Capítulo 5. FLEXIÓN COMPUESTA

5.1 FLEXION COMPUESTA PLANA.

5.1.1 Se dice que una pieza está sometida a flexión compuesta cuando está sometida, simultáneamente, a flexión y a tracción o a compresión. Si todas las fuerzas exteriores aplicadas a la pieza están situadas en uno de los planos principales de flexión, se dice que la pieza está sometida, aparte de un posible esfuerzo cortante, a "flexión compuesta plana".

Este último es pues el estado de tensiones producido en una sección recta, por una fuerza normal a este y contenida en uno de los planos Gxy o Gxz siendo $\overrightarrow{G_z}$ y $\overrightarrow{G_y}$ los ejes principales de la sección.

5.1.2 Para hallar el estado de tensiones y deformaciones procederemos por superposición de efectos.

- El esfuerzo normal N produce unas tensiones $\sigma' = -\dfrac{N}{\Omega}$ (lleva signo menos si N es compresión).

- El momento flector M produce unas tensiones $\sigma'' = \dfrac{-M_y}{I}$.

La tensión total será $\sigma = -\dfrac{N}{\Omega} - \dfrac{M_y}{I}$ (5.1)

Las secciones planas, manteniéndose, planas y normales a la fibra media, por ambas solicitaciones. Por otra parte como por efecto de la primera y segunda solicitación, N y M respectivamente, una cara de una rebanada experimenta una traslación y un giro (alrededor de $\overrightarrow{G_z}$), esta cara efectuará, en la flexión compuesta plana, un giro alrededor de un eje paralelo a $\overrightarrow{G_z}$ cuya posición determinaremos después.

Las tensiones máximas se producirán en las fibras: extremas, viniendo dadas por (tomamos las compresiones positivas)

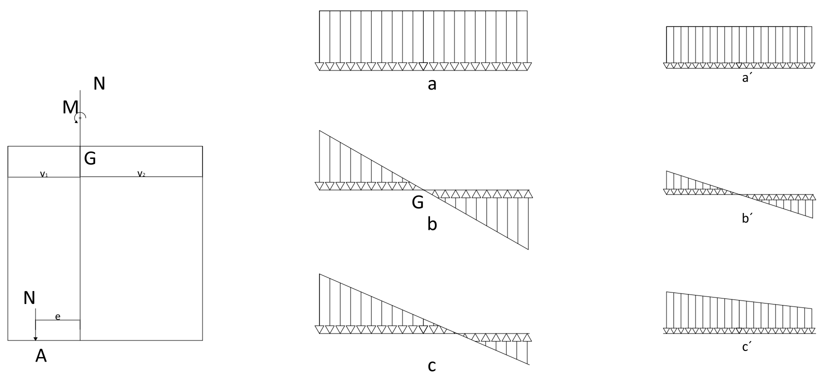

fig.5.1

En la figura 5.2 vemos la representación gráfica del estado de tensiones que actúa sobre una sección por superposición de las que produce N y M.

Según que $\frac{|N|}{\Omega}$ sea mayor o menor que $|\frac{M_y}{\Omega}|$

σ_z será de compresión o tracción, supuesto que N sea una compresión.

5.1.3 La fuerza N aplicada en G, y el momento M son equivalentes a una fuerza normal N única aplicada en A tal que $M = -N.0$ (5.2) (ver figura 5.1).

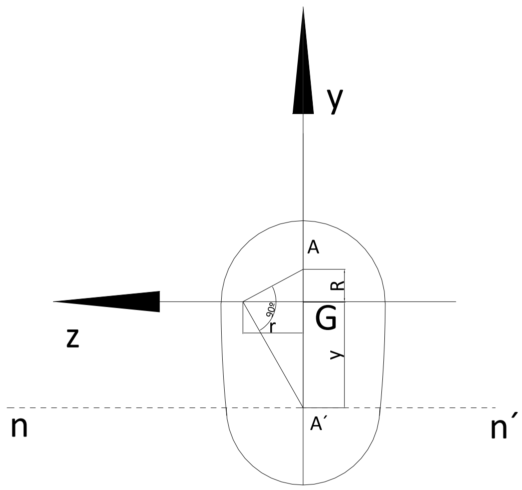

fig.5.3

Si se reemplaza M por este valor, en 5.1 queda (ponemos compresiones)

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{N_{ey}}{I} = \frac{N}{\Omega}(1 + \frac{ey}{r^2}) \quad (5.4)$$

Siendo $r^2 = \frac{I}{\Omega}$, o sea el cuadrado de lo que hemos llamado "radio de giro" de la sección alrededor del eje Gz.

El eje neutro nn´ o eje de giro, mencionado en 5.1.2, vendrá representado por la ecuación.

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{ey}{I}$$

O también $1 + \frac{ey}{r^2} = 0$ (5.4´)

O sea $GA' = -\frac{r^2}{e}$ (5.3). De aquí se desprende la construcción gráfica de nn´ que se ilustra en la figura 5.3. Observamos que la posición de este eje no depende del módulo de N sino, únicamente de su posición.

5.1.4 En el caso de sección recta rectangular será (Como este caso se utiliza normalmente para columnas o muros a compresión excéntrica tomamos N y σ positivos si son compresiones).

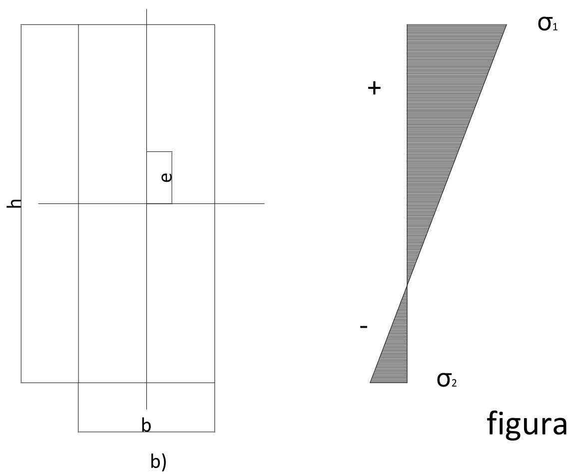

figura 5.4

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{b\,h} + G\frac{Ne}{bh^2} = \frac{N}{bh}(1 + \frac{Ge}{h}) \\ \sigma_2 &= \frac{N}{b\,h} - G\frac{Ne}{bh^2} = \frac{N}{bh}(1 - \frac{Ge}{h}) \end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

5.2 FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA.

5.2.1 Definición

Se dice que una sección recta, está sometida a "flexión compuesta" cuando sobre un punto genérico C de su plano, actúa un esfuerzo normal N.

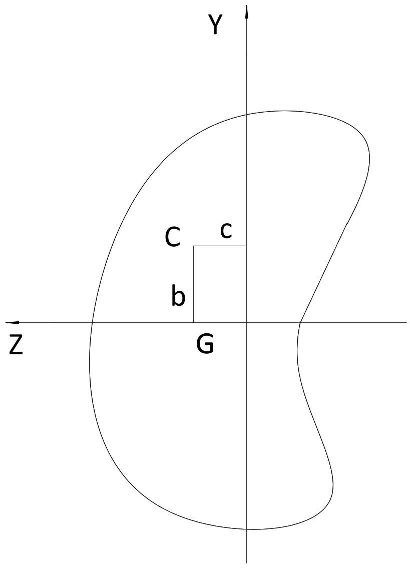

figura 5.5

La fuerza N aplicada en C, es equivalente al sistema compuesto por;

- La fuerza normal N actuando sobre el c.d.g. de la sección recta (S).
- Los pares $\begin{matrix} M_y = N.c \\ M_z = -N.b \end{matrix}$ adoptamos como ejes Gz y Gy los ejes principales de inercia de la sección (S).

Podemos por tanto decir también, que una sección, está sometida a flexión compuesta, cuando está sometida a flexión compuesta, cuando está sometida a un momento flector $\overrightarrow{M}$ de componentes $\overrightarrow{M_z} y \overline{M_y}$, según los ejes principales de inercia, y aun esfuerzo normal N.

El punto C de aplicación de la fuerza exterior, se llama centro de presión y la curva descrita por este punto cuando la sección recta S, varía, se llama "curva de presiones".

5.2.2 Cálculo de las tensiones. Relación entre el centro de la presión y la fibra neutra.

a) El estado de tensión de la flexión compuesta, resulta inmediatamente de la superposición de los resultados obtenidos para la compresión simple y de la flexión esviada, o en definitiva de la compresión simple y flexión plana.

Aplicando pues el principio de la superposición de efectos tendremos pues, la siguiente tensión normal con un punto de coordenadas z, y;

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{\Omega} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z} \quad (5.7)$$

O sustituyendo M_z y M_y pues sus valores dados en 5.1.

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{Nb}{I_z} y + \frac{Nc}{I_y} z} \quad (5.7´)$$

b) Se llama fibra neutra o eje neutro, a la línea o la sección recta S, en que las tensiones son cero. Se obtendrá pues la ecuación de esta, igualando a cero la ecuación (5.7) ó (5.7´) que vemos que representan una recta.

Veamos a continuación la relación que existe entre el centro de presiones y la fibra neutra (f.n.).

La ecuación de la fibra neutra se puede escribir dividiendo la (5.7´) por $\frac{N}{\Omega}$ y llamando

$\sigma_y^2 = \frac{I_y}{\Omega}$; $\sigma_z^2 = \frac{I_z}{\Omega}$

$$\boxed{\frac{by}{\sigma_z^2} + \frac{cz}{\sigma_y^2} + 1 = 0} \quad (5.7´´)$$

Que vemos que es la "antisolar" (x) del punto c de coordenadas b y c respecto de la elipse central de inercia de ecuación;

$$\boxed{\frac{y^2}{\sigma_z^2} + \frac{z^2}{\sigma_y^2} - 1 = 0} \quad (5.8)$$

Si llamamos M y N a los puntos de intersección de la f.n. y los ejes Gy y Gz respectivamente; tendremos $m = \frac{\sigma_z^2}{b}$; $n = -\frac{\sigma_y^2}{c}$ (5.9) siendo m la ordenada del punto m y n la abcisa del punto N.

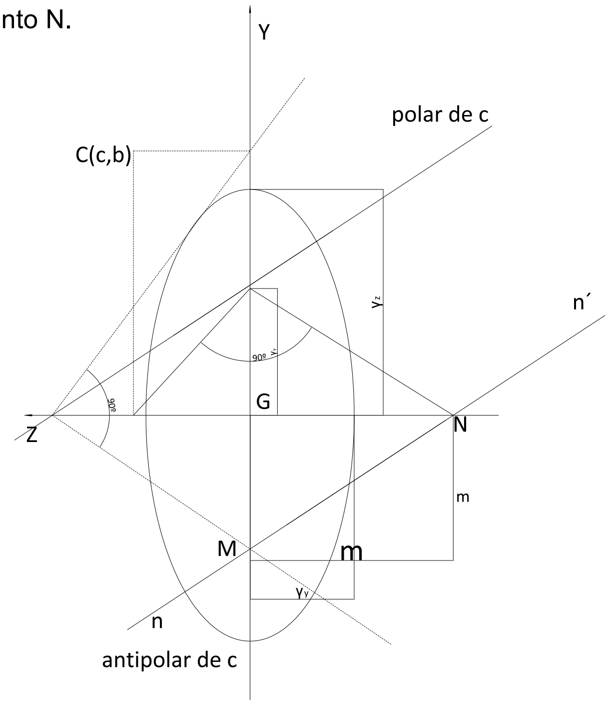

figura 5.6´

De estas fórmulas se deduce la construcción gráfica del eje neutro nn´ que se ilustra en la figura 5.6. Vemos pues que si el centro de presión C (b,c) se acerca a G, al ser b y c pequeñas hacen que m y n sean grandes, en valor absoluto, o lo que es lo mismo, que en le f.n. se sale fuera de la sección y toda ella está sometida a tracción o compresión (según que N sea una tracción o una compresión).

Si al contrario, C se aleja del centro de gravedad, m y n resultaran pequeñas, y en consecuencia la f.n. cortará a S, dividiéndola en dos zonas: una que está a compresión, y otra a tracción. (ver continuación en la página 5).

(*) Con objeto de que se pueda seguir fácilmente la lectura de éste capítulo, el alumno no familiarizado con el concepto de polo y antisolar, respecto a una elipse, las deducciones que siguen se hacen también normalmente, sin los recursos de esta teoría.

5.3 NÚCLEO CENTRAL

En ciertos materiales, como la mampostería y hormigón en masa, que prácticamente no trabajan a tracción, interesa saber dentro de que zona puede moverse una fuerza normal $\overline{N}$ para que toda la sección recta esté a compresión.

Esta zona se denomina "núcleo central". Advirtamos que no es necesario poner la condición de que la fuerza $\overline{N}$ sea normal, ya que si se trata de una fuerza oblicua $\overrightarrow{R}$ cualquiera $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N} + T$ siendo $\overrightarrow{N} y \overline{T}$ la componente normal a la sección y la contenida en ella; como el esfuerzo cortante $\overrightarrow{T}$, no produce más que tensiones tangenciales, y lo mismo el momento torsor $\overrightarrow{M_t} = T.d$ se puede definir el núcleo central como " la zona de una sección recta, en que moverse, el punto de aplicación de una fuerza $\overrightarrow{R}$ oblicua cualquiera, para que bajo la acción de ésta, toda la sección trabaje a compresión".

El método general para determinar el núcleo central se apoya en que;

a) para que la sección esté enteramente comprimida por una fuerza $\overrightarrow{R}$ (siendo su componente normal, $\overline{N}$, una compresión) es necesario y suficiente, que la fibra neutra no corte a la sección.

b) El centro de presión C (punto de aplicación de la fuerza $\overrightarrow{R}$) y la fibra neutra son polo y antisolar respecto a la elipse central de inercia.

VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS;

1. SECCIÓN CIRCULAR

Por simetría, se ve inmediatamente que el núcleo central debe ser un círculo concéntrico con el círculo dado.

Si R es el radio de este círculo, se encuentra el radio "a" del núcleo central escribiendo, que cuando el punto de aplicación de la fuerza N, está sobre el contorno de este círculo, la fibra neutra es tangente al círculo de radio R.

El radio de giro del círculo respecto a un eje cualquiera es;

$$r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}} = \sqrt{\frac{\pi R^4/4}{\pi R^2}} = \frac{R}{2}$$

y sustituyendo en la ecuación (5.4´) “r” por R/2. e “y” por R, y “e” por a, queda;

$$1 + \frac{aR}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 0 \qquad \boxed{a = R/4}$$

2. EN EL CASO DE UN ANILLO CIRCULAR, de radio exterior R_1 o interior R_2 tenemos;

$$I = \frac{\pi}{4}(R_1^2 - R_2^2) \qquad r^2 = \frac{I}{\Omega} = \frac{R_1^2 + R_2^2}{4}$$ y por la ecuación (5.9´)

tendremos;

$$1 + \frac{aR_1}{R_1^2 + R_2^2/4} = 0 \rightarrow a = \frac{R_1^2 + R_2^2}{4R_1}$$

3. SECCIÓN RECTANGULAR.

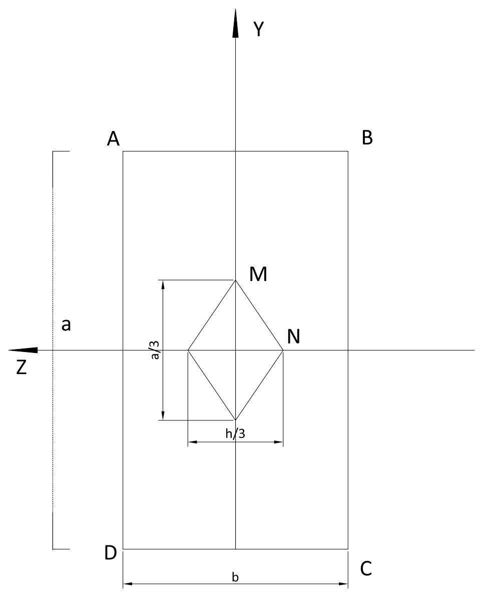

figura 5.10

En este caso, cuando la fibra neutra coincide con CD el centro de presión es un punto E tal que (fòrmula 5.4´):

$$GM(-a/2) = -r_z^2 = -a^2/12 \text{ o sea } GM = \frac{a}{6}.$$

Igualmente, cuando la fibra media ocupa la posición AD, el centro de presión, estará sobre un punto N del eje Gz, tal que Gn=b/6.

Cuando el centro de presión recorre el segmento MN, la fibra neutra girará alrededor de D (ya que D es el Antipolo de la recta MN respecto a la elipse central de inercia).

Por simetría, se concluye que el núcleo central es el rombo con las dimensiones acotadas de la figura 5.9.

4. SECCIÓN EN DOBLE T.

Las secciones extremas de la fibra neutra que no cortan a la sección con las rectas AB, BC, CD y DA.

Las posiciones correspondientes del punto de presión se determinan por la ecuación (5.4´).

Así por ejemplo cuando la fibra neutra ocupa la posición CD el centro de presión tendrá una ordenada b dada por $a = \dfrac{i_z^2}{h/2}$.

Se deduce entonces que el núcleo central es el rombo acotado en la figura 5.10.

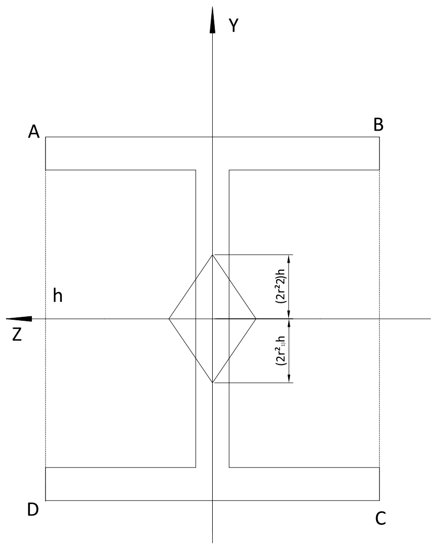

figura 5.10

NOTA IMPORTANTE:

Para entender mejor este capítulo vamos a deducir de una de las propiedades fundamentales de polo y antisolar lo siguiente;

"Si el centro c de presión se desplaza a lo largo de una recta r la línea neutra correspondiente, gira alrededor de un punto fijo R, (que es el Antipolo de r respecto a la elipse central de inercia)".

El alumno puede demostrar esta propiedad sin necesidad de recurrir a la teoría de polo y antisolar, de la siguiente forma;

La fuerza N actuando en C, se puede descomponer en dos fuerzas, también normales a S, $N_1 y N_2$ aplicadas en los puntos $C_1 y C_2$ respectivamente.

Entonces por superposición de efectos se ve que la fibra neutra pasa siempre (cualquiera que sean $N_1 y N_2$) por el punto R intersección de las fibras neutras de $C_1 y C_2$.

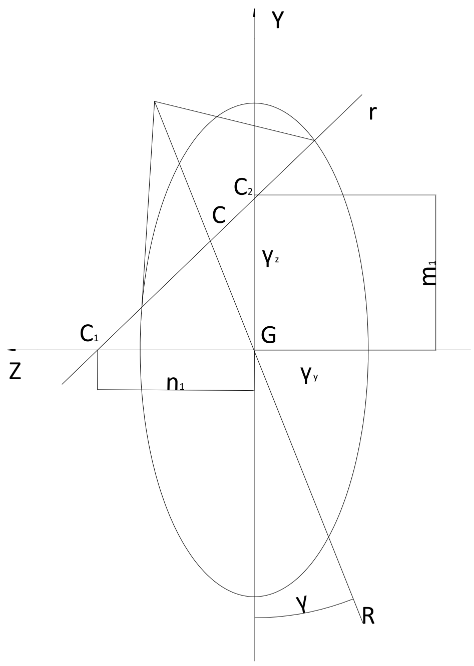

figura 5.6´