ahora hallar el equivalente de la impedancia visto desde el primario. Mediante la ley de Ohm :

$$\tilde{V}_{an} = Z_a\tilde{I}_a$$

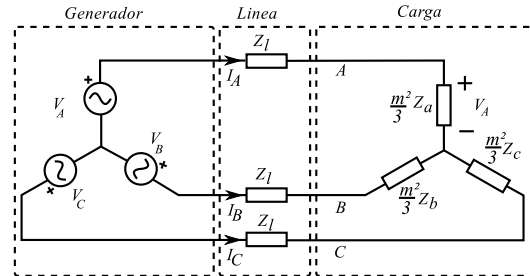
Sustituyendo  $V_{AN}$  y  $I_{AN}$  en esta ecuación se halla:

$$\tilde{V}_{AN} \frac{\sqrt{3}}{5}\angle 30^\circ = Z_a \frac{5}{\sqrt{3}}\tilde{I}_A\angle 30^\circ$$

Al final, la tensión es:

$$\tilde{V}_{AN} = Z_a \frac{5^2}{3}\tilde{I}_A$$

Es decir que desde el primario se percibe una carga equilibrada de impedancia equivalente  $\frac{5^2}{3}Z_a$ .



c) Ahora se pueden calcular las pérdidas de línea. La corriente de línea es:

$$\tilde{I}_A = \frac{V_a}{Z_l + \frac{5^2}{3} Z_a} = \frac{2000}{16,7 + j8,4} = 95,2 - j47,8 = 106,5 \angle -26,7^\circ \text{ A}$$

La pérdida de potencia en la línea es:

$$P_l = \Re Z_l |\tilde{I}_A|^2 = 0,1 \cdot 106,3^2 = 1130 \text{ W}$$

d) La potencia consumida por la carga es:

$$S_Z = \frac{5^2}{3} Z_a |\tilde{I}_A|^2 = \frac{5^2}{3} (2 + j) \cdot 107^2 = 189040 + j94519 \text{ VA}$$

### 5.5.2 Placa característica

En la placa de características de un transformador trifásicos aparecen varios parámetros importantes:

- La potencia asignada.
- La tensión asignada.
- El tipo de refrigeración.
- La impedancia de corto-circuito  $Z_{cc} = R_{cc} + jX_{cc}$ .

Los constructores deben identificar en su placa el tipo de refrigeración empleado. Para los transformadores inmersos en líquido esta identificación es un código de cuatro letras como descrito en la norma IEC 60076-2. Se recoge el código en la tabla 5.3.

Puede aparecer información adicional del transformador, tal como su fecha de puesta en servicio o de construcción. Pero la información anterior es esencial para las instalaciones eléctricas.

Primera letra:	Medio de refrigeración en contacto con los devanados:
O	Aceite mineral o sintético con punto de encendido > 300 C
K	Líquido aislante con punto de encendido > 300 C
L	Líquido aislante con punto de encendido indeterminado
Secunda letra:	Mecanismo de circulación para la refrigeración interna:
N	Convección natural
F	Circulación forzada en el equipo de refrigeración, y convección natural en los bobinados
D	Circulación forzada en el equipo de refrigeración con circulación en los bobinados
Tercera letra:	Refrigeración externa
A	Aire
W	Agua
Cuarta letra:	Mecanismo de circulación para la refrigeración externa:
N	Convección natural
F	Circulación forzada (ventiladores, bombas, etc)

**Cuadro 5.3** Codificación de los diversos tipos de refrigeración en los transformadores de potencia.

## 5.6 Resultados fórmulas importantes

Fórmulas importantes	
Relación de transformación de tensiones ( $V_1$ al primario y $V_2$ al secundario)	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = m$
Relación de transformación de corrientes	$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m}$
Transformación de una carga $Z$ visto de desde el primario	$Z' = m^2 Z$
Rendimiento del transformador	$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos(\varphi)}{P_{cu} + P_h + V_2 I_2 \cos(\varphi)}$
Regulación de voltaje	$\varepsilon \simeq \frac{R_{cc}  \tilde{I}_2  \cos \varphi +  X_{cc}   \tilde{I}_2  \sin \varphi}{m V_{1n}}$

## 5.7 Ejercicios resueltos

1. Un transformador ideal tiene un primario de 200 vueltas y un secundario con 600 vueltas. El primario se alimenta con una tensión de 220V eficaces y de 50Hz. En el secundario se coloca una carga consumiendo una corriente de 3A en el secundario y con un factor de potencia en atraso de 0.7. Determinar:
  - a) la relación de transformación
  - b) la corriente de primario
  - c) la potencia activa suministrada
  - d) el flujo máximo en el núcleo
  - e) el esquema equivalente visto desde el primario.

### Solución:

- a) La relación de transformación es:

$$m = \frac{N_1}{N_2} = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$$

- b) Para obtener el modulo de la corriente de primario usamos la relación de transformación en corriente.

$$\frac{|\tilde{I}_2|}{|\tilde{I}_1|} = m = \frac{1}{3}$$

Dado que  $|\tilde{I}_2| = 3$  A, se despeja  $|\tilde{I}_1|$ :

$$|\tilde{I}_1| = 3|\tilde{I}_2| = 9\text{A}$$

Calculando el desfase provocado por la carga se obtiene el desfase al primario también, el transformador siendo ideal no provoca desfases adicionales. La carga tiene un factor de potencia inductivo, el ángulo vale entonces:

$$\varphi = \text{atan}(0,7) = 45^\circ$$

Suponiendo  $\tilde{V}_1$  la referencia de fase, la corriente de primario es entonces:

$$\tilde{I}_1 = 9\angle -45^\circ\text{A}$$

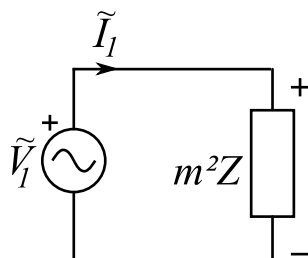
- c) La potencia activa suministrada a la carga es la misma que la potencia entregada al primario (el transformador es ideal):

$$P_1 = \Re\{\tilde{V}_1\tilde{I}_1^*\} = |\tilde{V}_1||\tilde{I}_1| \cos 45 = 1386 \text{ W}$$

- d) El flujo máximo en el transformador se obtiene gracias a la ecuación 5.14:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{2}|\tilde{V}_1|}{2\pi f N_1} = \frac{220\sqrt{2}}{2\pi \cdot 50 \cdot 200} = 5 \text{ mWb}$$

- e) El esquema equivalente del transformador se obtiene simplemente transformando la impedancia al secundario multiplicándola por la relación de transformación al cuadrado. El esquema equivalente es el siguiente:



2. Un transformador de 20kVA tiene una tensión de alimentación asignadas de 2300V eficaces y una tensión de secundario de 230V a 50Hz. El transformador está cargado con una carga  $Z = 3\angle 30^\circ \Omega$  (la tensión de alimentación se mantiene a 2300V). Por otra parte las pérdidas de cobre y la reactivas de pérdidas de flujo tienen como expresión:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 0,02\Omega$ ,  $X_1 = j12\Omega$ ,  $X_2 = j0,12\Omega$ . La resistencia de pérdidas en el hierro equivale a  $R_h = 20 \cdot 10^3 \Omega$  y la inductancia de magnetización es  $X_m = j15 \cdot 10^3 \Omega$ .

Determinar **sin usar las hipótesis de Kapp**:

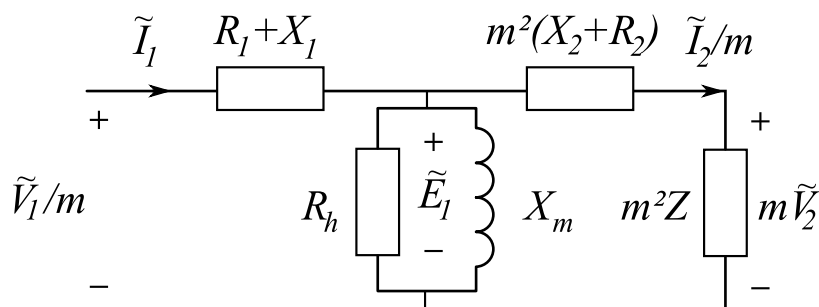
- la relación de transformación
- el esquema equivalente del transformador
- la corriente de primario y secundario
- comparar con la corriente nominal del transformador con la corriente de la carga
- la potencia activa suministrada a la carga
- el rendimiento del transformador

**Solución:**

- a) Se halla la relación de transformación con las tensiones asignadas:

$$m = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2300}{230} = 10$$

- b) El esquema equivalente sin usar las hipótesis de Kapp es:



- c) La forma más rápida de calcular la corriente de primario consiste en hallar la impedancia equivalente del transformador. Esta impedancia es:

$$Z_e = (X_1 + R_1) + (R_h // X_m // m^2(X_2 + R_2 + Z))$$

Después del cálculo se obtiene:

$$Z_e = 256 + j172 \dots \Omega$$

La corriente de primario es entonces:

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}_1}{Z_e} = \frac{2300 \angle 0}{256 + j172} = 6,17 - j4,16 = 7,44 \angle -34^\circ \text{ A}$$

Para hallar la corriente de secundario se puede por ejemplo calcular la tensión  $\tilde{E}_1$  de la rama en paralelo. Esta tensión  $\tilde{E}_1$  se calcula con  $\tilde{I}_1$  y la rama en paralelo  $R_h // X_m // m^2(X_2 + R_2 + Z)$ .

$$\tilde{E}_1 = \tilde{I}_1 (R_h // X_m // m^2(X_2 + R_2 + Z)) = 7,44 \angle -34^\circ (254 + j160i) = 2238 \angle -1,6^\circ \text{ V}$$

La corriente  $\tilde{I}_2$  vale entonces:

$$\frac{\tilde{I}_2}{m} = \frac{\tilde{E}_1}{m^2(X_2 + R_2 + Z)} = 6 - j4 = 7,2 \angle -33,4^\circ \text{ A}$$

Las corrientes de primario y de secundario son:  $\tilde{I}_1 = 7,44 \angle -34^\circ \text{ A}$  y  $\tilde{I}_2 = 72 \angle -34,4^\circ \text{ A}$ .

d) La corriente nominal de secundario es:

$$|\tilde{I}_{2n}| = \frac{20 \cdot 10^3}{230} = 87 \text{ A}$$

El transformador funciona entonces a 80 % de la corriente nominal.

e) La potencia entregada a la carga se calcula gracias a la corriente  $\tilde{I}_2$  y a la impedancia  $Z$ :

$$P_2 = \Re\{Z\} |\tilde{I}_2|^2 = 3 \cos 30 \cdot 72^2 = 13468 \text{ W}$$

f) Para calcular el rendimiento es necesario calcular la potencia entregada al primario:

$$P_1 = |\tilde{I}_1| |\tilde{V}_1| \cos \varphi_1 = 7,44 \cdot 2300 \cdot \cos -34,4 = 14119 \text{ W}$$

El rendimiento es el cociente entre la potencia activa al secundario y al primario:

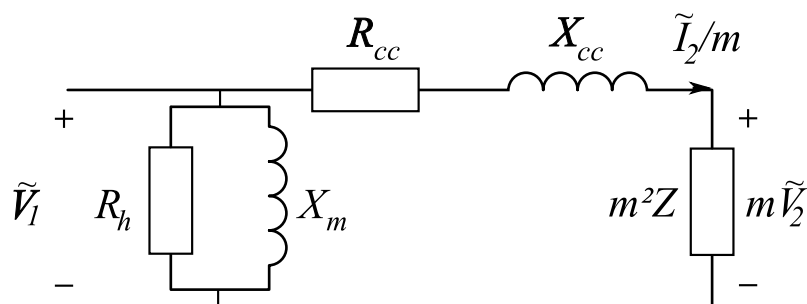
$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{13468}{14119} = 0,95$$

3. Usando los datos del transformador de la pregunta anterior, y **usando las hipótesis de Kapp** obtener:

- el nuevo esquema equivalente del transformador
  - la nueva corriente de primario y de secundario
  - el factor de potencia visto desde el primario
  - el rendimiento del transformador
  - calcular las pérdidas de cobre y de hierro del transformador
  - comparar con los valores obtenidos en el ejercicio anterior
- Datos:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 0,02\Omega$ ,  $X_1 = j12\Omega$ ,  $X_2 = j0,12\Omega$ ,  $Z = 3 \angle 30^\circ \Omega$ ,  $R_h = 20 \cdot 10^3 \Omega$ ,  $X_m = j15 \cdot 10^3 \Omega$ .

**Solución**

a) Ahora con el modelo simplificado, el esquema equivalente se transforma en:



Donde  $R_{cc} = R_1 + m^2 R_2$  y  $X_{cc} = X_1 + m^2 X_2$ .

b) La nueva corriente de secundario se calcula ahora fácilmente:

$$\frac{\tilde{I}_2}{m} = \frac{\tilde{V}_1}{R_{cc} + X_{cc} + m^2 Z} = \frac{2300 \angle 0}{263,8 + j174} = 7,27 \angle -33,4 \text{ A}$$

Para calcular la corriente de primario es preciso añadir la corriente de la rama en paralelo:

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{I}_2}{m} + \frac{\tilde{V}_1}{R_h} + \frac{\tilde{V}_1}{X_m} = 7,27 \angle -33,4 + \frac{2300 \angle 0}{20 \cdot 10^3} + \frac{2300 \angle 0}{j15 \cdot 10^3} = 7,45 \angle -33,9^\circ \text{ A}$$

c) El factor de potencia visto desde el primario se obtiene gracias a la corriente de primario:

$$fp = \cos(32,2) = 0,84$$

d) Con la corriente de primario y de secundario se puede hallar el rendimiento. La potencia activa de la carga es:

$$P_2 = \Re\{Z\} |\tilde{I}_2|^2 = 3 \cos 30 \cdot 72,7^2 = 13732 \text{ W}$$

$$P_1 = |\tilde{V}_1| |\tilde{I}_1| \cos \varphi_1 = 2300 \cdot 7,45 \cos -34 = 14206 \text{ W}$$

El nuevo rendimiento es:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{13732}{14206} = 0,966$$

e) Las pérdidas de cobre del transformador se obtienen con la corriente de secundario  $\tilde{I}_2$  y la resistencia  $R_{cc}$ :

$$P_c = R_{cc} \left| \frac{\tilde{I}_2}{m} \right|^2 = 4 \cdot 7,27^2 = 211 \text{ W}$$

Las pérdidas de hierro se deducen de la tensión de primario y de la resistencia  $R_h$ :

$$P_h = \frac{|\tilde{V}_1|^2}{R_h} = \frac{2300^2}{20 \cdot 10^3} = 264 \text{ W}$$

f) Los valores son consistentes con los obtenidos anteriormente. La aproximación del transformador es buena

4. Para un funcionamiento dado de un transformador se obtienen las pérdidas de cobre y hierro siguientes:  $P_c = 220\text{W}$  y  $P_h = 264\text{W}$ . Expresar la energía perdida en kWh para un mes de funcionamiento, sabiendo que el precio del kWh es de 7 céntimos calcular el precio de las pérdidas para un mes de funcionamiento del transformador.

Antes de calcular la energía gastada, calculamos el número de horas en un mes de 30 días:

$$N = 30 \cdot 24 = 720\text{h}$$

La energía en kW.h es:

$$E = (P_c + P_h) \cdot N = (220 + 264) \cdot 720 = 348,5 \text{ kW.h}$$

Un coste de 7c/kW.h se traduce en un gasto energético de:

$$G = 348,5 \cdot 0,07 = 24,4 \text{ euros}$$

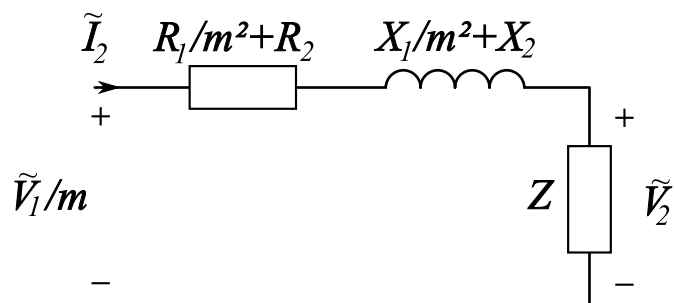
5. Se dispone de un transformador de 30kVA y de tensiones asignadas 2000/200V eficaces. Las pérdidas de cobre y de flujo para el primario y el secundario son las siguientes:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 0,02\Omega$ ,  $X_1 = j12\Omega$ ,  $X_2 = j0,12\Omega$ . Se desprecian las corrientes de pérdidas de hierro y de magnetización. Se conecta una carga con un factor de potencia de 0.9 en atraso y que absorbe la corriente nominal del transformador.
- Dibujar el circuito equivalente del transformador visto desde el secundario.
  - Construir el diagrama de fasores cogiendo  $V_2$  la tensión de salida como referencia.
  - Determinar  $V_2$  de forma geométrica a partir del diagrama de fasores y calcularlo de forma exacta.

### Solución:

a) Para transformar el circuito se toma como referencia la tensión de secundario. Al reducir el transformador la tensión de entrada vale  $V_1/m$  y las impedancias del primario se dividen entre  $m^2$ .

b) Diagrama de fasores con  $V_2$  como referencias:





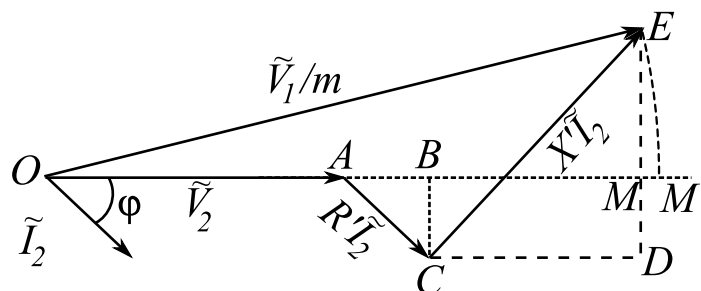
Para simplificar el diagrama de fasores se elige las siguientes notaciones:

$$R' = \frac{R_1}{m^2} + R_2 = 0,04\Omega$$

$$X' = \frac{X_1}{m^2} + X_2 = j0,24\Omega$$

El ángulo  $\varphi$  de desfase entre la tensión de secundario y la corriente  $I_2$  depende del factor de potencia de la carga:

$$\varphi = \arccos(0,9) = 25,84^\circ$$



c) Para determinar  $V_2$  de forma geométrica conviene razonar sobre el diagrama de fasores. Los datos conocidos son la tensión  $V_1$ , la fase  $\varphi$ , la corriente  $I_2$  y los elementos equivalentes  $R'$  y  $X'$  del transformador. Conviene determinar la longitud  $OA$  a partir de estos datos. Se realiza primero un calculo exacto para compararlo luego con otro calculo aproximativo. La longitud de los segmentos  $AM$  y  $EM$  se calculan como:

$$EM = ED - BC = R'I_2 \sin \varphi - X'I_2 \cos \varphi$$

$$AM = AB + BM = R'I_2 \cos \varphi + X'I_2 \sin \varphi$$

Por otro lado con el teorema de Pitágoras se sabe que:

$$\left(\frac{V_1}{m}\right)^2 = OM^2 + EM^2$$

A partir de estos datos obtenemos una fórmula para  $OA$  es decir  $V_2$ :

$$V_2 = OA = OM - AM = \sqrt{\frac{V_1^2}{m^2} - (R'I_2 \sin \varphi - X'I_2 \cos \varphi)^2} - (R'I_2 \cos \varphi + X'I_2 \sin \varphi)$$

Aplicación numérica:

$$V_2 = 197,87V$$

Ahora se aplica el otro método. Considerando que el arco  $OM'$  de centro  $O$  y de radio  $(V_1/m)$ , se deduce que es más o menos igual a  $EM$ . Se puede despreciar la distancia  $MM'$ . Es decir, se aproxima  $V_1/m$  a  $OM$ . Pues el cálculo se simplifica mucho:

$$V_2 = OA = OM - AM \simeq \frac{V_1}{m} - (R'I_2 \cos \varphi + X'I_2 \sin \varphi)$$

En este caso  $V_2$  vale 197.89 Voltios eficaces, la aproximación es satisfactoria.

6. Se dispone de un transformador de distribución de tensión asignada de 24kV/230V y de potencia asignada 83kVA. Los resultados de los ensayos de este transformador dieron:

- Ensayo en vacío:  $P_0 = 216W$ ,  $I_0 = 2\%$  (2% de la corriente nominal de primario).
- Ensayo en corto-circuito:  $P_{cc} = 1083W$ ,  $V_{cc} = 4\%$  (4% de la tensión nominal de primario).

a) Calcular los parámetros eléctricos del transformador, es decir la impedancia de corto-circuito, la resistencia de pérdidas de hierro y la inductancia de magnetización.

Se conecta el transformador anterior a un generador de 24kV y al secundario se conecta una carga  $Z$  con un factor de potencia de 0.85 en atraso. Si la carga consume la corriente asignada, calcular:

- b) La caída de tensión provocada por la impedancia de corto-circuito del transformador.
- c) La impedancia de la carga.
- d) El factor de potencia visto desde el primario.

### Solución

a) Se calculan los parámetros del transformador a partir de los datos de los ensayos. Primero se determinan las corrientes nominales del transformador:

$$I_{1n} = \frac{|S|}{V_{1n}} = \frac{83 \cdot 10^3}{24 \cdot 10^3} = 3,45 \text{ A}$$

$$I_{2n} = \frac{|S|}{V_{2n}} = \frac{83 \cdot 10^3}{230} = 360,8 \text{ A}$$

El valor numérico de la rama en paralelo se halla con el ensayo en vacío usando las ecuaciones 5.86, 5.88 y 5.90. El ángulo  $\theta_0$  de desfase entre tensión y corriente es:

$$\theta_0 = \arccos \left( \frac{P_0}{0,02 \cdot I_{1n} V_{1n}} \right) = \arccos \left( \frac{216}{1656} \right) = 82,5^\circ$$

Se calcula el modulo de la impedancia equivalente:

$$|Z_e| = \frac{V_{1n}}{0,02I_{1n}} = 347,8 \text{ k}\Omega$$

Las impedancias de la rama en paralelo son:

$$R_h = \frac{|Z_e|}{\cos \theta_0} = 2664,8 \text{ k}\Omega$$

$$X_m = j \frac{|Z_e|}{\sin \theta_0} = j350,8 \text{ k}\Omega$$

Para calcular la resistencia de corto-circuito se emplean las ecuaciones 5.97, 5.98 y 5.99. Se despeja el ángulo  $\theta_{cc}$ :

$$\theta_{cc} = \text{acos} \left( \frac{P_{cc}}{I_{1n} \cdot 0,04V_{1n}} \right) = \text{acos} \left( \frac{1083}{3312} \right) = 71^\circ$$

Se calcula el módulo de la impedancia equivalente:

$$|Z_e| = \frac{0,04 \cdot V_{1n}}{I_{1n}} = 278,2 \Omega$$

Las impedancias de corto-circuito son:

$$R_{cc} = R_1 + m^2 R_2 = |Z_e| \cos \theta_{cc} = 90,6 \Omega$$

$$X_{cc} = X_1 + m^2 X_2 = j|Z_e| \sin \theta_{cc} = j263,1 \Omega$$

b) Se conecta ahora al transformador una carga que consume la corriente nominal al secundario. El ángulo de la carga es:  $\varphi = \text{acos}(0,85) = 31,8^\circ$  y la relación de transformación es  $m = 104,3$ . La caída de tensión se obtiene gracias a la regulación de voltaje del transformador:

$$\varepsilon \simeq \frac{R_{cc}|\tilde{I}_{2n}| \cos \varphi + |X_{cc}|\tilde{I}_{2n}| \sin \varphi}{mV_{1n}} = \frac{90,6 \cdot 360,8 \cdot 0,85 + 263,1 \cdot 360,8 \cdot 0,52}{104,3 \cdot 24000} = 0,031$$

Es decir que la caída referida al secundario es:

$$\Delta V = \varepsilon V_{2n} = 0,0311 \cdot 230 = 7,1V$$

Es una caída de tensión importante.

c) El modulo de la impedancia es:

$$|Z| = \frac{|V_2|}{|I_2|}$$

El modulo de  $V_2$  se puede aproximar gracias a la caída de tensión al secundario:

$$V_2 \simeq V_{2n} - \Delta V = 230 - 7,1 = 223 \text{ V}$$

El modulo de  $Z$  vale entonces:

$$|Z| = \frac{223}{360,8} = 0,62 \Omega$$

Con el ángulo despejado antes se obtiene:  $Z = 0,62\angle 31,8^\circ\Omega$ .

d) Para calcular el factor de potencia es necesario hallar primero la corriente  $\tilde{I}_1$ :

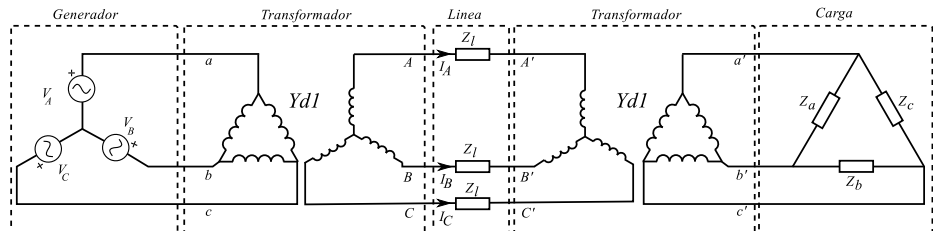
$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}_1}{R_{cc} + X_{cc} + m^2 Z} + \frac{\tilde{V}_1}{R_h} + \frac{\tilde{V}_1}{X_m} = \frac{24 \cdot 10^3}{5823 + j3817} + \frac{24 \cdot 10^3}{2664 \cdot 10^3} + \frac{24 \cdot 10^3}{j350,8 \cdot 10^3} =$$

$$\tilde{I}_1 = 2,891 - j1,958 = 3,5\angle -34,1^\circ \text{ A}$$

7. Disponemos de dos transformadores trifásicos de índice horario Yd1 y de valores asignados 4kV/100kV y de potencia nominal 300kVA. El primer transformador se conecta del lado de baja tensión (BT) en triángulo a un generador de tensión fase-neutro  $V_{an} = 4000V$ . El lado de alta tensión (AT) se conecta a una línea de transporte de energía de impedancia  $\rho_L = (2 + j1) \cdot 10^{-5}\Omega \cdot \text{km}^{-1}$ . El segundo transformador se conecta del lado AT a la línea de transporte. En el lado BT tenemos una carga en triángulo de impedancia  $Z_\Delta = 480\angle 15^\circ\Omega$ .

- Dibujar el esquema del sistema completo.
- Calcular el desfase entre tensiones simples al primario y al secundario de ambos transformador.
- Calcular las pérdidas de potencia por kilómetro en la línea.
- Calcular el rendimiento de la instalación en función de la longitud de la línea.

**Solución a)**



b) Dado que los dos transformadores son de tipo Yd1, el índice horario nos indica que existe un desfase de  $30^\circ$  entre tensión de el lado en estrella de AT y el lado en triángulo de BT. Si llamamos  $\tilde{V}_{an}$ ,  $\tilde{V}_{AN}$  las tensiones simples del primario y secundario en el primer transformador y  $\tilde{V}_{A'N}$ ,  $\tilde{V}_{a'n}$  las tensiones de primario y secundario en el segundo transformador, tenemos las relaciones:

$$\tilde{V}_{A'N} = \frac{m}{\sqrt{3}} \tilde{V}_{a'n} \angle 30^\circ$$

$$\tilde{V}_{AN} = \frac{m}{\sqrt{3}} \tilde{V}_{an} \angle 30^\circ$$

Hay que tener cuidado para el primer transformador está conectado en el sentido BT/AT, mientras el segundo se conecta en el sentido AT/BT en reductor. Las relaciones de transformación en los transformadores son:  $m_1 = \sqrt{3}/m$  y  $m_2 = m/\sqrt{3}$  con  $m = 4/100$ .

b) Para calcular las pérdidas en la línea en función de la distancia tenemos que transformar las impedancias. Primero transformamos la carga a una carga en estrella, tenemos:

$$Z_Y = \frac{1}{3}Z_\Delta = 160\angle 15^\circ\Omega$$

Ahora transformamos las impedancias vistas desde el primero quitando los transformadores. Primero transformamos la impedancia de la carga quitando el transformador reductor, queda:

$$Z'_Y = (m_2)^2 Z_Y.$$

La segunda etapa consiste en quitar el transformador elevador de la entrada. Las impedancias de línea y de carga se reducen a:

$$\begin{aligned} Z''_Y &= m_1^2 m_2^2 Z_Y = Z_Y \\ Z'_l &= m_1^2 Z_l \end{aligned}$$

La corriente que circula por una rama del circuito equivalente es:

$$\tilde{I}_A = \frac{\tilde{V}_{AN}}{Z''_Y + Z'_l} = \frac{\tilde{V}_{AN}}{Z''_Y + Z'_l} \simeq \frac{\tilde{V}_{AN}}{Z''_Y}$$

Despreciamos en este caso la impedancia de línea para simplificar el cálculo. Se justifica dado que  $Z_Y \gg Z'_l$ , salvo para distancias muy largas. Después del cálculo tenemos:  $\tilde{I}_A \simeq 25\angle -15^\circ\text{A}$ . Las pérdidas por km son:

$$P_{km} \simeq 3(\Re\{Z'_l\}|I_A|^2) = 3\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{0,04}\right)^2 2 \cdot 10^{-5} \cdot 25^2\right) = 70\text{W}\cdot\text{km}^{-1}$$

c) El rendimiento se puede calcular gracias a las pérdidas en la línea y la potencia que absorbe la carga.

$$\eta(d) \simeq \frac{P_{Z_Y}}{P_{Z_Y} + P_{km} \cdot d} = \frac{300 \cdot 10^3}{300 \cdot 10^3 + 70 \cdot d}$$

## 5.8 Ejercicios adicionales

1. Un transformador tiene un flujo magnético máximo en su núcleo de 4mWb oscilando a una frecuencia de 50Hz. Sabiendo que el primario tiene 100 vueltas encontrar la tensión máxima del primario. [Resp: 89V]
2. Se realiza una prueba de un transformador en circuito abierto y se leen los valores siguientes en los aparatos de medida:  $V_1 = 2000\text{V}$ ,  $I_1 = 0,1\text{A}$  de 50Hz y un factor de potencia  $fp = 0,857$ . Deducir la resistencia equivalente de hierro y la inductancia de magnetización.  
[Resp.  $R_h = 23,3\text{ K}\Omega$ ,  $X_m = j38,3\text{ K}\Omega$ ]

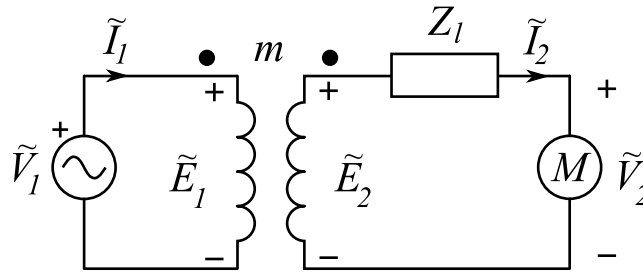


Figura del ejercicio 3

3. En el esquema anterior se muestra el sistema de alimentación de un motor asíncrono. Se alimenta el motor a través de un transformador monofásico ideal de potencia nominal 10kVA, de tensión de primario 2400V y de tensión de secundario de 400V. La línea que conecta el motor con el transformador tiene una impedancia  $Z_l = 2 + j2\Omega$ .
  - a) Calcular la relación de transformación del transformador.
  - b) Sabiendo que cuando funciona el motor su impedancia equivalente es  $Z_m = 20 + j4\Omega$ , calcular la tensión  $V_2$  de alimentación del motor y la corriente  $I_2$  consumida. Dar además la potencia y el factor de potencia del motor. ¿El transformador puede suministrar la potencia necesaria?
  - c) Calcular la pérdida de potencia en la línea y el rendimiento del dispositivo.
  - d) El motor funciona con 400V y en el momento del arranque necesita una corriente de 40A. ¿Puede arrancar el motor con el sistema propuesto antes? Si no, proponer una solución.

[Resp: a)  $m = 6$  b)  $\tilde{V}_2 = 357,7\angle -4^\circ\text{V}$ ,  $\tilde{I}_2 = 17,6\angle -15,1^\circ\text{A}$  c)  $P_l = 17,1\text{W}$ ,  $P_M = 171\text{W}$  d) No. Hay que reducir la corriente de arranque.]

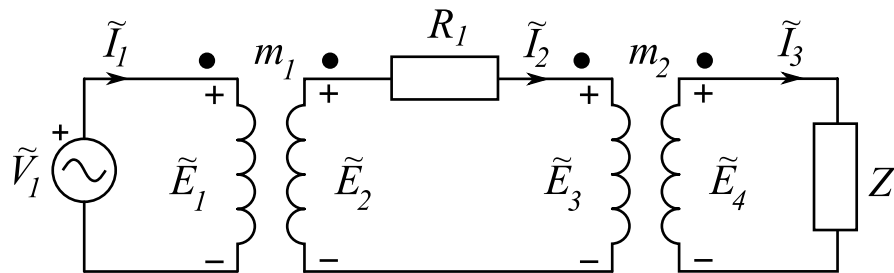


Figura del ejercicio 4

4. Se muestra en la figura anterior el esquema de un sistema de transporte de energía. Se alimenta un línea monofásica con un generador de 10kV a través de un transformador de relación de transformación  $m_1$ . La línea de transporte es equivalente a una impedancia de valor  $R_1 = 10\Omega$ . El segundo transformador de relación  $m_2$  rebaja la tensión para obtener una tensión  $E_4 = 1\text{kV}$ . El ejercicio consiste en determinar los parámetros  $m_1$  y  $m_2$  para minimizar las pérdidas de transporte de energía.

- a) Dar el circuito equivalente de todo el dispositivo (transformar primero el transformador 2 y luego el 1).
- b) Calcular las pérdidas en la línea sabiendo que  $Z = 2\Omega$ .
- c) Diseñar  $m_1$  y  $m_2$  para obtener pérdidas inferior a 1 % la potencia consumida por la carga.
- d) Dar el rendimiento total del dispositivo.
- [Resp: a) b)  $P_l = 5000\text{W}$  c)  $m_1 = 0,446$  y  $m_2 = 22,2$  d)  $\eta = 0,99$ ]
5. Un transformador de 100kV/10kV y de potencia nominal 200kVA se conecta a una carga que consume una potencia aparente del 80 % de la potencia nominal. La carga tiene un factor de potencia igual a 0,7.
- Datos: frecuencia de 50Hz, resistencias de cobre  $R_1 = 300\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ , resistencia equivalente de perdidas del núcleo:  $R_h = 50 \cdot 10^6\Omega$ . (Las tensiones se dan en valor eficaz).
- a) ¿Que potencia activa consume la carga?
- b) ¿Que potencia reactiva consume la carga?
- c) ¿Cuanto vale la corriente que circula por la carga? (se puede suponer la tensión nominal a la salida).
- d) Dibujar el esquema equivalente visto desde el primario usando las hipotesis de Kapp.
- e) Usando las hipotesis de Kapp estimar las perdidas de cobre.
- f) Usando también las hipotesis de Kapp calcular las perdidas de hierro.
- g) Calcular el rendimiento del transformador.
- [Resp: a)  $P_c = 112\text{kW}$ , b)  $Q_c = 114,2\text{kVAR}$ , c)  $I_2 = 16\text{A}$ , e)  $P_{co} = 1536\text{W}$  f)  $P_h = 200\text{W}$  g)  $\eta = 0,984$  ]

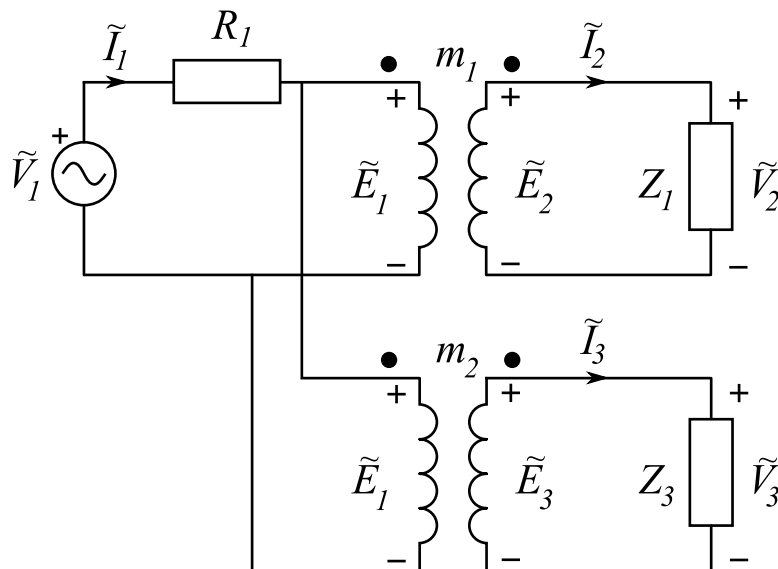


Figura del ejercicio 6

6. En la figura anterior se muestra el esquema de dos transformadores conectados cada uno a una carga. Al primario se encuentra la resistencia equivalente de pérdidas de cobre. Tenemos los siguientes datos: transformador 1 (arriba) de tensión nominal  $2kV/100V$ , transformador 2 (abajo) de tensión nominal  $2kV/50V$ ,  $|\tilde{V}_1| = 950V$  con una frecuencia de  $50Hz$ ,  $R_1 = 10\Omega$ ,  $Z_1 = 10 + j2\Omega$  y una carga  $Z_3 = 1 + j1\Omega$ .

- Dar la relación de transformación de los transformadores.
- Calcular la impedancia equivalente visto de desde  $V_1$ .
- ¿Cual es la potencia (compleja) que consume la carga  $Z_3$ ?
- ¿Cuanto vale el factor de potencia del sistema visto de desde  $V_1$ ?

[Resp: a)  $m_1 = 20$ ,  $m_2 = 40$ , b)  $Z_{eq} = 1279 + j827\Omega$ , c)  $I_2 = 1,185 - j1,17A$   
d)  $fp = 0,84$ ]

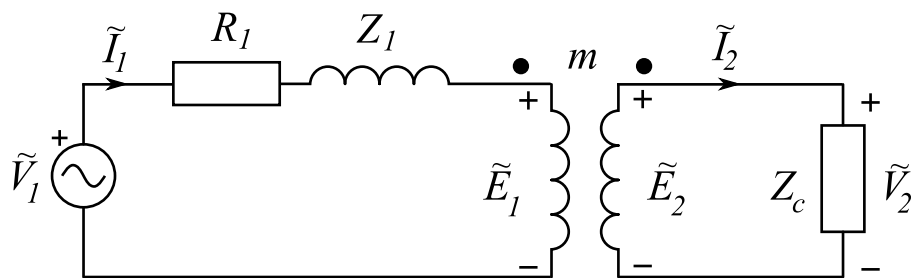


Figura del ejercicio 7.

7. En la figura anterior Se muestra el esquema de un transformador conectado a una carga. Al primario aparece la impedancia equivalente de pérdidas de flujo y la resistencia equivalente de pérdidas de cobre. Se disponen de los siguientes datos: transformador de tensión nominal  $1kV/100V$ ,  $|\tilde{V}_1| = 900V$  con una frecuencia de  $60Hz$ ,  $R_1 = 11\Omega$ ,  $Z_1 = j11\Omega$  y una carga  $Z_c = 1 + j0,5\Omega$

- Dar la relación de transformación del transformador.
- Calcular la impedancia equivalente visto de desde el primario.
- ¿Cual es la potencia (compleja) que consume la carga?
- ¿Cuanto vale el factor de potencia del sistema?
- Calcular la potencia y el valor del condensador en paralelo con la fuente de tensión para obtener un factor de potencia unidad.

[Resp: a)  $m = 10$  b)  $Z_{eq} = 111 + j61\Omega$  c)  $S_c = 5092 + j2546VA$  d)  $fp = 0,87$   
e)  $Q_c = -3080VAR$ ,  $C = 0,165F$ ]



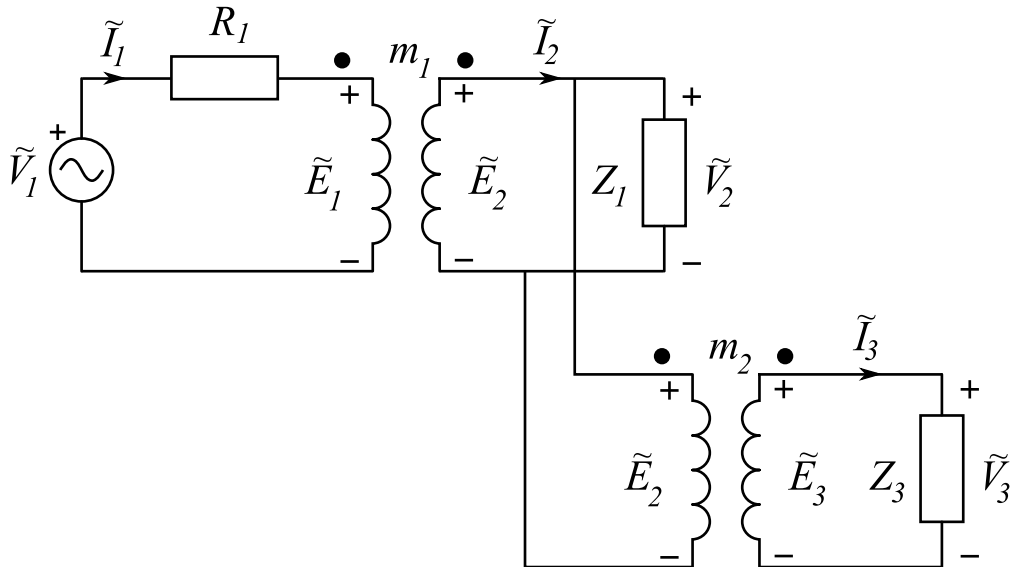


Figura del ejercicio 8

8. En la figura anterior se muestra el esquema de dos transformadores conectados cada uno a una carga. Tenemos los siguientes datos: transformador 1 (arriba) de tensión nominal  $1kV/100V$ , transformador 2 (abajo) de tensión nominal  $2000V/200V$ ,  $|\tilde{V}_1| = 950V$  con una frecuencia de  $50Hz$ ,  $R_1 = 10\Omega$ ,  $Z_1 = 2 + j2\Omega$  y una carga  $Z_3 = 1 + j1\Omega$ . (Las tensiones se dan en valor eficaz).
- Dar la relación de transformación de los transformadores.
  - Calcular la impedancia equivalente visto desde  $V_1$ .
  - ¿Cual es la potencia (compleja) que consume la carga  $Z_3$ ?
  - ¿Cuanto vale el factor de potencia del sistema visto desde  $V_1$ ?
- [Resp: a)  $m_1 = m_2 = 10$  b)  $Z_{eq} = 207 + j196\Omega$  c)  $S_{Z_3} = 426,6 + j426,6kVA$  d)  $fp = 0,726$ ]
9. Un transformador de  $2.5kV/250V$  y de potencia nominal  $3kVA$  se conecta a dos motores en paralelo. Tienen una potencia activa de  $1000W$  cada uno y un factor de potencia  $0.8$  inductivo cuando se les conecta a la tensión del secundario. Datos: frecuencia de  $50Hz$ , resistencias de cobre  $R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 1\Omega$ , resistencia equivalente de pérdidas del núcleo:  $R_h = 6,3 \cdot 10^5\Omega$ . (Las tensiones se dan en valor eficaz). **Usando las hipótesis de Kapp:**
- Calcular las pérdidas de cobre cuando se enciende uno de los motores.
  - Calcular las pérdidas de cobre cuando se enciende los dos motores a la vez.
  - Calcular las pérdidas de hierro.
  - Calcular el rendimiento del transformador en los dos casos.
- [Resp: a)  $P_{co} \simeq 50W$  b)  $P_{co} \simeq 200W$  c)  $P_h \simeq 10W$  d)  $\eta_1 = 0,943$ ,  $\eta_2 = 0,905$ ]

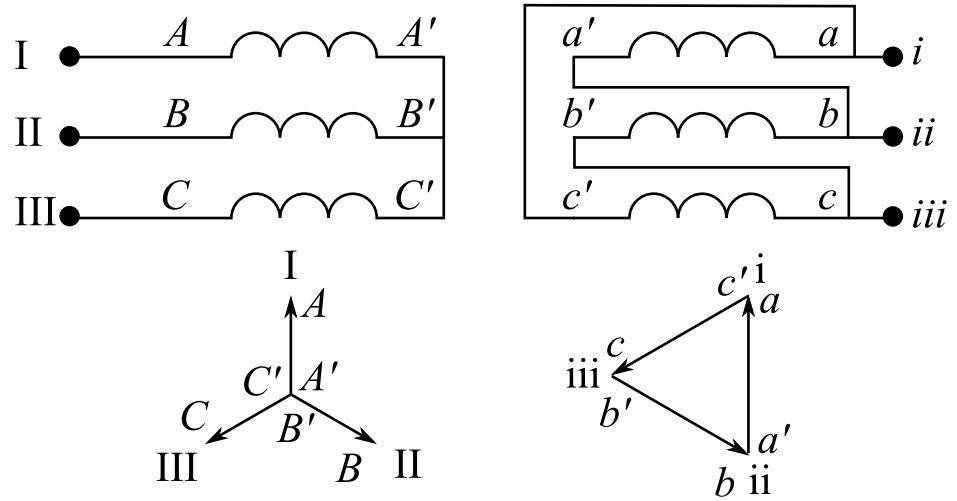


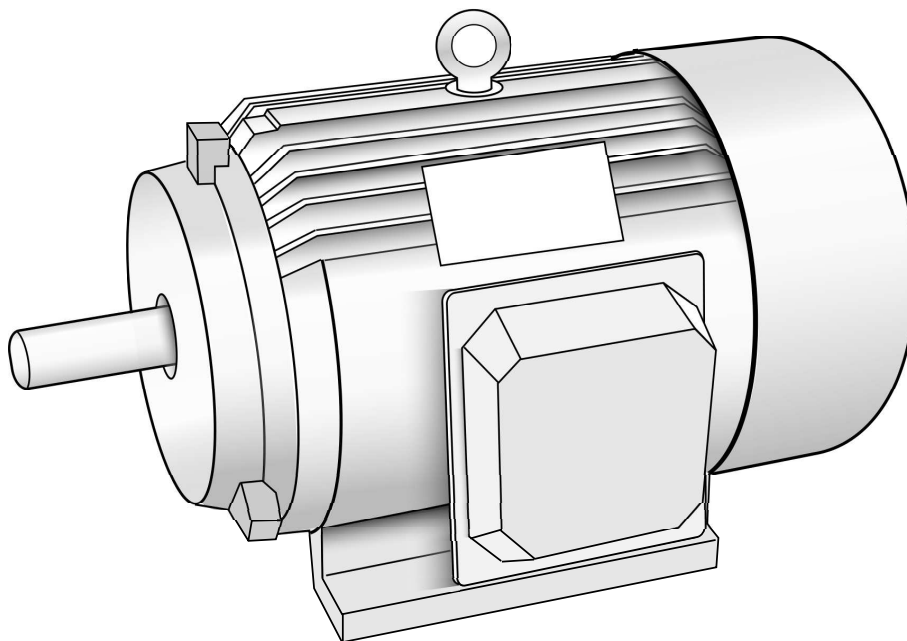
Figura del ejercicio 10

10. A partir del esquema de la figura anterior hallar el índice horario y la denominación del transformador.

[Resp: Dy1]

## 6 Motores y generadores eléctricos

---



Aspecto de un motor asíncrono.

En este capítulo se describen las máquinas eléctricas empleadas más comúnmente en las aplicaciones industriales y domésticas. Nos centraremos en los generadores y motores rotativos dado que el transformador ha sido tratado en un capítulo aparte. Los motores eléctricos forman parte de nuestra vida cotidiana, sin darnos cuenta los encontramos en una multitud de aparatos electrodomésticos y de electrónica de consumo. También en las industrias están presentes a todos los niveles, son unos elementos fundamentales de cualquier proceso de producción. Se habla cada vez más de medios de transporte con energía eléctrica, por ejemplo las redes de transporte ferroviario ya están electrificadas en su casi-totalidad y por supuesto usan motores eléctricos. Sin embargo se tiende también a incorporar la electricidad en el transporte privado, los coches eléctricos están en auge.

Los generadores eléctricos por otra parte juegan el papel esencial de producir la electricidad que van a usar estos motores. Son la principal fuente de energía eléctrica en el mundo. Las otras fuentes que no cuentan con generadores, co-

mo por ejemplo la energía fotoeléctrica, son todavía marginales en cuestión de volumen de producción.

## 6.1 Motores asíncronos

Los motores asíncronos se usan en la mayoría de las aplicaciones de pequeña y media potencia (de 1 a 100kW). Para las aplicaciones domésticas (lavadoras, taladros, ...) se usan también motores de tipo asíncrono. Son motores muy robustos con una construcción y un funcionamiento sencillo. Se utilizan sobre todo en aplicaciones que no necesitan un control preciso de la velocidad de rotación, ya que este control resulta difícil<sup>1</sup>. Estos motores se encuentran en bombas, taladros, ascensores, grúas, máquinas herramientas, etc.

En esta sección se tratan los aspectos físicos y se analizan en detalle el modelo eléctrico de este motor.

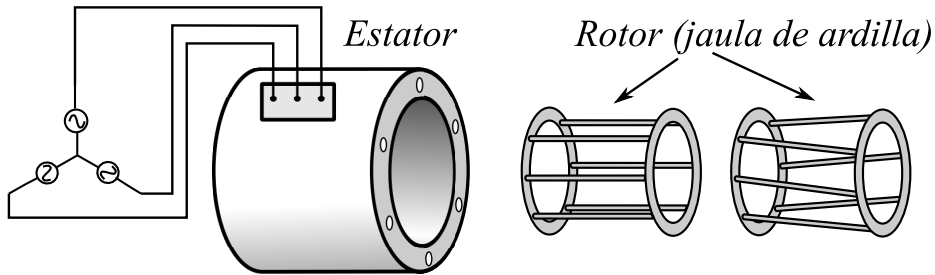
### 6.1.1 Construcción y principios de funcionamiento

La máquina se compone de un **estátor** con un campo **inductor** y de un **rotor** con un campo **inducido**. El estátor se presenta como un cilindro hueco rodeado por las bobinas del inductor (ver figura 6.1). El rotor también es un elemento cilíndrico colocado en el interior estátor pero puede girar libremente su eje. En el rotor se inducen tensiones, corrientes y fuerzas que se describen más adelante.

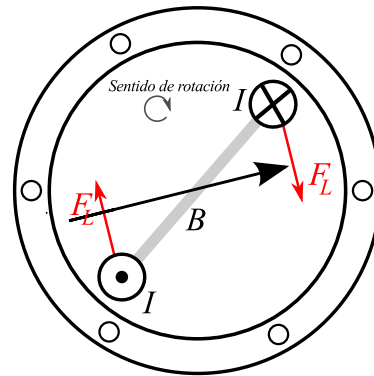
Las máquinas asíncronas en funcionamiento de motor se basan en el campo giratorio creado por un devanado trifásico. El campo inductor es el campo magnético descrito por las ecuaciones (4.118). Es un campo casi uniforme en la cavidad del estátor y gira en el espacio con una velocidad angular constante. La rotación se efectúa en el plano perpendicular al eje del estátor, es decir en la sección transversal del cilindro.

El tipo de rotor más común para máquinas asíncronas de media potencia es el rotor en **jaula de ardillas**. Consiste en unas barras conductoras en corto circuito en sus extremos (ver figura 6.1). Al aplicar un campo magnético giratorio en el estátor, la variación de campo magnético provoca una tensión inducida en las barras conductoras de acuerdo con la ley de Faraday. Las barras están en un principio quietas dentro del estátor, la variación de campo genera una tensión en los extremos de la barra y por tanto la circulación de una corriente. La corriente creada por esta inducción interactúa a su vez con el campo, una fuerza de Laplace aparece gradualmente (ver capítulo 4). La fuerza de Laplace generada se orienta de tal modo que pone en movimiento la jaula de ardilla y empieza la rotación del rotor. En resumen, la secuencia del proceso de rotación es:

<sup>1</sup> La electrónica de potencia y el uso de semiconductores aportan soluciones a este problema de velocidad.



**Figura 6.1** Esquema de un motor asíncrono con jaula de ardilla. A la izquierda tenemos el estator alimentado en trifásico para la creación del campo giratorio. A la derecha tenemos dos ejemplos de rotor en jaula de ardilla. El rotor con las barras ligeramente torcidas mejora el rendimiento del motor.



**Figura 6.2** Generación de una corriente inducida en la jaula de ardillas. El campo magnético giratorio induce una tensión un la circulación de una corriente en los conductores. Esta corriente interactúa con el campo magnético provocando la aparición de una fuerza de Laplace en el conductor. Esta fuerza de Laplace provoca a su vez el movimiento del rotor.

1. Un campo giratorio se genera en la cavidad del estátor.
2. Un rotor formado de conductores en el cual la rotación del campo provoca una tensión inducida proporcional a la velocidad angular  $\omega$ .
3. Con la tensión inducida aparece una corriente circulando en las barras.
4. La corriente inducida interactúa con el campo, aparecen fuerzas de Laplace.
5. El rotor empieza a girar debido a la acción de las fuerzas de Laplace.

En la figura 6.2 se muestra la generación de una corriente en una espira colocada en un campo giratorio creado por el estátor. El sentido de la corriente es tal que el campo generado por la espira se opone al campo giratorio que le ha dado lugar. Las fuerzas de Laplace generadas siguen el sentido de rotación del campo giratorio (siguiendo la ley:  $\mathbf{F}_L = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ ).

A medida que la velocidad del rotor aumenta, la velocidad relativa entre la jaula de ardilla y el campo rotativo disminuye. Si la velocidad relativa disminuye, la tensión inducida también disminuye y también la corriente. Cuando las dos velocidades son iguales la tensión inducida es nula dado que no hay variación de flujo en las barras del rotor debido a que “vería” un campo estático. Al ser cero la tensión inducida, la corriente y la fuerza de Laplace son nulas. No hay movimiento posible sin fuerza de Laplace, lleva como consecuencia que es físicamente imposible que la velocidad del campo giratorio y del rotor sean iguales. El rotor va a girar a una velocidad justo por debajo de la velocidad síncrona (la velocidad del campo giratorio). Por esta razón se llama velocidad **asíncrona**. El nombre de la máquina viene de esta propiedad.

La relación entre las velocidades del rotor y del campo se llama el deslizamiento:

$$n = n_s - n_r \quad (6.1)$$

con  $n_s$  la **velocidad síncrona** del campo giratorio y  $n_r$  la **velocidad del rotor**. Las velocidades se expresan aquí en revoluciones por minutos [r.p.m.]. Más comúnmente se expresa el deslizamiento en una fracción  $s$  de la velocidad de sincronismo  $n_s$ :

$$s = \frac{n_s - n_r}{n_s} \quad (6.2)$$

Este ratio es inferior o igual a uno pero estrictamente superior a cero. En general el deslizamiento se expresa en porcentaje de  $(1 - s)$  en los casos prácticos. Los dos casos inmediatos son:

- $s = 0$ , tenemos  $n_s = n_r$ , hemos visto que este caso es imposible.
- $s = 1$ , tenemos  $n_r = 0$ , es el caso del rotor bloqueado.

El deslizamiento va a depender de la carga del motor. Aumenta  $s$  con la carga mecánica debido a que pedimos más esfuerzo al motor. La velocidad de rotación disminuye a medida que el esfuerzo aumenta hasta que se para totalmente cuando la carga supera un cierto umbral. En máquinas comunes el deslizamiento es inferior al 5%, es decir que la velocidad del rotor es un 95% de la velocidad del campo.

### Ejercicio 6.1

Un motor asíncrono de 4 polos y de frecuencia de alimentación 50Hz gira a 1400 r.p.m. ¿Cual es el deslizamiento de la máquina?

### Solución del ejercicio 6.1

Antes de poder calcular el deslizamiento hay que calcular la velocidad síncrona. Ayudándonos del capítulo 4, encontramos:

$$n_s = \frac{120f_e}{N_p} = \frac{120 \cdot 50}{4} = 1500 \text{ r.p.m}$$

El deslizamiento es entonces:

$$s = \frac{1500 - 1400}{1500} = 0,066$$

El deslizamiento es de 93.4% la velocidad síncrona.

### 6.1.2 Circuito equivalente

El circuito equivalente de una máquina asíncrona se parece mucho al modelo equivalente de un transformador trifásico. Tiene un devanado primario alimentado por una tensión alterna trifásica (el estátor), y tiene otro devanado inducido que es el rotor. El estátor y el rotor forman un circuito magnético para la circulación del flujo. Además, las pérdidas de potencia comparten similitudes con las del transformador. El modelo de la máquina cuando el estátor se mantiene bloqueado es el modelo de un transformador con un corto-circuito en la salida. El campo del primario induce una tensión en el secundario asimilado a conductores en cortocircuito.

El circuito equivalente de **una fase** del motor asíncrono consiste en un devanado primario alimentado por una tensión alterna, es el modelo del estátor. El circuito del secundario consiste en un devanado inducido en corto circuito, representa una fase del rotor. Puede existir un número de fase diferente al primario y al secundario pero suponemos que son idénticos, por lo que el estudio de una de las fases permite obtener un modelo del motor. Se incluyen en el modelo las pérdidas de cobre creadas por el calentamiento debido al efecto Joule. Se incluye también las pérdidas de hierro y la corriente de magnetización que aparecen en cualquier circuito magnético. Estas pérdidas surgen al primario y al secundario pero las pérdidas de la bobina secundaria suelen despreciarse. Para afinar el modelo se pueden incluir los efectos de la dispersión del campo magnético al primario y al secundario. Al nivel eléctrico, este efecto se modeliza como una inductancia  $X_1$  y  $X_2$  en el circuito equivalente de la figura 6.3 (a).

El esquema eléctrico del motor es básicamente el equivalente del esquema del transformador en cortocircuito al secundario pero con una diferencia importante, las frecuencias de la tensiones al secundario y al primario son distintas. Se expresa la tensión en el primario y en el secundario de un transformador en función del flujo común y de la frecuencia de las tensiones que generan el flujo:

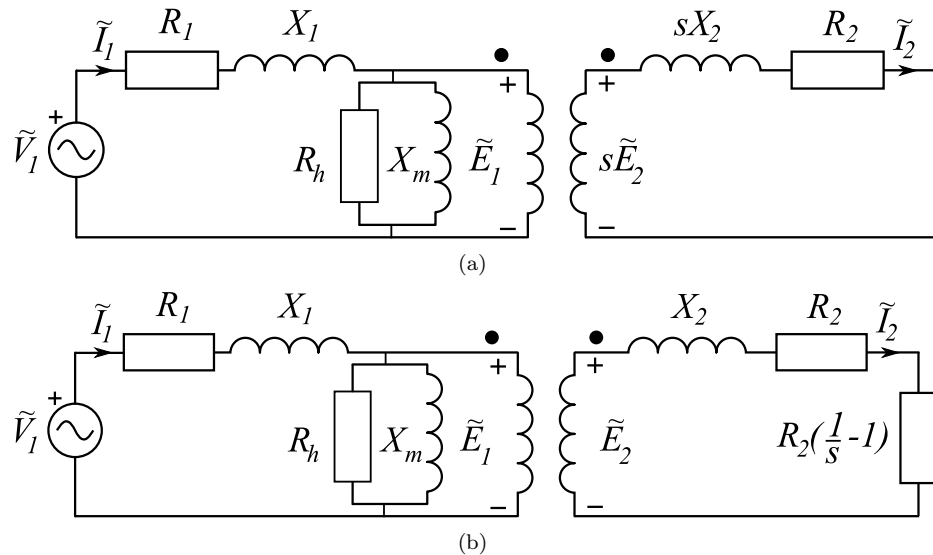
$$E_1 = N_1 \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (6.3)$$

y en forma fasorial se multiplica por la frecuencia de oscilación:

$$\tilde{E}_1 = 2\pi f_s N_1 \tilde{\Phi}_m, \quad (6.4)$$

Para el secundario del motor asíncrono:

$$E_{2r} = N_2 \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (6.5)$$



**Figura 6.3** Esquema eléctrico equivalente de un motor asíncrono con jaula de ardilla. (a) Esquema equivalente con las tensiones de secundario e inductancias proporcionales a  $s$ . (b) Esquema equivalente con la carga ficticia  $R_2(1/s - 1)$  que depende del deslizamiento de la máquina.

La forma fasorial siendo:

$$\tilde{E}_{2r} = 2\pi(f_s - f_r)N_2\tilde{\Phi}_m. \quad (6.6)$$

Cuando el rotor gira, el flujo inducido en las barras es proporcional a la diferencia de velocidad entre el campo giratorio y el rotor. Esta diferencia es igual a  $f_s - f_r = sf_s$  con  $s = (f_s - f_r)/f_s$ , es la definición del deslizamiento. La nueva tensión  $\tilde{E}_{2r}$  será entonces:

$$\tilde{E}_{2r} = 2\pi sf_s N_2 \tilde{\Phi}_m = s\tilde{E}_2 \quad (6.7)$$

Con  $\tilde{E}_2$  la f.e.m equivalente de un transformador ideal cuando las frecuencias del primario y del secundario son iguales:  $\tilde{E}_2 = 2\pi f_s N_2 \tilde{\Phi}_m$ . **La tensión en el devanado del rotor varía entonces en función de la velocidad del rotor.**

En la figura 6.3 (a), tenemos una inductancia  $X_2$  al secundario que representa la inductancia de pérdidas de flujo. Cuando el rotor **no gira**, es decir  $s = 1$ , la reactancia  $X_2$  tiene como expresión:

$$X_2 = jL_2\omega_s \quad (6.8)$$

$L_2$  sería una propiedad del circuito y  $\omega_s$  es la velocidad de sincronismo dado que la frecuencia al primario y al secundario es la misma cuando el rotor está parado o bloqueado.

Cuando el rotor empieza a girar, la reactancia se modifica al igual que la tensión inducida  $E_{2r}$ . El campo en el rotor depende de la diferencia de velocidades



entre el rotor y el estátor  $\omega_2 = \omega_s - \omega_r = s\omega_s$ . La reactancia de dispersión en el secundario al depender de la frecuencia tiene entonces un nuevo valor:

$$X_{2r} = jL_2\omega_2 = jL_2s\omega_s \quad (6.9)$$

Por lo que la inductancia equivalente al secundario vale  $X_{2r} = sX_2$  tal como aparece en la figura 6.3 (a).

Basando nos en la figura 6.3 (a), la intensidad en el circuito del secundario se puede escribir como:

$$\tilde{I}_2 = \frac{s\tilde{E}_2}{sX_2 + R_2} = \frac{\tilde{E}_2}{X_2 + R_2/s} \quad (6.10)$$

Cuando el rotor gira, tenemos una variación (aparente) de la resistencia del devanado. Podemos también descomponer esta resistencia en dos contribuciones:

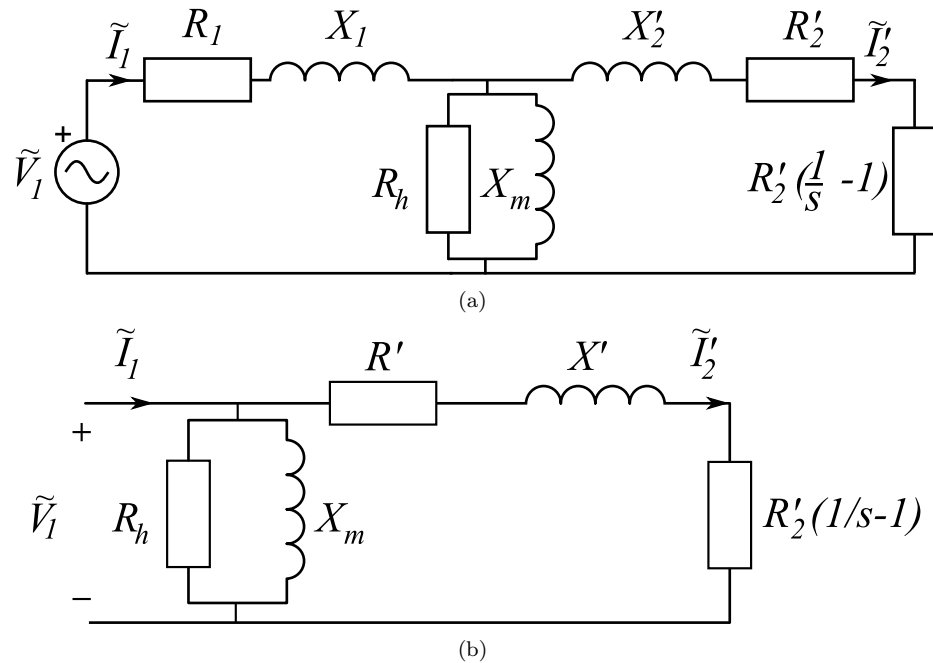
$$R_2/s = R_2 + R_2\left(\frac{1}{s} - 1\right) \quad (6.11)$$

Aparece una nueva resistencia en serie en el circuito equivalente de la máquina asíncrona como enseñado en la figura 6.3 (b). Esta resistencia va a variar con la carga mecánica de la máquina. Cuando la carga del motor aumenta, la velocidad disminuye por el esfuerzo. Se reduce la resistencia  $R_2/s$  y aumenta el consumo eléctrico del motor. Veámoslo con más detalles, al tener que proporcionar un par, la velocidad del rotor disminuye y por lo tanto el deslizamiento  $s$  aumenta acercándose a la unidad ( $s = (n_s - n_r)/n_s$ ). La tensión inducida también aumenta dado que es proporcional a la diferencia de velocidad entre el rotor y el estátor por la ecuación (6.7). Como consecuencia las corrientes aumentan y también la potencia consumida. Más adelante calcularemos la velocidad y la potencia eléctrica en función de este esfuerzo mecánico.

Se pueden hacer las mismas aproximaciones que en el transformador para la rama en paralelo de pérdidas de hierro y corriente magnetización del circuito. Esta rama se puede pasar a la entrada del circuito equivalente al ser la caída de potencia en la resistencia equivalente  $R_1$  y las pérdidas de flujo  $X_1$  pequeñas frente al voltaje  $\tilde{V}_1$ .

El circuito equivalente se simplifica aún mas al considerar las relaciones de transformación entre el primario y el secundario. Al igual que en el transformador, se puede reducir el esquema a un circuito visto desde el primario. Sin embargo existen diferencias importantes entre la máquina asíncrona y el transformador, el primario y el secundario no oscilan a la misma frecuencia. Además el número de fases, o de polos, puede ser distinto entre el rotor y el estátor. En estos casos conviene definir una relación de transformación distinta para las tensiones y para las corrientes.

A pesar de estas diferencias tomamos la aproximación del transformador y definimos una relación efectiva  $a_{ef}$  entre las tensiones y las corrientes del rotor



**Figura 6.4** Esquema eléctrico equivalente final de un motor asíncrono con jaula de ardilla. (a) Modelo con las impedancias transformadas al secundario. (b) Esquema equivalente final de la máquina asíncrona, la rama paralela se sitúa a la entrada y se suman las impedancias de pérdidas de cobre y de flujo.

y del estátor:

$$\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_2} = a_{ef} \quad (6.12)$$

$$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = \frac{1}{a_{ef}} \quad (6.13)$$

Supondremos idéntico el número de fases del rotor y del estátor. Podemos ahora definir las impedancias y corrientes reduciendo el circuito al primario, es decir, haciendo desaparecer el transformador del esquema:

$$\tilde{E}'_2 = a_{ef} \tilde{E}_2 \quad (6.14)$$

$$\tilde{V}'_2 = a_{ef} \tilde{V}_2 \quad (6.15)$$

$$\tilde{I}'_2 = \tilde{I}_2 / a_{ef} \quad (6.16)$$

$$X'_2 = a_{ef}^2 X_2 \quad (6.17)$$

$$R'_2/s = a_{ef}^2 R_2/s \quad (6.18)$$

En la figura 6.4 (a) se ha representado el esquema equivalente con los parámetros definidos aquí. Se obtiene un esquema más funcional para los cálculos pasando la rama en paralelo de pérdidas de hierro y de inductancia de magnetización a

la entrada. El esquema equivalente final aproximado de la máquina asíncrona se puede observar en la figura 6.4 (b). Además se han reunido las pérdidas de flujo y de cobre en un único elemento:

$$R' = R_1 + R_2' \quad (6.19)$$

$$X' = X_1 + X_2' \quad (6.20)$$

La resistencia de salida depende del deslizamiento de la máquina.

### Ejercicio 6.2

Hallar la potencia de salida del rotor para el motor trifásico siguiente:  $n_s = 600$  r.p.m.,  $s = 4\%$ ,  $V_A = 400$  V,  $R' = 1\Omega$ /fase,  $X' = j1\Omega$ /fase,  $R_2' = 0,5\Omega$ .

### Solución del ejercicio 6.2

Para hallar esta potencia disipada se calcula la corriente que circula en el motor:

$$|\tilde{I}_2| = \frac{|\tilde{V}_A|}{|Z_{eq}|}$$

con  $Z_{eq} = X' + R' + R_2'(1/s - 1) = 13 + j\Omega$ . Tenemos  $I_2 = 30,7$  A. La potencia de salida es entonces:

$$P_s = 3R_2'\left(\frac{1}{s} - 1\right)|\tilde{I}_2|^2 = 34596 \text{ W}$$

### 6.1.3 Potencia, rendimiento

Para calcular el rendimiento y la potencia útil de un motor asíncrono primero se enumeran las distintas pérdidas del motor:

1. Pérdidas de cobre en los devanados del inductor y del inducido  $P_{co1}$  y  $P_{co2}$
2. Pérdidas de hierro en el estátor  $P_{h1}$  y en el rotor  $P_{h2}$ .
3. Pérdidas mecánicas de rozamiento  $P_m$

Siendo la potencia activa de entrada  $P_e$ , la potencia que llega al rotor es entonces:

$$P_r = P_e - P_{co1} - P_{h1} \quad (6.21)$$

Para obtener la potencia útil del rotor se quitan las correspondientes pérdidas de cobre y de hierro:

$$P_{mi} = P_r - P_{co2} - P_{h2} \quad (6.22)$$

En general las pérdidas de hierro al secundario son despreciables ( $P_{h2}$ ), se considera que todas las pérdidas se producen en el primario. En la figura 6.6 aparece un esquema equivalente de la máquina asíncrona con las potencias disipadas en

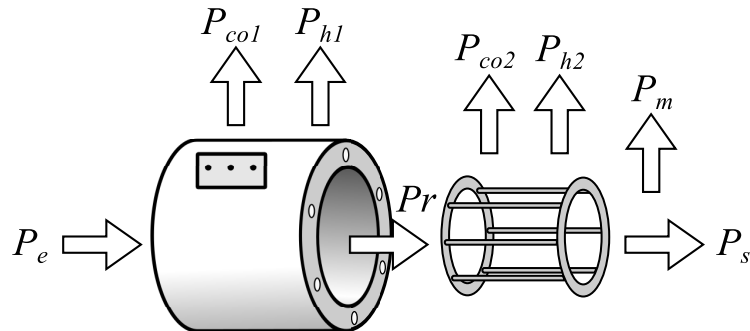


Figura 6.5 Esquema de las pérdidas de potencia en una máquina asíncrona.

cada etapa. Ayudándonos de las figuras 6.5 y 6.6 se determina la relación entre las potencias.

En estas figuras, aparece a la entrada la potencia y las diversas pérdidas a lo largo del proceso de conversión. La potencia útil del rotor se llama aquí  $P_{mi}$ , es la potencia mecánica interna. Es la suma de la potencia de salida y de las pérdidas mecánicas  $P_m$ :

$$P_{mi} = P_m + P_s \quad (6.23)$$

La potencia mecánica interna se proporciona a través de la carga ficticia para una fase  $R_2(\frac{1}{s} - 1)$  en el esquema equivalente de la máquina asíncrona. Sin embargo hay que tener cuidado al número de fases del rotor. Si el rotor tiene tres fases, la potencia será entonces tres veces la potencia de una fase. El caso de los motores trifásicos es el más común por lo que trataremos las potencias con 3 fases. Se puede establecer una relación entre las tres potencias  $P_m$ ,  $P_{co2}$  y  $P_{mi}$ :

$$P_r = P_{mi} + P_{co2} = nR_2\left(\frac{1}{s} - 1\right)\frac{|I_2|^2}{2} + nR_2\frac{|I_2|^2}{2} = n\frac{R_2|I_2|^2}{s2} = \frac{P_{co2}}{s}, \quad (6.24)$$

con  $n$  el número de fases.

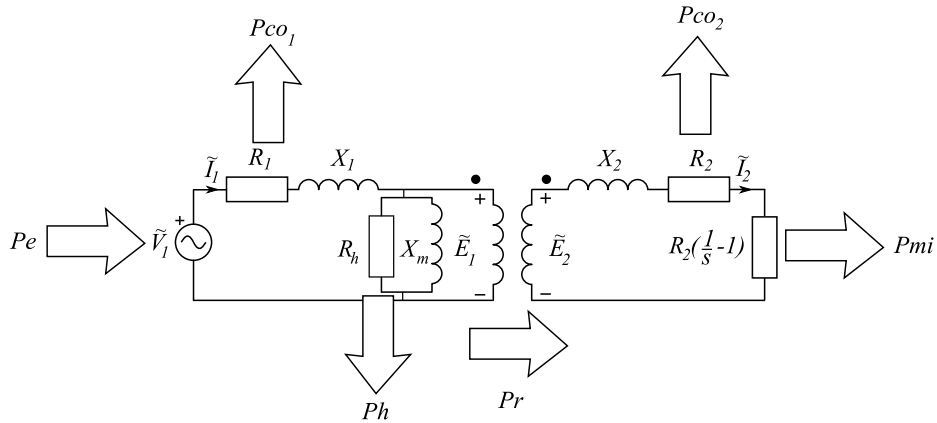
Existe una relación analítica entre la disipación en el cobre y la potencia disponible en el rotor:

$$P_r = \frac{P_{co2}}{s} \quad (6.25)$$

El rendimiento del motor se halla haciendo el balance de potencia entre la entrada y la salida:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} = \frac{P_s}{P_s + P_m + P_{co2} + P_{co1} + P_h} = \frac{P_s}{P_{co2}/s + P_{co1} + P_h}. \quad (6.26)$$

El rendimiento depende de la velocidad y por tanto de la carga mecánica de la máquina.



**Figura 6.6** Esquema de las pérdidas en una máquina asíncrona junto con el circuito equivalente.

### Ejercicio 6.3

Un motor asíncrono de 6 polos, 50Hz gira con una velocidad de 960 r.p.m. Por otra parte las pérdidas del estátor son de 70W y la potencia que llega al rotor es de 1230W. Calcular el rendimiento del motor (Se desprecian las pérdidas mecánicas).

### Solución del ejercicio 6.3

Primero calculamos el deslizamiento del motor. La velocidad síncrona es:  $n_s = 120 \cdot 50 / 6 = 1000$  r.p.m. El deslizamiento es de:  $s = (1000 - 960) / 1000 = 0,04$ , es decir 4%.

Sabemos por otro lado que la potencia que llega al rotor es igual a las pérdidas de cobre entre el deslizamiento. Las pérdidas de cobre en el rotor son:

$$P_{co2} = s \cdot P_r = 0,04 \cdot 1230 = 49,2W$$

Sabemos que las pérdidas del estátor son:

$$P_{co1} + P_h = 70W$$

Podemos ahora calcular el rendimiento:

$$\eta = \frac{P_r - P_{co2}}{P_r + P_{co1} + P_h} = \frac{1230 - 49,2}{1230 + 70} = 0,91$$

#### 6.1.4 Ensayos del motor

Para determinar los parámetros internos del motor se realizan dos ensayos eléctricos. Como en el caso del transformador estos ensayos consisten en el ensayo

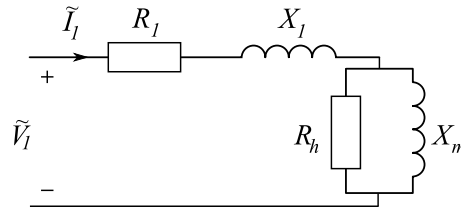


Figura 6.7 Esquema equivalente de una fase del motor asíncrono en el ensayo en vacío.

en vacío y el ensayo en cortocircuito. Sin embargo los ensayos del motor difieren mucho del ensayo del transformador. Por ejemplo no se deja el secundario abierto o en cortocircuito dado que no tenemos acceso al devanado del rotor (salvo en caso particular del rotor bobinado).

**El ensayo en vacío** consiste en dejar el motor girar sin carga mecánica. En este caso la resistencia equivalente de carga  $R_2(1/s - 1)$  toma un valor muy alto dado que el deslizamiento  $s$  se acerca a cero. Sin embargo la resistencia no es infinita, circula una corriente pequeña. Esta corriente se debe a las pérdidas de cobre en el estátor  $P_{co1}$  en su mayoría al poder despreciar las pérdidas de cobre del rotor. Para medir las pérdidas  $P_{co1}$  se mide la resistencia del devanado con el motor desconectado de la red. Esta medida solo nos da una estimación dado que la resistencia cambia cuando se alimenta el estátor. Esta variación se debe al efecto pelicular y al calentamiento de los conductores.

El ensayo en vacío permite determinar las pérdidas de hierro del estátor y las pérdidas mecánicas. La potencia medida durante el ensayo corresponde a la suma de las tres pérdidas siguiente:

$$P_0 = P_{co1} + P_m + P_h. \quad (6.27)$$

Una vez conocido  $P_{co1}$  con la medida de la resistencia podemos determinar  $P_m$  y  $P_h$ . El método consiste en tomar varias medidas de las pérdidas para tensiones de alimentación distintas. La suma de las pérdidas mecánicas y de hierro se expresan como:

$$P_{mh} = P_m + P_h = P_m + \frac{3|\tilde{V}_1|^2}{R_h}, \quad (6.28)$$

dado que las pérdidas mecánicas no dependen del voltaje  $\tilde{V}_1$ , se ajusta linealmente esta ecuación si tenemos dos o más medidas de las pérdidas. Consiste en ajustar las medidas a una recta de ecuación  $y = ax + b$  donde  $x$  es la tensión al cuadrado  $|\tilde{V}_1|^2$  e la variable  $y$  la potencia  $P_{mh}$  medida. Con ello obtenemos  $R_h$  y  $P_m$  variando  $\tilde{V}_1$ .

Se puede obtener aún más información de este ensayo. Fijándonos en el esquema equivalente del motor de una fase en la figura 6.7, la rama del secundario es despreciable dado que la corriente  $I_2$  es muy pequeña en vacío ( $s$  es cercano a 1). Tenemos entonces únicamente la rama en paralelo en serie con  $R_1$  y  $X_1$ . La corriente de magnetización necesaria para establecer el flujo en la máquina

es grande debido al entrehierro entre el rotor y el estátor. Significa que la reactancia  $X_m$  será mucho más pequeña que para un transformador y la reluctancia muy grande. Por otro lado en este ensayo podemos considerar que las caídas de tensión se deben esencialmente a la reactancia de dispersión y a la reactancia  $X_m$  de flujo de magnetización. Llegamos a estimar estas reactancias a partir de la medida de tensión y corriente:

$$|Z_{eq}| = \frac{|\tilde{V}_1|}{|\tilde{I}_1|} \simeq |X_1| + |X_m| \quad (6.29)$$

En otras palabras se considera que la potencia reactiva es mucho mayor que la potencia activa.

**El ensayo en cortocircuito** consiste en bloquear el rotor alimentando el motor de tal manera que la corriente nominal circule en los devanados, implica bajar la tensión de entrada. Este ensayo permite hallar las pérdidas de cobre del rotor y del estátor. La tensión de entrada siendo baja, se pueden despreciar las pérdidas de hierro. Basándonos en el circuito equivalente de la figura 6.4 (b), las pérdidas medidas en este ensayo se escriben como:

$$P_{co1} + P_{co2} = 3R'|\tilde{I}_1|^2 = (R_1 + R'_2)|\tilde{I}_1|^2. \quad (6.30)$$

La resistencia  $R_1$  se mide conectando el motor a una generador de tensión continua de tal forma que circule la corriente nominal en los cables. La corriente de entrada se debe únicamente a la resistencia de los cables  $R_1$  dado que no hay inducción posible. Una vez conocido  $R_1$  se despeja  $R'_2$ . La inductancia  $X'$  se determina con el factor de potencia:

$$\cos \phi = \frac{P_{co1} + P_{co2}}{3|\tilde{I}_1||\tilde{V}_1|}. \quad (6.31)$$

Gracias al ángulo  $\phi$  tenemos  $X'$ :

$$X' = X_1 + X'_2 = \frac{|\tilde{V}_1|}{|\tilde{I}_1|} \sin \phi. \quad (6.32)$$

Sin embargo no podemos distinguir entre  $X_1$  y  $X'_2$ .

#### Ejercicio 6.4

Tenemos los siguientes resultados del ensayo de un motor asíncrono (**resultados por fase**):

- Ensayo en vacío:  $V_0 = 230\text{V}$ ,  $f=50\text{Hz}$ ,  $P_0 = 100\text{W}$ ,  $I_0 = 10,95\text{A}$ .
- Ensayo en corto-circuito:  $V_{cc} = 85,6\text{V}$ ,  $P_{cc} = 1000\text{W}$ ,  $I_{cc} = 41\text{A}$
- Medida de  $R_1$ :  $R_1 = 0,2\Omega$

Hallar el modelo aproximado por fase del motor asíncrono.

**Solución del ejercicio 6.4**

Del ensayo en vacío podemos deducir la reactancia de pérdidas de flujo y de magnetización es

$$|X_1| + |X_m| = \frac{|V_0|}{|I_0|} = \frac{230}{10,95} = 21\Omega$$

La medida de la resistencia de cobre permite hallar primero las pérdidas de cobre al primario:

$$P_{co1} = R_1 |\tilde{I}_0|^2 = 24 \text{ W}$$

Las pérdidas mecánicas y de hierro son:

$$P_m + P_h = P_0 - P_{co1} = 100 - 24 = 76 \text{ W}$$

Ahora se usa el ensayo en corto-circuito para hallar más parámetros. Las pérdidas de cobre en este ensayo son casi todo el consumo de potencia. Podemos deducir la resistencia  $R'_2$  gracias a este dato:

$$R'_2 = \frac{P_{cc}}{|I_{cc}|^2} - R_1 = \frac{1000}{41^2} - 0,2 = 0,4\Omega$$

Se determinan ahora las inductancias de dispersión de flujo al primario y al secundario. El ángulo del factor de potencia es:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{P_{cc}}{|V_{cc}||I_{cc}|}\right) = \arccos\left(\frac{1000}{85,6 \cdot 41}\right) = 73,4^\circ$$

La suma de las inductancias es:

$$X' = X_1 + X'_2 = \frac{|V_{cc}|}{|I_{cc}|} \sin \varphi = \frac{85,6}{41} \sin 73,4 = 2\Omega$$

Para hallar la resistencia  $R_h$  necesitamos más ensayos.

**6.1.5 Potencia mecánica del motor asíncrono**

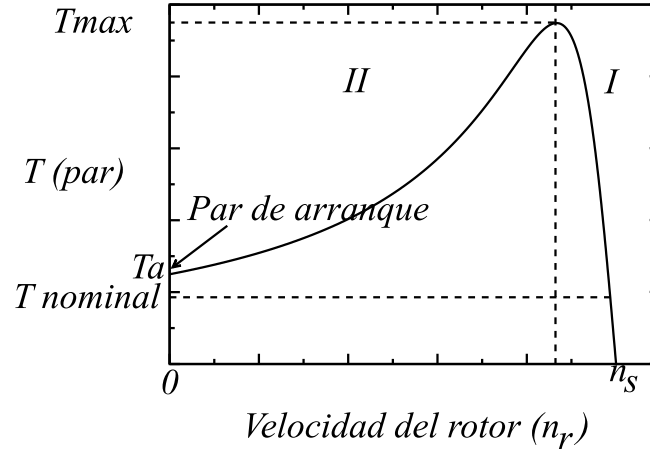
Las leyes de la mecánica establecen una relación entre el par mecánico y la potencia equivalente en vatios. La potencia de la máquina depende del par mecánico  $T$  y de la velocidad de rotación de la siguiente forma:

$$P_s = T \cdot \omega_r, \quad (6.33)$$

con  $T$  el par producido por el motor y  $\omega_r$  la velocidad angular del motor. Interesa expresar el torque en función de los parámetros del circuito equivalente de la máquina para así poder analizar cuales son los aspectos importantes a la hora de construir un sistema mecánico y de elegir el motor adecuado.

La potencia de salida  $P_s$  es la suma de la potencia mecánica interna del motor  $P_{mi}$  y de las pérdidas mecánicas  $P_m$ . Si despreciamos las pérdidas mecánicas de





**Figura 6.8** Torque del motor asíncrono en función de la velocidad del rotor en unidad arbitraria.

momento podemos expresar el par de la siguiente manera:

$$T = \frac{P_{mi}}{\omega_r}. \quad (6.34)$$

Por otra parte  $\omega_r = 2\pi/60n_r$  con  $n_r$  la velocidad de rotación del rotor en r.p.m. En el apartado anterior hemos visto que la potencia  $P_r$  que llega al rotor se expresa en función de  $P_{mi}$  y  $P_{co2}$  las pérdidas de cobre en el rotor:

$$P_r = P_{mi} + P_{co2} = \frac{P_{co2}}{s}. \quad (6.35)$$

Después de una manipulación sencilla se llega a:

$$P_{mi} = P_r(1 - s). \quad (6.36)$$

Por otro lado, podemos relacionar la velocidad de sincronismo  $n_s$  y la velocidad del rotor  $n_r$  con el deslizamiento:  $s = (n_s - n_r)/n_s$ . Operando y sustituyendo obtenemos finalmente la expresión del par en función de la velocidad:

$$T = \frac{P_r}{\frac{2\pi}{60}n_s}. \quad (6.37)$$

Esta relación resulta interesante dado que solo depende de la velocidad de sincronismo que conocemos (y no de  $P_{mi}$  o  $\omega_r$ ). Ahora, a partir del circuito equivalente de la figura 6.4 (b), las potencias son accesibles y se expresan en función del par.

La potencia del rotor se puede descomponer en función de los parámetros del circuito, se disipa enteramente en la resistencia ficticia  $R'_2/s$ :

$$P_r = \frac{3|\tilde{I}_2|^2 R'_2}{s} \quad (6.38)$$

La corriente  $\tilde{I}'_2$  se puede expresar como:

$$|\tilde{I}'_2| = \frac{|\tilde{V}_1|}{\sqrt{(R_1 + R'_2/s)^2 + (X_1 + X'_2)^2}} \quad (6.39)$$

Combinamos las expresiones (6.38) y (6.39) en la ecuación (6.37) para despejar una expresión del par en función de los parámetros del circuito:

$$T(s) = \frac{3|\tilde{V}_1|^2 R'_2/s}{\frac{2\pi}{60} n_s [(R_1 + R'_2/s)^2 + (X_1 + X'_2)^2]} \quad (6.40)$$

La gráfica 6.8 representa el aspecto del torque para velocidades del rotor comprendidas entre 0 y la velocidad de sincronismo  $n_s$ , o lo que es equivalente para deslizamientos entre 1 y 0. En esta figura podemos distinguir entre dos regiones. En la zona I a la derecha, cerca de la velocidad de sincronismo, el par aumenta rápidamente cuando la velocidad de sincronismo disminuye. Cuando la velocidad del rotor disminuye la potencia consumida aumenta y el par también. Este par aumenta hasta alcanzar un máximo. En la zona II, cuando la velocidad disminuye todavía más, el par vuelve a disminuir. El par para una velocidad nula corresponde al par de arranque. Para poder arrancar el motor, el par aplicado a la máquina tiene que ser inferior a este valor. A partir de las ecuaciones podemos definir entonces el par de arranque y el par máximo de la máquina.

El par de arranque  $T_a$  equivale a introducir  $s = 1$  en la fórmula (6.40) del par:

$$T(1) = T_a = \frac{3|\tilde{V}_1|^2 R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_s [(R_1 + R'_2)^2 + (X_1 + X'_2)^2]} \quad (6.41)$$

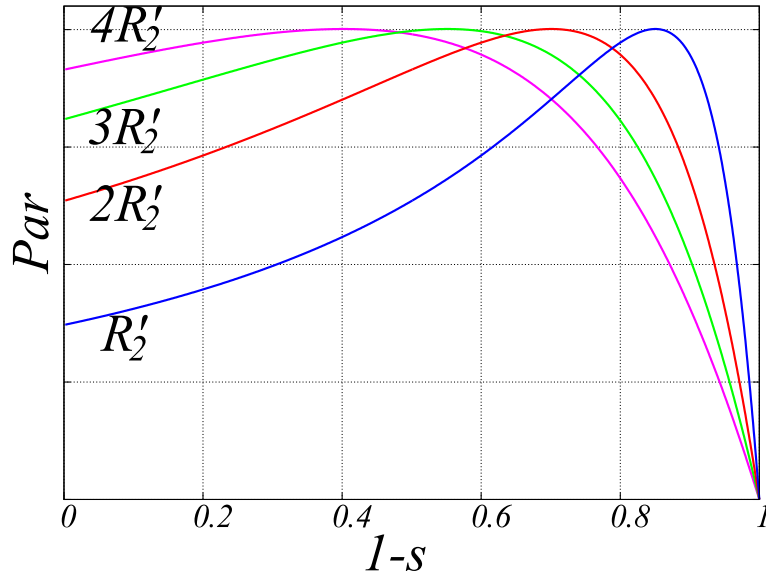
Para encontrar el par máximo se puede hallar la solución de la ecuación  $dT/ds = 0$ . Después del cálculo obtenemos:

$$s_{max} = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X'_2)^2}} \quad (6.42)$$

$$T_{max} = \frac{3|\tilde{V}_1|^2}{2\frac{2\pi}{60} n_s [R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X'_2)^2}]} \quad (6.43)$$

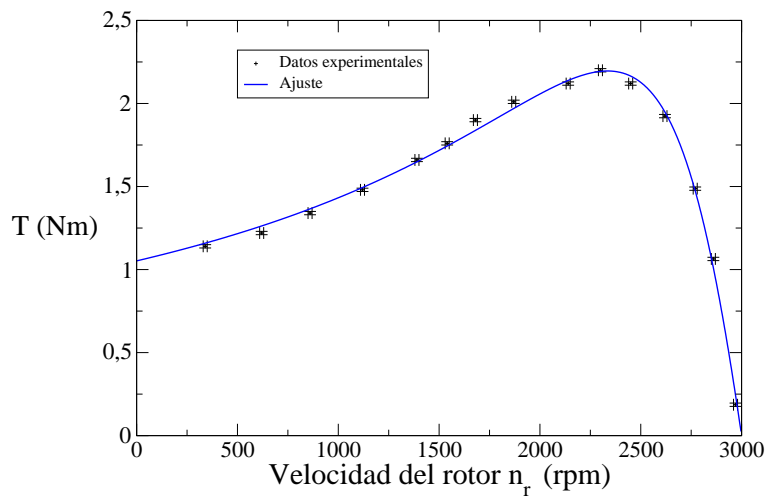
Se puede diseñar así un motor con el par requerido. Como se puede ver, el par máximo  $T_{max}$  no depende de la resistencia del secundario  $R'_2$ . Sin embargo, esta resistencia influye el par de arranque  $T_a$ , por lo que si conseguimos modificar esta resistencia podemos también controlar el par de arranque  $T_a$ . En la práctica se usa un rotor con anillos deslizantes que permiten añadir una resistencia en serie con las barras conductoras de la jaula de ardilla. Cambiando esta resistencia se puede obtener un par de arranque mayor y el eje de la máquina puede asumir más esfuerzos. En la figura 6.9 se observa como el par de arranque se modifica según aumentamos la resistencia  $R'_2$ . Sorprendentemente el par máximo no cambia. Para una resistencia suficientemente alta podemos obtener el par requerido para el arranque. Luego se reduce esta resistencia para volver al régimen nominal de la máquina.

Se presenta como ejemplo en la figura siguiente la característica de un motor



**Figura 6.9** Variación de la característica Par/velocidad en función de la resistencia del secundario  $R'_2$ . En esta figura podemos ver como el par de arranque ( $1 - s = 0$ ) crece cuando se aumenta esta resistencia.

asíncrono conectado en triángulo a una tensión de 400V eficaz. Las características del motor indicadas en la placa son: 400V  $\Delta$ ; 0,3kW;  $\cos\phi = 0,8$ ; 2800 r.p.m.



Gracias a un dispositivo experimental conseguimos una medidas de la característica par/velocidad. Estas medidas están representadas en la figura anterior con cruces negras. Junto con estas medidas experimentales se representa el ajuste

de los datos con el modelo de la ecuación (6.40).

$$R_1 = 114\Omega \quad (6.44)$$

$$R'_2 = 60\Omega \quad (6.45)$$

$$X_{cc} = 242\Omega \quad (6.46)$$

$R_1$  ha sido medido directamente del devanado. Como se puede observar en la figura, el modelo se ajusta perfectamente a los datos experimentales.

### Ejercicio 6.5

Un motor asíncrono de dos polos y 50Hz conectado en triángulo a una tensión de 380V tiene los siguientes parámetros eléctricos:  $R_1 = 0,6\Omega$ ,  $R'_2 = 0,3\Omega$ ,  $X_1 = 1\Omega$ ,  $X_2 = 0,4\Omega$ ,  $X_m = 30\Omega$ .

- Calcular el par máximo del motor y el deslizamiento para obtener este par.
- Calcular el par de arranque.
- Calcular el deslizamiento y el rendimiento cuando la carga del motor es 70% del par máximo.

### Solución del ejercicio 6.5

- Antes de hallar el par máximo calculamos la velocidad síncrona.

$$n_s = \frac{120 \cdot 50}{2} = 3000 \text{ r.p.m.}$$

Aplicamos ahora las fórmulas para el par máximo el deslizamiento:

$$s_{max} = \frac{0,3}{\sqrt{0,6^2 + (1 + 0,4)^2}} = 0,197$$

Tenemos el par máximo para un deslizamiento de 0.2, es decir para una velocidad de rotación de  $0,8 \cdot 3000 = 2400$  r.p.m.

$$T_{max} = \frac{3|380|^2}{100\pi[0,6 + \sqrt{0,6^2 + (1 + 0,4)^2}]} = 324 \text{ N.m}$$

La potencia desarrollada por el motor en esta situación es:

$$P_m = T_{max}\omega_{max} = 324 \cdot (2400 \frac{2\pi}{60}) = 227,4 \text{ kW}$$

- Buscamos el par de arranque del motor:

$$T(1) = T_a = \frac{3|380|^2 0,3}{100\pi[(0,6 + 0,3)^2 + (1 + 0,4)^2]} = 149 \text{ N.m} \quad (6.47)$$

- Se quiere ahora conocer el deslizamiento y el rendimiento del motor

cuando la potencia del motor es de 70 % del par máximo. Tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$$0,7 \cdot T_{max} = \frac{3|\tilde{V}_1|^2 R'_2/s}{\frac{2\pi}{60} n_s [(R_1 + R'_2/s)^2 + (X_1 + X'_2)^2]}$$

Sustituyendo los valores obtenemos una ecuación que depende unicamente de  $s$ :

$$s \cdot 0,7 \cdot 324 \cdot 100\pi [(0,6 + 0,3/s)^2 + (1 + 0,4)^2] = 3|380|^2 0,3$$

Después de manipular obtenemos un polinomio en  $s$

$$2,3s^2 - 1,46s + 0,09 = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuaciones son:  $s = \{0,56; 0,069\}$ . La solución más adecuada es la más pequeña, por lo que la velocidad es:

$$n = (1 - 0,069) \cdot 3000 = 2793 \text{ r.p.m}$$

Para hallar el rendimiento del motor en esta situación debemos calcular la corriente que circula en el secundario. La corriente por fase es:

$$|\tilde{I}_2| = \frac{|V_1|}{|j(X_1 + X'_2) + (R_1 + \frac{R'_2}{s})|} = 73,9 \text{ A}$$

Depreciando las pérdidas mecánicas tenemos el rendimiento del motor usando la ecuación 6.1.3:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} = \frac{0,7 \cdot 324 \cdot 292,5}{\frac{3 \cdot 0,3 \cdot 73,9^2}{0,069} + 3 \cdot 0,6 \cdot 73,9^2 + \frac{3 \cdot 380^2}{10 \cdot 10^3}} = 0,81$$

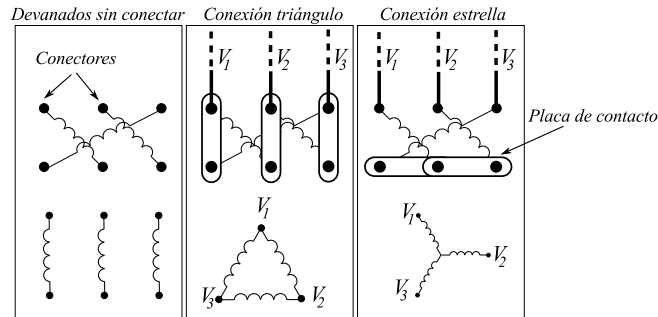
### 6.1.6 Aspectos constructivos

Se describen aquí los aspectos prácticos mas importantes del motor asíncrono.

El motor tiene que alimentarse con una tensión trifásica para la creación del campo giratorio. Existen como de costumbre dos formas de conectarlo: en estrella y en triángulo. Dependiendo de la tensión disponible en la red y de las características del motor se puede conectar de una forma u otra. Para conectarlo correctamente primero se debe de verificar la placa de características del motor. En esta placa aparecen dos indicaciones como por ejemplo:

- $\Delta$  - 220 V
- Y - 380 V

Es decir que si nuestra tensión de red es de **220V entre fases**, entonces se conecta el motor en triángulo. En el caso de tener 380V entre fases se conecta el motor en estrella. Los devanados del estátor estarán conectados en estrella o en triángulo a la red. La caja de conexión del motor permite elegir el tipo de conexión modificando los contactos de los devanados. En la figura 6.10 se



**Figura 6.10** Conexión a la red trifásica de un motor asíncrono. El panel de la izquierda tenemos la caja de conexiones del motor, se representan los devanados del estátor con sus bornes de conexión, en este caso no están conectados. En el panel central los devanados del estátor se conectan entre sí en triángulo con unas placas conductoras para asegurar la conexión a la red eléctrica (tensiones  $\tilde{V}_1$ ,  $\tilde{V}_2$  y  $\tilde{V}_3$ ). En el panel de la derecha se conecta el motor a la red con los devanados en estrella.

detallan los dos tipos de conexiones posibles. Modificando la disposición de las placas conductoras se conectan los devanados del estátor a la red en estrella o en triángulo. Para el ejemplo anterior con una tensión de 220V entre fases se debe de conectar el motor en triángulo de tal manera que la tensión en los extremos de un devanado sea 220V. Si la tensión entre fase es de 380V conectamos el motor en estrella y la tensión en cada devanado sera de  $380/\sqrt{3}$ V es decir 220V. La corriente de línea de la red es diferente en ambos casos.

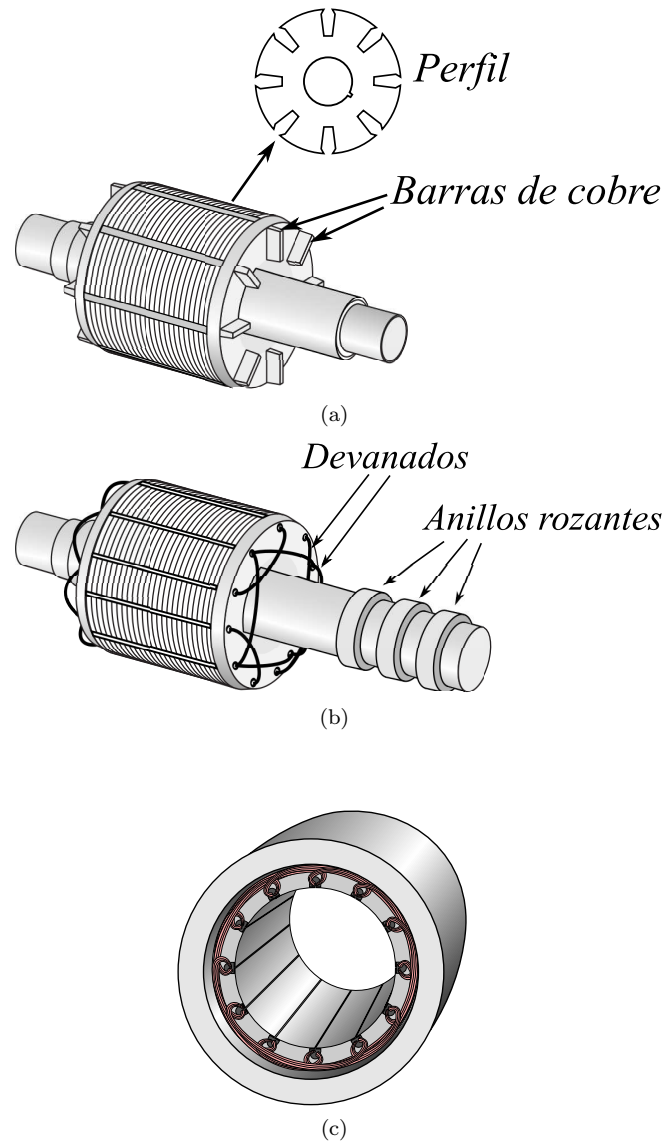
**El sentido de rotación** de la máquina depende también de la conexión de la máquina a la red. El campo giratorio determina el sentido de rotación del rotor, para cambiar el sentido, simplemente se invierten dos de los tres conductores de la alimentación trifásica.

En la placa de características del motor aparece la siguiente información:

- Voltaje y conexión (triángulo, estrella)
- Frecuencia de alimentación en Hz
- velocidad nominal en r.p.m
- Potencia nominal en KW
- El factor de potencia para la velocidad nominal.
- La corriente nominal absorbida en A.

Esta información permite elegir nuestro motor acorde con el sistema eléctrico y mecánico a conectar. Se pueden obtener mucho más información de los catálogos del constructor. Un ejemplo de tabla de características aparece en la tabla 6.1. Tenemos allí numerosos detalles sobre el funcionamiento de los motores e información relativa al par de arranque, corriente de arranque, par máximo, etc.

En la figura 6.11, se enseña el aspecto de los dos tipos de rotor más comunes de las máquinas asíncronas. El motor con jaula de ardilla de la figura 6.11 (a) se compone de una serie de placas de material ferromagnético con ranuras para el



**Figura 6.11** (a) Rotor con jaula de ardilla. (b) Rotor bobinado con anillos deslizantes. (c) Estátor bobinado.

paso de las barras de cobre. Este sistema de placas apiladas permite por un lado reducir las pérdidas por corriente de Foucault y por otro lado se puede dar la forma característica de la jaula de ardilla. Las barras conductoras se colocan en las ranuras y se cierra el circuito con una última placa conductora. Un ejemplo de perfil se puede ver en la figura 6.11 (a).

El rotor bobinado en la figura 6.11 (b) consta de unos anillos deslizantes que

permiten cerrar el circuito del bobinado. En la salida de estos anillos podemos colocar una resistencia o un cortocircuito según el par necesitado. Es decir que la resistencia adicional permite cambiar el parámetro  $R'_2$  y la característica par/velocidad.

### Ejercicio 6.6

Se necesita un sistema capaz de subir cargas de hasta una tonelada con una cuerda enrollada alrededor de un cilindro de 20 cm de radio. A partir de la tabla 6.1 encontrar un motor adecuado y la relación del reductor mecánico que cumple con los requisitos.

### Solución del ejercicio 6.6

Para resolver el problema planteado, se deben de encontrar los límites de par necesario para levantar las cargas. El par de fuerza máximo necesario se calcula a partir del radio del tambor y del peso de la carga:

$$T_{max} = r \cdot Mg = 0,2 \cdot 1000 \cdot 9,8 = 1960 \text{ N.m}$$

Se puede por ejemplo elegir primero el motor y luego elegir el reductor de par adecuado. Se elige el motor con una potencia nominal de 30kW, a partir de allí diseñamos el reductor. Una limitación importante del motor será su par de arranque. Para levantar la carga se debe asegurar que el par de arranque supere el par máximo elegido. En la tabla 6.1 tenemos una relación entre par nominal y par de arranque de 2,6, por lo que el par de arranque será de

$$T_a = 2,6 \cdot 194 = 504,4 \text{ N.m}$$

El reductor debe de reducir por lo menos 4 veces el par con tal de poder arrancar. La relación del reductor sería entonces  $A=4$  con el par  $T_1 = T_2/4$  y la velocidad  $\omega_1 = 4\omega_2$ . La velocidad de rotación del motor es de 1470 r.p.m y al otro lado del reductor de 367.5 r.p.m correspondiente a un velocidad angular de  $38 \text{ rad.s}^{-1}$ . La carga se levantará a una velocidad lineal de  $38 \cdot 0,2 = 7,6 \text{ m.s}^{-1}$ . Puede resultar una velocidad excesiva dado la inercia que pueden conllevar tales cargas, lo más prudente es reducir esta velocidad aumentando la relación del reductor hasta obtener unas decenas de  $\text{cm.s}^{-1}$ .

## 6.2 Generadores y motores síncronos

### 6.2.1 Construcción y principios de funcionamiento

Los generadores síncronos son muy usados en producción de energía de alta potencia. La mayoría de las centrales de producción usan este convertidor de energía que permiten alcanzar grandes potencias y generar una tensión trifásica



$P_m$ kW	$n$ r.p.m.	$T_n$ N.m	$I_n$ A	f.p. 75 %	f.p. 100 %	$\eta$ 75 %	$\eta$ 100 %	$\frac{I_a}{I_n}$	$\frac{T_a}{T_n}$	$\frac{T_m}{T_n}$	$P_a$ kVA	$J$ m <sup>2</sup> .kg	$m$ kg
1.1	1448	7.3	2.4	0.69	0.78	84.2	83.8	6.2	2.4	2.9	1.7	0.0043	24
1.5	1451	9.9	3.2	0.72	0.80	85	85	7.1	2.7	3.1	2.2	0.0051	27
2.2	1455	14.4	4.5	0.78	0.82	86.6	86.4	7.1	2.3	2.8	3.1	0.0096	37
3	1459	19.6	6.0	0.77	0.83	87.5	87.4	7.1	2.2	2.8	4.1	0.0134	43
4	1465	26.1	8.1	0.74	0.81	88.5	88.3	7.9	2.5	3.2	5.6	0.0168	53
5.5	1453	36.1	10.2	0.82	0.87	89.9	89.2	7.2	2.2	2.9	7.1	0.029	71
7.5	1458	49.1	14.1	0.80	0.85	90.5	90.1	8.1	2.6	3.3	9.8	0.036	80
11	1465	72	21	0.79	0.84	91.2	91.0	9.2	2.7	3.3	14.6	0.067	115
15	1465	97	28	0.79	0.84	92.0	91.8	9.2	2.7	3.3	19.5	0.092	130
18.5	1468	121	35	0.79	0.84	92.8	92.4	7.1	3.0	2.7	24.3	0.123	170
22	1465	143	42	0.78	0.82	92.7	92.6	7.3	3.0	2.7	29	0.146	200
30	1470	194	56	0.81	0.83	93.4	93.2	6.5	2.6	2.3	39	0.26	270
37	1476	240	70	0.77	0.82	93.2	93.5	7	2.6	2.4	49	0.28	290
45	1483	290	79	0.84	0.87	94.3	94.5	7	2.5	2.6	55	0.7	388
55	1479	355	100	0.8	0.84	94.6	94.5	6.5	2.4	2.5	70	0.7	395
75	1483	484	136	0.79	0.84	94.8	94.9	7.7	2.9	3	95	0.815	475
90	1478	581	161	0.82	0.85	95	95	7.6	3	3.1	112	1.015	565

**Cuadro 6.1** Parámetros de una serie de motores asíncronos de 4 polos, 230 $\Delta$ / 400Y a 50Hz. Explicación de los parámetros:  $P_m$  potencia mecánica nominal,  $n$  velocidad nominal,  $T_n$  par nominal,  $I_n$  corriente nominal en los devanados, f.p. factor de potencia para 75 % y 100 % de la potencia nominal,  $\eta$  rendimiento para 75 % y 100 % de la potencia nominal,  $\frac{I_a}{I_n}$  relación entre corriente de arranque y corriente nominal,  $\frac{T_a}{T_n}$  relación entre par de arranque y par nominal,  $\frac{T_m}{T_n}$  relación entre par máximo y par nominal,  $P_a$  potencia aparente del motor,  $J$  momento de inercia,  $m$  masa.

directamente.

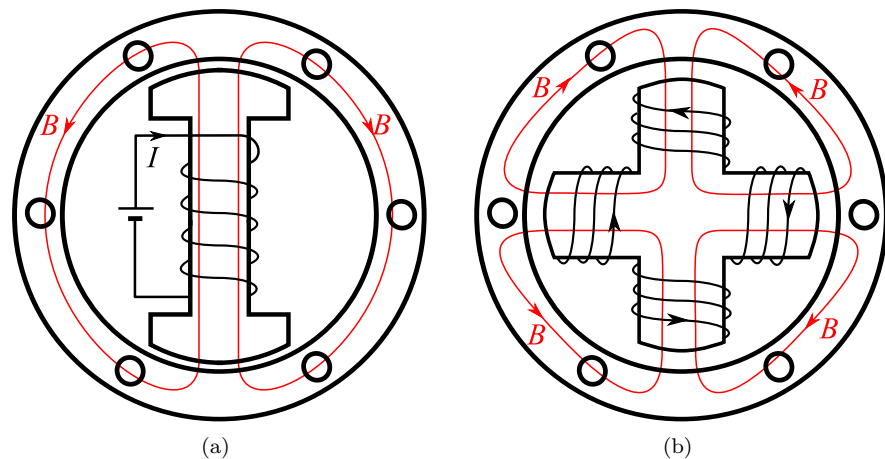
Para entender el funcionamiento de esta máquina primero se considera el rotor que consiste en un devanado con  $p$  polos magnéticos. La máquina de polos salientes presentada en la figura 6.12 (a) consta de un rotor alimentado con una tensión continua con el objetivo de generar un campo magnético estático. El rotor gira gracias a una acción externa, como por ejemplo una turbina o un motor térmico.

La rotación del campo generado por el rotor produce una tensión inducida alterna en cada uno de los devanados del estátor. En nuestro ejemplo el estátor consta de 3 devanados repartidos con un ángulo de  $2\pi/3$  entre ellos, como consecuencia, la tensión generada por la máquina es trifásica. Es el caso dual de la creación del campo giratorio: para una máquina asíncrona, el campo giratorio se obtiene alimentando estos tres devanados con un juego de tensión trifásica. Aquí el campo del rotor gira gracias a una fuerza mecánica externa.

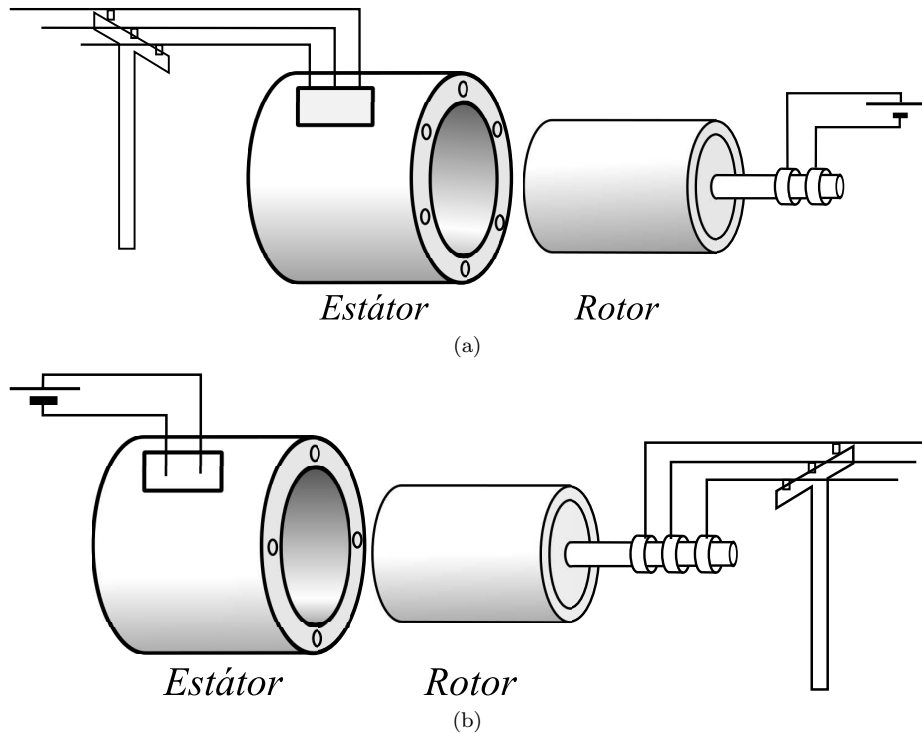
Esta tensión inducida va a depender de la velocidad de rotación. Tiene la misma dependencia con la frecuencia que una espira girando en un campo magnético uniforme y estático, salvo que en este caso la espira permanece quieta y el campo gira:

$$E_{ind}(t) = K\omega\Phi_m \sin(\omega t) \quad (6.48)$$

La velocidad de rotación y la frecuencia de la tensión generada son iguales (o tienen un factor de proporcionalidad debido al número de polos) por eso se llama este generador síncrono.

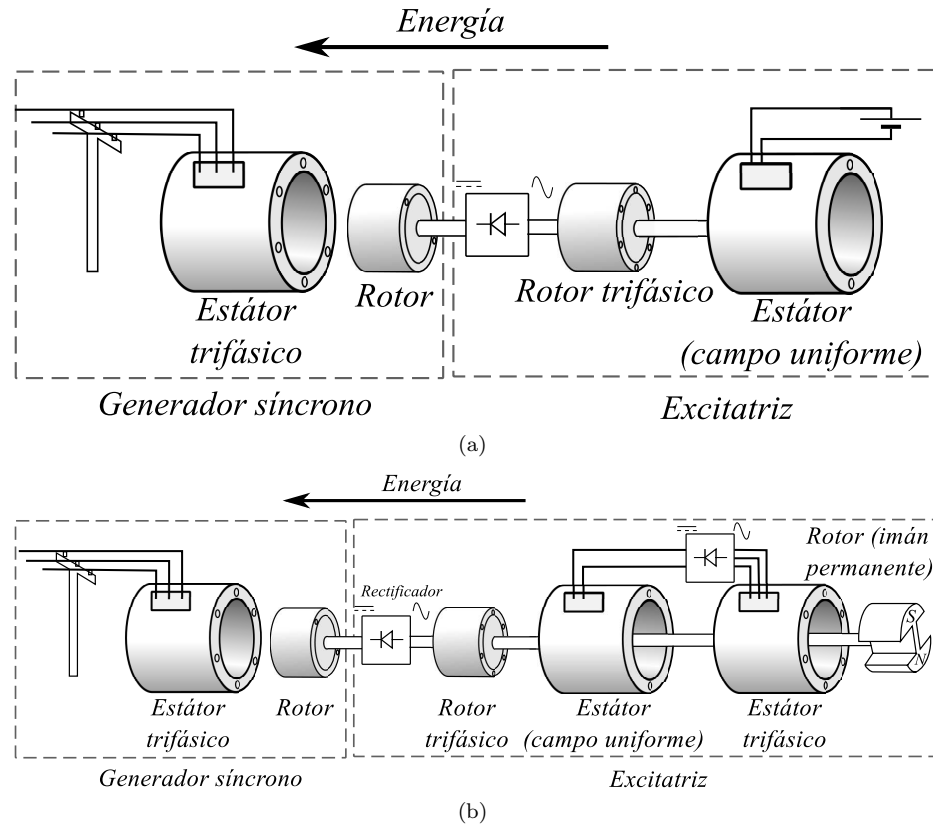


**Figura 6.12** Esquema de un motor síncrono con polos saliente. (a) Rotor con dos polos. La tensión continua de la bobina genera un campo magnético constante que permite la inducción. (b) Rotor de cuatro polos. En este caso el número de polos magnéticos se duplica y aumenta la frecuencia de la tensión generada para una misma velocidad de rotación. Notese que los polos son lisos en este caso.



**Figura 6.13** (a) Esquema de un motor/generador síncrono con un rotor con alimentación por escobillas, la tensión continua genera el campo estático del rotor. En ciertos casos se alimenta el rotor con una tensión trifásica que se rectifica luego en el propio eje de la máquina para generar la tensión continua necesaria a la creación del campo uniforme. (b) El estátor se alimenta en continuo para generar el campo estático, la tensión inducida se recupera con escobillas sobre el rotor. Para altas tensiones esta solución presenta desventajas, aparecen chispas alrededor de las escobillas.

Para generar el campo magnético uniforme en el rotor (el inductor) se necesita una corriente continua. Esta corriente se puede obtener de diversas maneras. En la figura 6.13 (a) aparece como unas escobillas situadas en el eje del rotor alimentando el rotor en corriente continua gracias a unos anillos deslizantes. En ciertos casos se alimenta con una tensión trifásica para luego rectificar la tensión por medio de componentes de electrónica de potencia en el eje del rotor. En la figura 6.13 (b) tenemos otro tipo de máquina síncrona. Se alimenta el estátor con una tensión continua para generar un campo magnético estático uniforme en todo el cilindro del estátor. El rotor se equipa con devanados orientados con ángulos de  $2\pi/3$  entre ellos. Los papeles del inducido y del inductor se intercambian. Del punto de vista de la física, intercambiar los dos no influye en nada el fenómeno de inducción, es una elección tecnológica. La tensión trifásica se recupera en las



**Figura 6.14** (a) Esquema de un generador síncrono con una excitatriz formado de un generador síncrono y de un rectificador montado en el eje. (b) Esquema de una máquina síncrona con una excitatriz de imanes permanentes. Esta excitatriz permite generar la tensión que luego va a alimentar el rotor de la máquina síncrona.

escobillas del rotor para luego ser transformada o utilizada por la carga.

En las figuras 6.14 (a) y (b) aparecen dos maneras de obtener el campo magnético del rotor. En la figura 6.14 (a), aparecen dos máquinas eléctricas. En el mismo eje del rotor del generador síncrono se acopla otro rotor con bobinados trifásicos. El estátor correspondiente a este segundo rotor se alimenta con una corriente continua del tal manera que se induzca una tensión trifásica inducida en el rotor. Se rectifica luego esta tensión con un mecanismo de rectificación trifásicos colocado en el eje del rotor. La tensión rectificada alimenta el rotor de la máquina síncrona de la izquierda. Se recupera la tensión trifásica “de potencia” en el estátor del generador más a la izquierda en el esquema. El problema de esta solución consiste en que la tensión de corriente continua que se necesita tiene que venir de un generador externo (¡se necesita electricidad!).

Para resolver este problema se coloca en el propio eje un generador con imanes permanentes. Esta solución permite tener una máquina autónoma sin alimentación externa, ni anillos deslizantes. El mecanismo completo para generar esta tensión continua necesaria al rotor se llama excitatriz.

En la figura 6.14 (b) aparece primero un generador síncrono de imanes permanentes (a la derecha) que alimenta el segundo generador síncrono (con el estátor de campo uniforme) que a su vez alimenta al rotor de nuestro generador de potencia (a la izquierda). Esta solución aunque complicada permite obtener una máquina que genera su propia alimentación. Además no hay anillos rozantes que puede perjudicar el funcionamiento de la máquina. El problema de la escobillas puede ser importante cuando las velocidades y las tensiones aumentan. Tiene la ventaja de eliminar los rozamientos entre rotor y escobillas que son responsables de muchos problemas de desgaste y de pérdidas de energía.

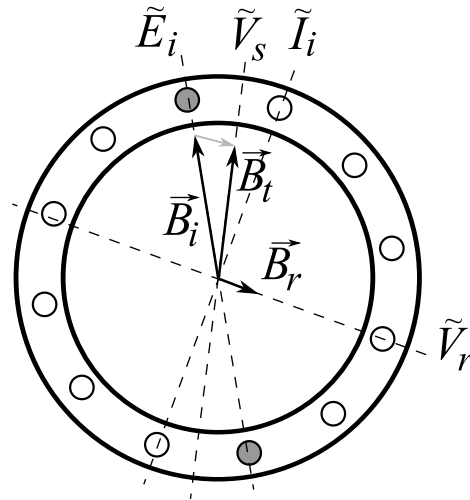
### 6.2.2 Circuito equivalente

El modelo equivalente eléctrico de la máquina se puede descomponer en tres partes: el inductor, el inducido y la carga. En el caso de la figura 6.16 el rotor corresponde al inductor y el estátor al inducido. El rotor se alimenta con una corriente continua que genera el campo uniforme en su alrededor. El devanado del inductor se modeliza con una reactancia  $X_i$  y la resistencia del devanado por  $R_i$ . Se describe a continuación el papel de la inductancia  $X_i$  en la máquina síncrona.

En el devanado del inducido (en general el estátor) circula una corriente provocada por la rotación del campo magnético del rotor. Cuando una carga se conecta al generador, una corriente circula en los devanados del inducido de la máquina. Al circular, esta corriente genera un campo magnético en la cavidad del estátor que deforma el campo creado por el rotor. Para incluir este efecto en nuestro circuito equivalente de la máquina síncrona hemos de detallar los campos magnéticos que aparecen.

El campo generado por el inductor (el rotor), llamado aquí  $B_i$ , induce una tensión en el inducido (el estator) gracias a la ley de Faraday. Se representa en la gráfica 6.15 un corte del estátor junto con la dirección de este campo en un instante dado. Se representa también el valor de la tensión inducida  $\tilde{E}_i$ . El máximo de la tensión se obtiene cuando el flujo a través de una espira es mínimo debido a la ley de Faraday. Esto implica que cuando el campo se encuentra en el plano de una espira dada, la tensión en ella es máxima al tener un flujo mínimos en ella. Para simplificar, en la figura 6.15 se ha marcado la espira en la que la tensión  $\tilde{E}_i$  será máxima.

Cuando se conecta el generador a una carga aparece una corriente  $\tilde{I}_i$  en los devanados del inducido. Si la carga es inductiva entonces la corriente  $\tilde{I}_i$  irá en atraso de un ángulo  $\varphi$  comparado con la tensión inducida  $\tilde{E}_i$ . Esta corriente  $\tilde{I}_i$  generará un campo magnético como reacción al campo creado. Llamamos este campo **la reacción del inducido**. En el esquema 6.15 de la máquina, el máximo



**Figura 6.15** Esquema del estator con el campo del rotor  $B_i$ , la tensión  $\vec{E}_i$  del inducido (que resulta ser máxima cuando el campo está en el plano de la espira), la corriente en atraso circulando  $\vec{I}_i$  en el estator. El campo  $B_r$  es el campo de reacción creado por la corriente en atraso. A su vez, este campo induce una tensión en el estator  $\vec{V}_r$ . La tensión total  $\vec{V}_s$  es la suma de la tensión  $\vec{E}_i$  y  $\vec{V}_r$ , es el resultado de la reacción del inducido.

de esta corriente irá desfasado de  $\varphi$  radianes comparado con el máximo de la tensión inducida  $\vec{E}_i$ , siendo esta corriente  $\vec{I}_i$  máxima en otra bobina como marcado en la figura. El campo  $B_r$  generado por  $\vec{I}_i$  tiene una dirección perpendicular al plano definido por dicha espira. Coexisten ahora dos campos magnéticos en el estator, el campo del rotor  $B_i$  y el campo de reacción  $B_r$  del estator. La suma de estos campos produce un campo global distinto del campo generado por el rotor. Resultará por inducción de  $B_t$  en las espiras una tensión  $\vec{V}_s$  que irá en atraso comparado con la tensión  $\vec{E}_i$ .

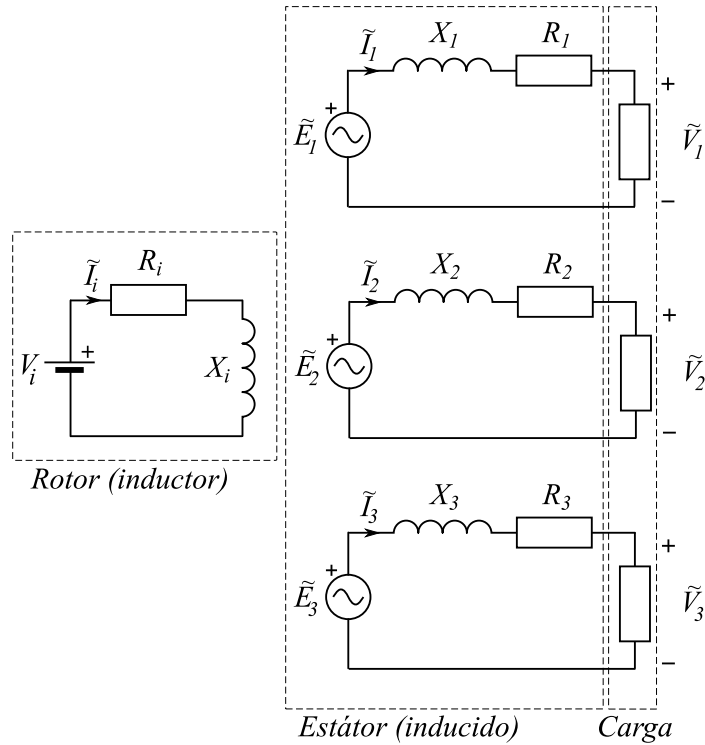
Es la tensión que se mide a la salida del generador cuando se conecta a la red. La tensión observada  $\vec{V}_s$  será la suma de la tensión inducida  $\vec{E}_i$  más una tensión  $\vec{V}_r$  provocada por la reacción del inducido. Esta tensión  $\vec{V}_r$  se encuentra en fase con el campo  $B_r$  generado por la corriente del inducido y tiene un desfase de  $\frac{\pi}{2} + \phi$  con el máximo de la tensión inducida  $\vec{E}_i$ . Al ver que esta tensión  $\vec{V}_r$  tiene un desfase de  $\frac{\pi}{2}$  con la corriente  $\vec{I}_i$  y se relacionan mediante una inductancia:

$$\vec{V}_r = jX_i \vec{I}_i \quad (6.49)$$

En otras palabras la tensión debida a la reacción del inducido se puede modelizar como una inductancia. Además la tensión de salida del generador será la suma de la tensión inducida y de esta tensión de reacción:

$$\vec{V}_s = \vec{V}_r + \vec{E}_i \quad (6.50)$$

Este campo magnético se llama campo de reacción del inducido y se modeliza



**Figura 6.16** Esquema eléctrico equivalente del generador síncrono. El inductor consiste en un circuito de corriente continua. El inducido se modeliza con un generador de tensión alterna cuya tensión depende del circuito magnético, de la velocidad de rotación y de otros parámetros tal como señalado en la fórmula (6.48)

con una inductancia  $X_k$  en serie con el generador de tensiones equivalente de la figura 6.16 ( $k = 1, 2, 3$ ). Se añade en serie la resistencia equivalente  $R_i$  de los cables de cobre. En la inductancia en serie  $X_i$  se incluye además la inductancia equivalente de pérdida de flujo al igual que en el caso de los transformadores.

Los parámetros de la máquina se pueden hallar con los ensayos en vacío y en cortocircuito como en el caso de la máquina asíncrona. Sin embargo existen métodos más precisos para hallar los parámetros dado un régimen de funcionamiento del generador (el método de Potier por ejemplo permite caracterizar los parámetros). El lector interesado puede referirse a la bibliografía.

El circuito equivalente se puede representar como indicado en la figura 6.16 con los tres devanados del inducido representado. Para el estudio de la máquina se puede reducir al de un solo devanado dado que los tres son idénticos.

La tensión generada depende de los parámetros de la máquina así como de la frecuencia de rotación y del flujo generado. Se puede resumir en una sola fórmula:

$$|\tilde{E}_f| = 4,44K_dK_a\Phi_mN_f f \quad (6.51)$$

$K_d$  es el factor de distribución, se debe a la repartición de los devanados de cada fase en el estátor.  $K_a$  es el factor de paso o acortamiento y también se relaciona con la forma de colocar el inducido en el estátor.  $N_f$  es el número de espiras por fase y  $f$  es la frecuencia de rotación. Se asume que el flujo magnético creado por el estátor se reparte de forma sinusoidal en el estátor. Significa que el campo generado es más concentrado cerca de los polos del rotor que en los laterales.

### Ejercicio 6.7

Un generador síncrono trifásico dispone de una tensión inducida  $|\tilde{E}_i| = 230\text{V}$  en el inducido. Se quiere alimentar una carga trifásica conectada en triángulo de impedancia  $Z_Y = 0,5 + j0,5\Omega$ . La inductancia de reacción es de  $X_i = 1j\Omega$  por fase y la resistencia de  $R_i = 0,1\Omega$  por fase.

- Calcular la corriente de fase.
- Hallar la tensiones simples en la carga.
- Calcular la potencia entregada a la carga.

### Solución del ejercicio 6.7

Para resolver el problema consideramos el equivalente del motor por fase. El problema se resuelve entonces como un circuito monofásico.

- La corriente por fase es:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{E}_i}{Z_Y + X_i + R_i} = \frac{230\angle 0}{0,5 + j0,5 + 0,1 + j1} = 52,8 - j132,1 \text{ A}$$

- La tensión en la carga sería:

$$\tilde{V}_a = Z_Y \cdot I_a = (0,5 + j0,5) \cdot (52,8 - j132,1) = 92,5 - j39,6 = 100\angle -23^\circ \text{ V}$$

- La potencia de la carga se calcula con los resultados anteriores

$$S_Y = 3\tilde{V}_a\tilde{I}_a^* = 30402 + j30402 = 42994\angle 45^\circ \text{ VA}$$

### 6.2.3 Potencia, rendimiento

Para calcular el rendimiento y la potencia útil de un motor o un generador asíncrono primero enumeramos las distintas pérdidas del motor:

- Perdidas de cobre en los devanados del inductor y del inducido  $P_{co1}$  y  $P_{co2}$
- Perdidas de hierro en el estátor  $P_{h1}$  y en el rotor  $P_{h2}$ .
- Perdidas mecánicas de rozamiento  $P_m$

Se resume en la figura 6.17 las distintas pérdidas de la máquina.

Se puede formular el rendimiento como:

$$\eta = \frac{P_s}{P_s + P_{co1} + P_{co2} + P_{h1} + P_{h2} + P_m} \quad (6.52)$$



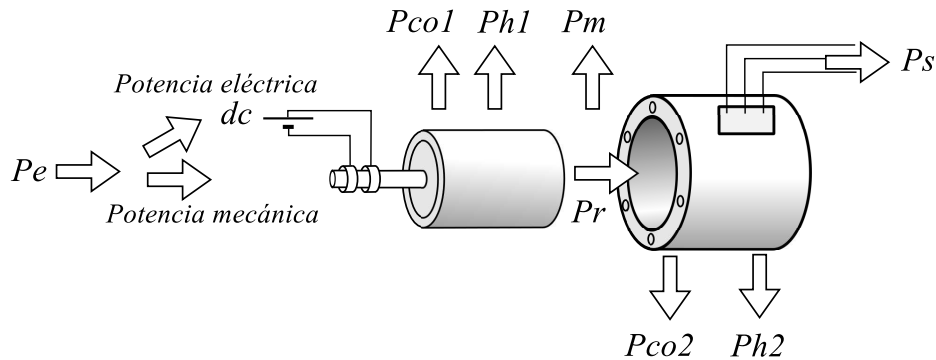


Figura 6.17 Esquema de las pérdidas en una máquina síncrona.

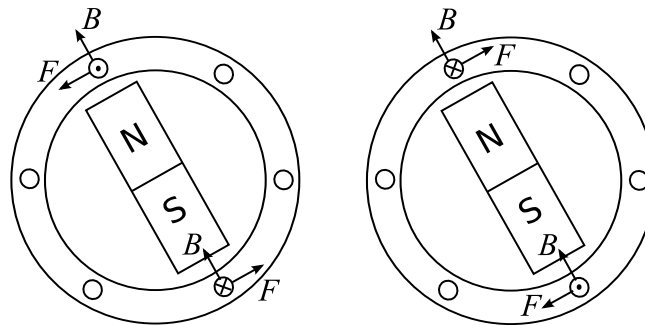


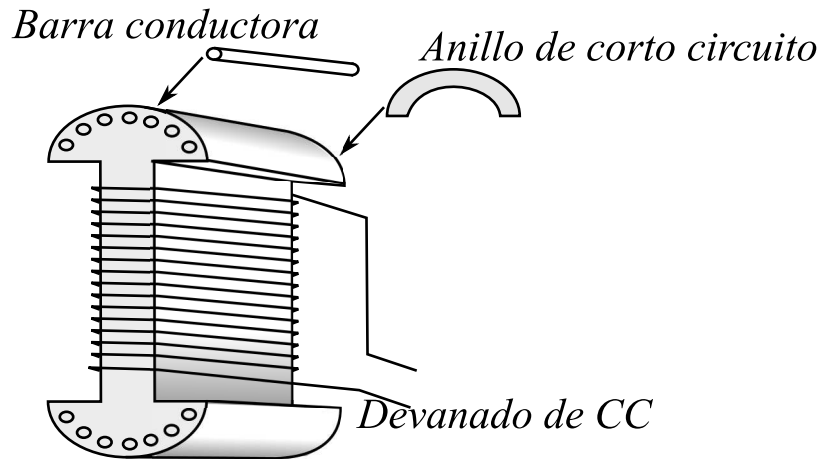
Figura 6.18 Problema del arranque en un motor síncrono, el par de rotación es nulo debido a la corriente alterna en el devanado inductor. Para resolver el problema, el arranque se efectúa gracias a barras conductoras colocadas en el rotor. Se produce un arranque parecido al de una máquina asíncrona.

Se necesitan los parámetros de la máquina. Estos parámetros, como la inductancia de reacción del inducido, dependen del régimen de funcionamiento de la máquina. Además, la relación entre la tensión de rotor y del estátor depende del circuito magnético.

#### 6.2.4 Motores síncronos

Un máquina síncrona puede funcionar como motor o como generador según deseado. Para obtener un funcionamiento en motor se necesita ahora alimentar el circuito trifásico del estátor para producir un campo magnético giratorio. Este campo produce un par en el rotor cuando se alimenta en corriente continua. El rotor se alinea con el campo giratorio y gira a la misma velocidad que el campo magnético. Por esta razón se llama motor síncrono.

Sin embargo los motores síncrono tienen un problema importante al arrancar. En la figura 6.18 se ve un rotor dentro de un estátor alimentado con una corriente trifásica. Si el rotor está quieto, las fuerzas que se generan en el alambre



**Figura 6.19** Polo de una máquina síncrona con barras en la cabeza del polo saliente. Estas barras conductoras en corto circuito permiten el arranque del motor del mismo modo que una máquina síncrona.

del rotor cambian de sentido  $n$  veces por segundo dependiendo de la frecuencia de alimentación. En estas condiciones el rotor no puede arrancar, el par medio es nulo debido a que las fuerzas cambian con demasiada rapidez. El cambio de dirección es demasiado rápido para iniciar cualquier movimiento. Se necesita un mecanismo externo para lanzar el motor y acercarlo a la velocidad de sincronismo.

Una solución para resolver el problema del arranque consiste en modificar los polos salientes introduciendo unas barras conductoras en corto circuito. Este mecanismo permite arrancar el motor como una máquina asíncrona. En este caso el devanado de corriente continua del rotor debe de estar conectado a una resistencia para evitar los problemas de una tensión inducida elevada en este devanado.

El motor alcanza la velocidad asíncrona gracias a estas barras representadas en la figura 6.19. Una vez alcanzada esta velocidad se conecta la corriente continua del devanado y el rotor se sincroniza con la velocidad de rotación del campo magnético después de un transitorio. Una vez que el rotor se ha sincronizado, las barras conductoras no tienen ningún efecto sobre el motor dado que la tensión inducida es nula cuando gira a la velocidad síncrona.

### Ejercicio 6.8

Tenemos un motor síncrono de dos polos. Se alimenta el estator trifásico con una tensión de 380V línea-línea y una frecuencia de 50Hz. El par producido depende de la tensión del inductor y de la tensión de alimentación de la forma

siguiente:

$$\tau = \frac{3|\tilde{V}_1||\tilde{E}_1|\sin\delta}{\omega_s X_s}$$

donde  $\delta = 13^\circ$  es el ángulo que forman el campo giratorio inductor y el campo de reacción del inducido. También coincide con el ángulo que forman los fasores de las tensiones  $\tilde{V}_1$  y  $\tilde{E}_1$ , siendo  $\tilde{E}_1$  en atraso con respecto a  $\tilde{V}_1$  en el caso de un motor síncrono.

Sabiendo que la impedancia síncrona del motor es  $X_s = 3\Omega$  por fase, y que la carga mecánica equivale a una potencia de 10kW, hallar:

1. La velocidad síncrona y el par producido.
2. La tensión inductora  $E_1$ .
3. La corriente de línea.
4. El factor de potencia del motor.
5. El rendimiento.

#### Solución del ejercicio 6.8

1) Sabiendo que es un motor de dos polos, la velocidad síncrona será:

$$n_s = \frac{120f}{N_p} = \frac{120 \cdot 50}{2} = 3000 \text{ r.p.m.}$$

El par entregado por el motor depende de la velocidad de rotación y de la potencia mecánica:

$$\tau = \frac{P_m}{\omega_s} = \frac{10 \cdot 10^3}{2\pi 3000/60} = 31,8 \text{ N.m}$$

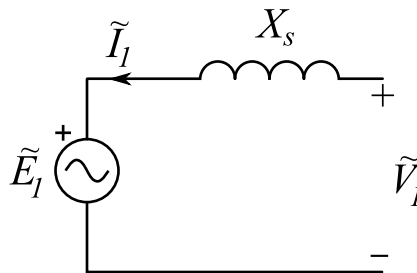
2) Usamos la fórmula que expresa el par en función de las tensiones del motor para poder despejar la tensión inductora  $\tilde{E}_1$  de una fase del motor:

$$|\tilde{E}_1| = \frac{\tau \omega_s X_s}{3|\tilde{V}_1|\sin\delta} = \frac{31,8 \cdot 314 \cdot 3}{3 \cdot 220 \cdot 0,22} = 202 \text{ V}$$

Si elegimos  $\tilde{V}_1$  como referencia de fase, tenemos:

$$\tilde{E}_1 = 202 \angle -13^\circ \text{ V}$$

3) La corriente de línea se halla gracias al modelo equivalente de la máquina por fase:



Usando el esquema anterior podemos despejar la corriente de línea  $\tilde{I}_1$ :

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}_1 - \tilde{E}_1}{jX_s} = \frac{220\angle 0 - 202\angle -13^\circ}{j3} = 17\angle -27^\circ \text{ V}$$

4) El factor de potencia del motor es:

$$fp = \cos -27^\circ = 0,89$$

5) Podemos hallar el rendimiento calculando la potencia entregada por la red:

$$P_e = 3|\tilde{V}_1||\tilde{I}_1| \cos -32^\circ = 3 \cdot 220 \cdot 17 \cdot 0,89 \simeq 10000 \text{ W}$$

El rendimiento es:

$$\eta = 1$$

Dado que no hemos considerado pérdidas en el modelo.

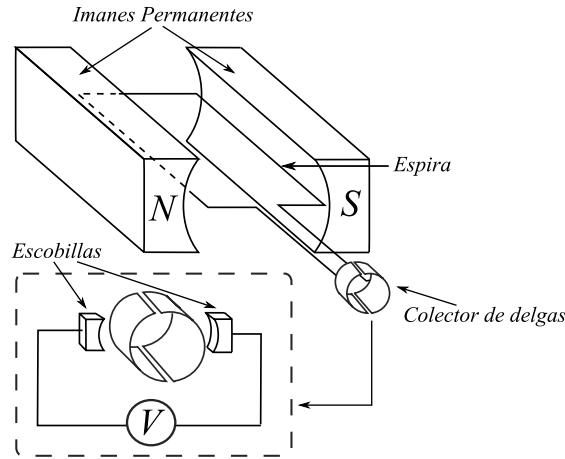
## 6.3 Máquinas de corriente continua

Las máquinas de corriente continuas fueron las primeras en ser usadas para distribuir energía. En los años 1870, Edison mejoro el inventó de Gramme y empezó a distribuir electricidad para la iluminación de las calles de Nueva York. La generación de corriente continua para la distribución ha caído en desuso con la invención de los transformadores y la generación de corriente alterna. Sin embargo los motores de corriente continua siguen siendo muy usado para aplicaciones de pequeña potencia. Los ventiladores, pequeños automatismos, modelismo son algunos ejemplos de aplicaciones que usan un tipo de motores de corriente continua.

### 6.3.1 Construcción y principios de funcionamiento

Las máquinas de corriente continuas pueden funcionar en teoría como motor o como generador. El esquema más sencillo consiste en espiras de cobre colocadas en un campo magnético uniforme. En funcionamiento generador, estas espiras giran gracias una fuerza externa y se genera una tensión inducida en el alambre. Esta tensión se recupera con unos anillos conductores deslizantes. En funcionamiento motor se alimentan las espiras a través de los mismos anillos deslizantes. La aparición de fuerzas de Laplace debido a la interacción con el campo magnético hace que las espiras producen un par de rotación.

Para explicar el funcionamiento de esta máquina se toma como ejemplo una simple espira colocada en un campo magnético uniforme creado por dos imanes permanentes. Esta espira está conectada a un circuito eléctrico a través de un **colector de delgas**. Es un mecanismo que permite invertir la polaridad de la espira a cada media vuelta. Para una única espira, se constituye de dos medio



**Figura 6.20** Esquema de una máquina de corriente continua básica. La espira se monta sobre un rotor con un colector de delgas. El colector de delgas asegura el contacto entre la espira y el circuito exterior además de invertir la polaridad de la corriente. La espira por su parte se encuentra en un campo magnético uniforme generado por 2 imanes permanentes.

anillos colocado sobre el eje de la máquina. Cada polo de la espira se conecta a una de las dos delgas en el interior del eje de la máquina. El circuito externo al rotor entra en contacto con los anillos a través de unas escobillas de carbón conductoras que aseguran el contacto según vaya girando la espira. El campo magnético del estator puede generarse con unos imanes permanentes o con unas bobinas alimentadas en corriente continua.

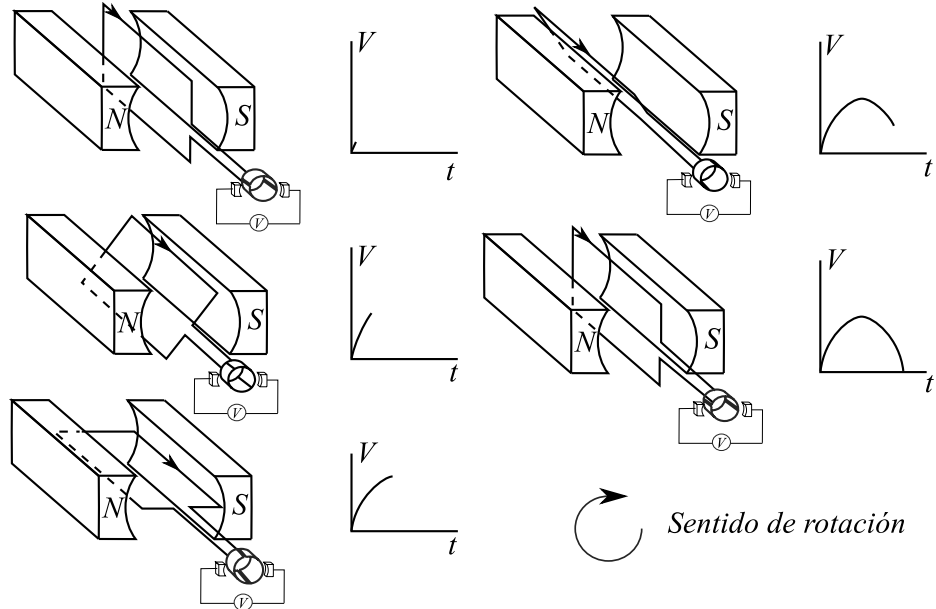
Este colector de delgas tiene otra función importante en la máquina de corriente continua y es la conmutación. Vamos ahora a explicar cual es el funcionamiento de un generador de corriente continua basándonos en la figura 6.21. Hemos visto anteriormente que una espira movida en un campo magnético uniforme generaba una tensión inducida en la espira:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -2B_0l\omega \cos(\omega t). \quad (6.53)$$

De esta fórmula se deduce que cuando el flujo a través de la espira es máximo la tensión es mínima. En nuestro ejemplo ocurre cuando la espira está en posición vertical la tensión es nula en la espira. Cuando la espira está en posición horizontal, la tensión es máxima y el flujo es nulo. Según la tensión va oscilando en la espira, en las delgas siempre se recupera una tensión positiva:

$$e = 2B_0l\omega |\cos(\omega t)| \quad (6.54)$$

Sin embargo no constituye una tensión continua todavía. En la figura 6.21 podemos ver que después de media vuelta, la espira ha cumplido su ciclo y la tensión recuperada será de nuevo positiva una vez cumplida otra media vuelta. Esta tensión oscilante positiva se puede transformar luego en una tensión continua



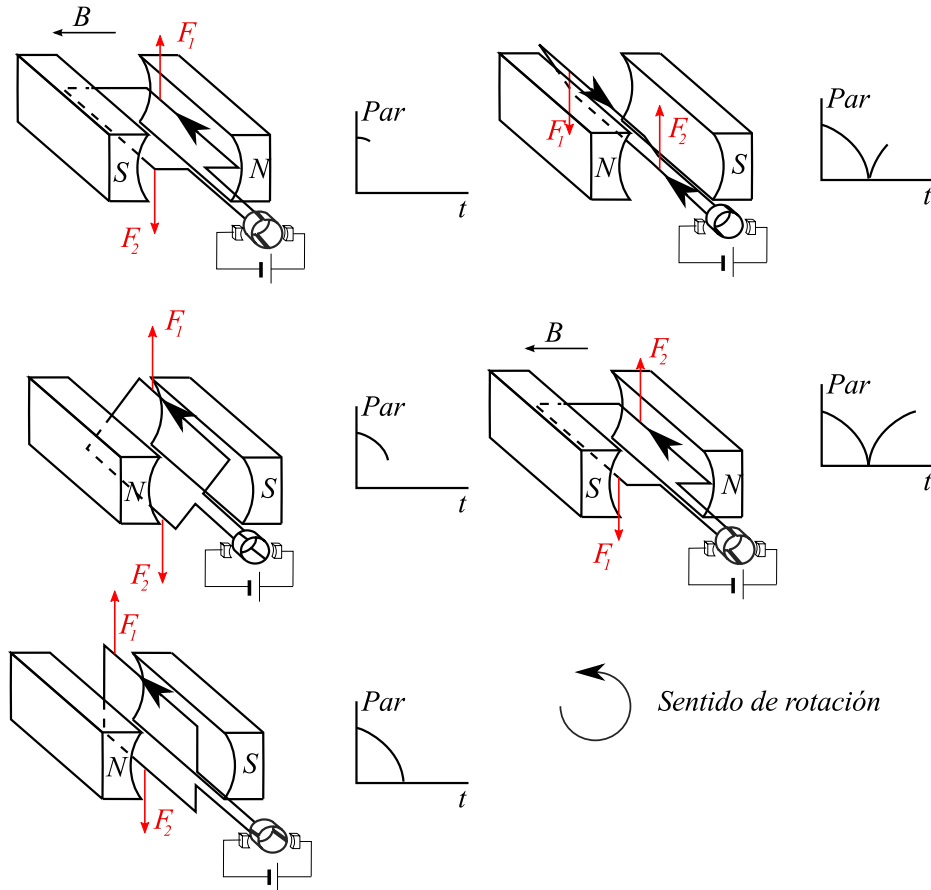
**Figura 6.21** Media vuelta del ciclo de una máquina de corriente continua. Al cabo de medio ciclo la polaridad del colector de delgas se invierte por lo que la tensión vuelve a ser positiva.

mediante filtros. Usando múltiples espiras se puede obtener también una forma de onda muy lisa con pocas ondulaciones.

El **funcionamiento motor** se obtiene alimentando la espira con un generador de tensión continua a través de las escobillas. Esta tensión va a generar unas fuerzas de Laplace en el conductor. El esquema de la rotación de la espira para una vuelta se muestra en la figura 6.22, donde mostramos el funcionamiento para una media vuelta de la espira. El par producido en la espira se escribe como:

$$M = 2rB_0lI |\cos(\omega t)| \quad (6.55)$$

con  $l$  la longitud horizontal de la espira,  $r$  es el radio de la espira. Para poder tener siempre la fuerza en el mismo sentido también se usa el sistema del colector de delgas. La corriente conmuta cuando la espira está recta, la fuerza se mantiene en el mismo sentido y el ciclo puede empezar de nuevo. Es decir que el par de fuerzas siempre se mantiene en la misma dirección de tal manera que la rotación pueda efectuarse de forma continua. Sin embargo interesa que el par de fuerza sea continuo. En este caso conviene aumentar el número de espiras para alisar el par como se verá a continuación.

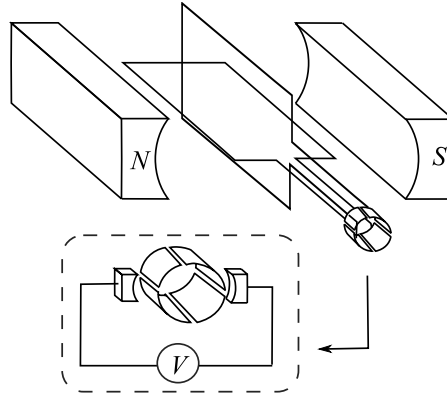


**Figura 6.22** Esquema de una máquina de corriente continua en funcionamiento motor. Esta vez se alimenta la espira con una corriente continua a través del colector de delgas. El par de fuerza siempre tiene la misma dirección.

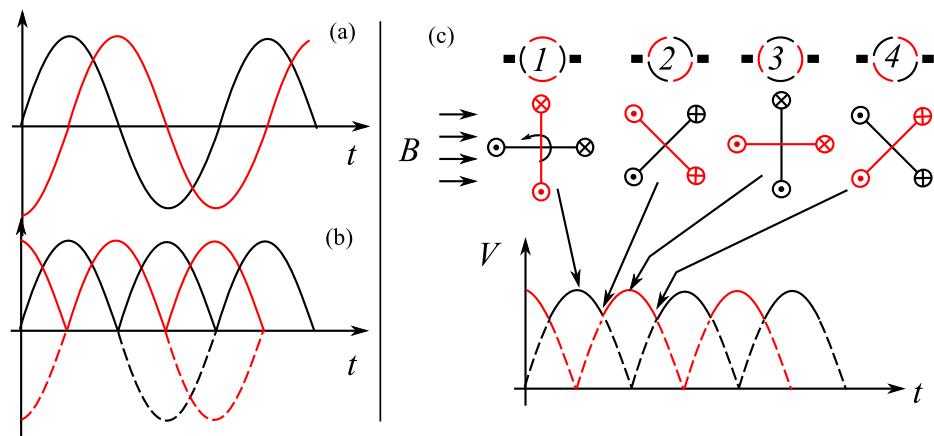
### 6.3.2 Máquina con dos espiras

Una simple mejora del sistema de la precedente máquina de corriente continua consiste en añadir una espira perpendicular a la primera formando un ángulo de 90 grados con la primera. Ahora, el colector de delgas tiene cuatro segmentos cuyos extremos están unidos cada uno a una espira. El proceso de conmutación es más complejo que anteriormente, conmutan los contactos de las espiras cada cuarto de vuelta. El esquema del dispositivo se encuentra en la figura 6.23.

La conmutación tiene que efectuarse cuando las tensiones de las dos espiras son iguales. Si no fuese así, se pondrían en contacto dos espiras con tensiones distintas y se produciría un corto circuito. Se elige entonces con cuidado el ángulo de las escobillas con la máquina. En el ejemplo de la figura 6.24 se ve cual es la disposición óptima para dos espiras.



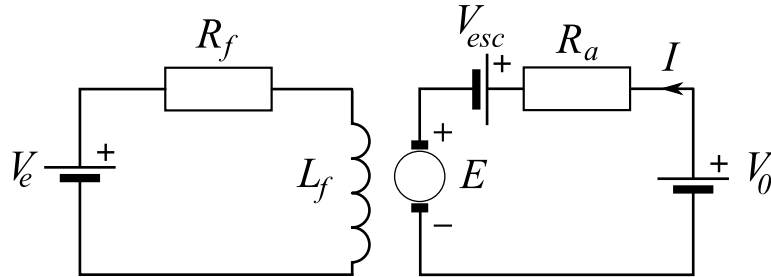
**Figura 6.23** Máquina de corriente continua con 2 espiras con un ángulo de  $\pi/2$  rad. entre ellas.



**Figura 6.24** Máquina de corriente continua con 2 espiras desfasadas de  $\pi/2$ . (a) En esta gráfica se muestra la tensión inducida en cada espira. (b) Las tensiones de las espiras en valor absoluto. (c) En esta última gráfica se representa la tensión a la salida de las escobillas. Se detalla además la posición de las espiras, del colector de delgas y las escobillas para cuatro posiciones del ciclo. Nótese los instantes de conmutación entre espiras.

En esta misma figura aparece la forma de onda inducida en las espiras en función del tiempo. La tensión entre una espira y otra tiene un desfase de  $\pi/2$  radianes debido a la diferencia de ángulo entre las espiras. En la figura 6.24 (b) se enseña el valor absoluto de cada tensión. Cada cuarto de vuelta del rotor la polaridad de la tensión cambia. En la figura 6.24 (c) se enseña la tensión de salida de la máquina en las escobillas en el colector de delgas. La tensión recuperada tiene una componente continua con algunas oscilaciones debido a la conmutación del colector de delgas. Se muestra la posición de las dos espiras en el momento





**Figura 6.25** Esquema de una equivalente de una máquina de corriente continua en funcionamiento motor.

de la conmutación así como los sentidos de la corriente dentro de las espiras. En la posición 1, la espira roja está en posición vertical y la tensión inducida es mínima al ser el flujo máximo, el sentido de la corriente en esta posición cambia. La espira negra tiene una tensión inducida máxima. En la posición 2 las tensiones inducidas en las dos espiras son idénticas, es cuando se produce la conmutación. En la posición 3 la tensión inducida es máxima en la espira roja y mínima en la espira negra. El sentido de la corriente cambia de sentido en la espira negra para esta posición. En la posición 4 las tensiones vuelven a ser iguales y se produce de nuevo la conmutación. Junto con las espiras se ha dibujado la posición del colector de delgas y las escobillas en estos cuatro instantes de tiempo.

### 6.3.3 Circuito equivalente

El circuito equivalente de una máquina de corriente continua consiste en el circuito del inductor (el origen del campo magnético) y del inducido separados. Para el funcionamiento en motor, el inducido consiste en la resistencia de los devanados en serie con las escobillas. Al nivel de las escobillas se pierde parte de la tensión por los roces y otras resistencias. La tensión  $E$  de la bobina del rotor será entonces:

$$E = V_0 - RI - V_{esc} \quad (6.56)$$

Sin embargo en la mayoría de los casos se puede incluir la caída de tensión en las escobillas en una resistencia total  $R_a$  dado que esta pérdida de tensión va a ser proporcional a la corriente.

El inductor, cuando se trata de un inductor bobinado, consiste en una fuente de tensión continua en serie con una resistencia  $R_f$  y una inductancia  $L_f$ . Este circuito representa la parte que genera el campo magnético en el estátor. El esquema completo se puede observar en la figura 6.25.

El circuito de la máquina en funcionamiento de generador es muy parecido, solo cambia el sentido de las corrientes y se añade una carga en vez del generador  $V_0$ . La resistencia representa la carga útil del usuario. Cuando la máquina de corriente continua funciona como generador, la tensión  $E$  del inducido se

halla cuando tenemos los parámetros del generador. Entre otros parámetros se destacan:

- El número de polos magnéticos del estátor.
- El flujo generado por el estátor atravesando las espiras.
- La geometría de las espiras y del devanado.
- El número de conductores.
- La velocidad de rotación.

En la práctica la tensión inducida se expresa como:

$$E = K\Phi_p\omega, \quad (6.57)$$

con  $K$  una constante que agrupa los parámetros anteriores que son característicos de la máquina,  $\Phi_p$  es el flujo por polo y  $\omega$  la velocidad angular de rotación.

Cuando la máquina funciona como motor el par producido puede también expresarse con una ecuación similar:

$$\tau = K\Phi_p I_a, \quad (6.58)$$

$I_a$  es la corriente que se suministra a la máquina.

La potencia mecánica y eléctrica se relacionan con la formula:

$$P = \tau\omega = K\Phi_p I_a \omega = EI_a \quad (6.59)$$

Tenemos una equivalencia de las ecuaciones entre el funcionamiento motor y generador.

Las últimas tres ecuaciones son las relaciones que permiten el análisis y el diseño de máquinas, son esenciales para entender el comportamiento eléctrico y mecánico.

### Ejercicio 6.9

Tenemos una máquina de corriente continua con una resistencia equivalente  $R_a = 4\Omega$  en el estator y una constante de máquina  $K = 200$ . Para un funcionamiento como motor, conectamos la máquina a una fuente de alimentación  $V_0 = 1000\text{V}$ , el flujo por polos es de  $30\text{mWb}$  y el torque de  $20\text{ N.m}$ . Hallar:

- a) La corriente en el inductor.
- b) La potencia consumida por la máquina.
- c) La velocidad de rotación

### Solución del ejercicio 6.9

a) La corriente en el inductor se calcula gracias a la fórmula 6.58:

$$I_a = \frac{\tau}{K\Phi_p} = \frac{20}{200 \cdot 30 \cdot 10^{-3}} = 3,3\text{ A}$$

b) La potencia se calcula gracias a la corriente que hemos hallado en la pregunta anterior:

$$P = V_0 I_a = 3300 \text{ W}$$

c) La velocidad de rotación se halla gracias a la potencia consumida por la máquina quitando las pérdidas en la resistencia  $R_a$

$$P_m = \tau \omega = P - R_a I_a^2 = 3300 - 4 \cdot 3,3^2 = 3256 \text{ W}$$

Por lo tanto:

$$\omega = \frac{P}{\tau} = \frac{3256}{20} = 162,4 \text{ rad.s}^{-1} = 1554 \text{ r.p.m}$$

Suponiendo la velocidad constante.

### Ejercicio 6.10

La misma máquina del ejercicio anterior se acopla a un motor térmico para generar electricidad. La velocidad de rotación del rotor térmico es de 1000 r.p.m. Se mantienen los demás parámetros.

a) Calcular la tensión de vacío del generador.

Se conecta la salida a una carga resistiva de  $100\Omega$ :

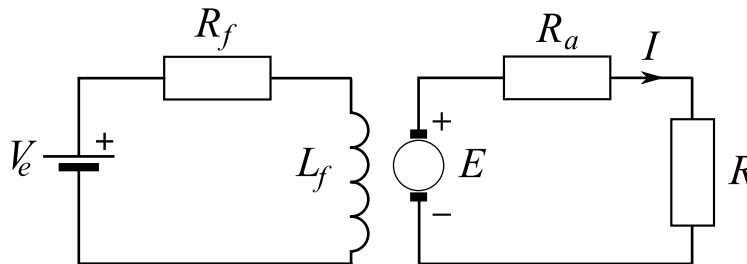
b) Calcular el par del generador y la potencia entregada a la carga.

### Solución del ejercicio 6.10

a) La tensión de vacío del generador corresponde con la tensión producida a la salida del colector de delgas, usando la fórmula 6.57 tenemos:

$$E = K \Phi_p \omega = 200 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \frac{2\pi}{60} = 628 \text{ V}$$

b) Tenemos ahora una carga a la salida del generador. El esquema equivalente del sistema es:



La corriente generada es:

$$I = \frac{E}{R_a + R} = \frac{628}{4 + 100} = 6,04 \text{ A}$$

La potencia por tanto es:

$$P = R I^2 = 100 \cdot 6,04^2 = 3648 \text{ W}$$

El par de fuerza generado por el motor resulta:

$$\tau = \frac{EI}{\omega} = \frac{628 \cdot 6}{2\pi 1000/60} = 36 \text{ N.m}$$

## 6.4 Ejercicios

### 6.4.1 Ejercicios resueltos

1. Un motor asíncrono tiene la siguiente placa característica:

3 phase Motor		CL. F			
N° XXXXX					
V	Hz	r.p.m.	kW	A	cosφ
380-420 Y	50	1420	1.5	3.5	0.79
220-240 Δ	50	1420	1.5	6.1	0.79
440-460 Y	60	1710	1.75	3.5	0.79
250-280 Δ	60	1710	1.75	6.1	0.79

- Se dispone de una alimentación con 220V entre una fase y el neutro, ¿como se conecta el motor a la red?
- Explicar porque aparecen distintas velocidades de rotación.
- ¿Cuántos polos tiene la máquina?
- Cuanto vale el par nominal.
- Calcular el rendimiento del motor en el funcionamiento nominal.

#### Solución

1) Al tener 220V de tensión simple, tenemos que conectar el motor en estrella. La placa característica nos indica la tensión entre línea con la que se tiene que conectar el motor. 380V entre línea corresponde a 230V de tensión de fase.

2) Las diferencias de velocidades surgen de la dos frecuencias de la red de alimentación. El motor gira más rapido con una frecuencia de 60Hz.

3) Usamos la siguiente fórmula para despejar el número de polos:

$$n_s = \frac{120f}{N_P}$$

Siendo la velocidad nominal 1420 r.p.m, la velocidad síncrona debe de ser 1500 r.p.m para tener un número de polos entero. Tenemos:

$$N_P = \frac{120 \cdot 50}{1500} = 4$$

Es una máquina de cuatro polos.

4) El par nominal de calcula gracias a la velocidad de rotación nominal y a la potencia nominal:

$$P_n = T_n \omega_n$$

Despejamos el par nominal:

$$T_n = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{1500}{2\pi 1420/60} = 10 \text{ N.m}$$

5) Para hallar el rendimiento del motor en el régimen nominal calculamos la potencia absorbida de la red primero:

$$P_e = 3 \cdot |\tilde{V}| |\tilde{I}| \cos \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 3,5 \cdot 0,79 = 1824 \text{ W}$$

El rendimiento es la relación entre potencia de entrada y de salida:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} = \frac{1500}{1824} = 0,82$$

2. Un motor asíncrono trifásico tiene los siguientes elementos equivalentes por fase:  $R_1 = 0,3\Omega$ ,  $R'_2 = 0,15\Omega$ ,  $X' = 0,7\Omega$ ,  $X_m = 13\Omega$ . Se conecta el motor en estrella a un generador trifásico de tensión fase-neutro 230V.

Sabiendo que para un determinado régimen la corriente de línea es de 20A con un factor de potencia de 0.8 en atraso, hallar:

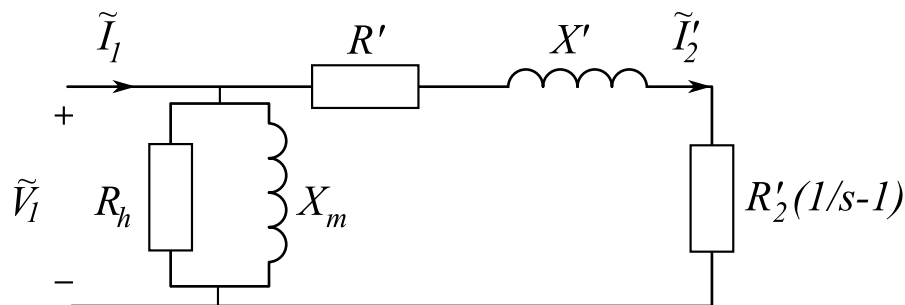
- El deslizamiento.
- El rendimiento.

### Solución

1) Para hallar el deslizamiento existen distintos métodos. Vamos a usar las potencias para despejar este parámetro. Se calcula primero la potencia activa total absorbida por el motor. Quitamos las pérdidas y obtenemos la potencia mecánica interna. A partir de esta potencia se deduce el deslizamiento. La potencia activa total de entrada es:

$$P_e = 3|V_1||I_1| \cos \varphi = 3 \cdot 230 \cdot 20 \cdot 0,8 = 11040 \text{ W}$$

El esquema equivalente del motor en la figura siguiente permite calcular la corriente que circula en el secundario.



La corriente  $I_2$  en el secundario es:

$$\tilde{I}_2 = \tilde{I}_1 - \frac{\tilde{V}_1}{X_m} = 20 \angle \cos(0,8) - \frac{230}{13j} = 33,7 \angle 61,6^\circ \text{ A}$$

Tenemos ahora las pérdidas del motor para una fase:

$$P_{co1} + P_{co2} = (R_1 + R'_2) |\tilde{I}_2|^2 = 0,45 \cdot 33,7^2 = 511 \text{ W}$$

La potencia mecánica interna es:

$$P_{mi} = 11040 - 3 \cdot 511 = 9507 \text{ W}$$

Esta potencia se puede relacionar con la resistencia del rotor  $R'_2$  y el deslizamiento:

$$P_{mi} = 3R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right) |\tilde{I}_2|^2 = 9507 \text{ W}$$

despejando el deslizamiento  $s$  tenemos:

$$s = \frac{1}{\frac{P_{mi}}{3R'_2 |\tilde{I}_2|^2} + 1} = 0,05$$

El deslizamiento es de 5%.

2) Se puede calcular el rendimiento ahora (no tenemos información al respecto de las pérdidas mecánicas):

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_e} = \frac{9507}{11040} = 0,86$$

3. Un generador síncrono de 3MVA, de 11 kV de tensión inducida  $E_i$ , tiene una velocidad de rotación de 1300 r.p.m. y una impedancia síncrona de  $9\Omega$  por fase. La resistencia del devanado es de  $2\Omega$  por fase y se carga al 80% con un factor de potencia de 0.8. Calcular la tensión de salida de la máquina.

### Solución

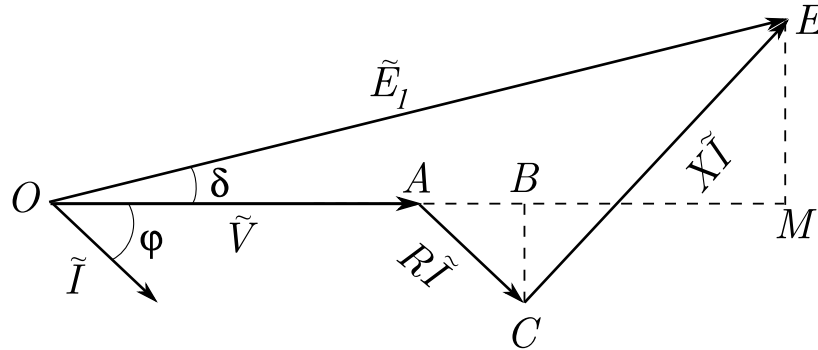
Para hallar la caída de tensión en el generador, calculamos primero la corriente generada. Tenemos por un lado la tensión inducida en la máquina y los elementos que representan las pérdidas. La corriente nominal de la máquina sería:

$$I_N = \frac{S_N}{3V_N} = \frac{3 \cdot 10^6}{3 \cdot 11 \cdot 10^3} = 91 \text{ A}$$

Tenemos la máquina cargada al 80%, por lo que podemos estimar la corriente a:

$$I = 0,8 \cdot 91 = 72,8 \text{ A}$$

Para ayudarnos a estimar la tensión de salida dibujamos el diagrama de fasores del sistema:



En este diagrama podemos estimar la caída de tensión debida a la inductancia síncrona y a la resistencia de cobre de la máquina. Podemos calcular el segmento AM gracias a los datos que tenemos, este segmento vale:

$$\Delta V \simeq RI \cos \varphi + XI \sin \varphi \simeq 510 \text{ V}$$

Ahora podemos estimar la tensión de salida

$$V \simeq E_1 - \Delta V = 11000 - 510 = 10490 \text{ V}$$

#### 6.4.2 Ejercicios adicionales

- Un estátor tiene 12 polos y se alimenta con una tensión trifásica de frecuencia 50Hz. ¿Cual es la velocidad de rotación del campo giratorio generado?  
Respuesta: 500 r.p.m.
- Un motor asíncrono gira a 1450 r.p.m., el deslizamiento es  $s = 0,033$ . La frecuencia de alimentación es de 50Hz. ¿Cuantos polos tiene el rotor?  
Respuesta: 4 polos.
- Un motor asíncrono gira a una velocidad de 2900 r.p.m. La potencia eléctrica consumida es de 3.1kW. Las pérdidas de cobre al primario y al secundario son de 320W. Las pérdidas de hierro son de 170W. Las pérdidas mecánicas son de 40W. ¿Cual es el rendimiento del motor? ¿Cual es el par producido?  
Respuesta:  $\eta = 0,85$ ,  $T = 8,6 \text{ N.m}$ .
- Una motor asíncrono tiene una inducción con 6 polos y se alimenta con una frecuencia de 50Hz. La máquina absorbe 20kW cuando gira a 960r.p.m. Las pérdidas total del estátor son de 0,5kW y la pérdidas de rozamiento y de ventilación son de 1kW.
  - Calcular la velocidad de rotación del campo.
  - Calcular el deslizamiento  $s$ .
  - Obtener las pérdidas de cobre en el rotor.
  - Calcular el rendimiento.
 Respuesta: a)  $n_s = 1000 \text{ r.p.m}$ . b)  $s = 4 \%$  c)  $P_{co} = 740 \text{ W}$  d)  $\eta = 0,888$ .
- Un motor asíncrono  $\Delta$  230 / Y400V de **potencia mecánica** nominal 4kW consume una corriente de línea de 14A con un factor de potencia de 0.81. La

tensión de alimentación es de 230V entre líneas. ¿Como conectamos el motor?  
¿Cual es el rendimiento del motor?

Respuesta: Conectamos en triángulo.  $\eta = 0,88$

6. Un motor asíncrono de 4 polos se conecta en triángulo a una red de 230V entre líneas. Gira a una velocidad de 1459 r.p.m. Sabemos que la potencia mecánica proporcionada es de 3000W y las pérdidas mecánicas de ventilación y rozamiento son de 50W. Tenemos además los parámetros eléctricos siguientes:  $R_1 = 1,5\Omega, R'_2 = 0,8\Omega, R_h = 1133\Omega$  y  $\cos \varphi = 0,83$ . Calcular:

- el deslizamiento  $s$ ,
- la corriente  $|I'_2|$  del modelo equivalente,
- las pérdidas de cobre y de hierro,
- el rendimiento.

Respuesta: a)  $s = 0,027$ , b)  $|I'_2| = 5,97A$ , c)  $P_{co} = 245W, P_h = 140W$ , d)  $\eta = 0,87$ .

7. Un generador sincrono se acopla a una turbina girando a una velocidad de 1200 r.p.m. El generador está formado por un estátor trifásico de 4 polos. El rotor genera un flujo magnético máximo de  $\Phi_m = 500mWb$ , el número de espiras por fase es de 120 y el factor de forma del estátor es:  $K = K_d K_a = 0,91$ . ¿Cuál es la tensión inducida?, ¿Cual es la frecuencia de la tensión generada?

Repuesta:  $\tilde{E} = 2424V, f = 10Hz$ .

8. Un generador sincrono trifásico tiene los parámetros eléctricos equivalentes siguientes:  $R_i = 0,2\Omega, X_i = j2\Omega$ , con  $i$  el número de la fase. Se conecta a una carga trifásica en estrella de impedencia equivalente  $Z_Y = 10 + j\Omega$ . Sabiendo que el generador produce una f.e.m por fase de  $\tilde{E}_f = 1000V$ , calcular la corriente circulando por el circuito y la potencia compleja del sistema.

Respuesta:  $|\tilde{I}_i| = 94 A, S = 88464 + j8846 VA$ .

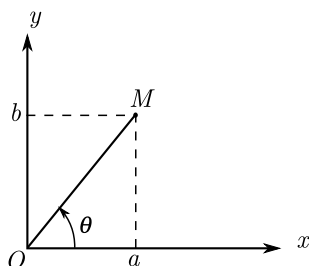


# Apéndice A Recordatorio de números complejos

---

Dado que los números complejos surgen de forma constante en el estudio de circuitos en corriente alterna, recordamos aquí las principales propiedades del cuerpo complejo así como las formulas más usuales.

Si  $a$  y  $b$  son dos números reales entonces el par ordenado de números  $(a, b)$  se llama número complejo, y el conjunto de números complejos se llama  $\mathbb{C}$ . Se representan en un plano ortonormal con  $a$  la coordenada de la abscisa y  $b$  la coordenada de la ordenada. El punto  $M$  del plano así definido se llama imagen del número complejo  $z = (a, b)$ . El cuerpo de los complejos dispone de las siguientes



**Figura A.1** Imagen del número complejo  $z = (a, b)$ .

operaciones:

- Adición:  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ .
- Multiplicación:  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ .
- Identidad:  $(a, b) = (c, d)$  implica  $a = c$  y  $b = d$ .

Con estas operaciones y las definiciones anteriores hemos definido el grupo multiplicativo  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .

El número complejo de coordenada  $(0, b)$  se llaman también números imaginarios puros, y el caso particular  $(0, 1)$  se llama el número  $i$ . Tenemos entonces  $i = (0, 1)$ . Con la operación de multiplicación anterior, si multiplicamos el número  $i$  por sí mismo tenemos:

$$i \cdot i = i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad (\text{A.1})$$

Aquí conviene recordar que en matemáticas el número  $i$  siempre se llama  $i$  y

nunca  $j$ . Esta última denominación es un abuso de los ingenieros electrónicos para no confundir el número complejo con la corriente de un circuito que se suele llamar  $i$  o  $I$ . Aunque este abuso está muy extendido y aceptado, nunca se debe perder de vista la notación convencional  $i$ . Los números complejos de la forma  $(a, 0)$  se escriben también  $a$  dado que el conjunto  $(a, 0)$  se confunde con el conjunto de números reales  $\mathbb{R}$ .

Un número complejo  $(0, b)$  se puede escribir entonces como  $(0, 1) \cdot (b, 0) = i \cdot b$ , por otra parte el número complejo  $(a, b)$  se descompone como la suma  $(a, 0) + (0, b)$ . Esta suma se puede escribir como lo que se llama la forma **algebraica** de los números complejos:

$$z = a + ib \quad (\text{A.2})$$

donde  $a$  es la **parte real** de  $z$ , también escrita  $a = \Re(z)$  y  $b$  es la **parte imaginaria** también escrita  $b = \Im(z)$ .

Definimos ahora dos cantidades importantes de los números complejos. La primera llamada módulo consiste en la norma del vector  $OM$  de la figura A.2. Se define como:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{A.3})$$

La otra cantidad importante es el argumento del número complejo  $z$ , cual representa el ángulo entre el eje de abscisa y el vector  $OM$ . Se define como

$$\arg(z) = \varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad (\text{A.4})$$

Ahora podemos escribir los números complejos en forma **polar**:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\text{A.5})$$

tenemos la identificación:  $a = \rho \cos \varphi$  y  $b = \rho \sin \varphi$ .

Ahora definimos algunos conceptos útiles para trabajar con los números complejos. El número complejo conjugado de  $z$  se define como:

$$z^* = a - ib \quad (\text{A.6})$$

El número complejo  $z^*$  se encuentra reflejado con relación al eje de abscisa. La forma polar de este número es:

$$z^* = \rho(\cos -\varphi + i \sin -\varphi) \quad (\text{A.7})$$

El argumento es ahora  $-\varphi$ .

La forma **exponencial** de un número complejo es:

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (\text{A.8})$$

tenemos la propiedad de las exponenciales complejas:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{A.9})$$

Esta notación simplifica mucho los cálculos, por ejemplo:

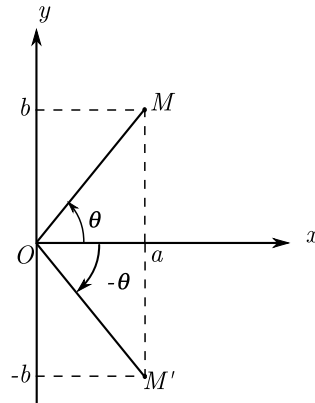


Figura A.2 Imagen del número complejo conjugado  $z$ .

■ Multiplicación:  $z_a = \rho_a e^{i\varphi_a}$  y  $z_b = \rho_b e^{i\varphi_b}$ ,  $z_a \cdot z_b = \rho_a \rho_b e^{i(\varphi_a + \varphi_b)}$

■ Cociente:  $z_a / z_b = \rho_a / \rho_b e^{i(\varphi_a - \varphi_b)}$

Resumimos en la tabla siguiente los principales puntos:

Ordenes de magnitud y formulas importantes	
Adición	$z_1 = a + ib$ , $z_2 = c + id$ $z_1 + z_2 = a + c + i(b + d)$
Multiplicación	$z_1 = a + ib$ , $z_2 = c + id$ $z_1 \cdot z_2 = ac - bd + i(bc + ad)$
Forma algebraica	$z = a + ib$
Modulo	$ z  = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argumento	$\arg(z) = \varphi = \arctan \frac{b}{a}$
Forma polar	$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
Conjugado	$z^* = a - ib = \rho(\cos -\varphi + i \sin -\varphi)$
Forma exponencial	$z = \rho e^{i\varphi}$
Multiplicación en forma exponencial	$z_a = \rho_a e^{i\varphi_a}$ y $z_b = \rho_b e^{i\varphi_b}$ , $z_a \cdot z_b = \rho_a \rho_b e^{i(\varphi_a + \varphi_b)}$

# Apéndice B Conceptos fundamentales de electromagnetismo

---

Las magnitudes tratadas en este documento son varias pero todas relacionadas con el electromagnetismo:

Magnitud	unidad	Ordenes de magnitud
Tensión eléctrica	Voltios	$10^{-3} \rightarrow 10^4 \text{V}$
Corriente eléctrica	Amperios	$10^{-6} \sim 100 \text{A}$
Campo eléctrico	$\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$	$10^{-3} \sim 10^5 \text{kV}$

Hablaremos mucho de las dos primeras, son fundamentales para el estudio de los circuitos.

## B.0.3 Introducción al calculo vectorial

Llamaremos un campo vectorial una función de  $\mathcal{R}^3$  en  $\mathcal{R}^3$  definida por:

$$V(x, y, z) = V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k} \quad (\text{B.1})$$

con  $(i, j, k)$  una base del espacio vectorial. Las funciones  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_z$  se llaman las componentes del campo. Existen numerosos ejemplos de campos vectoriales pero los que vamos a manipular son básicamente campos eléctricos y campos magnéticos. Como recordatorio de las principales operaciones de calculo vectorial presentamos en la tabla siguiente los operadores que vamos a necesitar para los desarrollos:

Recordatorio de las operaciones de calculo vectorial		
$\text{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$	Divergencia de un campo vectorial
$\text{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}$	$\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$	Gradiente de un campo escalar $\varphi(x, y, z)$
$\text{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$	$\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$	Rotacional de un campo vectorial

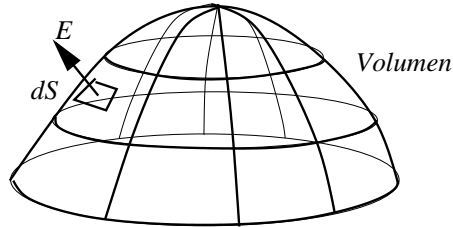


Figura B.1 Teorema de Maxwell-Gauss

#### B.0.4 Campo eléctrico y magnético

#### B.0.5 Leyes de Maxwell

Las cuatro leyes de Maxwell resumen toda la electrodinámica clásica de forma muy elegante. Con este conjunto de ecuaciones podemos deducir todas las otras leyes de la electrotecnia.

#### Ley de Maxwell-Gauss

Para empezar describimos la ley de Maxwell Gauss. En su formulación local esta ley nos dice que la divergencia de un campo eléctrico es igual a la distribución de cargas. En su formulación integral, la ley explicita que dado de una superficie cerrada, el flujo del campo eléctrico a través de la superficie es igual a la suma de las cargas encerrado en la superficie. Esta segunda formulación tiene aplicaciones practicas muy importantes. Permite por ejemplo de calcular fácilmente la expresión de un campo a partir de una superficie de Gauss dada y conociendo la carga que engloba. Las formulaciones matemáticas de estas leyes es:

$$\varepsilon \mathbf{div}(E) = \rho \quad (\text{B.2})$$

$$\int_S E dS = \frac{Q}{\varepsilon} \quad (\text{B.3})$$

Con  $E$  un campo eléctrico en el espacio,  $\rho(x, y, z)$  una función escalar representando la distribución de cargas y  $Q$  la carga dentro de la superficie de Gauss.

#### Ley de Maxwell-Ampere

La ley de Maxwell-Ampere nos dice que el rotacional del campo magnético es igual a la densidades de corrientes y la variaciones del campo eléctrico. Esta definición un poco oscura se traduce en su forma integral que la circulación de un campo magnético sobre un contorno cerrado es igual a la suma de la corrientes internas al contorno. La expresión local e integral de esta ley se formula como:

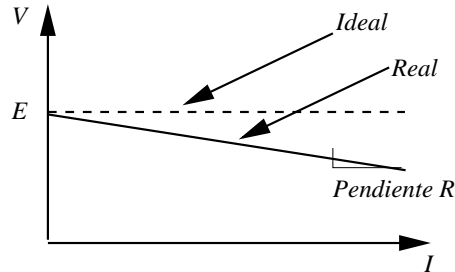


Figura B.2 Teorema de Maxwell-Ampere

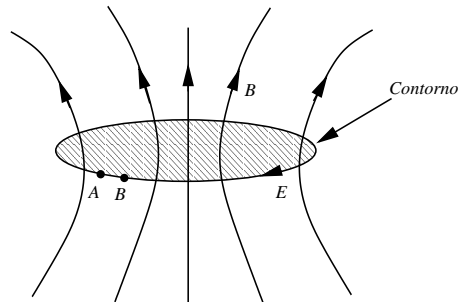
$$\text{rot}(B) = \mu j + \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{B.4})$$

$$\int_l B dl = \mu \sum_l I \quad (\text{B.5})$$

En la figura B.2 tenemos un ejemplo de contorno en el cual la geometría del problema nos permite directamente deducir la expresión del campo magnético. En la ecuación B.4 precedente tenemos dos términos para la generación del rotacional del campo magnético, uno son las fuentes de corriente, cuyo desplazamiento producen el campo magnético. El otro término es lo que se llama corriente de desplazamiento, cuando el campo eléctrico alcanza variaciones muy rápidas este término empieza a ser importante. Pero en el caso general se desprecia frente a las fuentes de corriente. Sin embargo esta corrección de las ecuaciones de Ampère es fundamental para los fenómenos de propagación, implica un acoplamiento entre campo eléctrico y campo magnético. Es la base de todas las ondas electromagnéticas.

### Ley de Maxwell-Faraday

La ley de Maxwell-Faraday es otra de las leyes de electromagnetismo que seguramente tuvo más aplicaciones técnicas en la ingeniería. La ley de Faraday indica que el rotacional de campo eléctrico es igual a las variaciones temporales del campo magnético como indicado en la ecuación (B.6). Pero esta ley es más famosa de otra forma, dado un contorno cerrado y orientado, la circulación del campo eléctrico sobre este contorno es igual a la variación del flujo del campo magnético a través de la superficie que se apoya sobre el contorno. Como consecuencia de ello, un campo magnético variable puede inducir una diferencia de potencia en una espira. Este descubrimiento abrió paso a la construcción de generadores y motores capaces de producir energía eléctrica a partir de campos magnéticos variables en el tiempo o en el espacio. La expresión local e integral



**Figura B.3** Teorema de Maxwell-Faraday

de esta ley se formula como:

$$\text{rot}(E) = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

$$\int_l E dl = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{B.7})$$

con  $\Phi(t)$  el flujo del campo magnético a través de la superficie apoyándose sobre el contorno  $l$ .

Para ilustrar esta ley presentamos en la figura B.3 una situación típica de un hilo conductor en forma de bucle circular atravesado por un campo magnético. Si integramos el campo eléctrico sobre el contorno entre los puntos  $A$  y  $B$  tenemos y recordando que  $E = -\text{grad}(V)$

$$\int_A^B \varepsilon E dl = - \int_A^B \varepsilon \text{grad}(V) dl = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Lo que nos lleva a

$$V_{AB} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{B.8})$$

Esta ecuación es lo que se suele llamar ley de inducción electromagnética o ley de Faraday.

### B.0.6 Divergencia del campo magnético

La última ley de Maxwell (aunque tradicionalmente se enuncia como la segunda ley de Gauss de la magnetoestática) expresa que no existen fuentes escalares de campo magnético, es decir que el campo magnético es un campo de rotacional. Esta condición se traduce matemáticamente como:

$$\text{div} B = 0 \quad (\text{B.9})$$

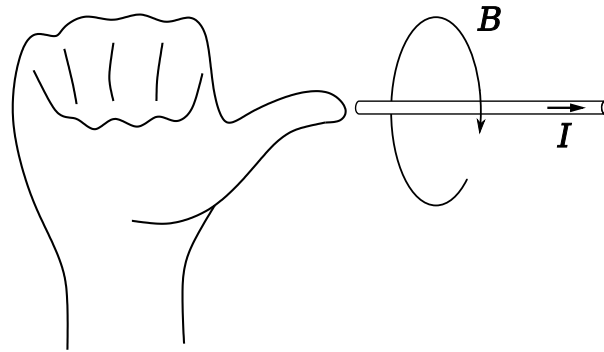


Recordatorio de las leyes del electromagnetismo	
$F = qE$	Fuerza de arrastre sobre una carga
$F = qv \times B$	Fuerza ejercida sobre una carga en movimiento con una velocidad $v$
$F = lBi$	Fuerza de Laplace
$\epsilon \text{rot}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\int_l \epsilon \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$	Ley de Faraday local Ley de Faraday integral
$\epsilon \text{div}(\mathbf{E}) = \rho$ $\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon}$	Ley de Gauss local Ley de Gauss integral
$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ $\int_l \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu \sum_l I$	Ley de Maxwell-Ampere local Ley de Maxwell-Ampere integral
$\text{div}(\mathbf{B}) = 0$ $\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	No existen fuentes magnéticas No existen fuentes magnéticas

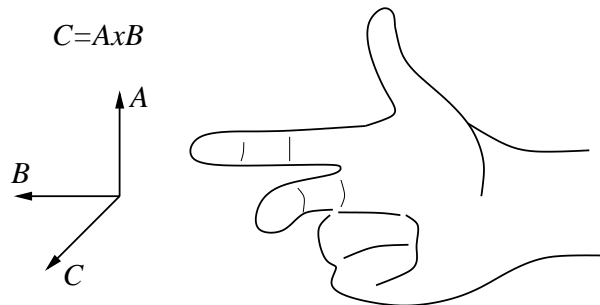
## B.1 Sentido del campo magnético

Para determinar el sentido de un campo magnético a partir de la circulación de una corriente en un alambre tenemos varios métodos gráficos y mnemotécnicos. Por ejemplo la regla de la mano derecha consiste en seguir la corriente con el pulgar y cerrar los dedos en semicírculo. Esto determina el sentido de las líneas de campo magnético como indicado en la figura B.4(a).

Otro método mnemotécnico permite determinar el resultado de un producto vectorial de la forma  $C = A \times B$ . En la figura B.4(b) tenemos la regla de los tres dedos de la mano derecha. El pulgar corresponde al primer vector  $A$ , el índice al



(a) Regla de la mano derecha



(b) Regla de los dedos de la mano derecha

**Figura B.4** Regla de la mano derecha para determinar el sentido del campo y el. (a) En esta figura tenemos un ejemplo de como deducir el sentido del campo creado por la circulación de una corriente. El pulgar se pone en la dirección de la corriente y la mano cerrada indica el sentido del campo. (b) En esta figura se muestra como obtener el sentido del producto vectorial de dos vectores ortogonales.

segundo vector  $B$  y el mayor indica el sentido del producto vectorial de los dos primeros vectores. Esta regla se revela útil para determinar las fuerzas debidas a los campos magnéticos como la fuerza de Lorentz o de Laplace. Podemos mencionar también la regla del hombrecillo de Ampère. Este hombrecillo se coloca en el sentido de la corriente (la corriente recorriendo su cuerpo de los pies hacia la cabeza), el hombre mira el punto que nos interesa y extiende su brazo izquierdo. El brazo indica la dirección del campo magnético.

## Bibliografía

### Bibliografía del capítulo I:

1. Física para universitarios, Giancoli, D. C., Pearson Educación (2002)
2. Física para la ciencia y la tecnología, Tipler, P. A., Reverté (2005)
3. Electrotecnia, Fundamentos Teóricos y Prácticos, Guerrero, A., Sánchez, O., Moreno, J.A., Ortega, A., Mc Graw Hill (1994)
4. Circuitos Eléctricos, Volumen I., Astor Gutiérrez, A., Ortega Jiménez, J., Parra Prieto, V.M. y Pérez-Coyto, A., Uned (2003)
5. Circuitos Eléctricos, Nilsson, J., Riedel, S., Pearson (2006)
6. Electromagnetismo y Circuitos Eléctricos, Fraile-Mora J., Mc Graw Hil (2006)
7. Fundamentos de Teoría de Circuitos, Gómez Expósito, A., Martínez Ramos, J.L., Rosendo Macías, J.A., Romero Ramos, E., Riquelme Santos, J. M., Paraninfo (2007)

### Bibliografía de los capítulos II y III:

1. Circuitos Eléctricos, Volumen I., Astor Gutiérrez, A., Ortega Jiménez, J., Parra Prieto, V.M. y Pérez-Coyto, A., Uned (2003)
2. Circuitos Eléctricos, Nilsson, J., Riedel, S., Pearson (2006)
3. Electromagnetismo y Circuitos Eléctricos, Fraile-Mora J., Mc Graw Hil (2006)
4. Fundamentos de Teoría de Circuitos, Gómez Expósito, A., Martínez Ramos, J.L., Rosendo Macías, J.A., Romero Ramos, E., Riquelme Santos, J. M., Paraninfo (2007)
5. Circuitos Eléctricos para la Ingeniería, Conejo Navarro, A., Clamagirand, A., Polo, J.L., Alguacil Conde, N., McGraw Hill (2004)
6. Fundamentos de Circuitos Eléctricos, Cogdell, J.R., Pearson Educación (2000)
7. Análisis Básico de Circuitos Eléctricos y Electrónicos, Ruiz Vázquez, T., Arbe-laitz Gallego, O., Etxeberria Uztarroz, I., Ibarra Lasa, A., Pearson Educación (2004)
8. Análisis de Circuitos en Ingeniería, Hayt, W. Jr., Hart, W., Kemmerly, J., Nagore Cazares, G., Durbin, S., McGraw-Hill (2003).
9. Compensación de energía reactiva, Da Costa, M., Multinormas (2004).

### Bibliografía de los capítulos IV y V:

1. Física para la ciencia y la tecnología, Tipler, P. A., Reverté (2005)
2. Máquinas Eléctricas, Chapman S. J., Mc Graw Hill (2005)
3. Máquinas Eléctricas, Fraile-Mora J., Mc Graw Hill (2003)
4. Máquinas Eléctricas y Transformadores, Guru, B., Hiziroglu, H., Oxford (2003)
5. Teoría de Circuitos, Carlson, B., Thomson (2004)
6. Electrotecnia, Alcalde San Miguel, P., Paraninfo (1994)
7. Fundamentos de Máquinas Eléctricas, Cogdell, J.R., Pearson Educación (2002)
8. Tecnología Eléctrica, Castejon, A. , Santamaría Herranz, G., Montanero Molina, P., McGraw-Hill (1994)

# Índice alfabético

- Índice de carga, 303
- Índice horario, 312
- Adelanto, 120
- Admitencia, 50
- Alterna (corriente), 113
- Amortiguamiento, 85
- Ampère (ley de), 26, 212
- Amplitud, 113
- Anillos rozantes, 255
- Atraso, 120
- Autoinductancia, 130
- Bode (diagrama de), 154
- Boucherot (fórmula de), 229
- Campo de imanación, 211, 219
- Campo de una espira, 257
- Campo eléctrico, 6
- Campo giratorio, 258
- Carga, 5
- Circuito abierto, 17
- Circuito magnético, 212
- Circuito RLC, 84
- Coefficiente de autoinducción, 28
- Condensador, 19
- Condensador de compensación, 151
- Constante de tiempo, 81
- Corriente, 5
- Corriente asignada, 277
- Corriente de falta, 297
- Corriente de línea, 189
- Corriente de magnetización, 226
- Corriente de mallas, 54
- Corriente eléctrica, 5
- Cortocircuito, 17
- Cuadripolos, 154
- Decibelios (dB), 156
- Densidad de flujo magnético, 212
- Deslizamiento, 338
- Diagrama de Bode, 155
- Diagrama de fasores, 117, 138
- Dieléctrico, 21
- Diferencia de fase, 142
- Diferencia de potencial, 5
- Dipolo, 9
- Efecto Joule, 18
- Entrehierro, 215
- Equivalente monofásico, 191
- Escobillas, 255
- Estátor, 250, 336
- Estátor trifásico, 256
- Excitación magnética, 210–212
- Factor de potencia, 146
- Faraday (ley de), 130
- Faradio, 21
- Fase, 113
- Fase (referencia de), 119
- Fasor, 117
- Ferromagnetismo, 210
- Filtro paso bajo, 157
- Flujo magnético, 214
- Foucault (corriente de), 222
- Frecuencia, 113
- Frecuencia angular, 113
- Fuente
  - dependiente, 36
- Fuente dependiente
  - corriente alterna, 135
- Fuerza electromotriz, 31
- Fuerza magnetomotriz, 213
- Fuerzas de Laplace, 240
- Función de transferencia, 154
- Ganancia (dB), 156
- Generador
  - alterna, 134
  - corriente, 34
  - dependiente, 36
  - lineal, 237
  - rotativo, 251
  - tensión, 31
- Henrio, 27
- Hierro (pérdidas de), 227
- Histéresis (fenómeno de), 220
- Hopkinson (ley de), 213
- Imanación, 219
- Imanes permanentes, 220
- Impedancia, 123
- Impedancia compleja

- Condensador, 127
- Inductancia, 131
- Índice de Carga, 292
- Inducción magnética, 210, 212
- Inductancia, 25
- Inductor, 25, 336
- Jaula de ardillas, 336
- Kapp (hipótesis de), 293
- Kennelly (Teorema de ), 73
- Kirchhoff (leyes de), 42
- Lazo, 40
- Ley de Joule, 18
- Método de la mallas, 54
- Magnetismo remanente, 220
- Magnetización (corriente de), 226
- Malla, 40, 44
- Mano derecha (regla de), 389
- Masa, 39
- Materiales Ferromagnéticos, 210
- Millman (teorema de), 63
- Momento (de fuerzas), 248
- Motor
  - asíncrono, 336
  - lineal, 243
  - rotativo, 248
- Neutro, 39
- Norton (teorema de), 67
- Nudo, 40
- Ohm (ley de), 15
- Ohm (Ley general de), 135
- Pérdida de flujo magnético, 284
- Pérdidas de cobre, 284
- Pérdidas de hierro, 224, 283
- Par (de fuerza), 248
- Paralelo (asociación en), 49
- Periodo, 113
- Permeabilidad magnética, 27, 210
- Permeabilidad relativa, 211
- Permitividad, 21
- Pila, 31
- Polo magnético, 259
- Potencia
  - de la inductancia, 148
  - de la resistencia, 147
  - del condensador, 147
  - activa, 142
  - aparente, 145
  - asignada, 276
  - compleja, 144
  - instantánea, 142
  - mecánica, 251
  - media, 142
  - reactiva, 142
- Potencial, 5
- Pruebas de un transformador, 298
- Régimen de transitorio, 116
- Régimen permanente, 116
- Rama, 40
- Rama en paralelo de un transformador, 283
- Reacción del inducido, 362
- Reactancia, 127, 131
- Rectificador, 157
- Reductor, 356
- Referencia de fase, 119
- Regulación de voltaje, 295
- Relación de transformación, 274
- Reluctancia, 213
- Rendimiento, 290
- Resistencia, 15
- Resistencia interna, 32
- Resistividad, 17
- Rotor, 248, 336
- Saturación del circuito magnético, 219
- Sección proyectada, 251
- Secuencia directa, 186
- Secuencia indirecta, 186
- Serie (asociación en), 48
- Sistema equilibrado, 189
- Solenoides, 25
- Steinmetz (fórmula de), 221
- Supermalla, 56
- Susceptibilidad magnética, 211
- Tellegen (teorema de), 71
- Tensión, 5
- Tensión asignada, 277
- Tensiones compuestas, 188
- Tensiones simples, 188
- Thévenin (teorema de), 65
- Tierra, 39
- Transformación  $\Delta$ -Y, 73
- Transformación T-II, 73
- Transformación Y- $\Delta$ , 73
- Transitorio, 79, 84
- Trifásico (sistema), 186
- Valor cuadrático medio, 115
- Valor eficaz, 115
- Velocidad angular, 113
- Velocidad asíncrona, 338
- Velocidad síncrona, 338