

© Roberto Imaz Gutiérrez. Este capítulo se publica bajo Licencia [Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

Capítulo 4. FLEXIÓN PURA Y FLEXIÓN SIMPLE

4.1 GENERALIDADES

Se dice que una pieza está sometida a “flexión pura” cuando se aplica en sus extremos dos pares iguales y opuestos. O de otra forma, cuando de los elementos de reducción N , M , T y C todos son iguales a cero excepto M .

La parte central (C, D) de la viga AB, de la figura 4.1 está sometida a **flexión pura**.



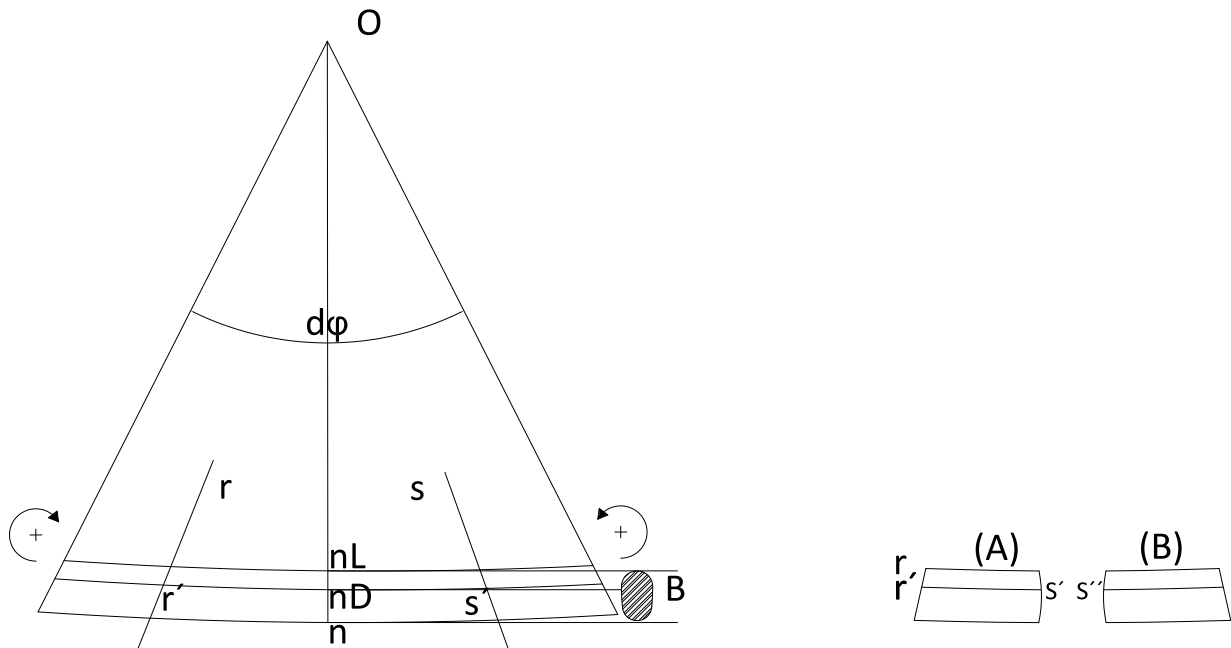
figura 4.1

Este caso tiene gran interés, a pesar de darse poco en la práctica, porque los resultados obtenidos son aplicables al caso normal, en que M es variable, viniendo, por tanto acompañada de un esfuerzo cortante, ya que según vimos $\tau = -T$. Este último caso, en que M es variable, y como consecuencia, existe también T , se llama **“flexión simple”**.

4.2 FLEXIÓN PLANA.

4.2.1 Consideremos una viga rectilínea de sección normal constante, con un plano de simetría y sometida, en sus extremos, a dos pares iguales y de sentidos contrarios, contenidos en el plano de simetría.

La viga se curvará por efecto de los pares. El radio de curvatura de la deformada, dependerá de alguna manera de M . Siendo éste constante, debemos concluir que el eje de la pieza se transformará en una curva de radio de curvatura constante. Por otra parte, se ve, por razones de simetría, que esta curva deformada, debe estar contenida en el plano de simetría de la viga, concluimos que la deformada del eje de la pieza es un arco de círculo contenida en el plano de simetría de la pieza (m.l.)



4.2.2 Una sección recta como la dada por el plano mn , se deforma, como perteneciente al trazo A, que queda a la izquierda de mn , según una cierta superficie S' . Como perteneciente al trozo B se deforma según S'' .

Por razón de simetría $\rightarrow S'$ debe ser simétrica de S'' respecto a mn (*).

Por otra parte $\rightarrow S'$ debe coincidir con S'' porque en la realidad están superpuestas.

Esta doble condición solo puede cumplirse si la deformada de la sección S , permanece plana. Por otra parte, por simetría este plano debe pasar por el centro de curvatura o de fibra media.

Luego podemos afirmar;

“ Por la deformación debida a la flexión pura, las secciones rectas S permanecen planas y normales a la fibra media (m.l.).

Éstas son las célebres hipótesis de NAVIER O DE BERNO que aquí hemos demostrado con todo rigor. La validez de estos resultados, se confirman, por otra parte, experimentalmente.

(*) – Para ver que en la deformación existe ,aislemos la parte de viga comprendida entre las secciones rr' y ss' , simétricas respecto a la mn , por la teoría de la Elasticidad.

4.2.3 Basándonos en las dos propiedades deducidas en 4.2.1 y 4.2.2, podemos afirmar que todas las fibras se curvan según círculos de centro O. Unas fibras estarán tendidas y otras comprimidas, ya que en caso contrario, no se podría cumplir la ecuación de equilibrio.

$$N = \int_{\Omega} \sigma d\Omega = 0$$

Estando pues, una parte de la sección S tendida, y otra comprimida, habrá una línea frontera en la que será $\sigma = 0$.

También podemos decir, en virtud de la ley de Navier, que cada sección gira, con relación a una sección próxima, alrededor de un eje llamado “eje neutro”, de manera que el plano de la sección pasa por el centro de curvatura de la viga deformada.

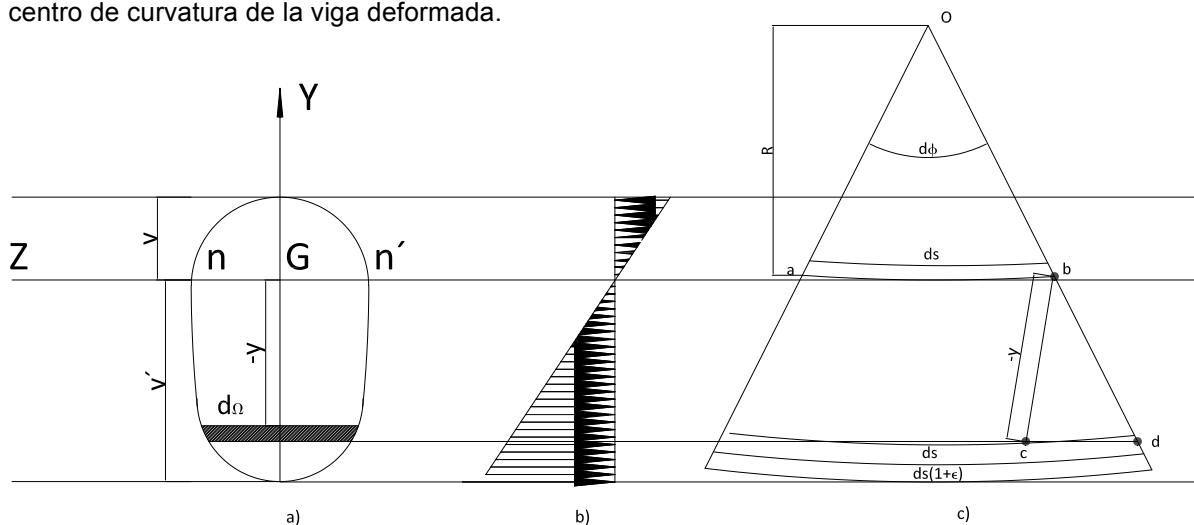


FIGURA 4.3

Calculemos ahora la posición del eje neutro, el radio de curvatura de la viga deformada, y la repartición de tensiones.

Una rebanada, se deformará, según lo acabado de explicar, como se indica en la figura 4.3 c) y siendo mn el eje neutro de la sección recta S.

De la semejanza de los triángulos O a b y b c a se deduce;

$$\frac{Oa}{ab} = \frac{bc}{cd} \text{ o sea } \frac{\rho}{ds} = \frac{-y}{ds \cdot \varepsilon} \text{ de donde } \boxed{\varepsilon = -\frac{y}{\rho}} \quad (4.1)$$

Esta fórmula, que lleva el signo menos si M es positivo, nos dice: que los alargamientos son proporcionales a y, y lo mismo ocurrirá con las tensiones ya que $\sigma = \varepsilon \cdot E$. Por ello la repartición de tensiones será lineal, tal como se indica en la figura 4.3.b) estando sometidos a la misma tensión, todos los puntos situados en una paralela a nn' y siendo nulas en este eje.

Escribamos que el sistema de vectores formado por las fuerzas interiores, α, Ω, σ , que actúan sobre la sección S equilibran el momento M.

La resultante de las fuerzas debe ser nula, luego;

$$\int_{\Omega} \sigma d\Omega = 0 \text{ o sea } -\frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

Esto quiere decir que nn' pasa por G c.d.g. de la sección. Por simetría, será además normal al plano de simetría, o sea al eje Gy.

Igualando ahora la suma de momentos de las fuerzas a M (para mayor comodidad tomamos momentos respecto al eje nn') queda;

$$M = \int_{\Omega} y \cdot r \cdot d\Omega = \frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y^2 d\Omega, \text{ o sea } \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}} \quad (4.3)$$

Siendo $I = \int_{\Omega} y^2 d\Omega$ el momento de inercia (m.d.i.) de la sección S respecto al eje nn'.

Vemos pues, que la curvatura $\frac{1}{\rho}$ varía proporcionalmente a M, e inversamente al producto que se denomina, rigidez a la flexión.

La rotación $d\theta$ entre dos caras de una rebanada de espesor ds será después de (4.3), habida cuenta de que $\rho = \frac{ds}{d\theta}$; $\boxed{d\theta = \frac{M}{EI} ds}$ (4.3')

Si la viga es de sección constante y longitud l es; $\boxed{\theta = \frac{Ml}{EI}}$ (4.3'')

Eliminado ρ entre (4.1) y (4.3) se obtiene el valor de σ ; $\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$ (4.4)

(El signo menos quiere decir que, para y positivas, tal como hemos cogido los ejes, y M positivo, resultan tensiones de compresión). Este signo normalmente se prescinde de él.

4.2.4 Por la fórmula 4.4, o bien por la repartición de tensiones dibujada en la figura 4.3.b), vemos que las tensiones máximas, en valor absoluto, se dan en las fibras extremas.

Volviendo a la figura 4.3.a) si suponemos que R y R' son los valores absolutos de las tensiones admisibles a compresión y tracción respectivamente, el máximo momento positivo que puede resistir la sección será el menos de los dos valores que deduzcan de;

$$\frac{M}{I} v \leq R, \frac{M}{I} v' \leq R'$$

El valor absoluto del máximo momento negativo que puede soportar la viga, vendrá dado por el menos valor deducido de;

$$\frac{M}{I} v \leq R', \frac{M}{I} v' \leq R$$

4.2.5 Todo lo establecido en este apartado 4.2, ha sido suponiendo que la viga tenía un plano de simetría en el que actúan los dos pares opuestos. Veamos en que casos sigue siendo aplicable la teoría precedente aunque, no exista plano de simetría de la sección.

En el caso de sección, con plano de simetría, tal como la de la figura 4.3.a), nos permite afirmar inmediatamente que el momento del sistema de fuerzas interiores $\sigma \cdot d\Omega$, aplicadas sobre la sección S , tienen momento nulo respecto al eje vertical Gy , como se requiere para que este sistema sea equivalente a M . En el caso de que no exista tal simetría, se deberá verificar que el momento M con respecto a Gy es nulo. Este momento vale;

$$M_y = \int_{\Omega} z \cdot \sigma \cdot d\Omega = -\frac{E}{\rho} \int_{\Omega} z \cdot y \cdot d\Omega$$

Como debe ser $M_y=0$ se debe verificar $\int_{\Omega} z \cdot y \cdot d\Omega = 0$.

Esto quiere decir que G_z y G_y son los ejes principales de inercia de la sección S .

Concluimos que para la teoría expuesta en los apartados que van del 4.2.1 al 4.2.4, sea aplicable a una sección S no simétrica se debe verificar y basta que “el plano en que se aplica el momento flector M , contenga uno de los ejes principales de inercia de la sección recta S'' ”. Estos planos se denominan planos principales de flexión”.

Esta modalidad de flexión, estudiada en el apartado 4.2, en que el plano de la flexión, exista o no plano de simetría de la viga, coincide con el plano del momento o par, y que, el eje neutro es normal a este plano, se la conoce con el nombre de Flexión Plana.

Como ejemplos de flexión plana sin existir plano vertical de simetría, indicamos los de la figura 4.4, actuando el par M en el plano Gxy .

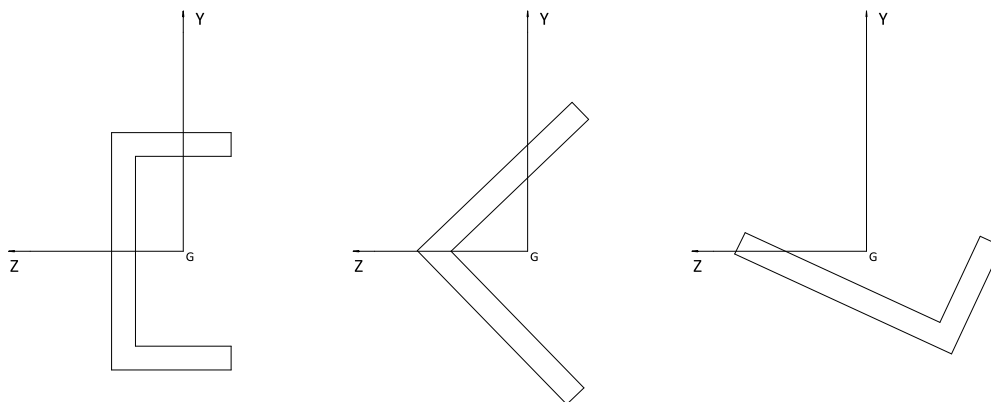


figura 4.4

4.3 MODULO DE RESISTENCIA. RENDIMIENTO GEOMÉTRICO. INFLUENCIA DE LA FORMA DE LA SECCIÓN RECTA.

4.3.1 En la teoría elástica de la flexión se establece como condición para que la resistencia de la viga esté asegurada que $\sigma_{\max} \leq R$, siendo R la tensión admisible. Como acabamos de ver la σ_{\max} se alcanza en la fibra más alejada del eje neutro. O sea que para transmitir un momento flector M mediante un cierto material que permite una tensión de tracción o de compresión R , es preciso emplear una sección recta tal que;

$$\frac{I}{|Y_{\max}|} = \frac{I}{v} = \frac{M}{R}$$

La característica geométrica de la sección I/v se llama módulo de resistencia.

4.3.2 Alcanzándose la $\sigma_{\max} = R$ en las fibras extremas, el material situado cerca del eje neutro, tiene muy mal aprovechamiento, pues la fuerza que actúa sobre una determinada $d\Omega$ de área proporcional a Y , y el momento de esta fuerza proporcional a Y al cuadrado

La forma óptima será, pues, aquella que distribuye la mayor cantidad de material posible en las fibras extremas, y que, den a la sección la mayor altura posible. Los perfiles normales I de acero laminado, están diseñados de acuerdo con esta doble condición.

En definitiva la mejor forma será aquella que para un área determinada Ω de la sección, da mayor valor del módulo de resistencia I/v .

El valor máximo del módulo de resistencia, para un área de canto dado, se alcanza para una sección, ideal simétrica, en la que la materia está concentrada en las fibras extremas. Este valor máximo es

$$\frac{I}{v} = \frac{2\Omega/2 \left(\frac{h}{2}\right)^2}{\frac{h}{2}} = \frac{\Omega \cdot h}{2}$$

En una sección cualquiera es $\frac{I}{v} = \eta \frac{\Omega \cdot h}{2}$. El coeficiente sin dimensiones η (siempre menor que 1), se llama “rendimiento geométrico” de la sección.

Vemos pues, que para un área dada, el módulo de resistencia crece proporcionalmente con el canto (h) y con el rendimiento geométrico (η). Si Ω y h son dados, el módulo es proporcional a η .

Las formas constructivas que dan el rendimiento geométrico más alto, serán aquellas que concentran la materia en las zonas alejadas del eje neutro, unidas entre ellas por un alma delgada. Se llega así a los perfiles dobles T, bien laminados (en serie), o compuestos.

- En las dobles T de acero laminado es $\eta \approx \frac{2}{3}$.

- En los perfiles en U y carriles de ferrocarril es $\eta = \frac{3}{5}$
- El anillo circular delgado, que es la mejor forma a dar a un tubo, que debe resistir momentos contenidos en cualquier plano diametral, tiene un η algo inferior a $\frac{1}{2}$.
- El rendimiento geométrico del rectángulo es bajo $\eta = \frac{1}{3}$.
- Más bajo, es aún, el del círculo $\eta = \frac{1}{4}$ y pésimo el del rombo $\eta = \frac{1}{6}$.

Advirtamos, finalmente, que el aumentar el área de la sección recta, no motiva necesariamente, el disminuir la tensión máxima de flexión, así, por ejemplo, suprimiendo en la sección romboidal de la figura 4.6 a) o en la circular figura 4.5b) las partes rayadas, se aumenta el módulo de resistencia.

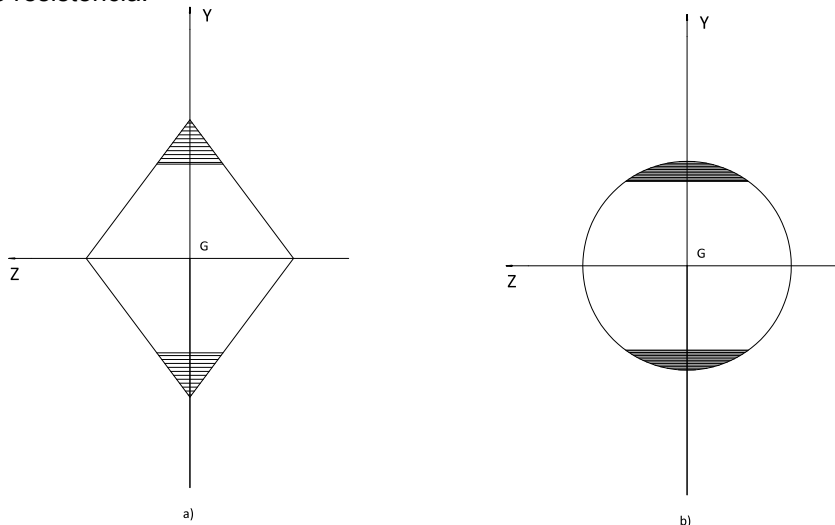


figura 4.6

4.4 TRABAJO DE DEFORMACIÓN

Sea una viga de plano medio, de longitud l , de sección normal constante, sometida dos pares M iguales y opuestos, contenidos en su plano de simetría. El giro relativo de las secciones extremas, es según (4.3'')

$$\theta = \frac{M.l}{E.I}$$

Si los pares, los aplicamos haciéndoles crecer gradual y simultáneamente, de forma que no aparezca ninguna aceleración, el trabajo efectuado por éstos, se obtendrá siguiendo un proceso análogo al expuesto en el apartado 3.3 al tratar de una barra sometida a tracción simple.

$$d\zeta = M' d\theta' \text{ y } \zeta = \frac{1}{2} M \cdot \theta \quad (4.6)$$

Por medio de 2.5 podemos escribir ζ en función de M o θ exclusivamente quedando;

$$\zeta = \frac{M\theta}{2} = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{EI\theta^2}{2l}$$

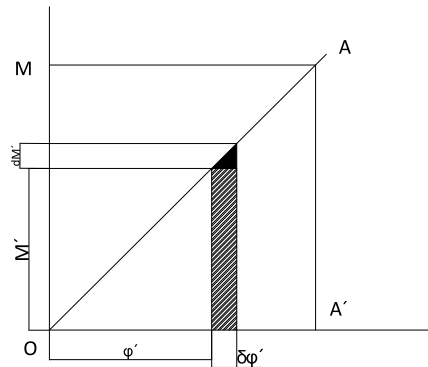
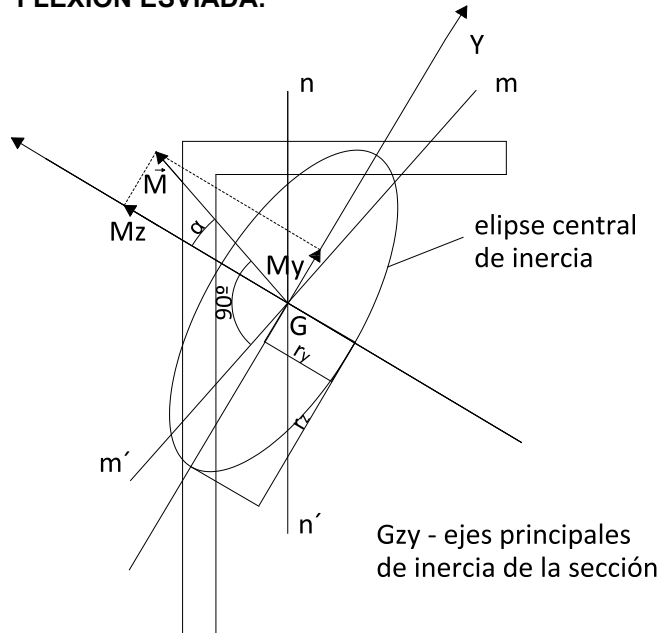


Figura 4.7

Si el momento flector o la sección, o ambos a la vez varían gradualmente con S, se tendrá;

$$\zeta = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \quad (4.7)$$

4.5 FLEXION ESVIADA.



$$M_z = M \cos \alpha$$

$$M_y = M \sin \alpha$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{\Omega}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{\Omega}}$$

NOTA: n n' no es vertical en general, como parece en la figura.

Consideremos ahora, una viga de sección recta cualquiera y uniforme, sometida a flexión pura. El plano de sollicitación mm' es un plano cualquiera, conteniendo el eje de la viga. El par M contenido en este plano vendrá representado por un vector M normal a este plano.

La forma más sencilla de hallar las tensiones y giros debidos a esta sollicitación es descomponer el vector \vec{M} en sus componentes \vec{M}_3, \vec{M}_4 sobre los ejes principales de inercia de la sección por superposición de efectos, después de los efectos de estos dos pares.

El momento \vec{M}_z actúa sobre el plano \vec{G}_y y produce en un punto de coordenadas (z, y) la tensión

normal
$$\sigma' = -\frac{M_z y}{I_z}.$$

De igual forma el par \vec{M}_y produce en este punto una tensión normal
$$\sigma'' = -\frac{M_y z}{I_y}.$$

La tensión normal σ será pues $\sigma = \sigma' + \sigma''.$

$$\sigma = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} = M \left(-\frac{y \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \operatorname{sen} \alpha}{I_y} \right) \quad (4.8)$$

El eje neutro se obtendrá igualando la expresión anterior a cero.

$$\frac{z \cdot \operatorname{sen} \alpha}{I_y} - \frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} = 0 \quad (4.9)$$

Es fácil ver que esta recta es el diámetro conjugado del plano mm' . En efecto las coordenadas homogéneas del punto del infinito de la recta mm' son $(\operatorname{sen} \alpha, -\cos \alpha, 0)$ y la polar de este punto, coincide con (4.9).

Como por efecto de M_z la deformación es plana, y lo mismo ocurre por M_y (también será plana la deformación producida por $\vec{M} = \vec{M}_y + \vec{M}_z$). La sección recta girará pues alrededor del eje neutro.

4.5.1 NOTAS

Como el neutro nn' conserva la misma posición en cada sección, las rectas nn' formarán, después de deformada la viga, un cilindro recto de revolución, y la fibra media de la viga, o sea el lugar de los c.d.g. G de las secciones rectas, será una sección recta de este cilindro, o sea, un círculo.

Vemos pues, que en el caso de flexión pura esviada, de una viga, con una sección recta uniforme cualquiera, la fibra media se curva según un círculo, y por tanto la definición de flexión plana dada en el apartado 4.2.5 no es muy afortunada, ya que este caso solo difiere de aquél en que la traza del plano de sollicitación y el eje neutro no son perpendiculares. En el caso de flexión esviada los puntos del plano que conteniendo el eje de la viga es perpendicular al eje neutro, experimentan corrimientos contenidos en este plano, el cual es un plano de simetría de la deformación.

4.6 DEFORMACIÓN EN LA FLEXIÓN ESVIADA

Según hemos visto en el apartado anterior, el momento flector \overline{M} , que actúa sobre un plano, conteniendo el eje de una viga, de sección uniforme, sometida a flexión pura, puede descomponerse en las proyecciones de aquél sobre los ejes principales de inercia de la sección recta cuyo giro queremos determinar, sean \overline{M}_z y \overline{M}_y , estas proyecciones de forma que $\overline{M} = \overline{M}_z + \overline{M}_y$. La deformación producida por \overline{M} será la suma de las deformaciones producidas por \overline{M}_z y \overline{M}_y (principio de la superposición de efectos).

\overline{M}_z es un par actuando sobre el plano Gzy y produce un giro de la sección, alrededor de \overline{Gz} , representado por $\theta_z = \frac{\overline{M}_z l}{EI_z}$.

Igualmente el par \overline{M}_y , que está contenido en el plano Gzy, produce un giro de la sección, alrededor de \overline{Gy} representado por el vector $\theta_y = \frac{\overline{M}_y l}{EI_y}$.

El giro total producido por \overline{M} será; $\overline{\theta} = \overline{\theta}_z + \overline{\theta}_y = \frac{\overline{M}_z l}{EI_z} + \frac{\overline{M}_y l}{EI_y}$

El ángulo β que forma el eje de giro con el eje \overline{Gz} será;

$$\tan g \beta =$$

Y el módulo de este giro;

$$|\overline{\theta}| = \frac{l}{E} \sqrt{\left(\frac{\overline{M}_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{\overline{M}_y}{I_y}\right)^2} \quad \text{o si } \alpha \text{ es el ángulo que } \overline{M} \text{ forma con}$$

$$\overline{Gz}; \overline{\theta} = \frac{Ml}{E} \sqrt{\left(\frac{\cos \alpha}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{I_y}\right)^2}$$

$$Z = \frac{1}{2} \overline{M} \overline{\theta} = \frac{1}{2} M \theta \cos \gamma$$

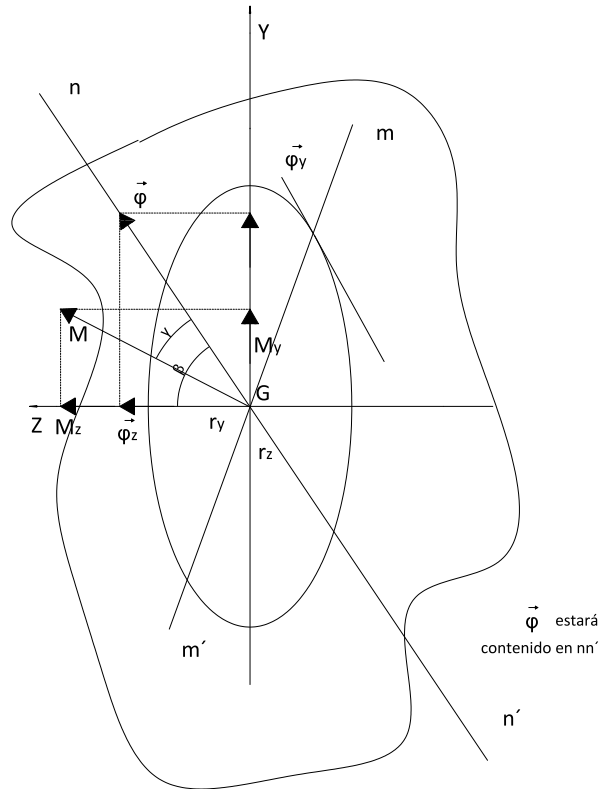


figura 4.9

4.7 FLEXIÓN SIMPLE

La sollicitación por flexión pura y esfuerzo cortante, se encuentra en todas las vigas rectas cargadas con fuerzas normales a su eje. La aparición del esfuerzo cortante T_1 , exige que M sea variable con S ya que $T = -\frac{dM}{ds}$. Este tipo de sollicitación la distinguiremos con el nombre de “flexión simple” para distinguirla de la flexión pura, en la que como hemos visto, sólo aparece un momento de flexión constante.

Las tensiones normales en la flexión simple, por el momento flector, vienen dadas por la conocida fórmula de la flexión pura $\sigma = -\frac{My}{I}$.

En efecto, demostraremos en el capítulo 6 que “esta fórmula sigue siendo exacta, si M viene acompañado de un esfuerzo cortante, con tal que este último sea constante, y la sección recta uniforme”.

En caso contrario, esfuerzo cortante o sección recta variable, la anterior fórmula, aunque no exacta, es aplicable con suficiente aproximación, como demuestran la experiencia y la teoría de la elasticidad.

Digamos finalmente, que las conclusiones precedentes, sólo son válidas si las secciones consideradas están suficientemente alejadas de fuerzas concentradas. Como vimos, por el principio de Saint-Venant, esta distancia es aproximadamente, el canto de la viga. En las proximidades de las cargas concentradas se superponen a las tensiones halladas por la fórmula clásica, otras, dadas por fórmulas empíricas, de las que no trataremos en este curso.