CAPITULO I

Física, magnitudes físicas y mediciones

Concepto de Física y sus dominios de aplicación

La Física es una ciencia **empírica.** Todo lo que sabemos del mundo físico y de los principios que rigen su comportamiento se ha obtenido a partir de la **observación** de los fenómenos de la naturaleza

*La **física** es la ciencia natural que se ocupa de la **materia** y la **energía** y sus posibles **interacciones***

Trata de la composición, estructura, forma, creación, aniquilación, interacción, movimiento, tiempo y luz, sonido y átomos, tornillos, palancas y escalas, reactores, estruendosos cohetes, estrellas lejanas débiles; se ocupa de la unión y la separación, de la totalidad de las cosas físicas. Ya no puede seguir estrictamente limitada a lo inanimado. Con cada inspiración se absorben más de 1000 trillones de átomos «sin vida», de cuyo comportamiento se ocupa la física. La variedad de disciplinas activas en las que está implicada la física (por ejemplo, biofísica, geofísica, fisicoquímica, astrofísica) revela esta gran diversidad, también nosotros somos materia y energía.

La Física, seguramente la ciencia más completa, es una aventura creativa, poderosa, pero al mismo tiempo elegante y sutil.

A continuación se indica en palabras de Alberto Einstein cual es el objetivo de la ciencia:

Las ciencias naturales, a diferencia de las ciencias sociales, tienen como objetivo la naturaleza, es decir, las propiedades físicas del universo material, revelado, directa o indirectamente, a través de la experiencia humana.

"El objetivo de la ciencia es, por una parte, una comprensión, lo más completa posible, de la conexión entre las experiencias de los sentidos en su totalidad y por otra, la obtención de dicho objetivo usando un número mínimo de conceptos y relaciones primarios."

La ciencia se fundamenta en la **reproducibilidad de los resultados experimentales**, esto es "sistemas idénticos " afectados por las mismas condiciones probablemente se comportarán de manera idéntica.

La experimentación consiste entonces en la reproducción en laboratorio del fenómeno en condiciones controladas. Los resultados de la observación dan como resultado los " datos", los que posteriormente son analizados para obtener sus "leyes empíricas" y expresarlas de manera "analítica". El conjunto de leyes obtenidas dará origen a las "teorías". La teoría es la justificación racional de la ley, y la explicación de los fenómenos.

En el siglo XVI, Tycho Brahe recogió, con increíble precisión, los datos de las órbitas planetarias. Esto es, exactamente dónde estaban los planetas en el cielo ayer y anteayer y con anterioridad. Pero no vio el orden oculto.

Kepler tomó los datos de Tycho y a partir de los mismos creó sus tres leyes sobre el movimiento planetario que revelaban los patrones de recurrencia. Esto es la forma en que se mueven los planetas —en órbitas elípticas—, etc. Sin embargo, no desarrolló el concepto central que liga las leyes entre sí, esto es la llamada ley de gravitación universal.

Newton tomó la noción de una fuerza de gravedad como una idea clave del movimiento planetario y con ella creó una teoría que nos permitió entender. la razón de que los planetas sigan las leyes de Kepler.

Esta es la secuencia básica: datos, ley, teoría. Pero la cosa no acaba ahí; una vez que estamos moderadamente satisfechos, la ciencia no cierra sus ojos a la naturaleza tentativa de su formalismo. La ciencia no es estática, puesto que sus resultados se encuentran en continuo cambio, modificándose y adaptándose a las nuevas leyes, discrepancias, refinamientos, comprobaciones, predicciones, nuevas teorías, nuevos entendimientos.

Siglos después, cuando observaciones; más refinadas revelaron pequeñas inconsistencias en la teoría de la gravedad de Newton, Einstein nos trajo un «entendimiento» aún más refinado, con su teoría de la de gravitación

La verdad científica, aunque no es incontrovertible, proporciona, sin embargo, una base razonablemente fiable para la acción humana, y esto también es un propósito válido.

Unidades fundamentales de medición.

La descripción de un fenómeno físico requiere del establecimiento de **cantidades físicas**, mediante las cuales de puedan expresar las leyes físicas. Entre estas cantidades se encuentra por ejemplo. la longitud, masa, tiempo velocidad, aceleración fuerza, carga eléctrica, corriente eléctrica, volumen, campo eléctrico, campo magnético, temperatura, presión y muchas más. Para indicar una cantidad física se debe de establecer su proceso de **medición**, tal y como lo indicó acertadamente Lord Kelvin (William Thomson) en las siguientes palabras:

"Con frecuencia afirmo que cuando usted puede medir aquello de lo que habla, y lo expresa en números, debe conocer algo acerca de ello: pero cuando usted no puede expresarlo en números, su conocimiento es pobre e insatisfactorio. Tal vez sea el principio del conocimiento, pero usted lo tiene poco avanzado en sus pensamientos respecto del estado de la ciencia".

El medir es una actividad más elaborada de lo que originalmente se piensa, puesto que no consiste solamente en la comparación de la cantidad a medir con un **patrón** establecido, puesto que la aplicación del patrón escogido no garantiza obtener el "valor verdadero" de la cantidad a medir, a lo que se puede aspirar es tener un "valor promedio" y un valor de " incertidumbre o error", o sea medir nunca puede hacerse de forma exacta. Por ejemplo no podemos medir el espesor de esta página con precisión definitiva ni la masa de este libro o el tiempo que se tarda en leer una línea, (suponiendo que cada una de estas magnitudes sea constante, que no lo son). Siempre hay inexactitudes inevitables. Para fines de cálculo en la solución de problemas solo se considera los valores promedios indicados de las medidas.

Sistemas de unidades.

Unidades básicas y Unidades derivadas

El patrón a utilizar debe ser reproducible, de fácil aplicación y aceptado por todos, afortunadamente algunas cantidades físicas pueden considerarse como BASICAS, (longitud masa y tiempo), y a partir de ellas obtener otras llamadas DERIVADAS (densidad, velocidad, aceleración, fuerza, trabajo y energía)

Sistema internacional de unidades

En reuniones del comité internacional se estableció un conjunto de patrones para estas cantidades fundamentales o básicas. El sistema que se integró es una adaptación del sistema métrico, y recibe el nombre de Sistema Internacional (SI) de unidades. La abreviatura SI proviene del nombre en francés "Système International d´¨Unités", la tabla 1.1 indica las siete cantidades básicas su nombre y símbolo, para el caso de la Mecánica solo son consideradas las unidades de tiempo, longitud y masa

Tabla 1.1

UNIDADES BASICAS DEL SI		
cantidad	Nombre	Símbolo
Tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Cantidad de sustancia	mol	mol
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Corriente eléctrica	ampere	A
Intensidad lumínica	candela	cd

A la tabla anterior hay que agregar las unidades adimensionales suplementarias

UNIDADES SUPLEMENTARIAS		
cantidad	Nombre	Símbolo
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	sterradián	sr

La definición de los patrones han sufrido cambios con el paso del tiempo, esto con el fin de obtener patrones mejor reproducibles y más estables a condiciones externas como el medio ambiente, a continuación se indican las definiciones de los patrones de tiempo, longitud y masa

TIEMPO.- El segundo antes de 1960 se había definido en 1/(86400) del día solar medio, pero actualmente se sabe que la rotación de la tierra no es constante por lo que usando las frecuencias asociadas con ciertas transiciones atómicas de ciertos átomos, en 1967, se redefinió el segundo usando la frecuencia característica de un tipo particular de átomo de cesio como el “reloj de referencia”, esto es el segundo es 9 192631770 periodos de la radiación de átomos de cesio 133.

LONGITUD.- El primer patrón internacional de longitud (metro patrón), fue una barra de una aleación de platino e iridio, conservado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, copias del metro patrón han sido enviadas a diferentes laboratorios de países adscritos al SI, para la calibración de instrumentos. En 1960 se adoptó como 1 650 763.73 longitudes de onda anaranjada del isótopo de criptón (^{86}Kr), debido a que la precisión requerida ya no era satisfecha con el patrón anterior en 1983 se adoptó como metro la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de segundo. Lo cual es equivalente a decir que la velocidad de la luz es 299 792 458 metros/segundos exactamente.

MASA - En el caso el patrón es un cilindro de platino e iridio que se encuentra en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, al cual se le ha asignado la masa de 1 kilogramo.

Notación científica.

Prefijos para las unidades

Debido a que hay cantidades físicas mucho mayores o menores a las unidades básicas, el sistema métrico establece múltiplos de 10 ó 1/10, por ejemplo 1 gramo es igual a 1/1000 kilogramo, la notación más conveniente para estos múltiplos es la notación científica así, $1/1000 = 10^{-3}$ posible asignar unidades menores y mayores a las unidades derivadas, los nombres de dichas unidades múltiplos de las básicas se obtienen añadiendo el prefijo al nombre de la unidad fundamental. La tabla 1.2 indica los nombres, prefijos de los múltiplos de las unidades básicas

TABLA 1.2

Algunos prefijos para las unidades del Sl

Potencia	Prefijo	abreviatura
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	ato	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	mili	m
10^{-2}	centi	cm
10^{-1}	deci	d
10^{1}	deca	D
10^{2}	hecto	H
10^{3}	kilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zeta	Z
10^{24}	yota	Y

Operaciones con notación científica

Cifras significativas

El número de cifras diferentes de cero a la derecha que se utilizan para representar una medida, se llaman **cifras significativas**, por ejemplo si se tiene una placa rectangular cuyo ancho 10.4 cm y largo 16.3 cm ambas medidas cuentan con 3 cifras significativas, la última cifra indica aproximadamente el tipo de instrumento utilizado para medir, en este caso se deduce que para realizar las medidas se utilizó una regla con escala mínima de mm, si en cambio las medidas anteriores se hubieran expresado como ancho 10.45 cm y largo 16.34, las cifras significativas serian 4 y el instrumento utilizado para la medición podría ser un vernier con escala mínima de 0.1 mm.

El número de cifras significativas no aumenta o disminuye si la medida es expresada en la notación científica en otro tipo de unidades, utilizando el ejemplo anterior,10.4 cm =104 mm =10.4×10^{-2} m, en todos los casos se tiene tres cifras significativas.

Cuando se utilizan las medidas o datos proporcionados en los problemas para hacer operaciones como son sumar, multiplicar, dividir, extraer raíz, etc., sea con calculadora ó a mano, surge la pregunta ¿con cuántas cifras debe ser expresado el resultado de la operación?, Una respuesta adecuada a está interrogante, es utilizar como número máximo de cifras significativas, al número de cifras significativas de la medida con menor número de cifras significativas que se utiliza en la operación.

Por ejemplo si se desea calcular el área de la placa rectangular, utilizando los datos ancho 10.4 cm y largo 16.3 se tendrá área =(10.4 cm)(16.3cm) =169.52 cm^2 resultado que contiene cinco cifras significativas, siendo que las medidas solo poseen tres por lo tanto aplicando redondeo el resultado se expresa como área =170 cm^2. En el caso de las medidas ancho 10.45 cm y largo 16.34 cm, con cuatro cifras decimales, se procede como se indica: área =(10.45 cm) (16.34 cm) = 170.753 cm^2 =170.8 cm^2.

Conversión de unidades físicas

A pesar de la existencia del sistema internacional de unidades existen todavía otros sistemas de uso en la literatura técnica. El sistema cgs se empleó en Europa antes del SI, y el sistema de ingeniería británico se emplea en Estados Unidos a pesar de la aceptación del SI por el resto del mundo. En el sistema cgs las unidades de longitud, masa y tiempo son el centímetro (cm), el gramo (g) y el segundo (s), respectivamente; en el sistema de ingeniería británico, las unidades de longitud, masa y tiempo son el pie (ft), el slug y el segundo, respectivamente. Además existen cantidades que son expresadas por muy diversas unidades como la energía que se puede expresar en joules, ergios, calorías, kilowatt-hora, electrón volts, etc.; la presión en pascales, atmósferas, dina/cm^2, lb/in^2, mm de Hg, etc. Los factores de conversión de unidades se encuentran en tablas, por ejemplo

1 ft = 30.48 cm = 0.3048 m = 12 in
1 in =2.54 cm =0.0254 m = 0.08333 ft

Una descripción detallada de las tablas se encuentra en los libros indicados en la bibliografía.

Para realizar los cambios de unidades se utiliza el hecho de que cualquier cantidad se puede multiplicar por la unidad sin alterar su valor, tal como muestran los siguientes ejemplos:

I) Transforme 120.0 cm a pulgadas

SOLUCION

Puesto que $1in = 2.54\ cm$ entonces $1 = \frac{1\ in}{2.54\ cm}$, así pues, cambiar unidades requiere de multiplicar por 1

$$120.0\,cm = 120.0\,cm\left(\frac{1\,in}{2.54\,cm}\right) = \frac{120.0}{2.54}in = 47.24\,in$$

II) Encuentre el valor de la velocidad en m/s de un auto que se mueve a una velocidad de 80.4 km/hr

SOLUCION

$$80.4\frac{km}{hr} = 80.4km\left(\frac{1000\,m}{1\,km}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right) = \frac{804}{36}\frac{m}{s} = 22.3\ \frac{m}{s}$$

III) Obtenga el valor de la gravedad en el sistema ingles considerando el valor de g =9.81 m/s^2

SOLUCION

$$9.81\frac{m}{s^2} = 9.81\frac{m}{s^2}\left(\frac{1\ ft}{0.3048\,m}\right) = 32.2\ \frac{ft}{s^2}$$

IV) La constante universal de los gases se expresa en el SI como 8.31 J/mol K, determinar su valor en las unidades atmósferas litro/mol K

SOLUCION

$$8.31\frac{J}{mol\,K}=8.31\frac{\left(N/m^2\right)m^3}{mol\,K}=8.31\frac{Pa\,m^3}{mol\,K}$$

$$=8.31\frac{Pa}{mol\ K}\left(\frac{9.869\,x10^{-6}\,atm}{1\,Pa}\right)\left(\frac{1000\,l}{1\,m^3}\right)=0.082\frac{atm\,l}{mol\ K}$$

CAPITULO 2

Magnitudes escalares y vectoriales

Definición de escalares y vectores

Las cantidades físicas que son objeto de estudio tienen propiedades, que es conveniente representar de alguna manera con el fin de poder operarlas y establecer relaciones entre ellas, por tal motivo se han creado “entes matemáticos”, que en la medida de posible incluyen una descripción de las propiedades de estudio

Una cantidad física que solo posee **MAGNITUD** y que es descrita por un *escalar* (número) y sus respectivas *unidades* se conoce con **CANTIDAD ESCALAR,** ejemplos de este tipo de cantidades son : tiempo, longitud, área, volumen, masa, densidad, energía, potencia, presión, temperatura, carga eléctrica, corriente eléctrica, potencial eléctrico, etc. Las operaciones de cantidades escalares como suma, resta, multiplicación, división, sacar raíz y demás, se realizan aplicando las conocidas propiedades de los números reales.

Hay cantidades físicas que además de poseer **MAGNITUD** y unidades**,** es necesario indicar la forma en que actúan sobre los cuerpos, esto se especifica mediante la **DIRECCIÓN Y SENTIDO**, estas son conocidas como **CANTIDADES VECTORIALES**, ejemplos de vectores son: desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, torca, momento lineal, impulso, campo eléctrico, campo magnético, etc., debido a su importancia fundamental de los vectores a continuación se hará un descripción de la forma en que se efectúan operaciones con los vectores

Representación geométrica de un vector y analítica de un vector.

Notación de un vector

Las cantidades vectoriales o simplemente vectores para distinguirse de las cantidades escalares son representadas mediante cualquiera de las notaciones siguientes:

A (letra bold o negrita) ó $\vec{A}$,

Geométricamente se representan por medio de un segmento de recta dirigido (flecha) como indica la figura 1.1.

El vector como se observa tiene un punto inicial O y un punto final P, en el punto final se dibuja la punta de la flecha, un vector indicado como en la figura 2.1 se le denomina **vector libre**. La **magnitud** del vector se asocia a **longitud del segmento** y se representa por:

magnitud de **A =**A = $\left|\vec{A}\right|$

Por definición, la magnitud de una cantidad vectorial es un escalar (un solo número), y siempre es positiva.

La **dirección y sentido** se establece mediante los **ángulos** que forman el vector con los ejes positivos del sistema coordenados, siempre y cuando el vector se encuentre localizado.

En el caso de vectores en el plano solo se necesita un ángulo director, denotado en general por θ, referido al eje x positivo, puesto que el otro ángulo ϕ, referido al eje y positivo, es un ángulo complementario, o sea $\phi = \pi/2 - \theta$, (figura 2.2)

En dos dimensiones el vector **A** queda totalmente especificado si se conoce A y θ

Para vectores en tres dimensiones la costumbre es indicar los ángulos directores mediante las letras α, β y γ,tal como se ve en la figura 2.3, en tal caso el vector **A** queda totalmente conocido sabiendo los valores de A, α, β y γ

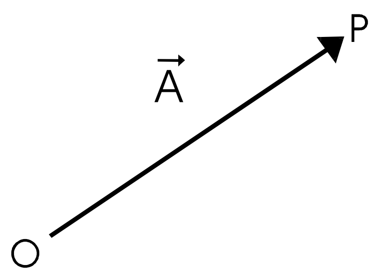


Figura 2.1 vector libre

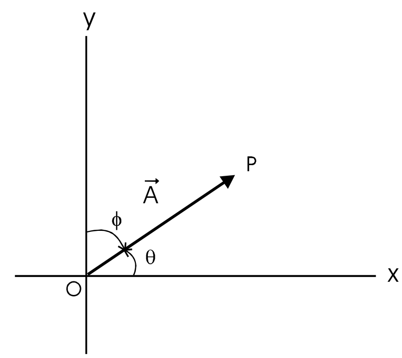


Figura 2.2 vector localizado

Definición: Un vector cuya magnitud sea la unidad se llama **vector unitario**

Cuando un vector libre, es trasladado paralelamente (sin girar) y colocado su punto inicial coincidiendo con el origen del sistema coordenado elegido se dice ahora que el vector es un **vector localizado**, en este caso el punto final del vector localizado coincide con un único punto del sistema coordenado tal como muestra la figura 2.2

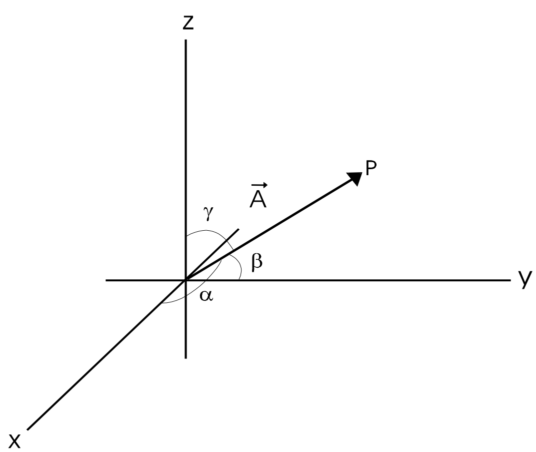


Figura 2.3 vector en tres dimensiones

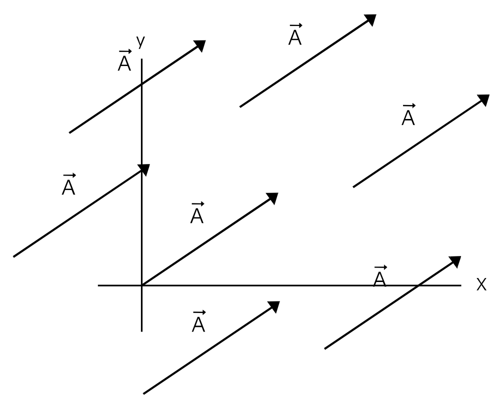


Figura 2.4 vector equivalente

Decimos que dos vectores son iguales si es posible trasladarlos paralelamente haciendo que coincidan exactamente sus puntos iniciales y finales, en otras palabras poseen la misma magnitud, dirección y sentido, la figura 2.4 muestra vectores iguales o equivalentes.

Representación analítica de un vector

Una forma de describir perfectamente un vector tal como se mencionó en la sección precedente, es conociendo su magnitud y ángulos directores, pero está representación aunque correcta, no es práctica para la realización algunas de las operaciones de vectores, por lo que se hace necesario crear una representación más conveniente para tal fin. Tomando en cuenta que el punto final de un vector localizado cae en un único punto del sistema coordenado, se puede asociar a cada vector localizado un punto y a cada punto un vector. Las coordenadas del punto sirven como la nueva representación del vector y se forman con **las componentes** de vector que resultan ser la proyecciones del vector sobre cada uno de los ejes coordenados y resultan ser cantidades escalares que pueden ser positivas o negativas como se muestra en la figura 2.5 (a) y 2.5 (b). en el caso de dos dimensiones $\vec{A} = \left(A_x ,\, A_y\right)$, y en tres $\vec{A} = \left(A_x ,\, A_y ,\, A_z\right)$

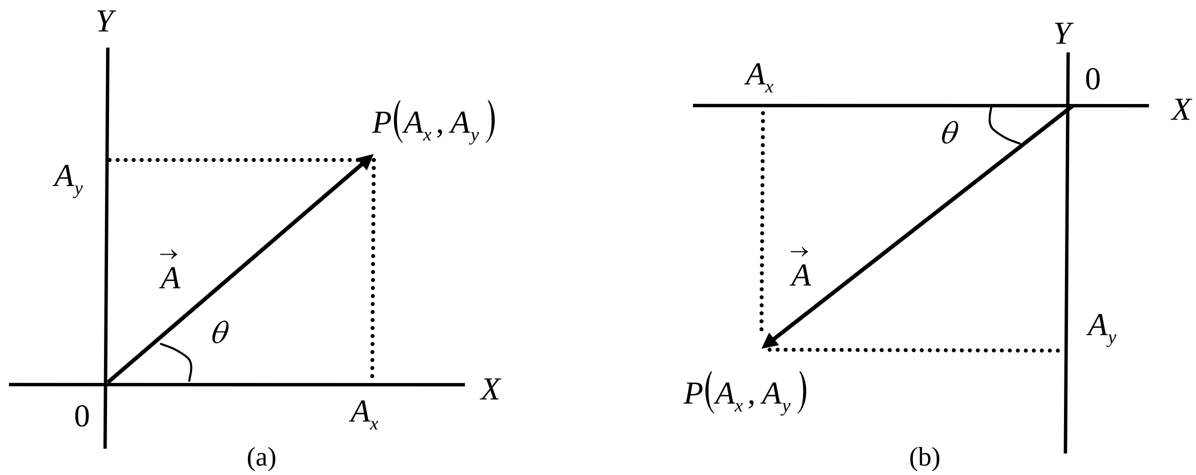


Figura 2.5(a) . Vector en dos dimensiones, primer cuadrante (b).Vector en dos dimensiones tercer cuadrante.

Relación entre representaciones de un vector en dos dimensiones

Considerando conocida la magnitud A y el ángulo θ, como muestra la figura 2.5 (a), las componentes A_x y A_y se pueden obtener aplicando las relaciones trigonométricas

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{A_y}{A},$$

de donde

$$A_x = A\cos\theta, \quad A_x = A\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad 2.1$$

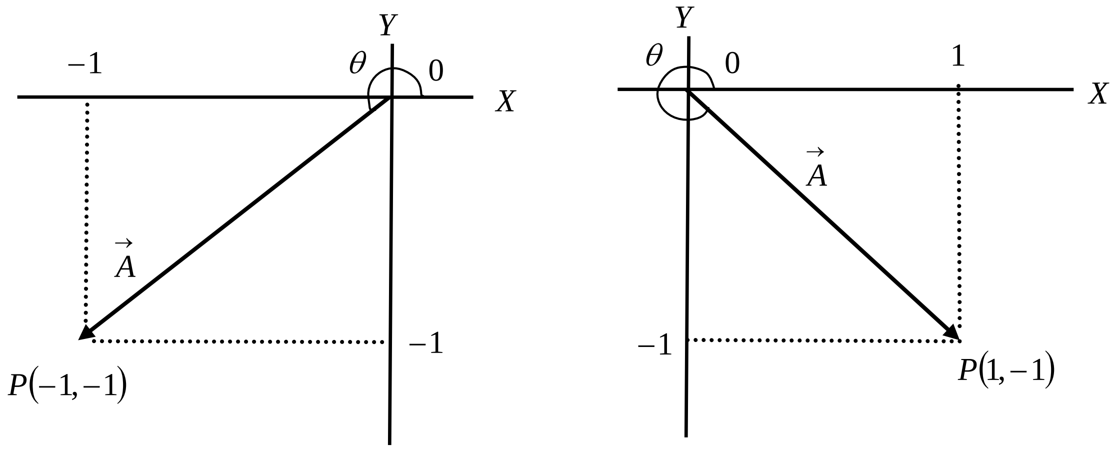
En el caso contrario si el vector está representado por sus componentes A_x y A_y, La magnitud del vector se obtiene mediante el teorema de Pitágoras

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_2{}^2} \qquad 2.2\text{ a}$$

y el ángulo θ mediante la función arco tangente

$$\theta = \arctan\frac{A_y}{A_x} \qquad 2.2\text{ b}$$

Puede existir una ligera complicación al aplicar la relación anterior, puesto que si consideramos el caso **A**=(-1, -1), entonces θ = arctan (-1/-1)= arctan(1) = 45 ^{0}, pero como muestra la figura 2.6(a), el vector se localiza en el tercer cuadrante y por lo tanto al resultado obtenido hay que agregarle 180 ^{0}, esto es $\theta = 45^0 + 180^0 = 225^0$.. En el caso indicado en la figura 1.6 (b) el vector **A**=(1, -1) se localiza en el cuarto cuadrante y la aplicación de la formula conduce a θ = arctan(-1/1)= arctan(-1) = -45, para obtener el resultado adecuado a 360^0 se le resta 45^0, o sea $\theta = 360^0 - 45^0 = 315^0$



(a) (b)

Figura 2.6 (a) vector en el tercer cuadrante, (b) vector en el cuarto cuadrante.

El proceso anterior es conocido regularmente como "cambio de coordenadas", la primera parte de polares a rectangulares y la segunda parte de rectangulares a polares y algunas calculadoras científicas están programadas para realizar estas operaciones de manera directa.

Relación entre representaciones de un vector en tres dimensiones

De manera análoga a dos dimensiones si es dada la magnitud A y los ángulos α, β y γ, como muestra la figura 2.7 las componentes A_x , A_y,, A_z se obtienen ahora a partir de las relaciones trigonométricas

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

de donde

$$A_x = A\cos\alpha, \quad A_y = A\cos\beta, \quad A_z \cos\gamma$$

Ahora si sus componentes del vector A_x, A_y y A_z son conocidas, la magnitud se obtiene generalizando , el teorema de Pitágoras

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2} \qquad 2.3$$

y los ángulos α, β y γ despejando de las relaciones anteriores

$$\alpha = \arccos\frac{A_x}{A}, \quad \beta = \arccos\frac{A_y}{A}, \quad \gamma = \arccos\frac{A_z}{A} \qquad 2.4$$

en caso de tres dimensiones la función arco coseno da correctamente el valor del ángulo para cualquier caso.

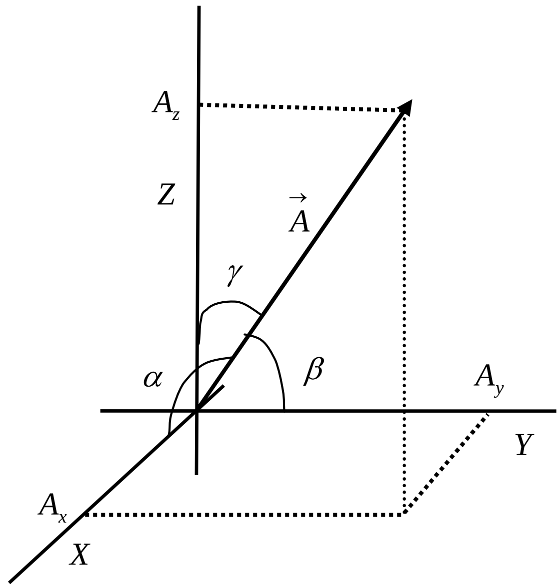


Figura 2.7 Representación de un vector y sus componentes en tres dimensiones.

Algebra de vectores

EL algebra de vectores consiste en definir un conjunto de operaciones elementales entre ellos como la multiplicación por un escalar, suma, resta, producto punto y producto cruz. Estas operaciones son la base para manejar las propiedades de las cantidades vectoriales.

Multiplicación de un vector por un escalar

Las operaciones vectoriales que se definen a continuación se realizan para vectores en tres dimensiones, si se requiere utilizarlas para vectores en dos dimensiones basta cancelar la componente A_z en la definición.

Consideremos un vector **A** $=(A_x, A_y, A_z)$ y t un escalar (número real) entonces se define el **producto por escalar** como

$$t\mathbf{A} = t(A_x\ ,\ A_y\ ,\ A_z) = (tA_x, tA_y, tA_z) \qquad 2.5$$

La acción que tiene la operación anterior sobre el vector **A** se puede resumir como sigue:
a) La magnitud de t**A** es $|t\mathbf{A}| = |t|\,|\mathbf{A}|$.
b) Si $t > 0$ y $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ entonces la dirección de t**A** es la de **A.**
c) Si $t < 0$ y $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ entonces la dirección de t**A** es la opuesta de la **A.**
d) Si $t = 0$ ó $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ entonces $0\mathbf{A} = t\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

La figura 2.8 muestra gráficamente la multiplicación t**A** por algunos valores de t..

Definición: Se dice que dos vectores **A** y **B son paralelos** si existe un escalar t tal que **B** = t **A**, la figure 2.9 muestra el dos vectores paralelos.

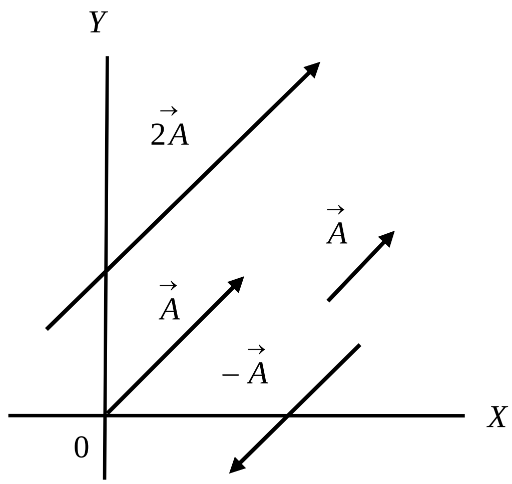


Figura 1.8. Efecto de multiplicar un vector **A** por escalares t=2, t=1/2 y t=-1

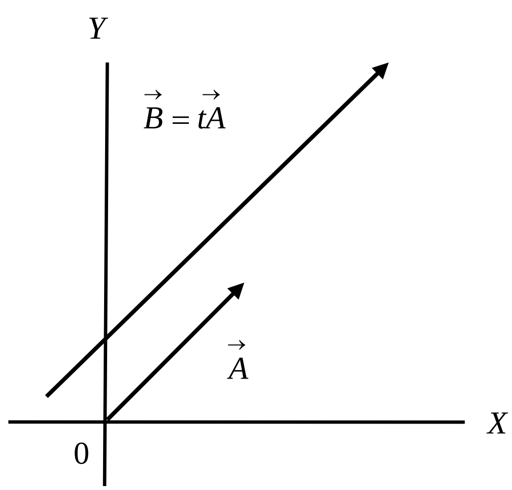


Figura 1.9. Ejemplo gráfico de dos vectores paralelos

Sí $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y t =1/$|\mathbf{A}|$ entonces el vector

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{A}}{A} = \left(\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}, \frac{A_z}{A} \right) \qquad 2.6$$

Definición: Es un vector cuya magnitud es la unidad y por tal motivo es un **vector unitario**.

De lo anterior se puede observar que todo vector $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ se puede escribir como el producto de su magnitud por un vector unitario en su dirección, o sea

$$\mathbf{A} = A\frac{\mathbf{A}}{A} = A\left(\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}, \frac{A_z}{A} \right) = A\mathbf{e}$$

En esta notación se observa que el vector es separado en sus componentes de magnitud (A), y de dirección y sentido (vector unitario **e)**, ver figura 2.10.

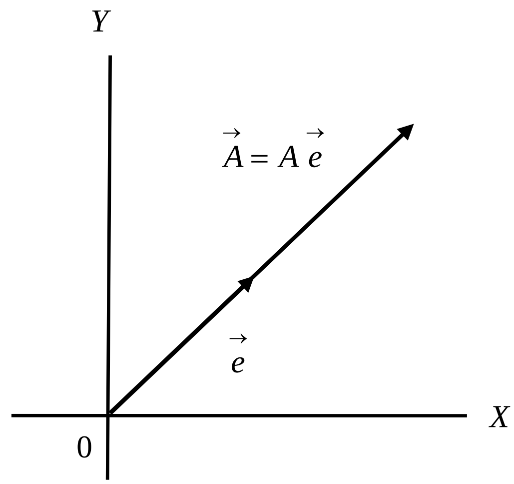


Figura 2.10. Representación gráfica de que todo vector **A** se puede representar como el producto de su magnitud con un vector unitario **e**.

Es fácil de observar que los vectores definidos como **i**=(1,0,0), **j**=(0,1,0), **k**=(0,0,1) son vectores unitarios y cada uno se encuentra sobre los ejes positivos del sistema coordenado rectangular como muestra la figura 2.11.

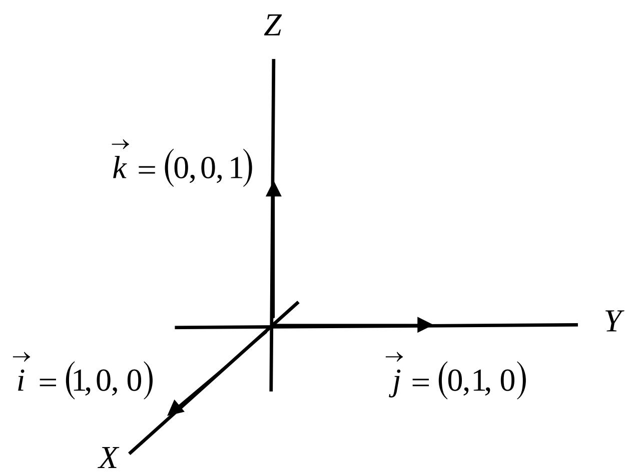


Figura 2.11. Conjunto de vectores unitarios base.

EJEMPLOS

I).- Verificar que el vector **A** = (1/3, -2/3, 2/3) es un vector unitario

SOLUCION

Procediendo a calcular su magnitud

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

lo cual muestra que efectivamente es un vector unitario

II).- Mostrar que el vector en dos dimensiones **r** = *(cos θ, sen θ)* es siempre in vector unitario para cualquier valor de θ elegido.

SOLUCION

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2} = \sqrt{1} = 1$$

donde se hace uso de la relación trigonométrica sen θ^2+ $\cos^2\theta = 1$

III).- En general, en los cursos de física en el ámbito elemental se expresan las leyes indicando solamente la magnitud de las cantidades vectoriales, por ejemplo, en electrostática la fuerza eléctrica entre cargas se expresa

$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

pero, recordando que la fuerza es un vector se puede expresar correctamente como

$$\mathbf{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Donde el **r** es un vector unitario en la dirección que une las cargas.

Suma y resta de vectores

Dados dos vectores **A** y **B**, la **suma de los vectores** es el vector **C** definido como

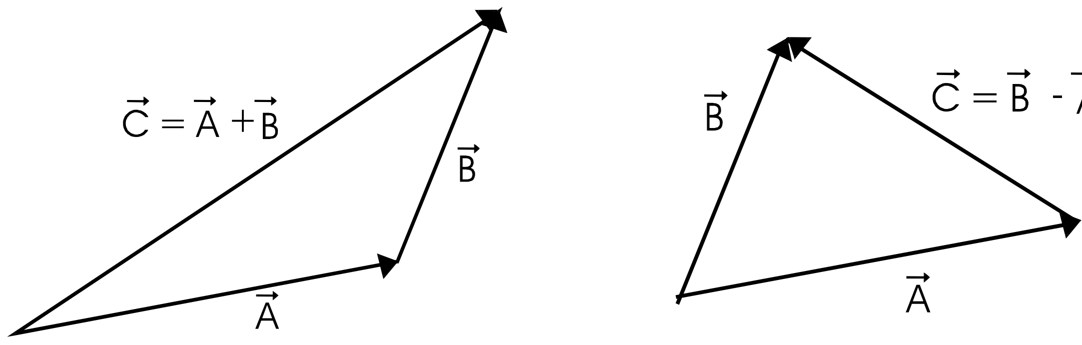
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

La suma de vectores se realiza geométricamente como sigue: El vector **B** es trasladado paralelamente haciendo coincidir su punto inicial con el punto final del vector **A,** el vector resultante o suma es el vector que parte del punto inicial de vector **A** al punto final del vector **B**, como muestra la figura 2.12 (a)
El vector suma **C** a menudo recibe el nombre de resultante.

El vector **resta o diferencia de vectores** es el vector **C** definido como

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (B_x, B_y, B_z) - (A_x, A_y, B_z) = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z)$$

geométricamente la resta se efectúa trasladando los dos vectores de tal manera que coincidan sus puntos iniciales, el vector diferencia parte del punto final del vector **A** y llega al punto final del vector **B** tal como muestra la figura 2.12(b)



(a) (b)

Figura 2.12 (a) Representación gráfica de la suma de dos vectores (b) Representación gráfica de la diferencia de vectores .

Propiedades de la suma diferencia de vectores

Sen **A** y **B**, vectores, y m, n escalares entonces:

1) **A+B = B+A** Ley conmutativa.
2) **A+(B+C) = (A +B)+C** Ley asociativa.
3) m (**A**+**B**)=m**A** + m**B** 1ª ley distributiva.
4) (m+n)**A** =m**A** + n**A** 2ª ley distributiva.
5) **A + 0 = A** Existencia del elemento neutro aditivo (**0** =(0,0,0)).
6) **A+(-A) = A - A = 0** Existencia del elemento inverso aditivo (-**A**).

Utilizando las propiedades anteriores del producto por escalar y la suma de vectores es fácil ver que utilizando los vectores unitarios **i**, **j**, **k**, y las componentes del vector A_x, A_y, A_z es posible representar el vector **A** como

$$\mathbf{A} = A_x\ \mathbf{i} + A_y\ \mathbf{j} + A_z\ \mathbf{k} \tag{2.7}$$

tal como se observa en la figura 2.13 (a)

Definición: en particular, el **vector de posición** de o **radio vector** es un vector denotado por **r** que parte del origen *O* del sistema coordenado y cuyo extremo es el punto (x, y, z), ver figura 2.13 (b), se escribe de la forma

$$\mathbf{r} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k} \tag{2.8}$$

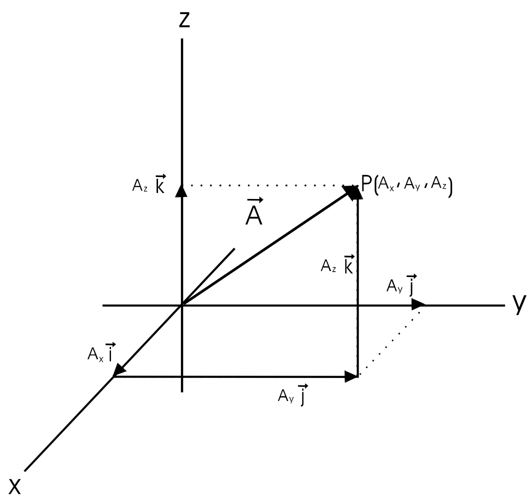
Definición: el **desplazamiento** de una partícula se define como el vector que parte de la posición inicial a la posición final considerada, se denota por Δ**r** y se escribe como

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{2.9}$$

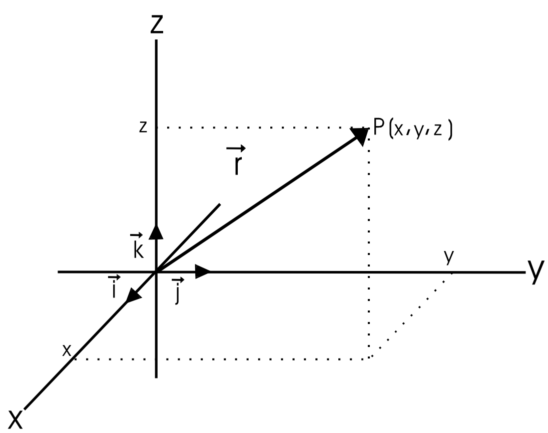
Tal como se muestra en la figura 2.14a, en ocasiones el vector desplazamiento se denota **D** y puede obtenerse como el vector resultante de la suma de desplazamientos individuales consecutivos, considerando como su punto inicial de la suma el origen del sistema de coordenadas, esto se expresa en la forma

$$\mathbf{D} = \sum_i^n \mathbf{d}_i = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \cdots + \mathbf{d}_n \qquad (2.10)$$

la figura 2.14 (b) muestra el desplazamiento resultante de la suma de cuatro desplazamientos individuales.

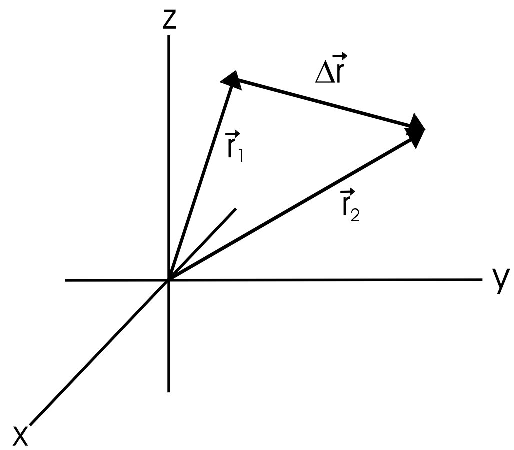


(a)

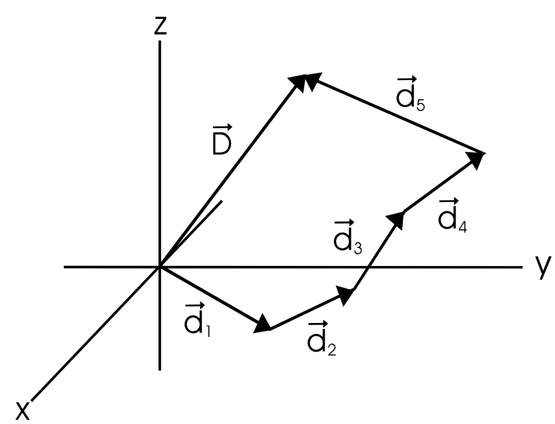


(b)

Figura 2.13 (a) El vector **A** puede ser representado siempre como combinación de los vectores base **i**, **j** y **k**. (b) A cualquier punto P(x, y, z) se le puede asociar un vector que parte del origen llamado vector de posición ó radio vector.



(a)



(b)

Figura 2.14(a) Definición de desplazamiento mediante la diferencia de vectores de posición. (b) Desplazmiento resultante como la suma de desplazamientos individuales.

EJEMPLOS

IV) Simplificar la expresión 2**A** + **B** + 3**C**-{**A**-2**B** - 2(2**A**-3**B**-**C**)}

SOLUCION

2**A** + **B** + 3**C**-{**A**-2**B** - 2(2**A**-3**B**-**C**)}= 2**A** + **B** + 3**C**-**A**+2**B** +2(2**A**-3**B**-**C**).
=2**A** + **B** + 3**C**-**A**+2**B** +4**A**-6**B**-2**C**).
=5**A** -3**B** + **C**

V) Mostrar geométricamente la propiedad asociativa de los vectores.

SOLUCION

La figura a muestra la suma de los vectores **A+(B+C)** y la figura b **(A+B)+C**.
Así pues, la suma de vectores es conmutativa; es decir, el orden de los términos no afecta el resultado.

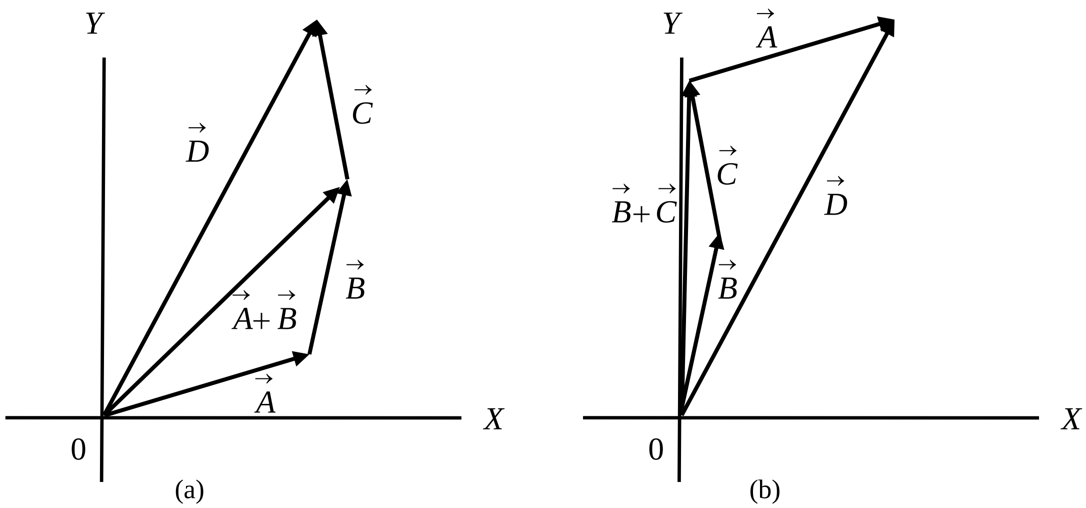


Figura (a) Suma gráfica de los vectores **(A+B)+C** (b) Suma gráfica de los vectores **(B+C)+A**, el vector resultante **D** es el mismo, lo anterior muestra la validez de la propiedad conmutativa.

VI) Comprobar que cualquier vector se puede expresar como **A** = A_x **i** + A_y **j** +A_z **k**

SOLUCION

Utilizando las operaciones y definiciones anteriores

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} = A_x(1,0,0) + A_y(0,1,0) + A_z(0,0,1)$$
$$= (A_x, 0, 0) + (0, A_y, 0) + (0, 0, A_z) = (A_x, A_y, A_z)$$

el resultado final es precisamente la representación analítica del vector.

VII) Un vector tiene una componente x de -25.0 unidad una componente y de 40.0 unidades. Encuentre la magnitud y dirección de este vector.

SOLUCION

El vector puede expresarse como **A**=(-25.0, 40.0), entonces

$$A = \sqrt{(-25.0)^2 + (40.0)^2} = 47.2 \quad \textit{unidades}$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{40.0}{25.0}\right) = \text{arctg}(-1.60) = -58.0^0$$

puesto que el vector se encuentra en el segundo cuadrante al resultado obtenido hay que sumarle 180^0,
$\theta = -58.0^0 + 180^0 = 122^0$

VIII) Las componentes x, y, z del vector B son de 4.00, 6.00 y 3.00 unidades, respectivamente. Calcule la magnitud de B y los ángulos que forma B con los ejes de coordenadas.

SOLUCION

Ahora el vector en tres dimensiones se expresa como **A**=(4.00, 6.00, 3.00),entonces

$$A = \sqrt{4.00^2 + 6.00^2 + 3.00^2} = \sqrt{61} = 7.81\ unidades$$
$$\alpha = \arccos\left(\frac{4.00}{7.81}\right) = \arccos(0.512) = 59.2^0$$
$$\beta = \arccos\left(\frac{6.00}{7.81}\right) = \arccos(0.768) = 39.8^0$$
$$\gamma = \arccos\left(\frac{4.00}{7.81}\right) = \arccos(0.384) = 67.4^0$$

Productos de vectores

Algunas de las propiedades físicas y definiciones que se darán posteriormente, se expresan por medio de los productos vectoriales, existen para vectores el **producto escalar**, que como su nombre lo indica da como resultado una cantidad escalar y **el producto vectorial**, que como resultado origina un nuevo vector. Hay que recordar que los vectores son diferentes de los números ordinarios, por lo que hay que aprehender como y en que condiciones aplicar cada uno de los productos,

Producto escalar o punto

Sean los vectores **A** =(A_x, A_y, A_z) y **B** =(B_x, B_y, B_z) entonces se define el **producto escalar A•B**.como

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x, A_y, A_z)\cdot(B_x, B_y, B_z) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad 2.10$$

como se observa el producto consiste multiplicar las respectivas coordenadas de cada uno de los vectores y realizar la suma.

Propiedades del producto escalar

a) **A•B** = **B•A** Ley conmutativa
b) **A•**(**B**+**C**) = **A•B** + **A•C** Ley distributiva
c) (m**A**) **•B** = **A•**(m**B**) = m(**A•B**)
d) **A•A** = $|\mathbf{A}|^2 = A^2$

donde *m* es un escalar arbitrario

Para entender el significado geométrico y las aplicaciones del producto escalar se relacionará este producto con un resultado de la trigonometría conocido como la ley de los cosenos (ver figura 2.15a), el cual indica que para cualquier triángulo se cumple

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

la figura 2.15b muestra el mismo triángulo, pero ahora los vectores **A, B** y **C** forman los lados del triángulo, de tal manera que $|\mathbf{A}|$ = A= a, $|\mathbf{B}|$ = B= b, $|\mathbf{C}|$ = C = c y **C**=**B**-**A**.

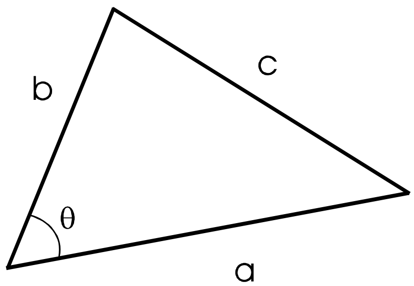


Figura 2.15a

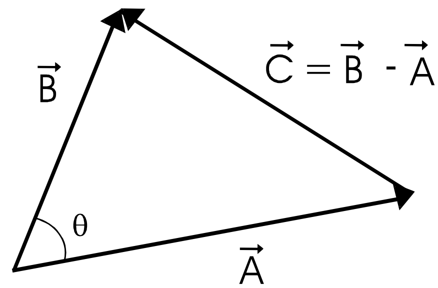


Figura 2.15b

Procediendo a calcular la magnitud del vector **C** al cuadrado y aplicando las propiedades del producto escalar

$$|\mathbf{C}|^2 = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{B}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$$
$$|\mathbf{C}|^2 = |\mathbf{B}|^2-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+|\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{B}|^2+|\mathbf{A}|^2-2\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = b^2+a^2-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

comparando con la ley de los cosenos se obtiene que $-2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = -2\,ab\cos\theta$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad 2.11$$

El producto escalar es positivo cuando θ se halla entre cero y 90°; es negativo cuando está entre 90° y 180°. Definición: dos vectores **A** y **B son perpendiculares** u **ortogonales** cuando θ = 90°, en términos del producto punto **A** • **B** = 0.

De la relación 2.11 se despeja el cosθ

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} \qquad 2.12$$

Esta relación permite calcular el ángulo entre los vectores **A** y **B**.

EJEMPLOS

IX) Mostrar que los vectores unitarios **i**=(1,0,0), **j**=(0,1,0), **k**=(0,0,1) son mutuamente perpendiculares

SOLUCION

Aplicando que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero

i • **j**=(1,0,0) •(0,1,0) =(1)(0)+(0)(1)+(0)(0)=0+0+0=0
i •**k**=(1,0,0) •(0,0,1) =(1)(0)+(0)(0)+(0)(1)=0+0+0=0
j •**k**=(0,1,0) •(0,0,1) =(0)(0)+(1)(0)+(0)(1)=0+0+0=0

por lo tanto los vectores **i**, **j** y **k**, son mutuamente perpendiculares.

X) Calcular el ángulo entre los vectores **A** =(3,-1,5) , **B** =(-5,-6,8)

SOLUCION

aplicando la ecuación

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{(3,-1,5)(-5,-6,8)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2}\sqrt{(-5)^2+(-6)^2+8^2}} = \frac{-15+6+40}{\sqrt{35}\sqrt{125}} = \frac{31}{66.14} = 0.4687$$

de donde $\theta = \arccos(0.4687) = 62.04^0$

XI) Determine el ángulo de intersección de las diagonales mayores de un cubo de lado unitario

SOLUCION

La figura siguiente muestra el cubo en el cual se coloca en una esquina el sistema coordenado tridimensional,

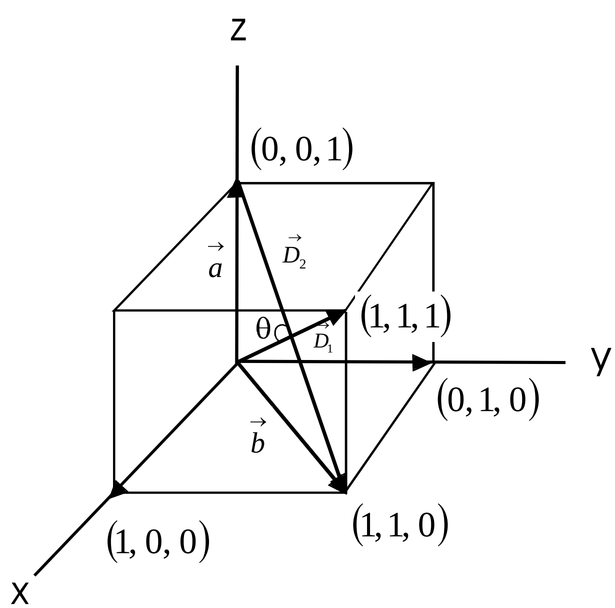


Figura del cubo

Los vectores $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ corresponden a las diagonales mayores.

De la figura

$\mathbf{D}_1$ = (1,1,1) y $\mathbf{D}_2$ = **b** - **a** = (1,1,0) - (0,0,1) =(1,1,-1), por lo tanto

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{D}_2}{D_1 D_2} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,1,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1+1-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

entonces

$$\theta = \arccos(1/3) = 70.52 = 70^0 31' 43''$$

Producto vectorial o cruz

Sean los vectores **A** =(A_x, A_y, A_z) y **B** =(B_x, B_y, B_z) entonces se define el **producto vectorial A×B** como

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad 2.13$$

$$= \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) - \mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x) + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

el producto cruz se define mediante la operación llamada determinante, en la cual la primer fila consiste en los vectores unitarios **i**=(1,0,0), **j**=(0,1,0), **k**=(0,0,1), por lo cual el resultado final es un nuevo vector.
Denotando este vector como **C** = **A**×**B** se observa que **C** es un vector perpendicular al plano formado por los vectores **A** y **B**, su dirección se obtiene aplicando la regla de la mano derecha, en la cual los dedos de dicha mano se colocan en la dirección del vector **A** y se giran cerrando la mano en la dirección del vector **B**, la dirección la dará el dedo pulgar como muestra la figura 2.16

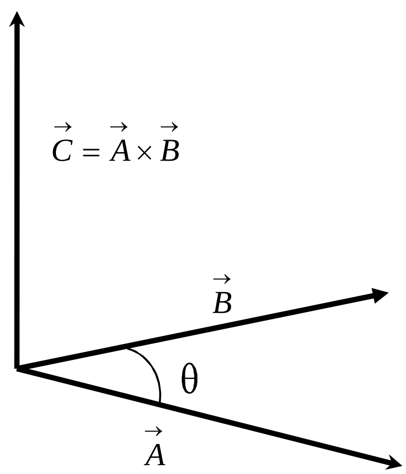


Figura 2.16. Representación geométrica del producto cruz

La magnitud del vector es

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad 2.14$$

Propiedades del producto vectorial

a) **A**×**B** = **-B**×**A** Ley anticonmutativa
b) **A**×(**B**+**C**) = **A**×**B** + **A**×**C** Ley distributiva
c) (m**A**) ×**B** = **A**×m**B**) = m(**A**×**B**)
d) **A**×**A** = **0**

La primera aplicación física del producto vectorial se presenta en la definición de la torca (torque) o momento de una fuerza. (**τ**=**r**×**F**.)

EJEMPLOS

XII) muestre que **i** ×**j** =**k**

SOLUCION

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\mathbf{i}((0)(0)-(0)(1))-\mathbf{j}((1)(0)-(0)(0))+\mathbf{k}((1)(1)-(0)(0))=\mathbf{i}(0)-\mathbf{j}(0)-(0)(0)+\mathbf{k}((1)=\mathbf{k}$$

XIII) mostrar que **C** = **A**×**B** es perpendicular a el vector **A**

SOLUCION

consideremos que $\mathbf{A}=(A_x,A_y,A_z)$ y $\mathbf{B}=(B_x,B_y,B_z)$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}&=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{i}\left(A_yB_z-A_zB_y\right)-\mathbf{j}\left(A_xB_z-A_zB_x\right)+\mathbf{k}\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\\ &=\left(A_yB_z-A_zB_y,-(A_xB_z-A_zB_x),A_xB_y-A_yB_x\right)\end{aligned}$$

Aplicando que dos vectores son perpendiculares si su producto punto es cero

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}&=(A_x,A_y,A_z)\cdot\left(A_yB_z-A_zB_y,-(A_xB_z-A_zB_x),A_xB_y-A_yB_x\right)\\ &=A_x(A_yB_z-A_zB_y)-A_y(A_xB_z-A_zB_x)+A_z(A_xB_y-A_yB_x)\\ &=A_xA_yB_z-A_xA_zB_y-A_yA_xB_z+A_yA_zB_x+A_zA_xB_y-A_zA_yB_x\\ &=0\end{aligned}$$

por lo que **C** es perpendicular a **A**

XIV) Obtener el producto vectorial de **A** = (-5,8,3) y **B** = (--3,7,4)

SOLUCION

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -5 & 8 & 3\\ -3 & 7 & 4\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\mathbf{i}((8)(4)-(3)(7))-\mathbf{j}((-5)(4)-(3)(-3))+\mathbf{k}((-5)(7)-(8)(-3))\\ &=\mathbf{i}(32-21)-\mathbf{j}(-20+9)+\mathbf{k}((-35+24)=11\mathbf{i}+11\mathbf{j}-11\mathbf{k}\\ &=(11,11,-11)\end{aligned}$$

XV) El vector **A** tiene una magnitud de 6 unidades y se encuentra en la dirección positiva del eje x; el vector **B** tiene una magnitud de 4 unidades y se halla en el plano xy, formando un ángulo de 30° con la dirección positiva del eje x y un ángulo de 60° con la dirección positiva del eje y.

Hállese el producto vectorial **A x B**. y su magnitud

SOLUCION

de los datos proporcionados se pueden obtener las componentes de cada vector,

A = 6 **i** = 6 (1, 0, 0) = (6, 0, 0)
B = 4 (cos 30, cos 60, 0)=(4 cos 30, 4 cos 60, 0)= (3.46, 2, 0)

entonces

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 3.46 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}((0)(0)-(0)(2))-\mathbf{j}((6)(0)-(0)(3.46))+\mathbf{k}((6)(2)-(0)(3.46))=\mathbf{i}(0)-\mathbf{j}(0)+\mathbf{k}(12)=12\mathbf{k}=(0,0,\ 12)$$

su magnitud es

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{0^2+0^2+12^2} = 12$$

otra forma de calcular la magnitud es mediante

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\,\mathrm{sen}\,\theta = (6)(4)\,\mathrm{sen}\,30^0 = 12$$

Aplicaciones

XVI) Un automóvil recorre 3 km hacia el norte y luego 6 km hacia el nordeste. Representar los desplazamientos y hallar el desplazamiento resultante, a) gráficamente, b) analíticamente.

SOLUCION

a) GRAFICAMENTE. En la figura siguiente $\mathbf{d}_1$, representa el primer desplazamiento de 3 km hacia el Norte, $\mathbf{d}_2$, el desplazamiento de 6 km hacia el Nordeste (dirección de 45^0 respecto al eje horizontal Oeste - Este) y el vector **D** la resultante ó desplazamiento total.

b) ANALITICAMENTE. Cada uno de los desplazamientos individuales se localiza, o sea el vector $\mathbf{d}_1$ tiene magnitud 3 y ángulo θ = 90^0; $\mathbf{d}_2$ tiene magnitud 6 y ángulo θ = 45^0; posteriormente se expresan los vectores en forma de componentes

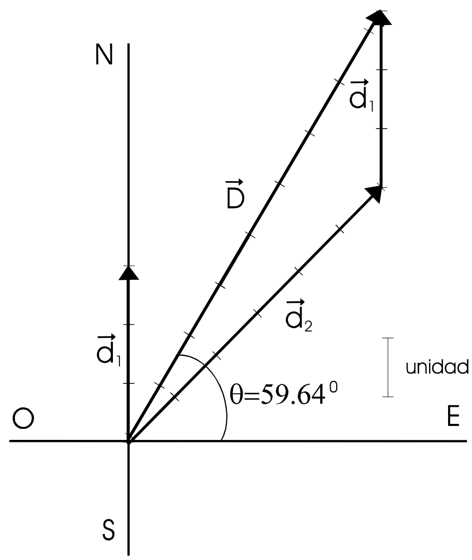
$$\mathbf{d}_1 = 3(\cos 90, \mathrm{sen}\,90) = (3\cos 90, 3\,\mathrm{sen}\,90) = (0,3)$$
$$\mathbf{d}_2 = 6(\cos 45, \mathrm{sen}\,45) = (6\cos 45, 6\,\mathrm{sen}\,45) = (4.24, 4.24)$$

el desplazamiento resultante es

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = (0,\ 3) + (4.24,\ 4.24) = (4.24,\ 7.24)$$

de donde la magnitud y dirección es

$$A = \sqrt{(4.24)^2 + (7.24)^2} = 8.39 \quad km$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{7.24}{4.24}\right) = \arctan(-1.7075) = -59.64^0$$

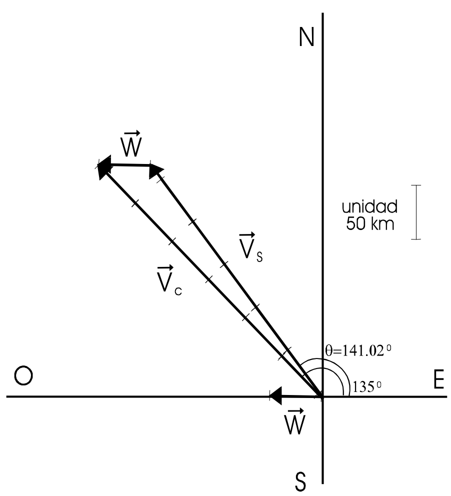


XVII) Un avión se mueve en la dirección y sentido Noroeste a una velocidad relativa a la Tierra, de 300 Km/h, pero debidos a la existencia de un viento hacia el oeste con una velocidad de 50 km/h, también relativa a la Tierra. Hallar la velocidad, dirección y sentido del vector velocidad que llevaría el avión si no existiese viento.

SOLUCION

La figura siguiente muestra la situación, la descripción de cada vector es

W representa la velocidad del viento,
$\mathbf{V}_c$ la velocidad del avión con viento
$\mathbf{V}_s$ la velocidad del avión sin viento



De lo anterior se tiene que $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_s + \mathbf{W}$, de donde $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_c - \mathbf{W}$, escribiendo cada vector en componentes

$$\mathbf{W} = 50(\cos 180, sen 180) = (-50, 0)$$
$$\mathbf{V}_c = 300(\cos 135, sen 135) = (300\cos 135, 300 sen 135) = (-212.13, 212.13)$$

entonces

$\mathbf{V}_s = (-212.13, 212.13) - (-50, 0) = (-162.13, 212.13)$

por lo tanto su magnitud y dirección es

$$V_s = \sqrt{(-162.13)^2 + (212.13)^2} = 266.99\ km$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{212.13}{-162.13}\right) = -52.6^0$$

recordando que el vector se encuentra en el segundo cuadrante a resultado anterior se le suma 180^0

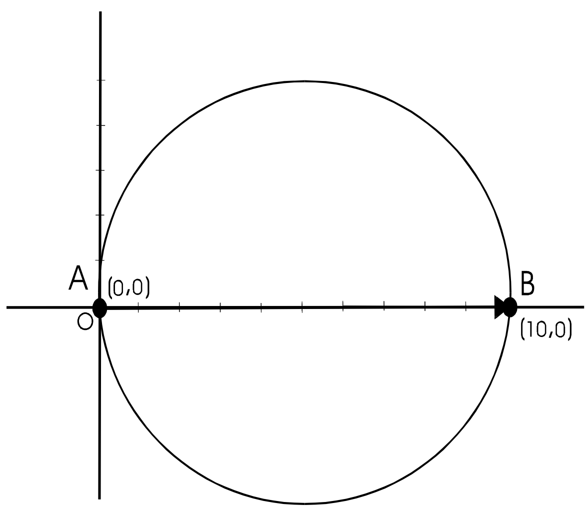
$$\theta = 180^0 - 52.6^0 = 127.4^0$$

XVIII) Una persona camina por una trayectoria circular de radio 5.00 m, alrededor de la mitad de un círculo. a) Encuentre la magnitud del vector desplazamiento. b) ¿Qué distancia camina la persona? c) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento si la persona camina todo el recorrido alrededor de un círculo?

SOLUCION

la figura muestra al circulo de radio 5m, la persona se encuentra inicialmente en el punto A, el cual se hace coincidir con el origen del sistema coordenado, y posteriormente camina sobre el circulo hasta el punto B, que corresponde a la mitad del circulo.

a) El vector desplazamiento se obtiene de la figura como **d = (**10,0)-.(0,0)=(10,0) m
   de donde su magnitud d= 10 m
b) La distancia que camina la persona es sobre la mitad de la circunferencia lo cual equivale D = πR, donde R es el radio de la circunferencia, D=(3.1415) (5 m) =15.71 m
c) si la persona finalmente da la vuelta al circulo regresará al punto inicial A de tal manera que el desplazamiento total será el vector (0,0), por lo que su magnitud es 0.



XIX) Un sólido de 100 N. de peso pende del centro de una cuerda como se observa en la figura Hallar la tensiones en la cuerdas

SOLUCION

Colocando el sistema de coordenadas como se indica en la figura b las tensiones $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y el peso **W**, cada vector puede ser expresado en componentes como

$$\mathbf{T}_1 = T_1(\cos 135, \operatorname{sen} 135) = (-T_1 \cos 45, T_1 \operatorname{sen} 45)$$
$$\mathbf{T}_2 = T_2(\cos 30, \operatorname{sen} 30) = (T_2 \cos 30, T_2 \operatorname{sen} 30)$$
$$\mathbf{W} = W(\cos 270, \operatorname{sen} 270) = (0, -W)$$

puesto que el sistema está en equilibrio estático se cumple que $\mathbf{W} + \mathbf{T}_1, + \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$

$$(0,-W) + (-T_1 \cos 45, T_1 \operatorname{sen} 45) + (T_2 \cos 30, T_2 \operatorname{sen} 30)$$
$$(-T_1 \cos 45 + T_2 \cos 30, T_1 \operatorname{sen} 45 + T_2 \operatorname{sen} 30 - W) = (0,0)$$

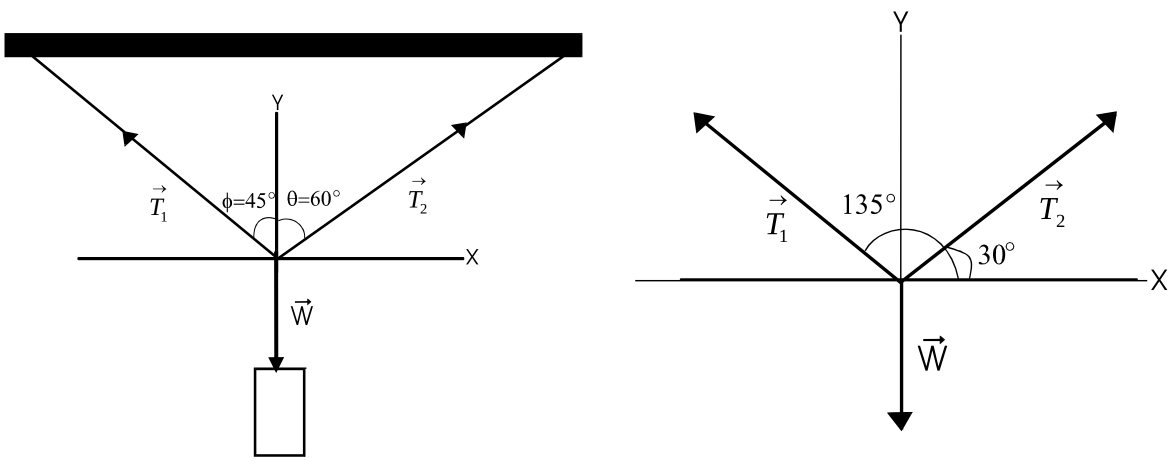


Figura (a) Representación esquemática del problema. (b) Diagrama del cuerpo libres asociado a la figura (a)

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones

$$-T_1 \cos 45 + T_2 \cos 30, = 0$$
$$T_1 \operatorname{sen} 45 + T_2 \operatorname{sen} 30 - W = 0$$

Resolviendo el sistema por determinantes

$$T_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 30 \\ W & \operatorname{sen} 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\cos 45 & \cos 30 \\ \operatorname{sen} 45 & \operatorname{sen} 30 \end{vmatrix}} = \frac{-W \cos 30}{-\cos 45 \operatorname{sen} 30 - \operatorname{sen} 45 \cos 30} = \frac{-100 \cos 30}{-\cos 45 \operatorname{sen} 30 - \operatorname{sen} 45 \cos 30} = 89.66N$$

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\cos 45 & 0 \\ \mathrm{sen}\,45 & W \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\cos 45 & \cos 30 \\ \mathrm{sen}\,45 & \mathrm{sen}\,30 \end{vmatrix}} = \frac{-W\cos 45}{-\cos 45\,\mathrm{sen}\,30 - \mathrm{sen}\,45\cos 30} = \frac{-100\cos 45}{-\cos 45\,\mathrm{sen}\,30 - \mathrm{sen}\,45\cos 30} = 73.20N$$

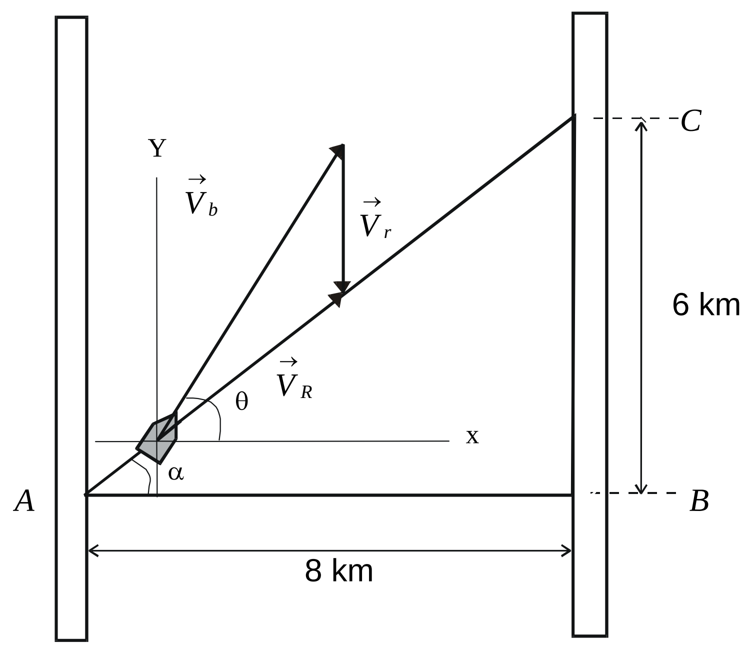
XX) Dos ciudades A y B están situadas una frente a la otra en las dos orillas de un río de 8 km de ancho, siendo la velocidad del agua de 4 km/h. Un hombre en A quiere ir a la ciudad C que se encuentra a 6 km aguas arriba de B y en su misma ribera. Si la embarcación que utiliza tiene una velocidad máxima de 10 km/h y desea llegar a C en el menor tiempo posible, ¿qué dirección debe tomar y cuanto tiempo emplea en conseguir su propósito?

SOLUCION

En la figura siguiente muestra esquemáticamente la situación, los vectores indicados son

$\mathbf{V}_b$ representa la velocidad de la embarcación
$\mathbf{V}_r$ la velocidad de la corriente del río
$\mathbf{V}_R$ la velocidad resultante.

Como se observa en la figura, para llegar a la ciudad C en el menor tiempo posible, la resultante de la suma de velocidades debe estar en la dirección de la recta que une las ciudades A y C, o sea $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_r$,



El ángulo α indicado se calcula considerando el triángulo rectángulo formado por las ciudades A, B y C, esto es

$$\alpha = \arctan\left(\frac{6}{8}\right) = \arctan(0.75) = 36.87^0$$

Utilizando como sistema de coordenadas el indicado se expresan los vectores en sus componentes

$$\mathbf{V}_b = 10(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (10\cos\theta, 10\operatorname{sen}\theta)$$
$$\mathbf{V}_r = 4(\cos(-90), \operatorname{sen}(-90) = (0,-4)$$
$$\mathbf{V}_R = V_R(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = (V_R\cos\alpha, V_R\operatorname{sen}\alpha)$$

donde el ángulo θ, y V_R (magnitud de la resultante) son cantidades desconocidas
utilizando $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_r$

$$(V_R\cos\alpha, V_R\operatorname{sen}\alpha) = (10\cos\theta, 10\operatorname{sen}\theta) + (0,-4)$$
$$= (10\cos\theta, 10sen\theta - 4)$$

comparando vectores se obtiene el sistema de ecuaciones

$$V_R\cos\alpha = 10\cos\theta$$
$$V_R\operatorname{sen}\alpha = 10\operatorname{sen}\theta - 4$$

de la primer ecuación

$$\cos\theta = \frac{V_R\cos\alpha}{10}$$

recordando que

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

entonces

$$V_R\operatorname{sen}\alpha = 10\sqrt{1-\frac{V_R{}^2\cos^2\alpha}{100}} - 4$$

de donde

$$\left(V_R\operatorname{sen}\alpha + 4\right)^2 = \left(10\sqrt{1-\frac{V_R{}^2\cos^2\alpha}{100}}\right)^2$$

$$V_R{}^2\operatorname{sen}^2\alpha + 8V_R\operatorname{sen}\alpha + 16 = 100\left(1-\frac{V_R{}^2\cos^2\alpha}{100}\right)$$

$$V_R{}^2\operatorname{sen}^2\alpha + 8V_R\operatorname{sen}\alpha + 16 = 100 - V_R{}^2\cos^2\alpha$$

$$V_R{}^2\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + 8V_R\operatorname{sen}\alpha + 16 - 100 = 0$$

entonces se tiene la ecuación de segundo grado en términos de V_R

$$V_R{}^2 + 8V_R \operatorname{sen}\alpha - 84 = 0$$

utilizando el valor de α=36.87 ^{0}

$$V_R{}^2 + 4.8V_R - 84 = 0$$

resoviendo la ecuación

$$V_R = \frac{-4.8 \pm \sqrt{(4.8)^2 - 4(1)(-84)}}{2} = \begin{cases} 7.07\ km/h \\ -11.87\ km/h \end{cases}$$

la solución positiva es la única aceptable (no hay magnitudes negativas), así pues,

$$\theta = \arccos\left(\frac{V_R \cos\alpha}{10}\right) = \arccos\left(\frac{7.07\cos\ \ 36.87}{10}\right) = 55.55^0$$

la distancia entre las ciudades A y C es la hipotenusa del triángulo

$$d = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10km$$

puesto que V_R = d/t , t =d/V_R

$$t = \frac{10km}{7.07 \frac{km}{h}} = 1.414h$$

el tiempo de 1.414 h equivale a 1 h 25 min. Aproximadamente.

CAPITULO III

Cinemática

La **Cinemática** estudia los movimientos con relación al tiempo, sin importar las causas que los producen

Conceptos básicos

El **radio vector** **r** es el vector de posición que parte del origen del sistema de referencia elegido al punto del punto A donde se localiza la partícula como muestra la figura 3.1

En el caso general durante el movimiento de la partícula varía tanto el módulo como el sentido del radio vector, es decir el radio vector **r** es una función del tiempo t.

El lugar geométrico de los puntos extremos del radio vector **r** constituyen la **trayectoria** del movimiento.

Considérese la figura 3.2, al transcurrir el tiempo de t_1 a t_2 la partícula se traslada del punto 1 al punto 2 cambiando su respectivo radio vector $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$, , durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ el vector de translación $\Delta\mathbf{r}$ se puede calcular como: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, la razón $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ se denomina **velocidad promedio**, se denotada por $\langle\mathbf{v}\rangle$ y coincide en dirección con la dirección de $\Delta\,\mathbf{r}$.
La **velocidad instantánea** o simplemente **velocidad**, se determina procediendo a calcular el límite de la relación $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$, es decir,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad 3.1$$

Esto significa, que el vector de velocidad **v** de la partícula en un momento determinado es igual a la derivada del radio vector **r** respecto al tiempo y está dirigido en la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto y en el sentido del movimiento de la partícula (dirección de d**r**). En ocasiones la magnitud del vector velocidad $|\mathbf{v}| = v$, se conoce como la **rapidez**.

Las unidades de la velocidad son en general

$$[\mathbf{v}] = \frac{longitud}{tiempo} = \frac{L}{T}$$

en el sistema MKS

$$[\mathbf{v}] = \frac{metro}{segundo} = \frac{m}{s}$$

Cuando un cuerpo se mueve de la posición 1 a la posición 2 es posible también que cambie la velocidad instantánea ya sea en módulo como en dirección de un valor $\mathbf{v}_1$ a un valor $\mathbf{v}_2$, siendo su variación $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, ver figura 3.3. En este caso se define la aceleración promedio como $\langle\mathbf{a}\rangle = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ y **aceleración instantánea** o **aceleración** se determina procediendo a calcular el límite de la relación $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$, o sea,

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad 3.2$$

la dirección del vector aceleración es la dirección de d**v**.

De este modo, conociendo la dependencia **r**(t), se puede encontrar la velocidad **v**(t) y la aceleración **a**(t) de la partícula en cualquier punto u cualquier instante.
En este caso las unidades son

$$[\mathbf{a}] = \frac{longitud}{(tiempo)^2} = \frac{L}{T^2}$$

en el sistema MKS

$$[\mathbf{a}] = \frac{metro}{(segundo)^2} = \frac{m}{s^2}$$

Surge el problema reciproco ¿es posible hallar **v**(t) y **r**(t) conociendo **a**(t)?, Para resolver el problema no basta con conocer **a**(t), es necesario conocer además **las condiciones iniciales**, es decir la velocidad $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}_0$ al tiempo t=0, lo anterior se debe que al realizar las integraciones de las ecuaciones aparecen las constantes de integración, los ejemplos se verán más adelante.

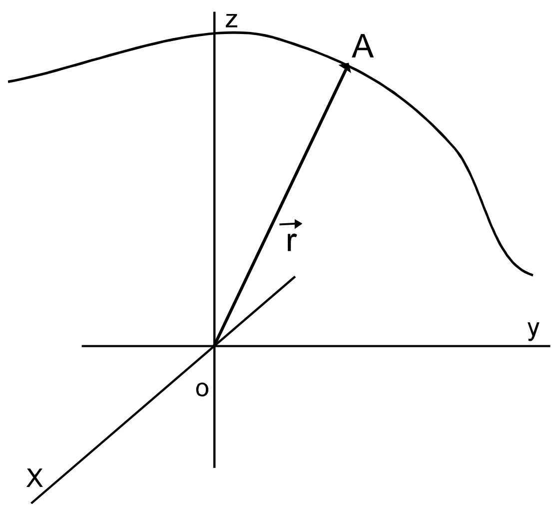


Figura 3.1 Representación del vector de posición o radio vector **r**.

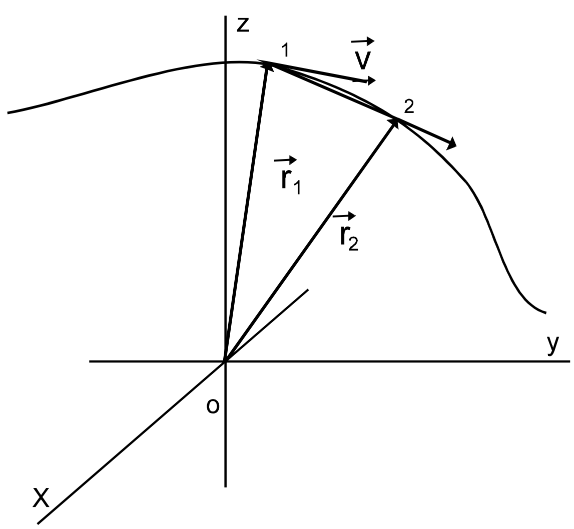


Figura 3.2. Representación geométrica de la velocidad.

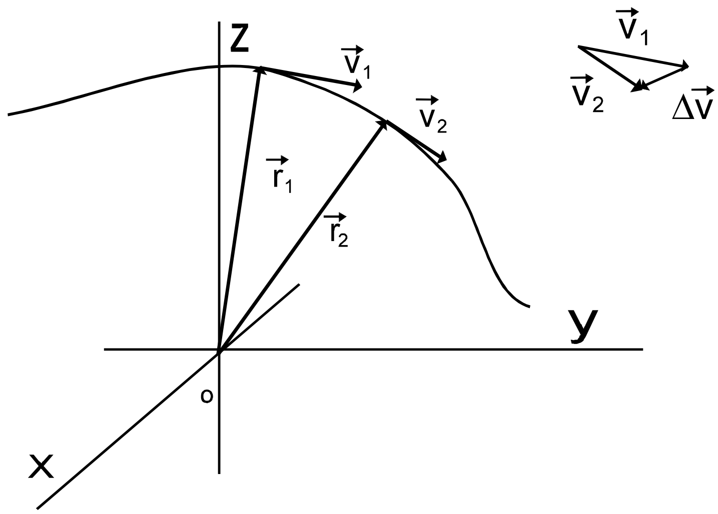


Figura 3.3. Representación geométrica del concepto de aceleración.

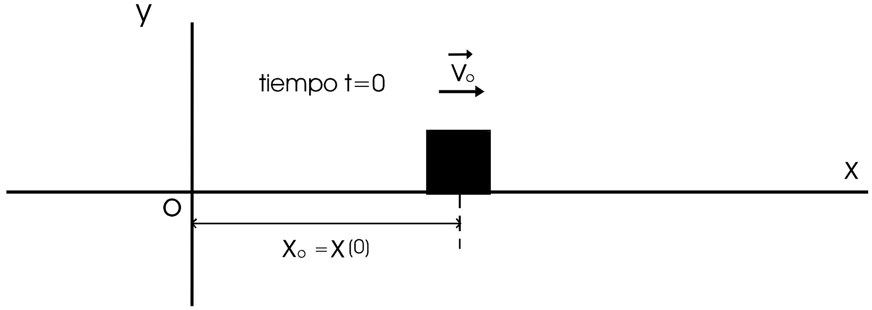
Cinemática en una dimensión

El movimiento más fácil de describir es el movimiento en una dimensión, ya que en este caso particular la posición del objeto en un sistema de referencia se describe simplemente con una sola componente del vector de posición **r**, por ejemplo, eligiendo a la componente en la dirección *x*, la posición futura del objeto se describirá por medio de expresión x=x(t).

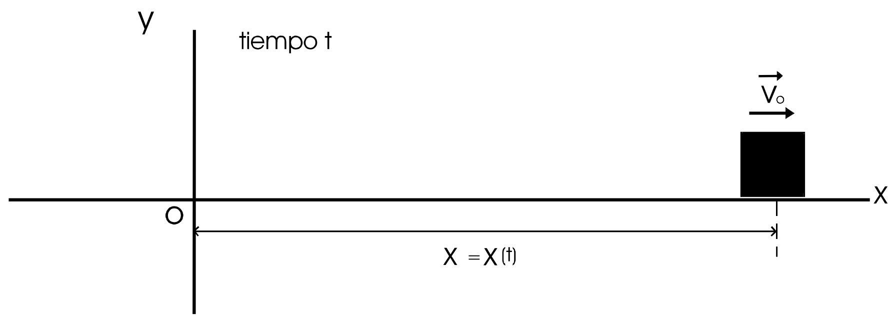
Movimiento rectilíneo uniforme

Cuando se considera el movimiento en una dimensión el sistema de coordenadas se reduce a una línea recta, y las cantidades vectoriales por lo tanto, quedan simplificadas a cantidades escalares, por tal motivo en esta sección se trabaja solo con la magnitud de los vectores, en cuanto a la dirección está es indicada por el signo algebraico.

Para determinar la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme (MRU), considérese el problema de un cuerpo que se mueve en línea recta a velocidad constante v_0, tal que al tiempo t =0 se localiza en la posición $x(0)=x_0$, (condiciones iniciales), como muestra la figura 3.4 (a), se desea conocer su posición futura al tiempo t cualquiera, figura 3.4(b)



(a)



(b)

Figura 3.4. (a) En esta figura se muestra la situación inicial un objeto (b) Aquí se observa el objeto en un tiempo futuro t.

Aplicando la definición de la velocidad en una dimensión, en la dirección x, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

integrando la ecuación respecto de t

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int v_0 dt$$

$$\int dx = v_0 \int dt$$

$$x = v_0 t + c$$

para determinar el valor de la constante de integración se aplican las condiciones iniciales, esto es, para t = 0, x(0) = x_0

$$x_0 = v_0(0) + c$$

$$x_0 = c$$

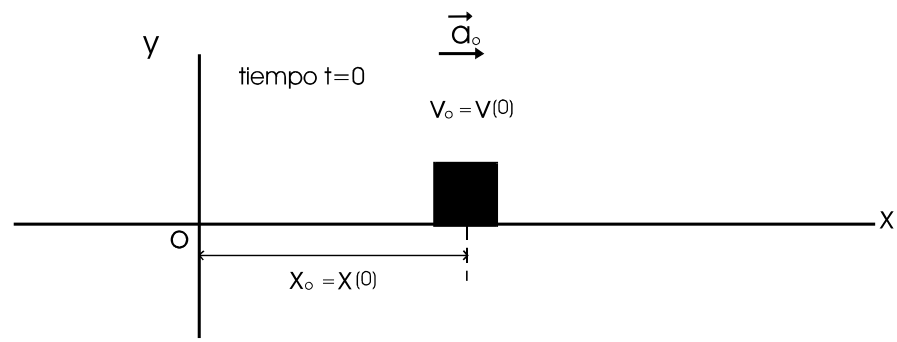
por lo tanto

$$\boxed{x = v_0 t + x_0} \qquad 3.3$$

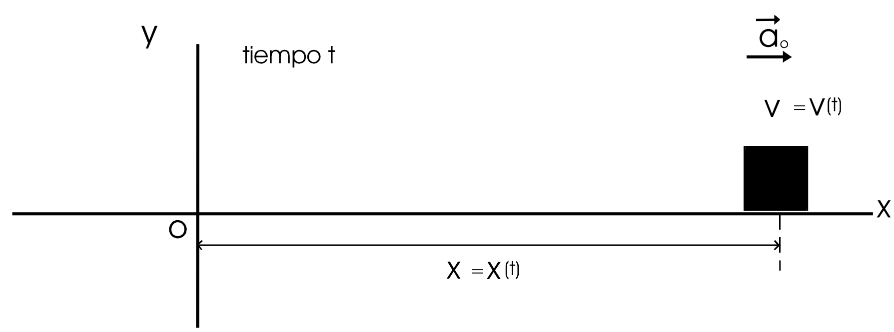
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Un tipo muy común de movimiento de los cuerpos es el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), esto es, cuando su aceleración es uniforme o constante.

Para obtener la ecuación de movimiento del MRUA considérese que el movimiento se efectúa en la dirección x como muestra la figura 3.5 (a), las condiciones iniciales (t=0), son las siguientes x(0) =x_0, v(0) = v_0 y a=a_0, nuevamente se desea saber la velocidad y posición del cuerpo para un tiempo t posterior.



(a)



(b)

Figura 3.5 (a) Situación inicial un objeto sometido a aceleración constante (b) Aquí se observa el objeto para un posición futura.

De la definición de la aceleración en la dirección x

$$\frac{dv}{dt} = a_0$$

procediendo como en el caso anterior a integrar la ecuación respecto a t

$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int a_0 dt$$
$$\int dv = a_0 \int dt$$
$$v = a_0 t + c_1$$

aplicando que para t =0, v(0)=v_0

$$v_0 = a_0(0) + c_1$$
$$v_0 = c_1$$

por lo tanto

$$\boxed{v = a_0 t + v_0} \qquad 3.4$$

recordando la definición de la velocidad, $v = dx/dt$, la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{dx}{dt} = a_0 t + v_0$$

integrando respecto a t la ecuación

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int (a_0 t + v_0) dt$$

$$\int dx = \int a_0 t dt + \int v_0 dt$$

$$x = a_0 \int t dt + \int v_0 dt$$

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + c_2$$

aplicando ahora que para t=0, $x(0) = x_0$

$$x_0 = \frac{1}{2} a_0 (0)^2 + v_0 (0) + c_2$$

$$x_0 = c_2$$

entonces

$$\boxed{x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0} \qquad 3.5$$

Las ecuaciones 3.3, 3.4 y 3.5 dependen explícitamente del tiempo y permiten resolver los problemas de movimiento rectilíneo uniforme y acelerado, pero es conveniente en la solución de algunos de estos problemas considerar otra ecuación que no depende explícitamente del tiempo, dicha ecuación se obtiene a continuación.

Aplicando la regla de la cadena es posible escribir la definición de la aceleración en una dimensión como

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

pero como $v = dx/dt$

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

Tomando en cuenta el problema anterior de aceleración constante, con las mismas condiciones iniciales de la figura 3.5 y aplicando el resultado anterior

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx} = a_0$$

Integrando la ecuación anterior respecto a x

$$\int v\frac{dv}{dx}dx = \int a_0 dx$$
$$\int v dv = a_0 \int dx$$
$$\frac{1}{2}v^2 = a_0 x + c_1$$

aplicando que para t =0, $v(0)=v_0$ y $x(0)=x_0$

$$\frac{1}{2}{v_0}^2 = a_0 x_0 + c_1$$

despejando c_1

$$c_1 = \frac{1}{2}{v_0}^2 - a_0 x_0$$

substituyendo el valor de la constante c_1 obtenido

$$\frac{1}{2}v^2 = a_0 x + \frac{1}{2}{v_0}^2 - a_0 x_0$$

despejando v^2

$$\boxed{v^2 = {v_0}^2 + 2a_0\left(x - x_0\right)} \qquad 3.6$$

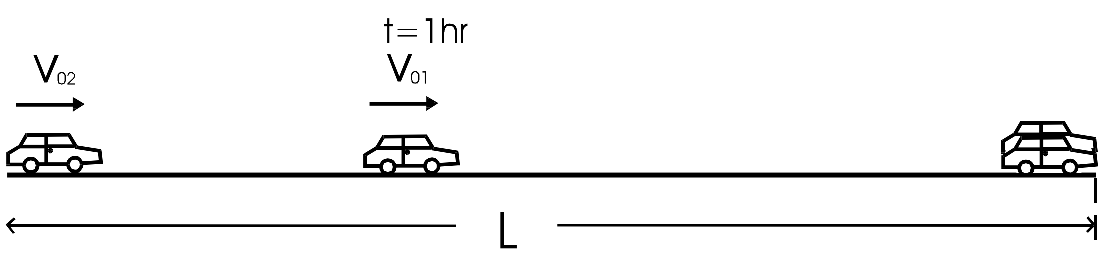
EJEMPLOS

I) Un automovilista realiza un viaje de 200 km a una rapidez promedio de 40 Km/h. Un segundo automóvil que inicio el viaje una hora después llega al mismo destino al mismo tiempo. ¿Cuál fue la rapidez promedio del segundo auto durante el periodo en que estuvo en movimiento?

SOLUCION

La notación con subíndice 1 corresponde al primer cuerpo y la notación 2 corresponde al segundo cuerpo.

El figura siguiente muestra la situación del problema, los movimientos se realizan a velocidad constante en cada caso, por lo que solo es necesario aplicar la fórmula 3.1 para la solución del problema.



El primer automóvil recorre la distancia L en un tiempo

$$t_1 = \frac{L}{v_{01}} = \frac{200\ km}{40\ km/h} = 5\ h$$

como el segundo automóvil comienza su recorrido 1 h después, su tiempo de recorrido de la distancia L es

$$t_2 = t_1 - 1\,h = 5\,h - 1\,h = 4\,h$$

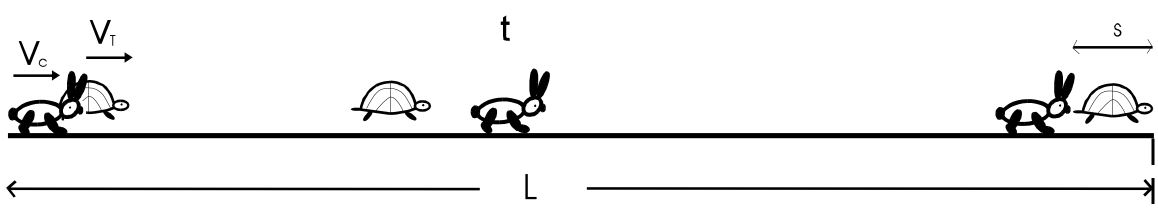
la velocidad uniforme o promedio del segundo automóvil

$$v_{02} = \frac{L}{t_2} = \frac{200\ km}{4\ km/h} = 50\ \frac{km}{h}$$

II) Una rápida tortuga puede desplazarse a una velocidad de 10 cm/s, y una liebre puede correr 20 veces más rápido. En una carrera, los dos corredores comienzan al mismo tiempo, pero la liebre se detiene a descansar durante 2 minutos y por ello la tortuga gana la carrera por un caparazón (20 cm). a) ¿Qué tanto duró la carrera? b) ¿Cuál fue la longitud recorrida?

SOLUCION

La figura a) muestra el inicio del movimiento, el sistema de coordenadas se coloca como se muestra. El subíndice T corresponde a tortuga y el C a la liebre



Figura

Los dos parten del origen del sistema al mismo tiempo, pero en algún punto intermedio desconocido del recorrido el conejo se detiene un tiempo t_p =2 min = 120 s, en una posición posterior a que el conejo descanse, las ecuaciones de la posición de cada uno de los animales respecto al sistema de coordenadas queda determinada por final indicada

$$x_T = v_T t$$
$$x_C = v_C (t - t_P)$$

EL extremo derecho de la figura muestra la condición final, donde la tortuga llega a la meta el un tiempo t_f, en el cual ha recorrido una distancia x_T = L, en ese mismo instante el conejo se ha recorrido a una distancia x_C = L – s, donde s es el espesor del caparazón, en este punto las ecuaciones son

$$L = v_T t_f$$
$$L - s = v_C (t_f - t_P)$$

Ecuaciones que representan un sistema ecuaciones, donde t_f y L son las incógnitas. Procediendo a despejarlas incógnitas

El tiempo total de la carrera es

$$t_f = \frac{v_C t_p - s}{v_C - v_p} = \frac{200\ {}^{cm}\!/_{s}\ 120\ s - 20}{200\ {}^{cm}\!/_{s} - 10\ {}^{cm}\!/_{s}} = 126.21\, s$$

y la longitud del recorrido

$$L = v_T t_f = 10\ {}^{cm}\!/_{s}\ 126.21\ s = 1262\ cm = 12.62\ m$$

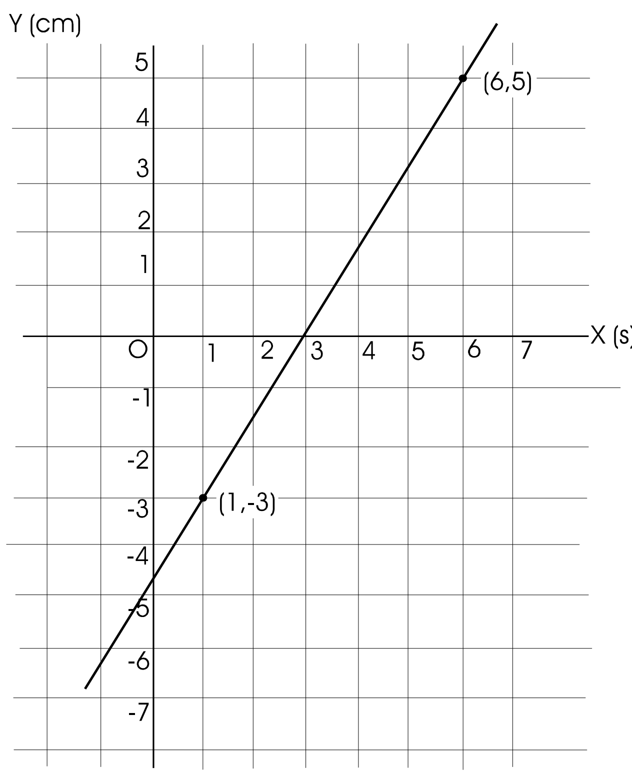
III) En t = 1.0 s, una partícula que se mueve con velocidad constante se localiza en x = -3.0 m y en t = 6.0 s, la partícula se localiza en x- 5.0 m a) Con esta información grafique la posición como función del tiempo. b) Determine la velocidad de la partícula a partir de la pendiente de esta gráfica.

SOLUCION

a) La gráfica de la posición de la partícula que se mueve a velocidad constante resulta ser una línea recta, la cual se muestra a continuación

b) Puesto que la pendiente de la recta es la velocidad

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{5\,m - (-3\,m)}{6\,s - 1\,s} = \frac{8\,m}{5\,s} = 1.6\ {}^{m}\!/_{s}$$



IV) Una partícula se mueve con una velocidad v_O = 60 m/s en t = 0. Entre t = 0 y t = 15 s, la velocidad disminuye uniformemente hasta cero. ¿Cuál es la aceleración promedio durante este intervalo de 15 s? ¿Cuál es el significado del signo de su respuesta?

SOLUCION

La información que se obtiene del texto de problema es la siguiente:
$t_i = 0\ s,\ v_i = 60\ m/s,\ t_f = 15\ s$ y $v_i = 0\ m/s,$ la aceleración promedio se calcula aplicando la definición

$$\langle a\rangle = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{(0-60)\,{}^{m}\!/_{s}}{(15-0)\ s} = -4\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

el signo negativo de la respuesta significa que la aceleración actúa en sentido contrario al desplazamiento, por este motivo se le llama desaceleración

V) Un objeto se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación. Determine a) la velocidad promedio entre t = 2.0 s y t = 3.0 s, b) la velocidad instantánea en t = 2.0 s y en t = 3.0 s, c) la aceleración promedio entre t = 2.0 s y t = 3.0 s, y d) la aceleración instantánea en t = 2.0 s y t = 3.0 s.

SOLUCION

Es conveniente proceder a enumerar cada uno de los tiempos indicados en el problema, esto es

$$t_1 = 2\ s,\ t_2 = 3\ s$$

a) La posición del objeto para cada uno de los tiempos se obtiene evaluando la ecuación

$$x(t_1) = (3.0\,t_1^{\,2} - 2.0\,t_1 + 3)\ m = (3.0\,(2)^2 - 2.0\,(2) + 3)\ m = 11\,m$$
$$x(t_2) = (3.0\,t_2^{\,2} - 2.0\,t_2 + 3)\ m = (3.0\,(3)^2 - 2.0\,(3) + 3)\ m = 24\ m$$

la velocidad promedio es entonces

$$\langle v\rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(24-11)\ m}{(3-2)\ s} = 13\ {}^{m}\!/_{s}$$

b) Para calcular la velocidad instantánea se procede a derivar la función de la posición con respecto al tiempo

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(3.0\,t^2 - 2.0\,t + 3)\ m = (6.0\,t - 2.0\ )\ {}^{m}\!/_{s}$$

la velocidad instantánea para cada uno de los tiempos es

$$v(t_1) = (6.0\,t_1 - 2.0\ )\ {}^{m}\!/_{s} = (6.0\,(2) - 2.0\ )\ {}^{m}\!/_{s} = 10\ {}^{m}\!/_{s}$$
$$v(t_2) = (6.0\,t_2 - 2.0\ )\ {}^{m}\!/_{s} = (6.0\,(3) - 2.0\ )\ {}^{m}\!/_{s} = 16\ {}^{m}\!/_{s}$$

c) La aceleración promedio entre t_1 y t_2

$$\langle a\rangle = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{(16-10)\ m/s}{(3-2)\ s} = 6\ m/s^2$$

d) Para obtener a aceleración instantánea se deriva la función v(t), respecto del tiempo

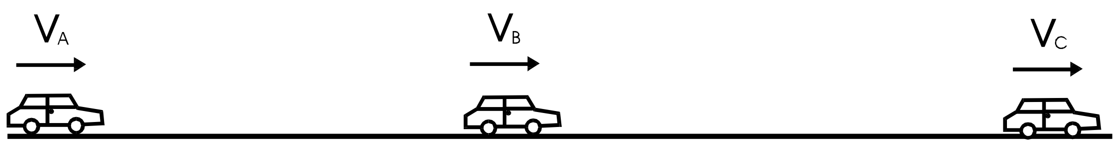
$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = (6.0\,t-2.0\,)\ m/s = 6.0\ m/s^2$$

Puesto que el resultado es una constante, la aceleración es la misma para cada cualquier tiempo.

VI) El nuevo BMW M3 puede acelerar de 0 a 60 mi/h en 5.6 s. a) ¿Cuál es la aceleración resultante en m/s^2? b) ¿Cuánto tardaría el BMW para pasar de 60 mi/h a 130 mi/h a esta tasa?

SOLUCION

a) La figura siguiente muestra las velocidades del automóvil en cada uno de las posiciones A, B y C



Aplicando el factor de conversión 1 mi/h = 0.4470 m/s, transformamos cada una de las velocidades a las unidades m/s

$$v_A = 0\ m/s$$

$$v_B = 60\ mi/h\quad \frac{0.4470\,m/s}{1\,mi/h} = 26.82\ m/s$$

$$v_C = 130\ mi/h\quad \frac{0.4470\,m/s}{1\,mi/h} = 58.11\ m/s$$

la aceleración promedio en la región AB es entonces

$$\langle a\rangle = \frac{v_B-v_A}{t_B-t_A} = \frac{(26.82-0)\,m/s}{(5.6-0)\ s} = 4.8\,m/s^2$$

b) Si el automóvil se mueve a esta aceleración constante en la región BC, de la ecuación

$$a = \frac{v_C-v_B}{t_C-t_B} = \frac{v_C-v_B}{\Delta t_{BC}}$$

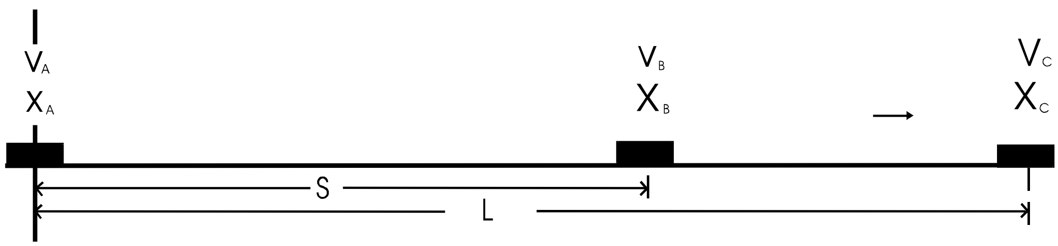
se despeja la incógnita Δt_{BC}

$$\Delta t_{BC} = \frac{v_C - v_B}{a} = \frac{(58.11 - 26.82)\, m/s}{4.8\, m/s^2} = 6.54\, s$$

VII) Un disco de hockey que se desliza sobre un lago congelado se detiene después de recorrer 200 m. Si su velocidad inicial es 3.00 m/s, a) ¿cuál es su aceleración si ésta se supone constante, b) cuánto dura su movimiento y c) cuál es su velocidad después de recorrer 150 m?

SOLUCION

La figura muestra el problema



Se observa que $x_C - x_A = L$ y $x_b - x_A = S$.

a) Para calcular la aceleración se observa que se conoce las velocidades instantáneas y la distancia recorrida, en tal caso se aplica la ecuación

$$v_C{}^2 = v_A{}^2 - 2a(x_C - x_A) = v_A{}^2 - 2aL$$

de donde se despeja la aceleración

$$a = \frac{v_C{}^2 - v_A{}^2}{2L} = \frac{\left((0)^2 - (3)^2\right) m^2/s^2}{2(200\, m)} = -0.0225\, m/s^2$$

b) De la ecuación $v_C = at_{AC} + v_A$ se despeja el tiempo

$$t_{AC} = \frac{v_C - v_A}{a} = \frac{(0-3)\, m/s}{-0.0225\, m/s^2} = 133.3\, s$$

c) Nuevamente se aplica la ecuación del inciso a), pero con las condiciones adecuadas

$$v_B{}^2 = v_A{}^2 - 2a(x_B - x_A) = v_A{}^2 - 2aS$$

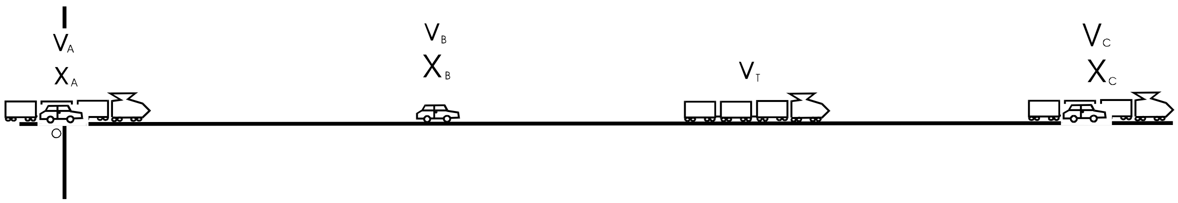
entonces

$$v_B = \sqrt{v_A{}^2 - 2aS} = \sqrt{\left(3\, m/s\right)^2 - 2\left(0.0225\, m/s^2\right)\left(150\, m\right)} = 1.5\, m/s$$

VIII) Un auto y un tren se mueven al mismo tiempo a lo largo de trayectorias paralelas a 25.0 m/s. Debido a una luz roja el auto experimenta una aceleración uniforme de -2.50 m/s^2 y se detiene. Permanece en reposo durante 45.0 s, después acelera hasta una velocidad de 25.0 m/s a una tasa de 2.50 m/s^2. ¿A qué distancia del tren está el auto cuando alcanza la velocidad de 25.0 m/s, suponiendo que la velocidad del tren se ha mantenido en 25.0 m/s?

SOLUCION

La figura siguiente muestra las posiciones del automóvil, en la posición A se coloca el origen del sistema coordenado, cuando tren y automóvil tiene una velocidad constante de 25 m/s, la posición B corresponde al automóvil en reposo durante 45 s y finalmente en C el automóvil ha alcanzado nuevamente la velocidad de 25 m/s.



Figura

El tiempo que invierte el automóvil en ir del punto A al B se obtiene aplicando la ecuación

$$t_{AB} = \frac{v_B - v_A}{a} = \frac{(0 - 25.0)\,{}^{m}\!/_{s}}{-2.50\,{}^{m}\!/_{s^2}} = 10\ s$$

con el resultado anterior se calcula la distancia recorrida de A a B

$$x_{AB} = \frac{1}{2}at_{AB}{}^{2} + v_A t_B = \frac{1}{2}\left(-2.5\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)(10\,s)^2 + \left(25\,{}^{m}\!/_{s}\right)(10\,s) = 125m$$

las ecuaciones anteriores permiten calcular también el tiempo en que el automóvil alcanza nuevamente la velocidad de 25 m/s y la distancia recorrida

$$t_{BC} = \frac{v_C - v_B}{a} = \frac{(25.0 - 0)\,{}^{m}\!/_{s}}{2.50\,{}^{m}\!/_{s^2}} = 10\ s$$

entonces la distancia recorrida de B a C

$$x_{BC} = \frac{1}{2}at_{BC}{}^{2} + v_B t_{BC} = \frac{1}{2}\left(2.5\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)(10\ s)^2 + \left(0\,{}^{m}\!/_{s}\right)(10\ s) = 125\ m$$

La distancia total que ha avanzado el automóvil es por lo tanto

$$x_C = x_{AB} + x_{BC} = 125\ m + 125\ m = 250\ m$$

el tiempo total transcurrido hasta ese momento debe incluir el tiempo de espera en es semáforo

$$T = t_{AB} + t_{BC} + 45\ s = 10\ s + 10\ s + 45\ s = 65\ s$$

el tren que se ha movido ha velocidad constante $V_0 = 25\,{}^{m}\!/_{s}$, ha recorrido una distancia

$$x_D = V_0 T = \left(25\,{}^{m}\!/_{s}\right)(65\ m) = 1625\ m$$

finalmente la de separación del tren cuando el automóvil se encuentra en el C es

$$x_D - x_C = 1625\ m - 250\ m = 1375\ m$$

IX). Una pelota acelera a 0.5 m/s^2 mientras se mueve hacia abajo en un plano inclinado de 9.0 m de largo. Cuando alcanza la parte inferior, la pelota rueda por otro plano, donde, después de moverse 15 m, se detiene. a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en la parte inferior del primer plano? b) ¿Cuánto tarda en rodar por el primer plano? c) ¿Cuál es la aceleración a lo largo del segundo plano? d) ¿Cuál es la velocidad de la pelota 8.0 m a lo largo del segundo plano?

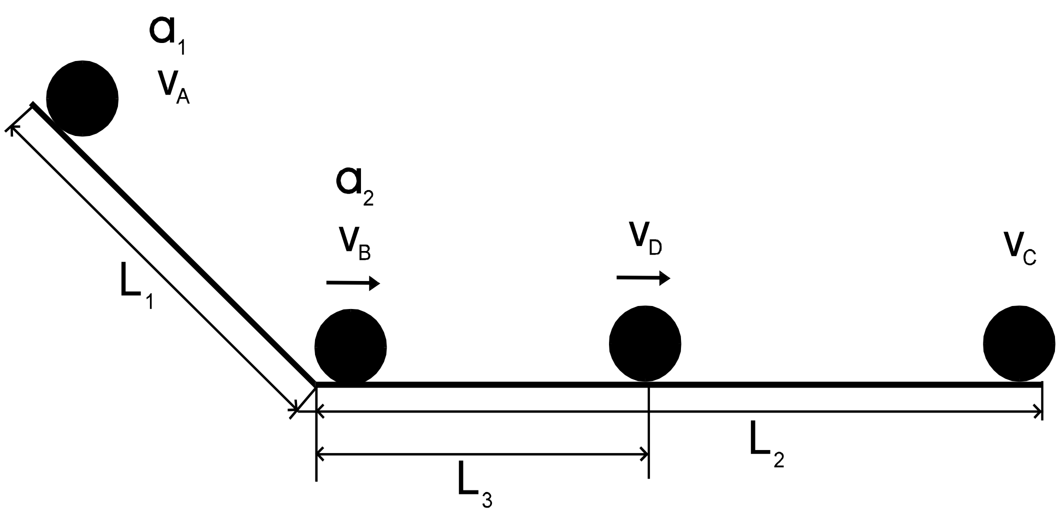
La figura siguiente muestra la situación de la pelota en el primer plano y segundo plano, así como las cantidades conocidas del problema

a) la velocidad de la pelota en la parte inferior se obtiene mediante la fórmula

$$v_B = \sqrt{{v_A}^2 + 2aL_1} = \sqrt{\left(0\, {}^{m}\!/\!_{s}\right)^2 + 2\left(0.5\, {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)(9m)} = 3.0\, {}^{m}\!/\!_{s}$$

b) conociendo la velocidad inicial y final, así como la aceleración en el primer plano, el tiempo de recorrido es

$$t_1 = \frac{v_B - v_A}{a} = \frac{(3-0)\, {}^{m}\!/\!_{s}}{0.5\, {}^{m}\!/\!_{s^2}} = 6.0\, s$$



c) Utilizando la misma ecuación que en el inciso a), pero despejando la aceleración y utilizando los datos para el segundo plano

$$a_2 = \frac{{v_C}^2 - {v_B}^2}{2L_2} = \frac{(0\, {}^{m}\!/\!_{s})^2 - (3.0\, {}^{m}\!/\!_{s})^2}{2(15\, m)} = -0.3\, {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

d) Con el resultado anterior y nuevamente aplicando la fórmula utilizada en el inciso a)

e)

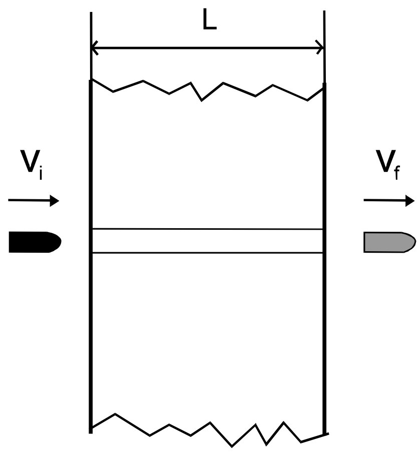
$$v_D = \sqrt{{v_B}^2 + 2a_2L_3} = \sqrt{\left(3\, {}^{m}\!/\!_{s}\right)^2 + 2\left(-0.3\, {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)(8m)} = 2.05\, {}^{m}\!/\!_{s}$$

X) Una bala indestructible de 2.00 cm de largo se dispara en línea recta a través de una tabla que tiene 10.0 cm de espesor. La bala entra en la tabla con una velocidad de 420 m/s y sale con una velocidad de 280 m/s. a) ¿Cuál es la aceleración promedio de la bala a través de la tabla? b) ¿Cuál es el tiempo total que la bala está en contacto con la tabla? c) ¿Qué espesor de las tablas (calculado hasta 0.1 cm) se requeriría para detener la bala?

a) Puesto que es conocido el grosor de la tabla y las velocidades inicial y final al atravesar la tabla, aceleración es

$$a = \frac{v_f^{\,2} - v_i^{\,2}}{2L} = \frac{(280\ m/s)^2 - (420\ m/s)^2}{2(10.0\times 10^{-2}\ m)} = -490\,000\ m/s^2$$

b) El tiempo requerido por la bala en perforar la tabla es entonces



$$t = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{(280-420)\,m/s}{-490\,000\ m/s^2} = 2.86\times 10^{-4}\ s$$

c) Si se considera la misma aceleración y que la velocidad final al atravesar la tabla es cero, entonces se requeriría un grosor de tabla

$$L_1 = \frac{v_f^{\,2} - v_i^{\,2}}{2a} = \frac{(0\ m/s)^2 - (420\ m/s)^2}{2(-490\,000\ m/s^2)} = 0.18\ m = 18\ cm$$

Caída libre

Es conocida la historia acerca de que Galileo dejó caer desde lo alto de la torre inclinada de Pisa dos objetos de masa diferente y que estos llegaron al suelo aproximadamente en el mismo tiempo, hecho que contradecía la creencia Aristotélica aceptada en ese tiempo que señalaba que cuerpos mas pesados caen más rápido. La ligera diferencia de tiempo observada se atribuye a la fricción provocada por el aire, si el experimento se realiza en vacío se comprueba sin lugar a dudas que una pluma cae al mismo tiempo que una bola de plomo, además realizó numerosos experimentos en planos inclinados que mostraron indudablemente que la caída de los cuerpos se realiza bajo la misma aceleración.

La aceleración de la gravedad (denotada en magnitud por la letra g), se ha medido utilizando diferentes métodos, resultando el experimento del péndulo simple bajo oscilaciones pequeñas el más adecuado y sencillo para este fin, obteniéndose una alta precisión. El valor aceptado de la gravedad para fines de cálculo es g= 9.8 m/s^2, pero cabe mencionar que debido al efecto de rotación de la tierra la magnitud cambia ligeramente dependiendo de la altitud donde se realice el experimento.

Debido a que la caída libre se lleva a cabo en condiciones en las cuales se considera que la gravedad es una constante, las ecuaciones que describen el fenómeno son las mismas que se utilizan para el movimiento rectilíneo uniforme acelerado, con la salvedad de que la aceleración de la gravedad conviene se considera negativa, puesto que actúa de manera atractiva hacia el centro de la tierra para los sistemas de referencia normales, o sea a = -g, la figura 3.6 muestra un cuerpo en caída libre de esta manera las ecuaciones son la siguientes:

$$\boxed{v = -gt + v_0} \qquad 3.7$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0} \qquad 3.8$$

$$\boxed{v^2 = {v_0}^2 - 2g(y - y_0)} \qquad 3.9$$

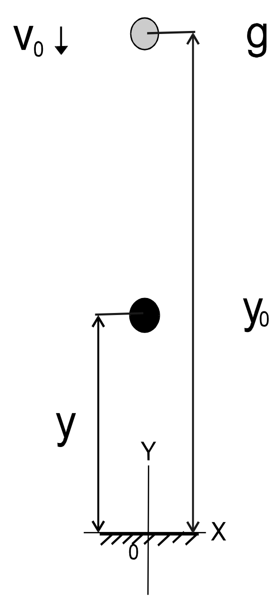


Figura 3.6. Representación de la caída libre, el sistema de referencia es colocado en la parte inferior.

EJEMPLOS

XI) Se informó que una mujer cayó 144 pies desde el piso 17 de un edificio, aterrizando sobre una caja de ventilador metálica, la cual sumió hasta una profundidad de 18.0 pulg. Sólo sufrió lesiones menores. Ignore la resistencia del aire y calcule a) la velocidad de la mujer exactamente antes de chocar con el ventilador, b) su aceleración promedio mientras está en contacto con la caja, y c) el tiempo que tarda en sumir la caja.

SOLUCION

a) La figura siguiente muestra un esquema de la situación, se considera que su velocidad en la parte superior al iniciar la caída es v_0 = 0 ft/s, la posición inicial y_0 = 0 pies, la aceleración en el sistema ingles se considera para cálculos como g=32 ft/s^2 aplicando la ecuación

$$v_A^{\ 2} = v_0^{\ 2} - 2g\left(y - y_0\right)$$

De donde se considera que y = -144 ft, el signo negativo se debe a que la distancia recorrida está por debajo del sistema de referencia elegido.

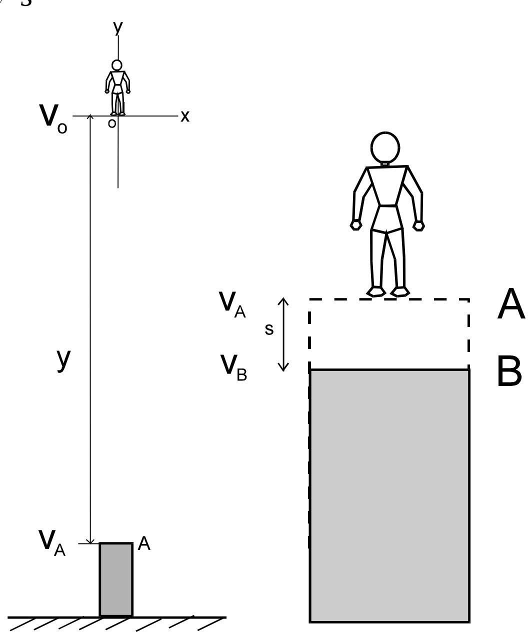
$$v_A = \sqrt{v_0^{\ 2} - 2g\left(y - y_0\right)} = \sqrt{\left(0\ {}^{ft}\!/\!_{s}\right)^2 - 2\left(32\ {}^{ft}\!/\!_{s^2}\right)\left(-144\ ft\right)} = 96\ {}^{ft}\!/\!_{s}$$

b) La velocidad inicial para esta parte es el momento de contacto con la caja metálica y la final debido a que se detiene es cero y sabiendo que la caja se deformó una distancia y – y_0 = - 18 pulg (= -1.50 ft), despejando de la ecuación la aceleración

$$a = \frac{v_B^{\ 2} - v_A^{\ 2}}{-2(y - y_0)} = \frac{(0\ {}^{ft}\!/\!_{s})^2 - (96\ {}^{ft}\!/\!_{s})^2}{2(1.5\quad ft)} = -3072\ {}^{ft}\!/\!_{s^2}$$

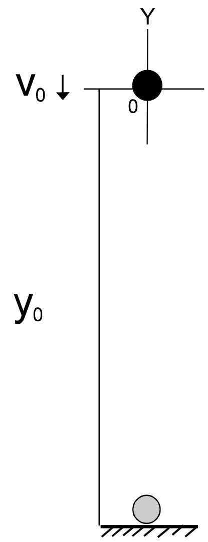
c) Conociendo la aceleración promedio del inciso anterior, el tiempo que se invierte en deformar la caja es

$$t_{AB} = \frac{v_B - v_A}{a} = \frac{\left(0 - 96\right)\ {}^{ft}\!/\!_{s}}{-3072\ {}^{ft}\!/\!_{s^2}} = 0.03125\ s$$



XII) Una pelota fue lanzada directamente hacia abajo con una velocidad inicial de 8.00 m/s desde una altura de 30.0 m ¿En qué momento la pelota golpea el suelo?

SOLUCION



Figura

Colocando sistema de referencia en la parte superior como se muestra en la figura, la posición inicial es y_0 =0 m y la velocidad inicial v_0 = -8.00 m/s, por lo tanto la ecuación que describe la posición de la pelota es

$$y = \left(-\frac{1}{2}9.8\,t^2 - 8.00\,t\right)m$$

Como el suelo se encuentra a y= -30 m respecto al sistema de referencia elegido, la ecuación se puede escribir como

$$-30.0\,m = \left(-4.9\,t^2 - 8.00\,t\right)m$$

de donde se obtiene la ecuación de segundo grado en t

$$4.9t^2 + 8.00\,t - 30 = 0$$

despejando la incógnita t

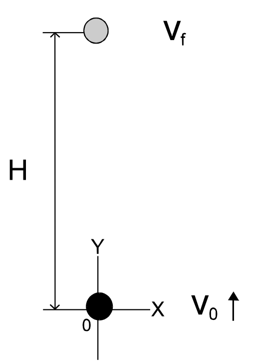
$$t = \frac{-8.00 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4.9)(-30)}}{2(4.9)} = \begin{cases} 1.79\ s \\ -3.42\ s \end{cases}$$

la solución físicamente aceptable es t =1.79 s

XIII) ¿A qué velocidad debe ser arrojada una pelota verticalmente hacia arriba con objeto de que llegue a una altura máxima de 53.7 m? b) ¿Cuánto tiempo estará en el aire?

SOLUCION

El sistema de referencia se coloca como muestra la figura, puesto que la gravedad actúa hacia abajo se considera negativa



a) La ecuación a aplicar en esta parte es

$$v_f^{\ 2} = v_0^{\ 2} - 2g\left(y - y_0\right)$$

la velocidad final v_f = 0 m/s y y-y_0 =H, entonces

$$0 = v_0^{\ 2} - 2gH$$

despejando v_0

$$v_0 = \sqrt{2gH}$$

$$= \sqrt{2(9.8\ m/s^2)(53.7\ m)} = 32.44\ m/s$$

b) la velocidad para cualquier tiempo posterior se puede determinar mediante la ecuación

$$v = -gt + v_0$$

el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima se obtiene considerado v = v_f =0 m/s, en la ecuación anterior y despejando a t

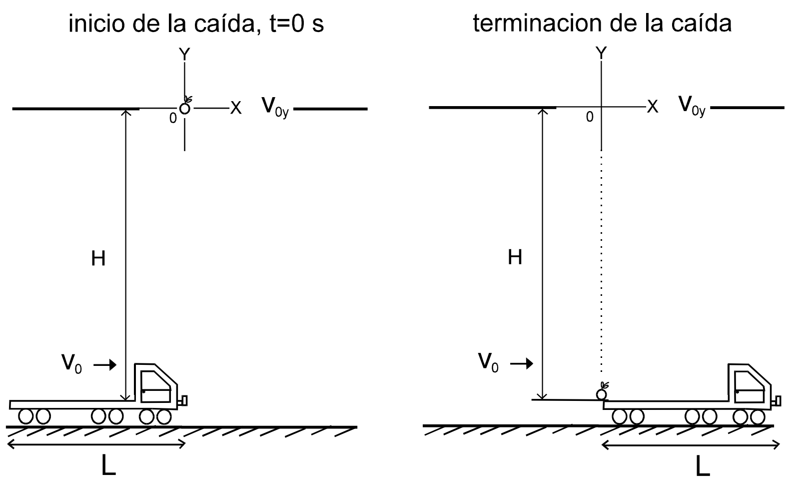
$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{32.44\ m/s}{9.8\ m/s^2} = 3.31\ s$$

XIV) Una persona parada en un puente sobre una carretera deja caer inadvertidamente una manzana desde la barandilla justo cuando el extremo frontal de un camión pasa directamente abajo de la barandilla. Si el vehículo se está moviendo a una velocidad de 55 km/h y tiene una longitud de 12 m ¿Qué tanto más arriba del camión deberá estar la barandilla fii la manzana no logra golpear la parte trasera del camión?

SOLUCION

En la figura siguiente se muestra el inicio de la caída de la manzana así como el final de la misma. El sistema de coordenadas es colocado exactamente en la parte superior donde inicia la caída, en estas condiciones y tomando en cuenta que la velocidad inicial de la manzana es $v_{oy} = 0$ m/s, la posición de la manzana se describe mediante la ecuación

$$y_m = -\frac{1}{2} g\, t^2$$



Mientras que la posición del camión que se mueve a una velocidad constante queda determinada por la ecuación

$$x_c = V_0\, t$$

Cuando se llega al final de la caída se tiene que y_m = -H, x_c = L y t = T, substituyendo en las ecuaciones anteriores se obtiene el sistema de ecuaciones

$$-H = -\frac{1}{2} g\, T^2$$

$$L = V_0\, T$$

de donde despejando las incógnitas T y H

$$T = L/V_o$$

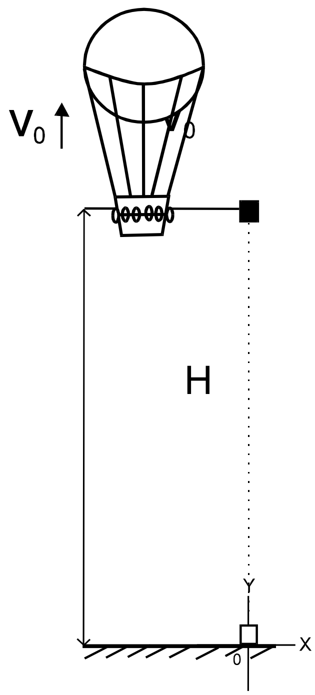
$$H = \frac{1}{2} g\, T^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{V_o} \right)^2$$

evaluando finalmente la expresión con los datos del problema V_0 = 55 km/h = 15.27 m/s, L=12 m s se obtiene el resultado

$$H = \frac{1}{2}\left(9.8\, m/s^2\right)\left(\frac{12\, m}{15.27\, m/s} \right)^2 = 3.02\, m$$

XV) Un globo está ascendiendo a razón de 12 m/s a una altura de 81.3 m sobre el nivel del suelo cuando se deja caer desde él un bulto, (a) ¿ A qué velocidad llega el bulto al suelo? (b) ¿Cuánto tiempo le tomó llegar al suelo?

SOLUCION



El sistema de referencia es colocado en el suelo como se muestra en la figura, el paquete al ser soltado del globo tiene en ese instante la misma velocidad inicial V_0 con la que el globo asciende y la posición inicial es entonces en el sistema de referencia elegido $y_0 = H$, con estas consideraciones las ecuaciones 3.5 y 3.7 se transforman en

$$v = -gt + v_0$$

$$v^2 = {v_0}^2 - 2g(y - H)$$

El bulto llega al suelo en el instante preciso en que y= 0 m, entonces la velocidad y el tiempo serán las finales, o sea $v = v_f$, $t = t_f$, por lo tanto las ecuaciones anteriores Quedan como

$$v_f = -gt_f + v_0 \qquad 1$$

$$v_f^{\,2} = {v_0}^2 + 2gH \qquad 2$$

a) De la ecuación 2 la velocidad con que llega al suelo es

$$v_f = \sqrt{{v_0}^2 + 2gH} = \sqrt{\left(12\,{}^{m}\!/\!_{s}\right)^2 + 2\left(9.8\,{}^{m}\!/\!_{s^2}\right)(81.3\ m)} = 41.68\ {}^{m}\!/\!_{s}$$

b) Debido a que la que velocidad final va en la dirección negativa de acuerdo al sistema de referencia seleccionado, v_f = -41.68 m/s. Haciendo uso del resultado anterior y de la ecuación 1

$$t_f = \frac{v_f - v_0}{-g} = \frac{-41.68\ {}^{m}\!/\!_{s} - (12\ {}^{m}\!/\!_{s})}{-9.8\ {}^{m}\!/\!_{s^2}} = 5.48\ s$$

XVI) Dos objetos comienzan una caída libre desde el reposo partiendo de la misma altura con 1 s de diferencia. ¿ En cuánto tiempo después de que el primer objeto comenzó a caer estarán los dos objetos separados una distancia de 10 m?

SOLUCION

Cuando el segundo cuerpo (bola negra) comienza su caída un segundo después tal como muestra la figura A, El primer cuerpo (bola gris) tiene ya una posición y velocidad inicial, las cuales son calculadas considerando el sistema de referencia mostrado en figura y tomado en cuenta que la velocidad y posición iniciales son cero cuando el primer cuerpo comienza la caída

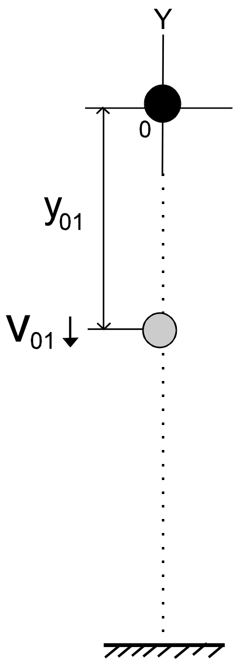


Figura A

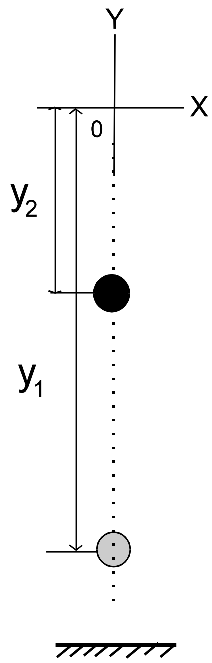


Figura B

$$y_{01} = -\frac{1}{2} g\, t^2$$
$$= -\frac{1}{2}\left(9.8\, {}^{m}\!/_{s^2}\right)(1\, s)^2 = -4.9\, m$$
$$V_{01} = -g\, t$$
$$= -\left(9.8\, {}^{m}\!/_{s^2}\right)(1\, s) = -9.8\, {}^{m}\!/_{s}$$

Considerando ahora que el cero del sistema de referencia de tiempo es el instante justo en que se suelta el segundo objeto, las posiciones verticales de cada objeto son

$$y_1 = -\frac{1}{2} g\, t^2 - V_{01} t - y_{01}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} g\, t^2$$

La distancia de separación de los objetos es $|y_1| - |y_2|$, el valor absoluto se utiliza para que la diferencia de las distancias sea positiva, si la distancia es d=10 m

$$|y_1| - |y_2| = d$$
$$\left|-\frac{1}{2} g\, t^2 - V_{01}\, t - y_{01}\right| - \left|\frac{1}{2} g\, t^2\right| = d$$
$$+\frac{1}{2} g\, t^2 + V_{01}\, t + y_{01} - \frac{1}{2} g\, t^2 = d$$
$$V_{01}\, t + y_{01} = d$$

despejando a t

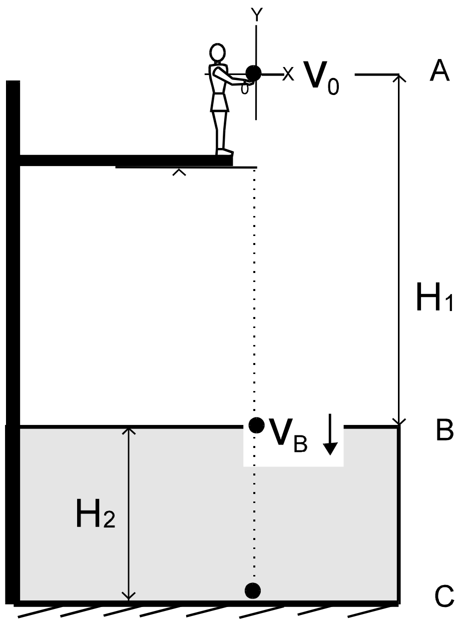
$$t = \frac{d - y_{01}}{V_{01}}$$
$$= \frac{(10 - 4.9)\, m}{9.8\, {}^{m}\!/_{s}} = 0.52\, s$$

al resultado anterior hay que sumarle 1 s debido al resultado es pedido con respecto al primer objeto

$$T = (t+1)\, s = (0.52+1)\, s = 1.52\, s$$

XVII) Una bola de plomo se deja caer en una alberca desde el trampolín a 2.6 m sobre el agua. Golpea el agua con una cierta velocidad y luego se unde hasta el fondo con esa misma velocidad constante. Llega al fondo 0.97s después que se le ha dejado caer. a) ¿Qué profundidad tiene la alberca? b) Supongamos que se deja drenar toda el agua de la alberca. La bola es arrojada de nuevo desde el trampolín de modo, que otra vez, llega al fondo en 0.97 s. ¿Cuál es la velocidad inicial de la bola?

SOLUCION



a) La figura muestra la situación del problema, el cual puede ser dividido en dos partes, un movimiento de caída libre de A a B y un movimiento rectilíneo uniforme de B a C.

En la primera parte del movimiento la velocidad inicial es V_0 = 0 m/s y la posición inicial y_0 =0 m, de acuerdo al sistema de referencia mostrado, entonces las ecuaciones 3.5 y 3.7 se reducen a

$$v = -gt$$
$$v^2 = -2gy$$

si ahora y = - H_1, v = v_A y t = t_{AB} entonces

$$v_{AB} = -gt_{AB}$$
$$v_A{}^2 = 2gH_1$$

Por lo tanto la velocidad v_A es

$$v_A = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\left(9.8\, {}^{m}\!/_{s^2}\right)\left(2.6\ m\right)} = 7.39\ {}^{m}\!/_{s}$$

la velocidad se considera negativa respecto al sistema de referencia, esto es v_A = - 7.39 m/s, así pues el tiempo t_{AB} de la primera parte del movimiento es

$$t_{AB} = \frac{v_{AB}}{-g} = \frac{-7.39\ {}^{m}\!/_{s}}{-9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}} = 0.754\ s$$

el tiempo total del movimiento es de 0.97 s, entonces el tiempo t_{BC} de la segunda parte del movimiento es

$$t_{BC} = T - t_{AB} = (0.97 - 0.754)s = 0.216\ s$$

la velocidad v_A es la velocidad uniforme con que se mueve la bala de plomo en el agua en la segunda parte del movimiento, por lo tanto la distancia recorrida H_2 por la bala es

$$H_2 = v_A t_{BC} = \left(7.39\ {}^{m}\!/_{s}\right)\left(0.216\ s\right) = 1.60\ m$$

la profundidad total de la alberca es precisamente H_2 =1.6 m

En el caso de que la alberca sea drenada, el movimiento será solamente caída libre. Si se considera el mismo sistema de coordenadas de la figura se tendrá que $y_0 = 0$ m, por lo que la ecuación 3.6 queda como

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

si ahora y = -(H_1 + H_2) y t_{AC} =0 97 s

$$-(H_1 + H_2) = -\frac{1}{2}gt_{AC}{}^2 + v_0 t_{AC}$$

despejando V_0

$$v_0 = \frac{1}{t_{AC}}\left[-(H_1 + H_2) + \frac{1}{2}gt_{AC}{}^2\right]$$

$$= \frac{1}{0.97\ s}\left[-(2.6\ m + 1.6\ m) + \frac{1}{2}\left(9.8\ m/s^2\right)(0.97\ s)^2\right] = 0.42\ m/s$$

Cinemática en dos dimensiones.

Cuando un objeto se mueve en don dimensiones (esto es, sobre un plano), su movimiento puede ser descrito por el vector de posición **r** =(*x(t), y(t)*). Existen dos clases de movimiento que son los más sencillos de describir: el tiro parabólico y el movimiento circular. A continuación se describe el tiro parabólico y posteriormente el movimiento circular.

Tiro parabólico

Uno de los movimientos más comunes en el plano es movimiento de los proyectiles, él cual como se muestra posteriormente, sigue una trayectoria *parabólica* si se efectúa en las condiciones siguientes

a) La aceleración de la gravedad es una contante en cualquier punto de la trayectoria. Lo cual equivale a que la tierra es aproximadamente plana durante la trayectoria del movimiento, y este se realiza a baja altura.
b) La resistencia del aire es lo suficientemente pequeña para ser ignorada.

Consideremos las condiciones anteriores en la solución del problema del movimiento del proyectil.

La figura 3.7, muestra el problema, así como el sistema de coordenadas elegido el cual como se observa se hace coincidir con el inicio del movimiento, de tal manera que el vector de posición inicial **r** (0) = $\mathbf{r}_0$ siempre sea el vector $\mathbf{r}_0$ = (0,0). La velocidad inicial **v** (0) =$\mathbf{V}_0$ es el vector $\mathbf{V}_0$ = V_0 (cosθ, senθ) = (V_0 cosθ, V_0 senθ).
Como puede observarse la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su propio peso el cual está dirigido hacia abajo entonces **W** = m**g** = m(0,-g). Aplicando la segunda ley de Newton y considerando la aceleración en dos dimensiones, esto es **a** = (a_x, a_y)

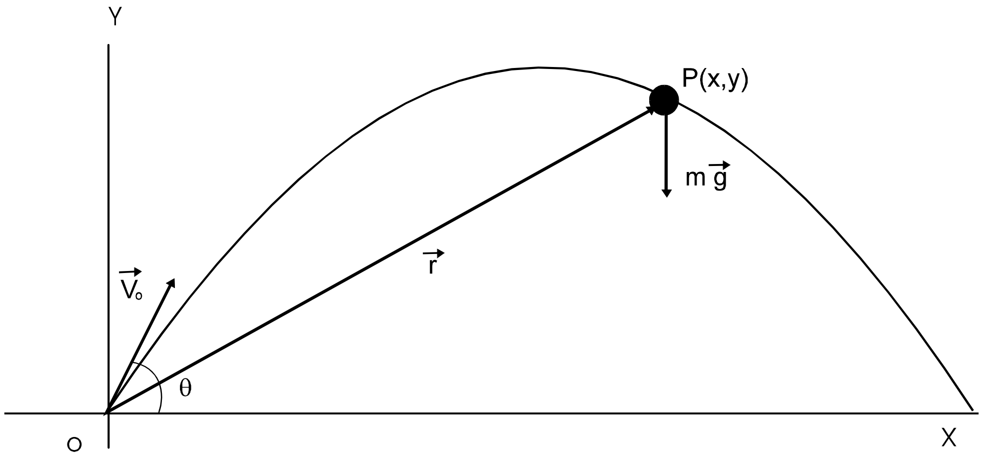


Figura 3.7. Movimiento parabólico.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}$$

$$(0, -g) = (a_x, a_y)$$

ó invirtiendo la igualdad

$$(a_x, a_y) = (0, -g)$$

aplicando la definición de la aceleración

$$\mathbf{a} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right)$$

la ecuación se expresa como

$$\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) = (0, -g)$$

integrando la expresión respecto de t

$$\left(\int \frac{dv_x}{dt} dt, \int \frac{dv_y}{dt} dt \right) = \left(\int 0\ dt, -\int g\ dt \right)$$

$$\left(\int dv_x, \int dv_y \right) = \left(\int 0\ dt, -\int g\ dt \right)$$

$$\left(v_x, v_y \right) = \left(C_1, -g\ t + C_2 \right)$$

las constantes C_1 y C_2 se pueden determinar aplicando la condición inicial **v**(0) =**V**$_0$ =(V_0 cosθ, V_0 senθ).

$$\left(V_0 \cos\theta, V_0 \operatorname{sen}\theta\right) = \left(C_1, -g(0) + C_2\right) = \left(C_1, C_2\right)$$

de donde

$$C_1 = V_0 \cos\theta, \quad C_2 = V_0 \operatorname{sen}\theta$$

entonces el vector velocidad es

$$\boxed{\mathbf{v} = \left(v_x, v_y\right) = \left(V_0 \cos\theta, -g\,t + V_0 \operatorname{sen}\theta\right)} \qquad 3.10$$

igualando componentes

$$\boxed{v_x = V_0 \cos\theta} \qquad 3.11$$

$$\boxed{v_y = -g\,t + V_0 \operatorname{sen}\theta} \qquad 3.12$$

puesto que la velocidad se define como

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

la ecuación 3.8 se expresa como

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(V_0 \cos\theta, -g\,t + V_0 \operatorname{sen}\theta\right)$$

integrando nuevamente la expresión respecto de t

$$\left(\int \frac{dx}{dt}dt, \int \frac{dy}{dt}dt\right) = \left(\int \left(V_0 \cos\theta\right) dt, \int \left(-g\,t + V_0 \operatorname{sen}\theta\right)dt\right)$$
$$\left(\int dx, \int dy\right) = \left(\int \left(V_0 \cos\theta\right) dt, \int \left(-g\,t + V_0 \operatorname{sen}\theta\right)dt\right)$$
$$\left(x, y\right) = \left(V_0 \cos\theta\, t + C_3, -\frac{1}{2} g\,t^2 + V_0 \operatorname{sen}\theta\, t + C_4\right)$$

las constantes C_3 y C_4 se determinan ahora aplicando la condición inicial **r**(0) =**r**$_0$ =(0, 0).

$$\left(0, 0\right) = \left(V_0 \cos\theta\,(0) + C_3, -\frac{1}{2} g\,(0)^2 + V_0 \operatorname{sen}\theta(0) + C_4\right)$$
$$= \left(C_3, C_4\right)$$

por lo tanto

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0$$

entonces el vector de posición es

$$\boxed{\mathbf{r} = (x,\ y) = \left(V_0 \cos\theta\ t,\ -\frac{1}{2} g\ t^2 + V_0 \operatorname{sen}\theta\ t \right)} \qquad 3.13$$

igualando componentes

$$\boxed{x = V_0 \cos\theta\ t} \qquad 3.14$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} g\ t^2 + V_0 \operatorname{sen}\theta\ t} \qquad 3.15$$

Como se puede observar de las ecuaciones en componentes 3.14, 3.15, el movimiento en la dirección x corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento en la dirección y a un movimiento de caída libre.

Despejando a t de la ecuación 3.14

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta}$$

Substituyendo en la ecuación 3.13

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_o \cos\theta} \right)^2 + V_0 \operatorname{sen}\theta \left(\frac{x}{V_o \cos\theta} \right)$$

simplificando

$$\boxed{y = -\left(\frac{g}{2V_o^{\,2} \cos^2\theta} \right) x^2 + (\operatorname{tg}\theta)\, x} \qquad 3.16$$

Alcance horizontal y altura máxima de un proyectil

Supóngase que el proyectil es lanzado como muestra la figura 3.8, el alcance máximo se denota por la letra R y la altura máxima por H.

La altura H se puede calcular de la siguiente maneara, en la parte más alta de la trayectoria la velocidad vertical es cero, o sea $v_y = 0$, de esta manera el tiempo t_1 que en llegar a dicho punto se puede calcular despejando de la ecuación 4.10

$$t_1 = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

substituyendo este resultado en la ecuación 3.15

$$H = -\frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \right)^2 + V_0 \operatorname{sen}\theta \left(\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \right)$$

$$\boxed{H = \frac{V_0{}^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}} \qquad 3.17$$

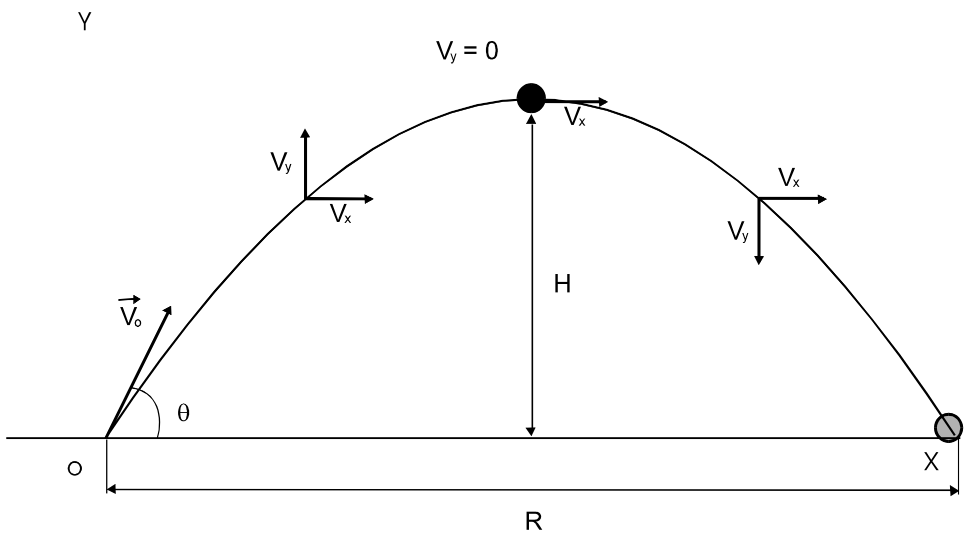


Figura 3.8. figura para mostrar la altura máxima H y el alcance máximo R.

para determinar el alcance total R se observa que debido a la simetría en la parábola, el tiempo necesario para recorrer la dicha distancia es el doble del tiempo requerido para alcanzar la altura máxima, es decir $t=2t_1$, substituyendo en la ecuación 3.14

$$R = V_0 \left(\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \right) = \frac{V_0{}^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g}$$

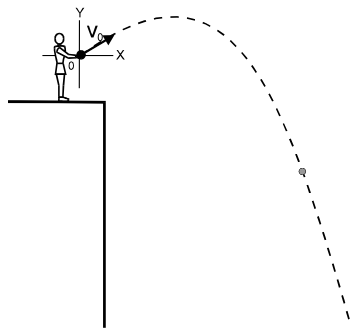
expresión que puede ser simplificada utilizando la identidad trigonométrica sen 2θ = 2cos θ sen θ

$$\boxed{R = \frac{V_0{}^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}} \qquad 3.18$$

EJEMPLOS

XVIII) Usted arroja una pelota desde un acantilado a una velocidad inicial de 15 m/s y con un ángulo de 20° arriba de la horizontal. Halle a) su desplazamiento horizontal y b) su desplazamiento vertical 2.3 s más tarde.

SOLUCION



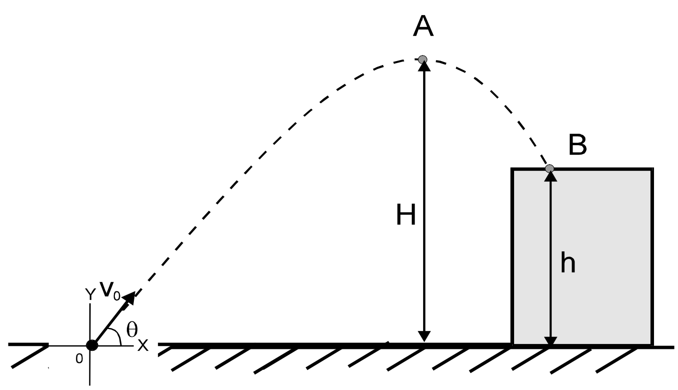
Las ecuaciones paramétricas del movimiento respecto al sistema de coordenadas elegido son

$$x = V_0 \cos\theta \ t$$
$$y = -\frac{1}{2} g \ t^2 + V_0 \,\mathrm{sen}\,\theta \ t$$

evaluando en t = 2.3 s

$$x = (15 \ m/s) \cos 20^0 \ (2.3 \ s) = 32.40 \ m$$
$$y = -\frac{1}{2}\left(9.8 \ m/s^2\right)(2.3 \ s)^2 + (15 \ m/s)\,\mathrm{sen}\,20^0 \ (2.3 \ s) = -14.12 \ m$$

XIX) Una piedra es proyectada a 120 ft/s en una dirección 62° sobre la horizontal, hacia un acantilado de altura h, la piedra golpea sobre el acantilado 5.5 s después del lanzamiento. Halle la altura h del acantilado, b) la altura máxima alcanzada por la piedra



SOLUCION

a) La ecuación 3.13 representa el alcance vertical de la parábola, evaluándola par a t= 5.5 s, V_0 =120 ft-/s, θ = 62^0 y considerando g= 32 ft/s^2 se obtiene la altura h indicada en la figura

$$y = -\frac{1}{2}\left(32 \ ft/s^2\right)(5.5 \ s)^2 + (120 \ ft/s)\,\mathrm{sen}\,62^0 \ (5.5 \ s) = 98.74 \ ft$$

b) La altura máxima H que alcanza la piedra puede determinarse mediante la ecuación 3.15, utilizando los datos anteriores

$$H = \frac{\left(120\ {}^{ft}\!/_{s}\right)^2 \operatorname{sen}^2 62^0}{2\left(32\ {}^{ft}\!/_{s^2}\right)} = 175.41\ ft$$

XX) Una pelota rueda desde lo alto de una escalera con una velocidad horizontal de magnitud de 5 ft/s. Los escalones tienen 8 in de largo y 8 in de alto. .¿En qué escalón golpea si primero le pelota?

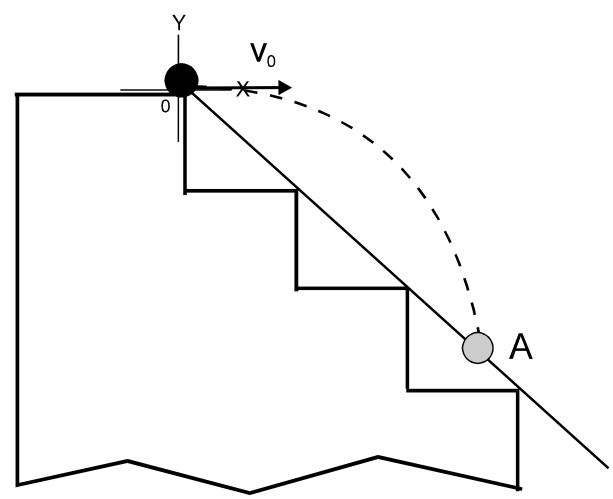
SOLUCION

El sistema de referencia es colocado en el punto donde la pelota abandona el primer escalón, tal como se muestra en la figura, en estas condiciones la ecuación de la trayectoria parabólica que sigue la pelota queda descrita por la ecuación 3.14 con $\theta = 0^0$

$$y = -\left(\frac{g}{2V_o^{\,2}}\right)x^2 \qquad 1$$

y la línea que forman las esquinas de los escalones la cual es una línea recta a – 45 ^{0} se representa por la ecuación

$$y = -x \qquad 2$$



El punto de intersección de la trayectoria de la parábola y la recta corresponde aproximadamente al escalón en que la pelota golpea, procediendo a encontrar dicho punto se igualan las ecuaciones 1 y 2

$$-\left(\frac{g}{2V_o^{\,2}}\right)x^2 = -x$$

despejando y factorizando

$$x\left[1-\left(\frac{g}{2V_o^{\,2}}\right)x\right] = 0$$

de donde

$$x = 0, \quad ó \quad x = \frac{2V_0^{\,2}}{g}$$

la primer solución corresponde a la intersección con el punto origen y la segunda a la intersección en el punto A, dividiendo esta segunda solución entre el ancho de los escalones se obtiene el escalón en que golpea la pelota

$$\text{Número de escalón} = \frac{x}{d} = \frac{2V_o^{\,2}}{dg} = \frac{2\left(5\ {}^{ft}\!/_{s}\right)^2}{\left({}^{8}\!/_{12}\ ft\right)\left(32\ {}^{ft}\!/_{s^2}\right)} = \frac{75}{32} = 2.33$$

Por el resultado obtenido, la pelota golpea el 3ER escalón.

XXI) Un jugador de fútbol americano patea la pelota para que tenga un "tiempo de suspensión" de 4.5 s y aterrice a 50 yardas (47.7 m) de distancia. Si la pelota abandona el pie del jugador a 5 ft (1.52 m) de altura sobre el terreno, ¿Cuál es su velocidad inicial (magnitud y dirección)?

SOLUCION

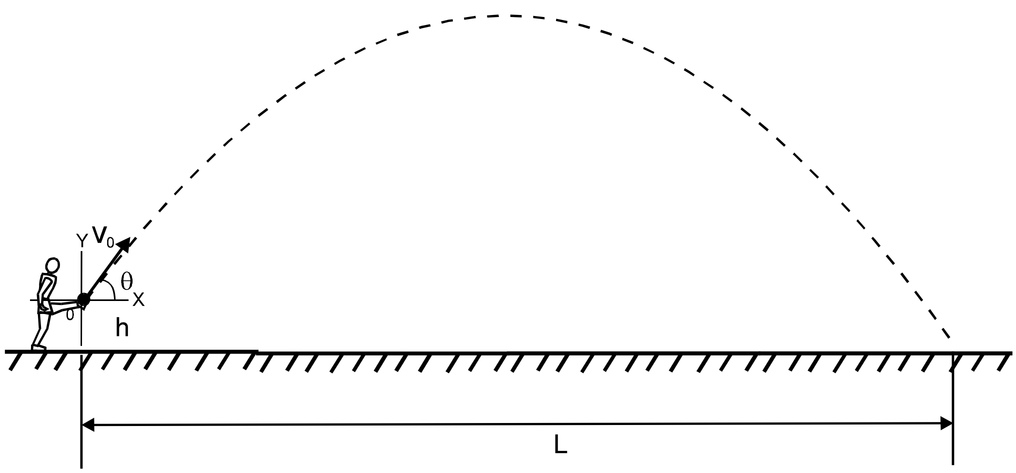
Las ecuaciones paramétricas son

$$x = V_0 \cos\theta \; t$$

$$y = -\frac{1}{2} g \; t^2 + V_0 \,\text{sen}\; t$$

y de la trayectoria del movimiento son

$$y = -\left(\frac{g}{2V_o^{\;2}\cos^2\theta}\right) x^2 + (\text{tg}\,\theta)\, x$$



substituyendo en las ecuaciones anteriores las condiciones x = L, y = - h y t = T

$$L = V_0 \cos\theta \; T \qquad 1$$

$$-h = -\frac{1}{2} g \; T^2 + V_0 \,\text{sen}\; T \qquad 2$$

$$-h = -\left(\frac{g}{2V_o^{\;2}\cos^2\theta}\right) L^2 + (\text{tg}\,\theta)\, L \qquad 3$$

de la ecuación 1

$$V_0 \cos\theta = \frac{L}{T}$$

substituyendo en la ecuación 3

$$-h = -\left(\frac{g}{2\left(\frac{L}{T}\right)^2}\right) L^2 + (\operatorname{tg}\theta)\, L = -g\,\frac{T^2}{2} + \operatorname{tg}\theta$$

despejando θ

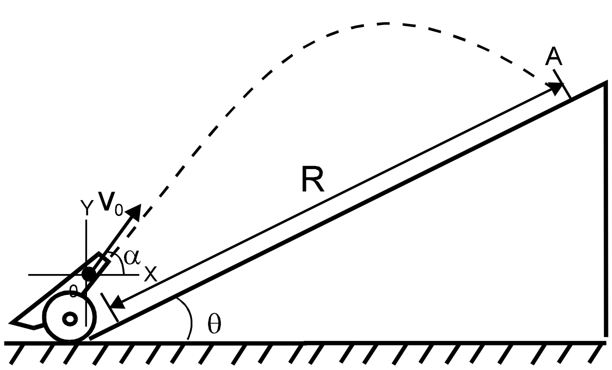
$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{L}\left(\frac{gT^2}{2} - h\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{47.7\ m}\left(\frac{9.8\,{}^{m}\!/_{s^2}\,(4.5\ s)^2}{2} - 1.52\ m\right)\right) = 64^0$$

de la ecuación 1 la magnitud de la velocidad es

$$V_0 = \frac{L}{T\cos\theta} = \frac{47.7\ m}{(4.5\ s)(\cos 64^0)} = 24.21\,{}^{m}\!/_{s}$$

XXII) Un cañón está listo para disparar proyectiles con una velocidad inicial Vo directamente sobre la ladera de una colina con un ángulo de elevación α ¿A qué ángulo a partir de la horizontal deberá ser apuntado el cañón para que obtener el máximo alcance posible R. sobre la ladera?

SOLUCION



De acuerdo al sistema de coordenadas mostrado en la figura la ecuación de la ladera es la línea recta

$$y = \operatorname{tg}\theta\ x$$

y la ecuación de la parábola es

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g\ x^2}{V_0{}^2\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\ x$$

El punto de intersección A puede se encontrado resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de comparación

$$\operatorname{tg}\theta\ x = -\frac{1}{2}\frac{g\ x^2}{V_0{}^2\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\ x$$

factorizando

$$x\left(\frac{1}{2}\frac{g\ x^2}{V_0^{\,2}\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\alpha\right)=0$$

de donde las soluciones son

$$x=0,\quad x=\frac{2V_0^{\,2}\cos^2\alpha}{g}\left(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta\right)$$

la segunda solución es la que corresponde al punto de intersección A, el alcance máximo R sobre la ladera corresponderá también a un alcance máximo en x, por lo tanto aplicando el proceso de derivación para máximos y /o mínimos a está última expresión, pero derivando respecto de α

$$\frac{dx}{d\alpha}=\frac{2V_0^{\,2}}{g}\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{tg}\theta\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\right)$$

se procede a igualar a cero, pero la expresión que debe ser cero es

$$\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{tg}\theta\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha=0$$

aplicando las identidades trigonométricas

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha+\operatorname{tg}\theta\operatorname{sen}2\alpha=0$$

de donde

$$\operatorname{tg}2\alpha=-\cot g\theta=\operatorname{tg}(\pi/2+\theta)$$

aplicando arco tangente a ambos lados de la ecuación

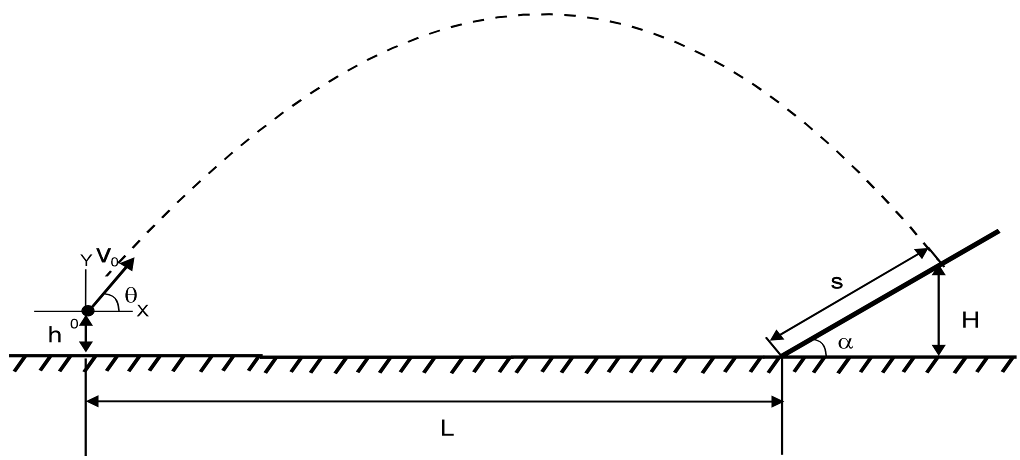
$$2\alpha=\pi/2+\theta=$$

de donde

$$\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$$

XXIII) Un juego de béisbol un bateador envía la bola a una altura de 4.6 * sobre el suelo de modo que el ángulo de la proyección es de 52° con la horizontal. La bola aterriza en el graderío, a 39 ft arriba de la parte inferior; el graderío tiene una inclinación de 28° y los asientos inferiores están a una distancia de 358 ft de la placa de home". Calcule la velocidad con que la bola dejó el bate.

SOLUCION



La altura H que alcanza la pelota sobre los graderíos H = s sen α = (39 ft) sen 28^0 = 18.31 ft y el alcance logrado D= L + s cos α = (358 +39 cos 28^0) ft =392.24 ft

La ecuación de la trayectoria está dad por la ecuación 3.14, o sea

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g\ x^2}{V_0{}^2\cos^2\theta} + \operatorname{tg}\theta\ x$$

si de acuerdo al sistema de referencia se hace y = H – h y x= D

$$H - h = -\frac{1}{2}\frac{g\ D^2}{V_0{}^2\cos^2\theta} + \operatorname{tg}\theta\ D$$

de donde despejando V_0

$$V_0 = \frac{D}{\cos\theta\sqrt{\frac{2(\operatorname{tg}\theta\ D - (H-h))}{g}}} = \frac{392.24\ ft}{\cos\theta\sqrt{\frac{2(\operatorname{tg}52^0\ (392.24\ ft) - (18.31\ ft - 4.6\ ft))}{32\ ft/s^2}}} = 115.34\ ft$$

Movimiento circular

Otro de los movimientos más comunes de los cuerpos es el movimiento circular uniforme, para realizar la descripción de movimiento primero se definen alguno conceptos necesarios.

Conceptos básicos

De la figura del circulo mostrado, la relación existente entre el ángulo θ el cual tiene como unidades los radianes y **la longitud de arco** s es

$$\boxed{s = R\,\theta} \tag{3.17}$$

si el radio R de la figura se mantiene constante, la derivada respecto del tiempo de la expresión anterior es

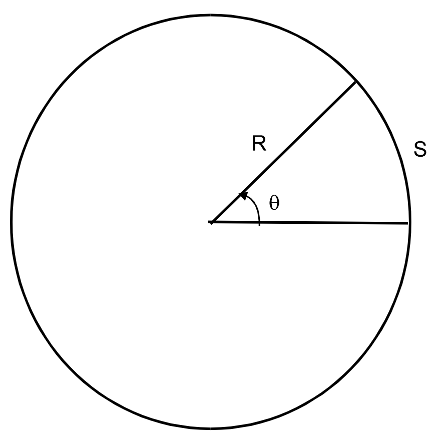
$$\boxed{\frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt} = R\omega} \tag{3.18}$$

donde **la velocidad angular** se define como $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$,

la derivada $\dfrac{ds}{dt}$ el conocida como **la rapidez**

si la ecuación 3.18 es nuevamente derivada respecto de t, se obtiene la **aceleración angular**

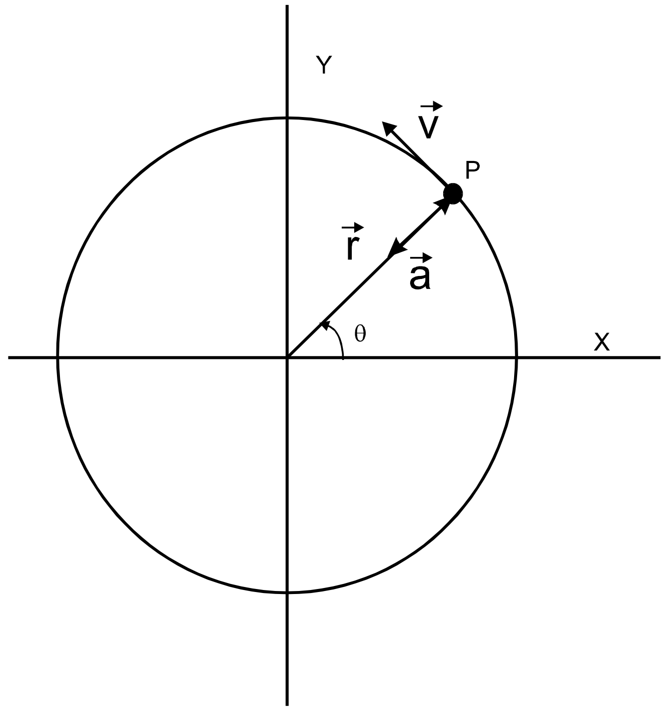
$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}} \tag{3.19}$$



La descripción del movimiento de una partícula que se mueve en un círculo de radio R y velocidad angular ω constante, se puede realizar como se muestra a continuación:
el vector de posición **r**, de la partícula respecto del el sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el centro del círculo es

$$\mathbf{r} = R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\,)$$

tal como se muestra la figura siguiente



derivando respecto del tiempo, para obtener la velocidad **v**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R\frac{d}{dt}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = R(-\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}, \cos\theta\frac{d\theta}{dt}) \\
&= R\frac{d\theta}{dt}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\
&= R\omega(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \qquad 3.20
\end{aligned}
$$

se observa que la velocidad es perpendicular a al vector de posición **r** en cualquier punto, esto es

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)R\omega(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = R^2\omega\,(-\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = 0$$

por lo tanto es tangente a la trayectoria circular.

Su magnitud

$$v = |\mathbf{v}| = R\omega\sqrt{(-\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^{\,2}} = R\omega\sqrt{\operatorname{sen}\theta^2 + \cos\theta^{\,2}} = R\omega$$

$$\boxed{\mathrm{v} = R\omega} \qquad 3.21$$

una constante $v = R\omega$ la cual es igual a la rapidez, tal como se muestra es a continuación derivando la ecuación 3.20 respecto al tiempo para obtener la aceleración **a**,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= R\omega \frac{d}{dt}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta\ ) = R(-\cos\theta \frac{d\theta}{dt}, -\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt}) \\ &= R\omega \frac{d\theta}{dt}(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \\ &= R\omega^2(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \\ &= -R\omega^2(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\end{aligned} \qquad 3.22$$

En este caso la aceleración tiene una dirección contraria al vector de posición **r**, o sea se dirige hacia el centro del circulo, por tal motivo se le conoce como la **aceleración centrípeta**. Su magnitud es

$$\mathrm{a} = |\mathbf{a}| = R\omega^2\sqrt{(-\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^{\ 2}} = R\omega^2\sqrt{\cos\theta^2 + \operatorname{sen}\theta^{\ 2}} = R\omega^2$$

$$\boxed{\mathrm{a} = R\omega^2} \qquad 3.23$$

despejando de la ecuación 3.21 a ω

$$\omega = \frac{\mathrm{v}}{R}$$

substituyendo en 3.23

$$\boxed{\mathrm{a} = \frac{\mathrm{v}^2}{R}} \qquad 3.24$$

EJEMPLOS

XXIV) Un satélite de la tierra se mueve en una órbita circular situada a 640 Km sobre la superficie de la tierra. El tiempo para una revolución es de 98 min. a) ¿Cuál es la velocidad del satélite? b) ¿Cuál es la aceleración en caída libre en la órbita?

SOLUCION

a) El período revolución es T=98 min = 5880 s, la distancia recorrida durante ese tiempo es L= 2πR donde R = 640 km es el radio de la órbita, entonces la velocidad tangencial del satélite es

$$v = \frac{L}{T} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\ (640\times 10^3\ m)}{5880\ s} = 684\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

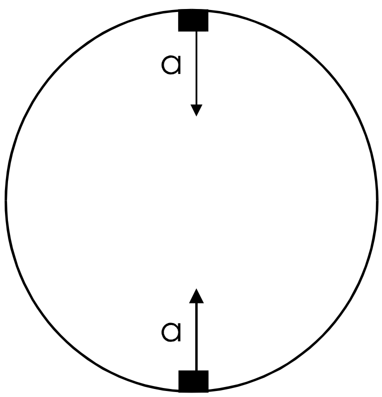
b) La aceleración en caída libre en la órbita corresponde a la aceleración centrípeta, o sea

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(684\ {}^{m}\!/\!{}_{s})^2}{640\times 10^3\ m} = 0.731\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

XXV) .Una rueda de feria de 15 m de radio completa 5 vueltas sobre su eje horizontal a cada minuto. a) ¿Cuál es la aceleración, magnitud y dirección, de un pasajero en el punto más alto? b) ¿Cuál es la aceleración en el punto más bajo?

SOLUCION

a) Procediendo a calcular la velocidad y la aceleración centrípeta como en el problema anterior, ahora L= 2πNR, siendo N en número de vuelta y T=1 min = 60 s, el tiempo en que realiza las N vueltas



$$v = \frac{L}{T} = \frac{2\pi\ NR}{T} = \frac{2\pi\ 5(15\ m)}{60\ s} = 7.85\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.85\ {}^{m}\!/\!{}_{s})^2}{15\ m} = 4.1\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

en la figura se muestra la dirección de la aceleración en la parte superior e inferior, en ambos casos la magnitud es la misma, entonces en la parte superior

a = 4.1 m/s^2 dirigida hacia abajo

b) en este caso
c)
a = 4.1 m/s^2 dirigida hacia arriba

XXVI) Se cree que ciertas estrellas neutrón (estrellas extremadamente densas giran alrededor de 1 rev/s. Si una estrella tal tiene un radio de 20 Km (valor típico), ¿cuál es la velocidad de un punto situado en el ecuador de la estrella? y b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta en ese punto?

SOLUCIÓN

La velocidad angular de giro de la estrella es ω = 1 rev/s = 2π rad/s y su radio R= 20 km =20 000 m, entonces la velocidad tangencial en un punto del ecuador es

$$v = R\omega = (20\ x\,10^3\ m)(2\pi\ {}^{rad}\!/\!{}_{s}) = 126\ x\,10^3\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

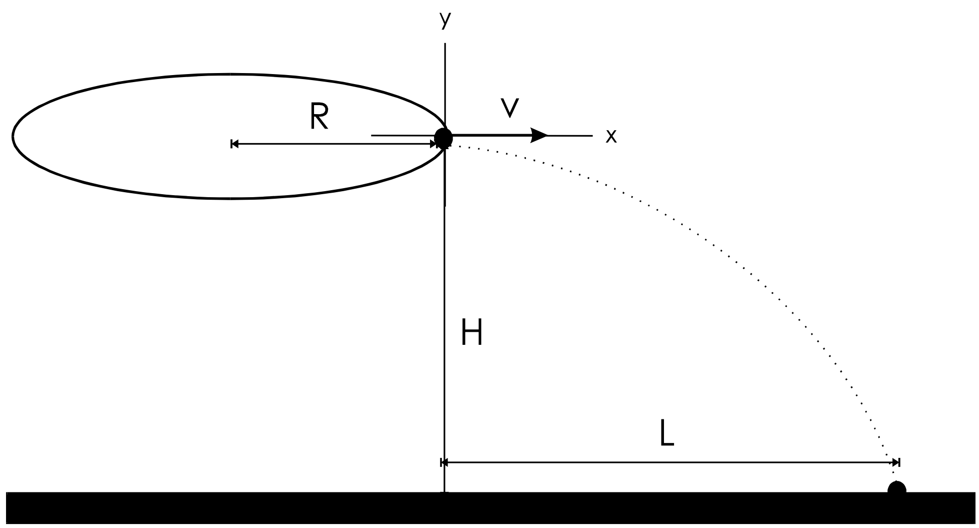
y la aceleración centrípeta

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(126\ {}^{m}\!/\!{}_{s})^2}{20\ x\,10^3\ m} = 790\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

XXVII) Un niño hace girar una piedra en un circulo horizontal situado a 1.9 m sobre el suelo por medio de una cuerda de 1.4 m de longitud. La cuerda se rompe, y la piedra sale disparada horizontalmente golpeando el suelo a 11 m de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?

SOLUCION

La figura muestra el esquema de la situación. Al romperse la cuerda la piedra sale con la velocidad horizontal igual a la velocidad tangencial V que tiene al girar, siguiendo una trayectoria parabólica que se puede describir mediante las ecuaciones paramétricas



$$x = Vt$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

haciendo x =L, Y= - H se tiene

$$L = Vt \qquad 1$$
$$-H = -\frac{1}{2}gt^2 \qquad 2$$

de la ecuación 2 se determina el tiempo de vuelo

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

de la ecuación 1 se despeja la velocidad V y se substituye el valor del tiempo obtenido anteriormente

$$V = \frac{L}{t} = \frac{L}{\sqrt{2H/g}} = L\sqrt{\frac{g}{2H}} = (11\ m)\sqrt{\frac{9.8\ m/s^2}{2(1.9\ m)}} = 17.6\ m$$

entonces la aceleración radial es

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(17.6\ m/s)^2}{1.4\ m} = 222.9\ m/s^2$$

XXVIII)-a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un objeto situado en el ecuador de la tierra debido a la rotación de la misma? b) ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación de la tierra para que los objetos situados en el ecuador tuvieran una aceleración centrípeta igual a 9.8m/s^2

SOLUCION

a) El radio de la tierra es R = 6.37 x 10^6 m, la velocidad angular se obtiene recordando que la tierra da una vuelta sobre si misma en 24 hr.

$$\omega = \frac{1}{24\ hrs} = \frac{2\pi}{24(3600\ s)} = 72.72\ x\,10^{-6}\ {rad}/{s}$$

La aceleración centrípeta es entonces

$$a_c = R\omega^2 = (6.37\,x10^6\ m)(72.72\ x\,10^{-6}\ {rad}/{s})^2 = 0.0337\ {m}/{s^2}$$

igualando la aceleración centrípeta con la aceleración de la gravedad

$$g = a_c = R\omega^2 = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

de donde se despeja el periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6.37\,x10^6\ m}{9.81\ {m}/{s^2}}} = 5066\ s = 84.42\ minutos$$

con este periodo los objetos que se encuentren situados en el ecuador “flotarían”

CAPITULO IV

Dinámica

Conceptos básicos: masa, peso y fuerza.

Partícula y cuerpo rígido

Los movimientos reales de los cuerpos son tan complejos que, al estudiarlos, es necesario prescindir de los detalles poco importantes para el movimiento que consideramos (en caso contrario, el problema se complicaría tanto que resolverlo sería prácticamente imposible).

Con este fin se emplean conceptos (abstracciones, idealizaciones), cuyo empleo depende del carácter concreto de los problemas que nos interesan, así como del grado de precisión, con el cual queremos obtener el resultado.

Entre estos conceptos juegan gran papel las nociones del punto material y del cuerpo rígido.

El **punto material**, o con brevedad, **partícula** es un cuerpo, en el cual las dimensiones se pueden despreciar en las condiciones del problema dado. Evidentemente, que un mismo cuerpo se puede considerar en unos casos como punto material, en otros como cuerpo extendido.

El **cuerpo rígido**, o con brevedad, el **sólido**, es un sistema de puntos materiales, en el cual la distancia entre ellos no varía en el proceso del movimiento. Un cuerpo real se puede considerar rígido solamente si su deformación es despreciablemente pequeña en las condiciones del problema que se examine.

La Mecánica se plantea dos problemas fundamentales:

1. El estudio de diferentes movimientos y la generalización de los resultados obtenidos en forma de leyes de movimiento, con ayuda de]as cuales puede ser predecido el carácter del movimiento en cada caso concreto.

2. La búsqueda de propiedades generales, propias de cualquier sistema, independientemente de la especie concreta de interacción entre los cuerpos de éste.

La solución del primer problema llevó al establecimiento por Newton y Einstein de las llamadas leyes dinámicas, la solución del segundo problema, al descubrimiento de las leyes de conservación de magnitudes tan fundamentales como la energía, del momento lineal y el momento angular o cinético..

Las leyes dinámicas y las leyes de conservación de la energía, del momento y del momento angular son las leyes fundamentales de mecánica. Su estudio constituye la mayor parte del contenido del curso de Física del movimiento.

Fuerza, masa inercial, masa gravitacional y peso.

Definición: la **fuerza** puede considerarse en primera instancia como cualquier acción de un agente exterior tal que sea capaz de modificar las condiciones reposo o movimiento de una partícula o cuerpo rígido, esto es, cualquier acción que provoque un cambio en la aceleración ya sea lineal o rotacional, En segundo se puede considerar, como fuerza cualquier acción exterior sobre un cuerpo que modifique su longitud, área o volumen. Es necesario mencionar ningún objeto en la Naturaleza se encuentra libre de fuerzas ya que todos los objetos interaccionan entre sí.

La experiencia muestra que todos los cuerpos ejercen “resistencia” a todos los intentos de cambiar su velocidad, tanto su módulo como su dirección. Esta propiedad, que expresa el grado de resistencia del cuerpo a variar su velocidad, se denomina inertancia. En diferentes cuerpos la inertancia se manifiesta en grado diverso. Como medida de inertancia se utiliza la magnitud llamada **masa inercial** (m_i), El cuerpo con mayor masa es más inerte, y viceversa.

Las masas que figuran en esta ley de gravitación universal se denominan **masa de gravitación** (m_g), a diferencia de la masa inercial. Sin embargo, en la práctica se ha establecido que las masas de gravitación e inerciales de cualquier cuerpo son estrictamente proporcionales entre sí. Por eso se pueden considerar iguales (es decir, elegir un mismo patrón para la medición de ambas masas) y hablar simplemente de la masa que interviene como medida de inercia del cuerpo o como medida de acción de la gravedad.

El concepto de masa, puede determinarse mediante la razón de las masas de dos cuerpos diferentes por la relación inversa de las aceleraciones, comunicadas a ellos por fuerzas iguales

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_2|} = \frac{a_2}{a_1} \qquad 4.1$$

Observemos, que esta definición no exige la medición preliminar de las mismas fuerzas. Es suficiente disponer solamente del criterio de igualdad de las fuerzas. Por ejemplo, si sobre dos cuerpos diferentes, que están en un plano horizontal liso, se actúa sucesivamente con un mismo resorte, orientándolo de forma horizontal y estirándolo hasta una misma longitud, entonces se puede afirmar que la acción del resorte sobre cada cuerpo es la misma en ambos casos, con otras palabras, las fuerzas son también iguales.

De este modo, la comparación de las masas de dos cuerpos, sobre los cuales actúa una misma fuerza, se reduce a la comparación de las aceleraciones de éstos. Tomando cierto cuerpo como patrón de masa, nosotros tenemos la posibilidad de comparar la masa de cualquier cuerpo con este patrón.

Como muestra la experiencia, en los límites de la Mecánica newtoniana una masa determinada posee las siguientes dos importantes propiedades:
1) la masa es una magnitud aditiva, es decir, la masa de un cuerpo compuesto es igual a la suma de las masas de sus partes;
2) la masa del cuerpo como tal es una magnitud constante, que no varía durante su movimiento.

Definición: **el peso de un cuerpo** es la fuerza que ejerce un planeta sobre dicho objeto colocado en un lugar cercano a su superficie, en general es el producto de la su masa *m* por la gravedad **g**, donde **g** es un vector constante con dirección hacia el centro de la tierra.

$$\mathbf{w} = m\mathbf{g} \qquad 4.2$$

Sistemas de referencia y sistemas coordenados

La posición de un cuerpo en el espacio puede ser determinada solamente con relación a algunos otros cuerpos. Esto mismo atañe también al movimiento del cuerpo, es decir, a la variación de su posición en el transcurso del tiempo. El cuerpo (o el sistema de cuerpos inmóviles entre sí) que sirve para determinar la posición del que nos interesa, se denomina **cuerpo de referencia**.

En Matemáticas la descripción de la posición de un punto se lleva a cabo mediante la utilización de los **sistemas coordenados**, que permiten de manera única establecer su localización en el espacio, existen varios sistemas coordenados como el cartesiano rectangular, cilíndrico, polar esférico, la utilización particular de cada uno de ellos depende de la facilidad con que un problema particular se simplifica en su notación, El uso de cada uno de los sistemas se dará cuando estos sean utilizados en algún tema particular donde se requieran necesariamente.

Prácticamente para la descripción del movimiento se ligan con el cuerpo de referencia algún sistema de coordenadas, por ejemplo, el cartesiano. Las coordenadas del cuerpo permiten establecer su posición en el espacio. Luego, como el movimiento tiene lugar no sólo en el espacio sino también en el tiempo, entonces para la descripción del movimiento es, además necesario contar el tiempo. Esto se hace con ayuda de relojes.

Definición: el conjunto formado por el cuerpo de referencia, las coordenadas y los relojes sincronizados entre sí, ligados con él, forman el llamado **sistema de referencia**.

El concepto de sistema de referencia es fundamental en física. La descripción del movimiento en el espacio y tiempo es posible solamente cuando ha sido escogido un sistema determinado de referencia.

Como otros cualesquiera el espacio y el tiempo son objetos físicos, pero sin embargo, inconmensurablemente más importantes y esenciales. Para estudiar las propiedades del espacio y el tiempo, es necesario observar el movimiento de los cuerpos que en ellos se encuentran. Analizando el carácter del movimiento de los cuerpos concebimos también las propiedades del espacio y el tiempo.

La **Mecánica** es la parte de la física, en la cual se estudia la forma más simple de movimiento de la materia, el movimiento mecánico, es decir, el movimiento del cuerpo en el espacio y el tiempo. El hecho de que los fenómenos mecánicos transcurren en el espacio y el tiempo se refleja en cualquier ley mecánica que contenga correlaciones espacio-tiempo, explícitas o implícitas, o sea, distancias e intervalos de tiempo.

La experiencia muestra, que mientras las velocidades de los cuerpos son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, las escalas lineales y los intervalos de tiempo permanecen invariables al pasar de un sistema de referencia a otro, es decir, no dependen de la elección del sistema de referencia. Esto encontró su expresión en la concepción newtoniana del carácter absoluto del espacio y el tiempo. La Mecánica, que estudia el movimiento de los cuerpos precisamente en estas condiciones, se denomina Clásica.

Mas, durante el paso a velocidades, comparables con la de la luz, se revela que el carácter del movimiento del cuerpo varía radicalmente. Con esto, las escalas lineales y los intervalos de tiempo ya dependen de la elección del sistema de referencia y serán diferentes en distintos sistemas. La Mecánica fundamentada en estas nociones, la denominan Relativista. Naturalmente, que la Mecánica Relativista es más general y compleja y en el caso particular de pequeñas velocidades pasa a la Clásica.

Leyes de Newton

Primera ley de newton y Sistemas inerciales de referencia

Principio de inercia. En cinemática, donde sólo se trata la descripción de los movimientos y no se toca el problema de las causas que los provocan, no hay ninguna diferencia de principio entre diferentes sistemas de referencia, y en este sentido todos ellos son equivalentes.

Totalmente de otro modo se plantea el problema en dinámica, al estudiar las leyes del movimiento. Aquí se descubre una diferencia esencial entre diferentes sistemas de referencia y las ventajas de una clase de sistemas en comparación con otras.

En principio se puede tomar cualquiera de la multitud innumerable de sistemas de referencia en el planteamiento de problemas. Sin embargo, las leyes de Mecánica tienen en diferentes sistemas de referencia, hablando en general, diferente forma y puede resultar que en un sistema arbitrario de referencia incluso fenómenos muy sencillos se hacen muy complejos. Es natural que surja el problema de la búsqueda de un sistema de referencia tal, en el cual las leyes de Mecánica sean lo más simples posibles. Evidentemente, este sería el sistema de referencia más cómodo para la descripción de los fenómenos mecánicos.

Con este fin examinemos la aceleración de un punto material con relación a cierto sistema arbitrario de referencia. ¿Cuál es la causa de esta aceleración? La experiencia muestra, que esta causa puede ser tanto la acción de algunos cuerpos determinados sobre el punto dado, como también las propiedades del mismo sistema de referencia (en realidad, en caso general, la aceleración será diferente respecto a los distintos sistemas de referencia).

Se puede, sin embargo, suponer que existe un sistema de referencia tal, en el cual la aceleración del punto material se determina por completo sólo por su interacción con otros cuerpos. Un punto material libre, no sujeto a la acción de ningún otro cuerpo se mueve rectilínea y uniformemente o, como dicen, por inercia con relación a este sistema de referencia. Tal sistema de referencia denomínase **sistema inercial**.

La afirmación de que los sistemas inerciales de referencia existen constituye el contenido de la **primera ley** de mecánica clásica, es decir, del principio de inercia de Galileo—Newton, el cual se expresa generalmente como.

Todo cuerpo permanece en su estado de reposo, o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que un agente externo lo modifique

La existencia de sistemas inerciales de referencia se confirma por la experiencia. La Tierra es considerada prácticamente como un sistema inercial, para muchos casos, esto fue establecido por los primeros experimentos que se realizaron, pero, los siguientes experimentos más exactos (el experimento de Foucault y todos sus análogos) mostraron que este sistema de referencia no es del todo inercial *, a saber: fueron descubiertas aceleraciones, la existencia de las cuales no se puede explicar por la acción de algunos cuerpos determinados. Al mismo tiempo, las observaciones de las aceleraciones de los planetas mostraron el carácter inercial del sistema heliocéntrico de referencia, ligado con el centro del Sol y con las estrellas ”inmóviles”. El carácter inercial del sistema heliocéntrico de referencia se confirma en la actualidad por todo un conjunto de experimentos.

Cualquier otro sistema de referencia que se mueva de modo uniforme y rectilíneo con relación a un sistema heliocéntrico es también inercial. En realidad, si la aceleración de un cuerpo en el sistema heliocéntrico de referencia es nula, ella es también igual a cero en cualquier otro de estos sistemas de referencia

De ese modo, existe no-uno sino una cantidad infinita de **sistemas inerciales de referencia**, que su mueven uno respecto a otro de forma rectilínea y uniforme Los sistemas de referencia que se mueven con aceleración respecto a los sistemas inerciales, se denominan no inerciales.
Consideres la figura 4.1 en la cual se muestran un sistema inercial de referencia K y otro sistema K’ que se mueve a una velocidad $\mathbf{V}_0$ medida respecto al sistema inercial K, el sistema K´ es elegido de manera que las los ejes de coordenadas x´, y´, z´ sean paralelos al los ejes x, y, z del sistema K, pero de forma que coincidan los ejes x´ y x dirigidos en la dirección de la velocidad $\mathbf{V}_0$. Tomando como origen de referencia en el tiempo el momento exacto en que coincidan los orígenes O y O’, escribiendo la relación entre los radios vectores en cada un de los sistemas para el punto A en un tiempo t

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}_0\, t \qquad 4.3$$

además se considera que

$$t = t' \qquad 4.4$$

Aquí se sobreentiende que la longitud de los segmentos y la marcha del tiempo no dependen del estado del movimiento y, por consiguiente, son iguales en ambos sistemas de referencia. La suposición sobre el carácter absoluto del espacio y el tiempo se encuentra en la propia base de las nociones de la mecánica clásica, de las nociones fundamentales en el vasto material experimental que se refiere al estudio de los movimientos a velocidades, considerablemente menores que la de la luz.

Las relaciones anteriores son conocidas como *transformaciones de Galileo* son uno de los principios más importantes de la mecánica clásica, En las coordenadas estas transformaciones tienen la forma:

$$x' = x - V_0 t, \quad y' = y,\ z' = y \qquad 4.5$$

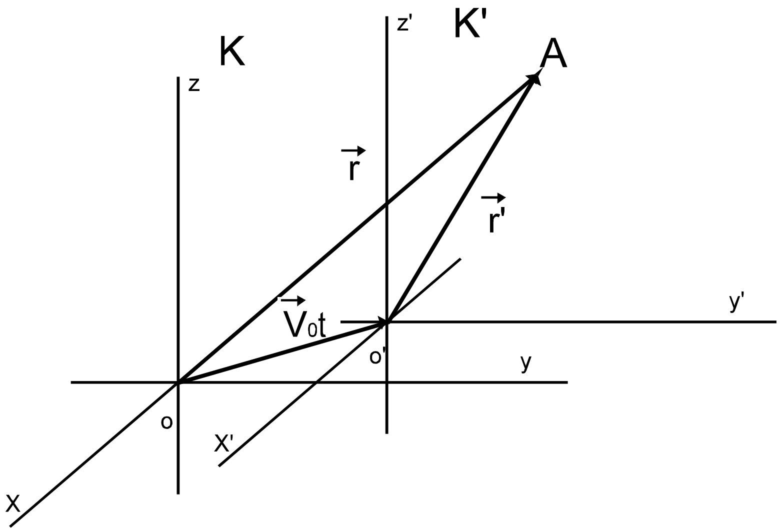


Figura 4.1. Representación gráfica de dos sistemas de referencia inerciales

diferenciando la ecuación (4.3) respecto a *t* se obtiene, encontramos la ley clásica de transformación de la velocidad del punto durante el paso de un sistema inercial de referencia a otro:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}_0 \qquad 4.6$$

si se vuelve a efectuar la derivación respecto a t se obtiene

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \qquad 4.7$$

lo que muestra que efectivamente dos sistemas que se mueven a velocidad constante constituyen sistemas inerciales.

Sobre las propiedades de simetría del tiempo y el espacio. Una particularidad importante de los sistemas inerciales de referencia es que el tiempo y el espacio poseen propiedades determinadas de simetría en relación con ellos. A saber: la experiencia confirma que en estos sistemas de referencia el tiempo es homogéneo, en tanto que el espacio es homogéneo e isotrópico.

La homogeneidad del tiempo consiste en que el transcurso de los fenómenos físicos observados (en iguales condiciones) durante diferentes intervalos de tiempo es el mismo. Con otras palabras, diferentes momentos de tiempo son equivalentes uno a otro por sus propiedades físicas.

la homogeneidad e isotropía del espacio consiste en que las propiedades del espacio son iguales en diferentes puntos (homogeneidad) y en cada punto idénticas en todas las direcciones (isotropía).

Se señala, que el espacio no es homogéneo e isotrópico en relación con los sistemas no inerciales de referencia. Esto significa, que si un cuerpo no interacciona con ningún otro, no obstante sus diferentes posiciones en el espacio y sus distintas orientaciones no son equivalentes desde un punto de vista mecánico. En caso general, esto mismo se refiere también al tiempo que será no homogéneo, es decir, sus diferentes momentos no son equivalentes. Es evidente, que estas propiedades del espacio y el tiempo causarían grandes complicaciones en la descripción de los fenómenos mecánicos. Así, por ejemplo, un cuerpo no sujeto a la acción de otros cuerpos, no podría estar en reposo: si su velocidad en cierto momento de tiempo fuera igual a cero, ya en el siguiente lapso el cuerpo empezaría a moverse en dirección determinada.

Todo lo dicho certifica con suficiente evidencia el carácter exclusivo de las propiedades de los sistemas inerciales de referencia, a causa de las cuales justamente estos sistemas deben, como regla, emplearse en el estudio de los fenómenos mecánicos.

Segunda ley de newton

Estudiando en la práctica diferentes movimientos advertimos que en los sistemas inerciales de referencia toda aceleración del cuerpo se provoca por la acción de otros cuerpos sobre él. Con esto el grado de influencia (acción) de cada uno de los cuerpos circundantes sobre el estado del movimiento del cuerpo A que nos interesa es un problema, al que en cada caso concreto puede responder sólo el experimento.

La influencia del otro cuerpo (o cuerpos) que provoca la aceleración del cuerpo A se denomina **fuerza**. Así, la causa de la aceleración de un cuerpo es la fuerza que sobre él actúa.

Una de las características más importantes de la fuerza es su procedencia material. Suponemos que en ausencia de cuerpos extraños la fuerza que actúa sobre el cuerpo que nos interesa es igual a cero. Mas si se descubre que la fuerza actúa, buscamos su origen en forma de uno u otro cuerpo concreto o de otros cuerpos.

Todas las fuerzas de las que trata la mecánica, las dividen generalmente en las fuerzas que surgen por el contacto directo de los cuerpos (fuerzas de presión, de rozamiento) y las fuerzas que surgen por intermedio de las creadas por los campos de los cuerpos en interacción (las fuerzas de gravitación, electromagnéticas). Indicando que, sin embargo, que esta división de las fuerzas tiene carácter convencional: en esencia, incluso con el contacto directo, las fuerzas de interacción también se determinan por la presencia de unos u otros campos, creados por las moléculas o los átomos de los cuerpos. De este modo, todas las fuerzas de interacción entre los cuerpos se condicionan al fin de cuentas, por los campos. El problema sobre la naturaleza de las fuerzas de interacción sale de los límites de la mecánica y se considera en otras partes de la Física.

Recordando que el experimento de la definición de la masa en el cual un resorte igualmente estirado (hecho que garantiza la igualdad de la acción del resorte o de la fuerza **F** proporcionada a los cuerpos), causa en cuerpos diferentes aceleraciones distintas, surge el siguiente problema el de determinar la fuerza de tal modo que, a pesar de la diferencia de las aceleraciones de los cuerpos en el experimento considerado, la fuerza sea una misma, si consideramos por ejemplo tres cuerpos bajo la misma fuerza se tendrá aplicando la definición de la masa ecuación

(4.1) que

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|} == \frac{a_2}{a_1} \quad y \quad \frac{m_2}{m_3} = \frac{|\mathbf{a}_3|}{|\mathbf{a}_2|} == \frac{a_3}{a_2}$$

despejando

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad y \quad m_2 a_2 = m_3 a_3$$

comparando

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = m_3 a_3$$

es evidente que si el proceso se llevara a cabo con n cuerpos diferentes bajo la misma fuerza los productos $m_i\, a_i$ serian todos iguales

.Es por lo tanto natural tomar esta magnitud ma como la definición de la fuerza, Además, teniendo en cuenta que la aceleración es un vector, consideramos también que la fuerza es un vector, cuya dirección coincide con el vector de aceleración **a**

La conclusión anterior constituye el contenido de la llamada **segunda ley de Newton** que generalmente se expresa como:

el producto de la masa de un punto material por su aceleración es proporcional a la fuerza que actúa sobre de él.

es decir

$$\alpha m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

el factor α de proporcionalidad se toma como la unidad, entonces

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \qquad 4.8$$

de esta manera las unidades de la fuerza serán

$$[\mathbf{F}] = masa\frac{longitud}{(tiempo)^2} = M\,\frac{L}{T^2}$$

en el sistema MKS

$$[\mathbf{F}] = kilogramo\frac{metro}{(segundo)^2} = kg\,\frac{m}{s^2}$$

$$= Newton = N$$

De inmediato se observa, que la segunda ley de Newton, ecuación (4.8) recibe contenido concreto sólo después de ser establecido el tipo de la función **F**. o sea, su dependencia de las magnitudes que la determinan o, como dicen, la **ley de la fuerza**. El establecimiento del tipo de la ley de fuerza es en cada caso concreto uno de los problemas fundamentales de la mecánica, en general **F** es una función de la posición del cuerpo y en ocasiones de su velocidad. más adelante se dará con detalle estas dependencias para los casos comunes de aplicación en Mecánica.

F designa realidad la fuerza resultante de un conjunto de fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Resulta cómodo presentar esta fuerza **F** como el resultado de la acción de cuerpos aislados o de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . ., $\mathbf{F}_n$ La experiencia muestra que si los cuerpos, fuentes de las fuerzas, no ejercen influencia uno sobre el otro y por eso no cambian su estado por la presencia de otros cuerpos, entonces la fuerza resultante

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_i + \cdots + \mathbf{F}_n$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza con la cual actuaría el cuerpo i-ésimo sobre el punto material dado en ausencia de otros cuerpos. Si, esto es así, se dise que las fuerzas $\mathbf{F}_1$. $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_{n,}$ se someten al **principio de superposición**. Esta afirmación se debe considerar como la generalización de factores experimentales.

Una forma de ver la segunda ley de Newton es considerar la parte izquierda de la ecuación como “el efecto” o sea la aceleración del cuerpo y la parte derecha “las causas” o fuerzas

Tercera ley de newton.

En todos los casos cuando en la práctica participan sólo dos cuerpos A y B y el cuerpo A comunica aceleración al cuerpo B. se advierte que el cuerpo B también comunica aceleración al cuerpo A, sobre la misma línea de acción. De aquí concluimos que las acciones de los cuerpos uno sobre otro tienen carácter de *interacción*. (Ver la figura 4.2)

Figura 4.2

Newton postuló la propiedad general siguiente de todas las fuerzas de interacción, o sea, la **tercera ley de Newton**

A cada acción se opone siempre una reacción igual, es decir, las acciones mutuas entre dos cuerpos son siempre iguales y están dirigidas hacia partes contrarias

las fuerzas con las que dos puntos materiales actúan uno sobre el otro, son siempre de igual módulo y están dirigidas en direcciones contrarias a lo largo de la recta que une estos puntos, es decir,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \qquad 4.9$$

Esto significa, que las fuerzas de interacción surgen siempre a pares. Ambas fuerzas están aplicadas a diferentes puntos materiales y, además, son de una misma naturaleza.

La ley (4.9) se a los sistemas de un número arbitrario de puntos materiales. Nosotros partimos del concepto de que también en este caso la interacción se reduce a las fuerzas que interaccionan a pares entre los puntos materiales.

En la tercera ley de Newton se supone que ambas fuerzas son de igual módulo en cualquier momento de tiempo, independientemente del movimiento del punto.

Esta afirmación corresponde a la idea newtoniana sobre la propagación instantánea de las interacciones, o sea, a la hipótesis que lleva el nombre de principio de largo alcance de la mecánica clásica. Según este principio, la interacción entre los cuerpos se propaga en el espacio a velocidad infinitamente grande. Con otras palabras, si se varía la posición (el estado) de un cuerpo, entonces inmediatamente se puede descubrir aunque sea una muy débil variación en los cuerpos que con él interaccionan, cualquiera que sea la distancia entre ellos.

Ahora sabemos que en realidad esto no es así, que existe una velocidad máxima finita de propagación de las interacciones, igual a la velocidad de la luz en el vacío. Por eso la tercera ley de Newton (y también la segunda) tienen determinados límites de aplicación. Sin embargo, a velocidades de los cuerpos considerablemente menores a la de la luz, con las cuales choca la mecánica clásica, ambas leyes se cumplen con muy gran exactitud. Por lo menos esto lo certifican los cálculos de las trayectorias de los planetas y de los satélites artificiales, que se realizan con exactitud «astronómica» precisamente con ayuda de las leyes de Newton.

Las leyes de Newton son las leyes fundamentales de mecánica clásica. Ellas permiten, aunque sea en principio, resolver cualquier problema mecánico; además, de ellas pueden ser deducidas todas las demás leyes de la mecánica clásica.

En correspondencia con el principio de relatividad de Galileo las leyes de mecánica son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. Esto significa, en particular, que la ecuación (4.8) tendrá la misma forma en cualquier sistema inercial de referencia. Realmente, la masa *m* de un punto material no depende como tal de la velocidad, es decir, es idéntica en todos los sistemas de referencia. Además, para los sistemas inerciales de referencia también es igual la aceleración del punto. La fuerza **F** tampoco depende de la elección del sistema de referencia, ya que ella se determina por la disposición mutua y por la velocidad del punto material con relación a los cuerpos circundantes y, según la mecánica no relativista, estas magnitudes son iguales en los diferentes sistemas inerciales de referencia.

De este modo, las tres magnitudes m, $\boldsymbol{a}$, y $\boldsymbol{F}$. que entran en la ecuación (4.8), no varían durante el paso de un sistema inercial de referencia a otro y, por consiguiente, no cambia y la misma ecuación (4.8). Con otras palabras, la ecuación $m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ es invariante respecto a las transformaciones de Galileo.

Fuerzas de la naturaleza

Para poder aplicar la segunda ley de Newton en problemas prácticos de movimientos de los cuerpos y convertir el problema a un problema puramente matemático, es necesario ante todo conocer las leyes de las fuerzas que actúan sobre la partícula, es decir, la dependencia de la fuerza de las magnitudes que la determinan. Cada una de estas leyes se obtiene, al fin y al cabo, partiendo de la elaboración de los resultados prácticos y, en esencia, siempre se apoya en la misma segunda ley en la determinación de la fuerza.

La gran variedad de fuerzas que se observan en la naturaleza pueden ser actualmente a reducidas a cuatro interacciones fundamentales, a saber, dos largo alcance, gravitatoria y electromagnética y otras de corto dos alcance a nivel nuclear interacciones fuertes e interacciones débiles. En la actualidad se realizan esfuerzos para logra la unificación de las fuerzas en una sola fuerza fundamental, ya se logró unificar en un mismo formalismo la fuerza débil y la fuerza electromagnética y se espera que en el futuro se logre la unificación.

Las fuerzas más fundamentales, que se encuentran en la base de todos los fenómenos mecánicos, son las de gravedad y las eléctricas. A continuación se enuncian las leyes producto de estas fuerzas en el aspecto más simple, o sea sin involucrar altas velocidades (no relativista)

La **fuerza de atracción de la gravedad** actúa entre dos puntos materiales. En concordancia con la ley de gravitación universal esta fuerza es proporcional al producto de las masas de los puntos m_1 y m_2, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre e]los r y está dirigida por la recta que une estos puntos:

$$\mathbf{F} = G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\,\mathbf{r} \tag{4.10}$$

donde G es la constante de gravitación y **r** es un vector unitario en la dirección que une las masas

La **fuerza de Coulomb** que actúa entre dos cargas puntuales q_1 y q_2

$$\mathbf{F} = K\frac{q_1\, q_2}{r^2}\,\mathbf{r} \tag{4.11}$$

donde r es la distancia entre las dos cargas, *K* es un coeficiente de proporcionalidad y **r** es un vector unitario que depende del sistema de unidades elegido. A diferencia de la fuerza de gravitación, la de Coulomb puede ser tanto de atracción, como de repulsión.

La ley de Coulomb deja de cumplirse exactamente si las cargas se mueven. Resulta que la interacción eléctrica de las cargas que se mueven depende de modo complejo de su movimiento. Una de las partes de esta interacción, condicionada por el movimiento, se denomina fuerza magnética (de aquí y la otra denominación de esta interacción dada, electromagnética). A velocidades bajas (no relativistas) la fuerza magnética constituye una parte pequeña despreciable de la interacción eléctrica y ella se describe con un alto grado de exactitud por la ecuación anterior

A pesar de que las interacciones de gravitación y eléctrica se encuentran en la base de toda la diversidad innumerable de los fenómenos mecánicos, el análisis de los fenómenos, en particular de los macroscópicos, resultaría muy complejo si partiéramos en todos los casos de estas interacciones fundamentales. Por eso es cómodo introducir otras leyes de fuerzas aproximadas (que en principio pueden ser obtenidas de las fuerzas fundamentales). Esto es indispensable para simplificar la parte matemática del problema hasta tal punto que sea posible resolverlo prácticamente.

Con este fin se introducen, por ejemplo, las siguientes fuerzas.

La **fuerza de gravedad homogénea** o peso

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \qquad 4.12$$

donde *m* es la masa del cuerpo, **g** es la aceleración de la fuerza de gravedad

La **fuerza elástica** o ley de Hooke, es una fuerza proporcional al desplazamiento del punto material de la posición de equilibrio y está orientada hacia esta posición:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \qquad 4.13$$

donde **r** es el radio vector que caracteriza el desplazamiento de la partícula de la posición de equilibrio; k es el coeficiente de elasticidad y siempre es positivo y depende de las propiedades «elásticas» de una u otra fuerza concreta.

Fuerza de rozamiento

La **fuerza de rozamiento de rozamiento**, es la que surge durante el deslizamiento del cuerpo dado por la superficie de otro cuerpo,

$$\mathbf{F} = \mu\mathbf{N} \qquad 4.14$$

Donde μ es el coeficiente de rozamiento de deslizamiento que depende de la naturaleza y del estado de las superficies en contacto (en particular de su rugosidad); **N** es la fuerza de la presión normal que aprieta las superficies en rozamiento una contra otra. La fuerza **F** está dirigida en sentido contrario a la dirección del movimiento del cuerpo dado en relación con el otro.

La **fuerza de resistencia de un fluido** actúa en el cuerpo durante su movimiento de translación en un gas o un líquido. Esta fuerza depende de la velocidad del cuerpo **v** respecto al medio, estando dirigida en sentido inverso al vector **v**:

$$\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v} \qquad 4.15$$

donde α es un coeficiente positivo, característico para el cuerpo y el medio dados. Este coeficiente depende, hablando en general, de la magnitud de la velocidad v, pero sin embargo, a velocidades pequeñas se puede considerar en muchos casos prácticamente constante.

Existen además, otros tipos de fuerzas como las de contacto, de adherencia de resistencia de un fluido a altas velocidades, etc.

Ecuación fundamental de dinámica

La ecuación fundamental de dinámica de un punto material es ni más ni menos que la expresión rnatemática de la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \qquad 4.16$$

siempre y cuando la masa sea una constante, también puede ser escrita de la forma

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \qquad 4.17$$

estas ecuaciones pueden escribirse en componentes, como se indica a continuación

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x \ , \quad m\frac{dv_y}{dt} = F_y \ , \quad m\frac{dv_z}{dt} = F_z \qquad 4.18$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \ , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \ , \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \qquad 4.19$$

En esencia, (4.16) ´ ó (4.17) es la ecuación diferencial del movimiento de un punto en forma vectorial. Su solución es el problema fundamental de dinámica del punto material, siendo posibles dos planteamientos opuestos del problema.

1. Encontrar la fuerza **F** que actúa sobre el punto, si se conocen la masa m del punto y la dependencia de su radio vector del tiempo **r** (t).

2. Encontrar la ley de movimiento del punto, es decir, la dependencia de su radio vector del tiempo **r** (t), si se conocen la masa m del punto, la fuerza **F** (o la fuerza $\mathbf{F}_i$) que actúa sobre él y las condiciones iniciales, o sea, la velocidad $\mathbf{v}_0$ y la posición $\mathbf{r}_0$ del punto en el momento de tiempo inicial.

En e] primer caso el problema se reduce a la diferenciación de **r** (t) conforme al tiempo, en tanto que en el segundo, a la integración de la ecuación (4.16) ó (4.17).

La solución de la ecuación (4.16) ó (4.17) se realizan en dependencia del carácter y del planteamiento del problema concreto en forma vectorial, o en coordenadas, o bien en las proyecciones sobre la tangente y la normal a la trayectoria en el punto dado.

Ejemplos concretos de la aplicación de la ecuación fundamental o ley de Newton en las soluciones de diversos problemas mecánicos se realizarán en los siguientes capítulos.

Dinámica de una partícula

El problema fundamental de la Dinámica es establecer las leyes de movimiento de los cuerpos conociendo previamente las fuerzas que actúan sobre de ellos y las condiciones iniciales.

Tal como se señaló en el capitulo II, las Leyes de Newton constituyen la base para la determinación de la ecuación de movimiento del punto.

En especial la segunda ley de Newton es la ecuación básica en la solución del problema de movimiento del punto material, o sea la expresión:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

la misma se puede escribir en componentes

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z$$

Diagrama de cuerpo libre

Para la solución de los problemas de dinámica es conveniente aislar el cuerpo sobre el que se quiere determinar su movimiento e indicar en cada caso particular las fuerzas externas que actúan directamente sobre él dicho esquema se conoce como el **diagrama de cuerpo libre**.

Por ejemplo en la figura 4.3 (a) se muestra un cuerpo colgando de un hilo que a su vez cuelga del techo, las únicas fuerzas que afectan al cuerpo directamente son su peso **W** = $m\mathbf{g}$ y la tensión **T** de la cuerda. La figura 4.3 (b) indica esquemáticamente dichas fuerzas, y la figura 4.3(c) muestra las fuerzas y el sistema de referencia, estos dos últimos dibujos constituyen el diagrama de cuerpo libre.

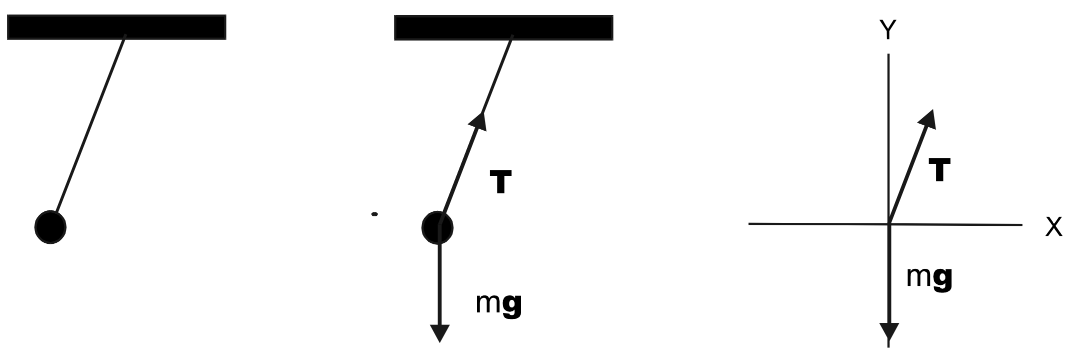


Figura 4.2 (a) Dibujo de la masa colgante, (b) Indicación de fuerzas en la masa, (c) diagrama de cuerpo libre correspondiente.

La construcción de un adecuado diagrama de cuerpo libre constituye la base principal para la correcta aplicación de las leyes de Newton y por lo tanto para la solución de los problemas de dinámica

A continuación se da una metodología para la solución de problemas de mecánica:

a) Realice un dibujo sencillo y claro del problema colocando solo los elementos relevantes al problema

b) Considere el cuerpo sobre el que se quiere determinar su movimiento realice el diagrama de cuerpo libre, esto es indique todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, no coloque componentes de las fuerzas en el diagrama, nunca dibuje las fuerzas que el cuerpo pueda ejercer sobre el exterior, además recuerde que la velocidad y la aceleración no tienen las unidades de la fuerza y nunca deben operarse con las fuerzas. Si el sistema consta de muchos cuerpos, realice el proceso para cada uno de ellos.

c) Elija un sistema de referencia adecuado a cada cuerpo y determine las componentes de las fuerzas a lo largo de cada uno de los ejes. Aplique la segunda ley de Newton en la forma de componentes.

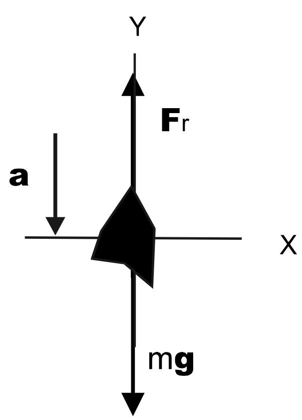
d) La segunda ley de Newton dará origen a un sistema de ecuaciones consistente, esto es en número de ecuaciones debe de corresponder al número de incógnitas, de no ser así será señal de no haber incluido a todos los elementos. Resuelva es sistema para las incógnitas del problema.

Aplicaciones de las leyes de Newton

I) Un meteorito de .25 kg de masa cae verticalmente a través de la atmósfera de la Tierra con una aceleración de 9.2 m/s^2. Además de la gravedad, una fuerza vertical retardante (debida a la resistencia aerodinámica de la atmósfera) actúa sobre el meteorito. ¿Cuál es la magnitud de esta fuerza retardante?

SOLUCION

La figura siguiente muestra el diagrama de cuerpo libre sobre el meteorito, en este caso m**g** es su peso y **F**. la fuerza retardante. Como se observa las fuerzas y el la aceleración se realizan en una dimensión por lo que la segunda ley de Newton se puede considerar como ecuación escalar



Considerando que la aceleración es en la dirección negativa de eje Y. la segunda ley de Newton conduce a la ecuación

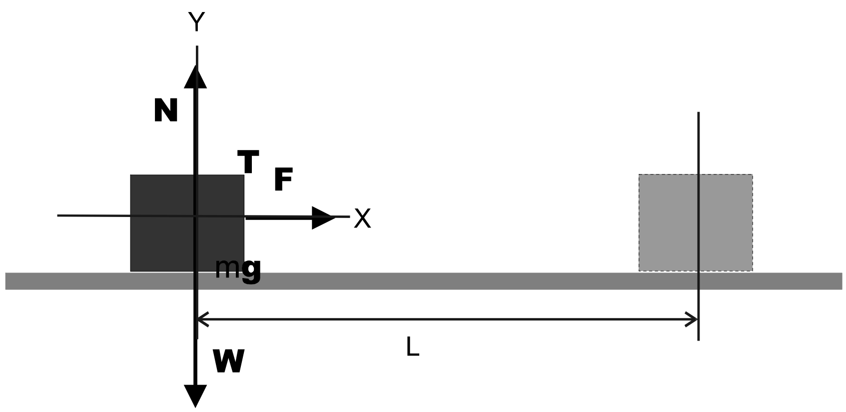
$$F_r - mg = -ma$$

de donde

$$\begin{aligned} F_r &= m(g-a) \\ &= (0.25\ kg)\left(9.8\ {}^{m}\!/_{s^2} - 9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}\right) = 0.15\ N \end{aligned}$$

II) Un bloque 5.5 kg está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción Es jalado con una fuerza horizontal constante de 3.8 N. (a) ¿Cuál es su aceleración? (b) ¿Cuánto tiempo deberá ser jalado para que su velocidad sea de 5.2 m/s^2 c) ¿Cuánto se aleja en ese tiempo?

SOLUCION



a) el sistema corresponde a un solo cuerpo, las fuerzas que actúan sobre el bloque, son el peso m**g**, la Normal **N** debida al piso y la fuerza **F**. constante, gas componentes de cada fuerza en el sistema mostrado son

m**g** =(0,-mg), **N**. =(0, N) y **F**. = (F, 0)

puesto que no hay movimiento en la dirección vertical la aceleración en esa dirección es cero, de tal manera que al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene el sistema

$$F = ma_x$$
$$N - mg = 0$$

de la primer ecuación

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{3.8\ N}{5.5\ kg} = 0.69\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

b) puesto que el movimiento es uniforme acelerado y se tiene !as condiciones iniciales X_O =0 m y V_O = 0 m/s

$$V = a_x t \quad \text{de donde} \quad t = \frac{5.2\ {}^{m}\!/\!_{s}}{0.69\ {}^{m}\!/\!_{s^2}} = 7.53\ s$$

c) la distancia recorrida en ese tiempo es

$$L = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{2}\left(0.69\ {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)(7.53\ s)^2 = 19.5\ m$$

III) Un trineo-cohete experimental de 523 kg puede ser acelerado desde el reposo hasta 1620 km/h en 1.8 s. ¿Cuál es la fuerza neta requerida?

SOLUCION

La magnitud de la aceleración puede determinarse mediante la ecuación de la cinemática

$$a = \frac{V - V_0}{t}$$

se considera que V_0 = 0 m/s, V = 1620 km/h = 450 m/s y t = 1.8 s, entonces

$$a = \frac{(450 - 0)}{1.8\ s} = 250\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

puesto que el movimiento se realiza en una dimensión la segunda ley de Newton se escribe como una ecuación escalar de donde

$$F = ma = (523\ kg)\left(250\ {}^{m}\!/\!_{s^2}\right) = 13075\ N$$

Plano inclinado sin fricción

IV) Una caja de 110 kg está siendo empujada a una velocidad Constante por la rampa de 32º(a) ¿Qué fuerza horizontal F se requiere (b) ¿Cuál es la fuerza que ejerce la rampa sobre la caja?

SOLUCION

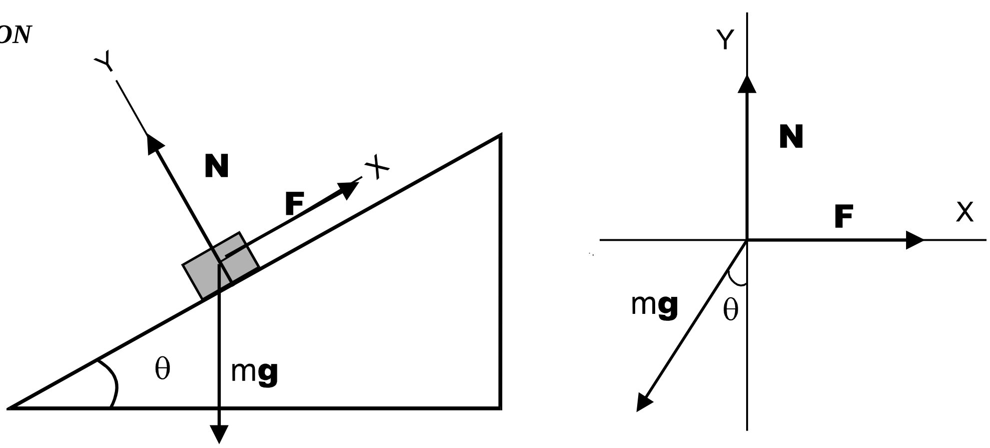


Figura. (a) Plano inclinado sin fricción, (b) diagrama de cuerpo libre del plano inclinado sin fricción.

En el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura a, N es la fuerza normal debida a la rampa, m**g** el peso del cuerpo y **F** la fuerza horizontal al piano. La figura b muestra en mismo diagrama, pero girado. Por razones geométricas el ángulo θ de inclinación del plano es el mismo que hace el peso mg con el eje Y negativo.

Tomando como base el sistema de referencia con eje X paralelo al plano inclinado, cada una de las fuerzas se representa en componentes como

$$\mathbf{N} = N(0,1) = (0, N)$$
$$m\mathbf{g} = mg(-\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta) = (-mg\operatorname{sen}\theta, -mg\cos\theta)$$

$\mathbf{F} = F(1,0) = (F,0)$

El movimiento resultante es en es en la dirección positiva del eje X, pero como es a velocidad constante, la aceleración $a_x = 0$ y como no hay movimiento en la dirección perpendicular la aceleración ay es también cero. Aplicando ahora la segunda ley de Newton en componentes se
obtienen las ecuaciones

$$F - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad 1$$

$$N - mg\cos\theta = 0 \qquad 2$$

a) de la ecuación (1) $F = mg\,\mathrm{sen}\,\theta = (110\ kg)\left(9.8\ {}^{m}/_{s^2}\right)\mathrm{sen}\left(32^0\right) = 571\ N$

b) la fuerza que ejerce la rampa es igual a la fuerza normal indicada, de la ecuación (2)

$$N = mg\cos\theta = (110\ kg)\left(9.8\ {}^{m}/_{s^2}\right)\cos\left(32^0\right) = 914\ N$$

V) Un globo de investigación con masa total M está descendiendo verticalmente con una aceleración a hacia abajo. ¿Cuánto lastre debe ser arrojado de la canastilla para dar al globo una aceleración a hacia arriba?

SOLUCION

En la figura la fuerza F representa la fuerza de sustentación debida al globo, también se representan el peso, la masa total, y la dirección de la aceleración para cada uno de los casos.

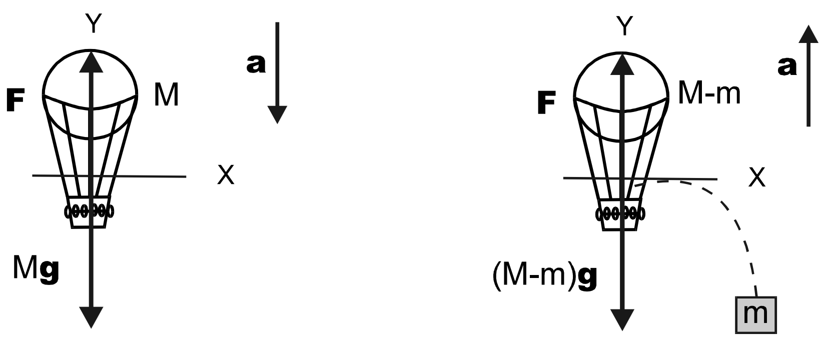


Figura (a) Globo con aceleración hacia abajo (b) Globo con aceleración hacia arriba.

La figura a muestra el globo cayendo, en tal caso la dirección de la aceleración es negativa aplicando la segunda ley de Newton

$$F - Mg = -Ma \qquad 1$$

para la figura b la aceleración es positiva, entonces

$$F - (M - m)g = (M - m)a \qquad 2$$

de la primer ecuación $F = M(g - a)$

substituyendo en la segunda ecuación $M(g - a) - (M - m)g = (M - m)a$

finalmente despejando a m de la relación anterior

$$m = \frac{2Ma}{a + g}$$

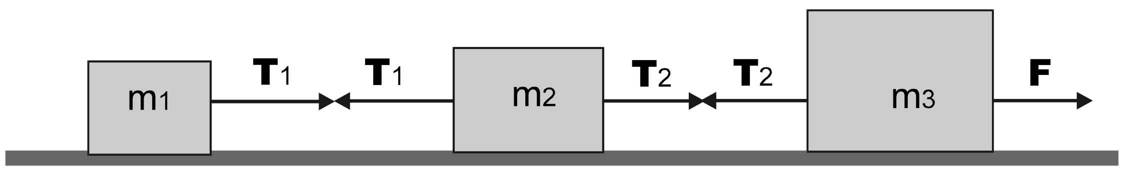
VI) Tres bloques están unidos están unidos y son jalados por hacia la derecha con una fuerza F= 6 N. Si m_1 = 1. kg, m_2 = 2. kg y m_3 = 3. kg, calcule (a) la aceleración del sistema y (b) las tensiones en las cuerdas

SOLUCION

a) En el esquema mostrado se indican las tensiones $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y la fuerza **F** y como actúan sobre cada cuerpo, hay que recordar en este caso la tercera ley de Newton de acción-reacción para colocar correctamente la di reacción de las tensión es en cada cuerpo .

Son omitidas las respectivas fuerzas normales del piso con cada uno de los cuerpos, debido a que el movimiento se realiza en la dirección horizontal y resultan irrelevantes en este caso carente de fricción.

El sistema consta de tres cuerpos que mueven a la misma aceleración por estar unidos a una cuerda inextensible, para cada masa se obtiene a continuación su ecuación de movimiento



Ecuación para la masa m_1

$$T_1 = m_1 a \qquad 1$$

Ecuación para la masa m_2

$$T_2 - T_1 = m_2 a \qquad 2$$

Ecuación para la masa m_3

$$F - T_2 = m_3 a \qquad 3$$

sumando las tres ecuaciones anteriores se obtiene que

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

de donde

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{6\ N}{(1+2+3)kg} = 1\ m/s^2$$

b) las tensiones T_1 y T_2 se obtiene respectivamente despejándolas de las ecuaciones (1) y (2)

$$T_1 = m_1 a = (1\ kg)\left(1\ m/s^2\right) = 1\ N$$

$$T_2 = m_2 a + T_1 = (2\ kg)\left(1\ m/s^2\right) + 1\ N = 3\ N$$

Fuerzas de fricción o rozamiento y coeficientes de fricción estática y cinética

Cuando se quiere mover un cuerpo sobre una superficie o a través de un medio viscoso, como el aire o el agua, hay una resistencia al movimiento debido a la interacción del cuerpo con sus alrededores. Dicha resistencia recibe el nombre de *fuerza de fricción*. El origen de las fuerzas de fricción se encuentra en el ámbito molecular, por ejemplo en el caso de deslizamiento entre superficies en contacto, estas distan mucho de ser superficies perfectamente pulidas, por lo que al tratar de mover una sobre otra, se crean pequeñísimos agarres llamados soldaduras que se rompen y vuelven a formarse al existir movimiento relativo entre las superficie.

Estas fuerzas son muy importantes en nuestras vidas cotidianas, mediante ellas se puede explicar el desgaste que sufren las piezas de cualquier maquinaria, el cual trata de ser reducido al máximo mediante el uso de lubricantes. La erosión provocada por el viento o el agua también se debe a la existencia de fricción. Sin embargo si no existiese fricción nos sería imposible poder caminar, sostener cualquier objeto con nuestras manos, desplazarnos en automóviles, escribir en el pizarrón, o sobre una hoja de papel

Si bien los detalles de la fricción son bastante complejos en un contexto atómico, a fin de cuentas implican a la fuerza electrostática entre átomos o moléculas, Experimentos a escala macroscópica pueden dar en cada caso particular una expresión para la fuerza de fricción.

La determinación de las fuerzas de fricción entre superficies se puede realizar mediante el experimento siguiente: un bloque que se coloca sobre una mesa horizontal, como se muestra en la figura 4.3 (a), se aplica una fuerza horizontal externa **F** de izquierda a la derecha, el bloque, el cual permanecerá estacionario si **F** no es suficientemente grande. La fuerza que se contrapone a **F** y evita que el bloque se mueva actúa de izquierda a derecha y es precisamente la fuerza de fricción **f**, Mientras la fuerza **F** sea menor que **f**, el bloque no se pondrá en movimiento, aún en el caso de que **F** =. **f** el bloque permanecerá estacionario, llamamos a esta fuerza de fricción la ***fuerza de fricción estática***, $\mathbf{f}_s$. Si la magnitud de **F** continua incrementándose como en la figura 4.3 (b), en algún momento el bloque se deslizará. Cuando el bloque está a punto de deslizarse, $\mathbf{f}_s$ es un máximo, si **F** supera $\mathbf{f}_{s\ max}$, el bloque se moverá y acelerará hacia la derecha. Cuando está en movimiento, la fuerza fricción **f** será menor que $\mathbf{f}_{s\ max}$. Cuando el bloque está en movimiento, la fuerza de fricción recibe el nombre de ***fuerza de fricción cinética***, $\mathbf{f}_k$. Si $\mathbf{F}= \mathbf{f}_k$ el bloque se moverá hacia la derecha con velocidad constante. Si finalmente se elimina la fuerza
aplicada **F**, entonces la fuerza de fricción **f** actuará hacia la izquierda desacelerando al bloque hasta llevarlo al reposo.

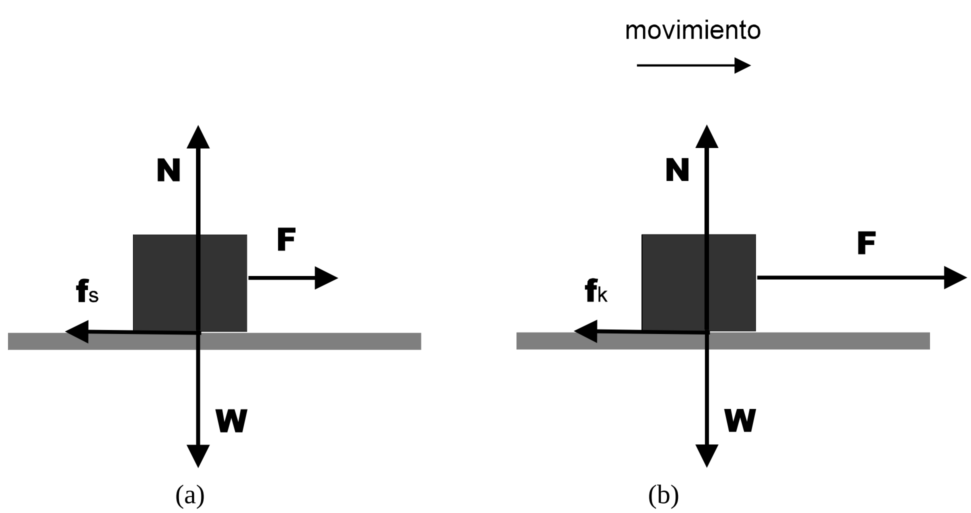


Figura 4.3 (a) Objeto sobre superficie rugosa sin movimiento, (b) Objeto moviéndose en superficie rugosa.

Experimentalmente se encuentra que, hasta una buena aproximación, que tanto $\mathbf{f}_s$ y $\mathbf{f}_k$ son proporcionales a la Fuerza normal que actúa sobre el bloque. Las observaciones experimentales pueden resumirse con las siguientes leyes de fricción empíricas:

a) La dirección de la fuerza de fricción estática entre cualesquiera dos superficies en contacto se oponen a la dirección de cualquier fuerza aplicada y puede tener valores en magnitud dados por

$$f = \mu_s N \qquad 4.20$$

En donde la constante adimensional μ_s recibe el nombre de *coeficiente de fricción estática,*. La igualdad en la ecuación 4.1 se cumple cuando el bloque está a punto de deslizarse, es decir, cuando $f_s = f_{s\ max} = \mu_s N$. La desigualdad se cumple cuando la fuerza aplicada es menor que este valor.

2 La dirección de la fuerza de la fricción cinética que actúa sobre un objeto es opuesta a la dirección de su movimiento y está dada por

$$f = \mu_k N \qquad 4.21$$

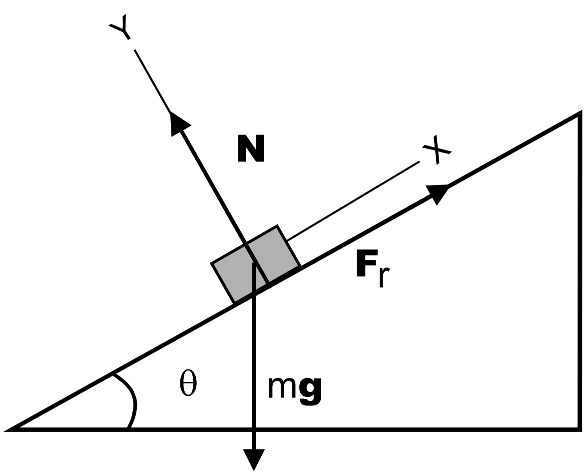
En donde la constante adimensional μ_k recibe el nombre de *coeficiente de fricción cinética,*.

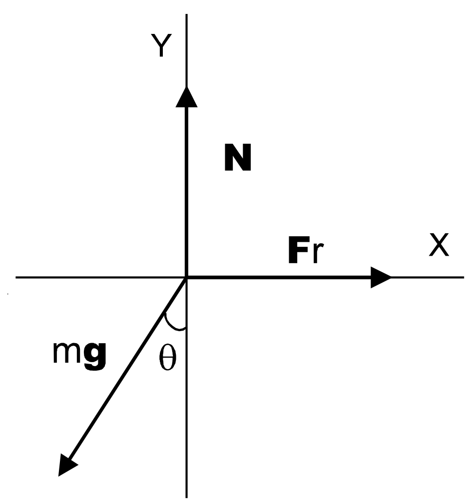
3. Los valores de μ_s y μ_k, dependen de la naturaleza de las superficies, por lo general se cumple que $\mu_k < \mu_s$,

4 Los coeficientes de fricción son casi independientes del área de contacto entre las superficies.

Plano inclinado con fricción.

Un método sencillo para determinar los coeficientes de fricción estático y cinético es utilizar un plano inclinado móvil. El cuerpo en el cual es colocado como muestra la figura siguiente





(a) (b)

Figura 4.4. (a) Plano inclinado con fricción, (b) diagrama de cuerpo libre del plano inclinado con fricción.

Las únicas fuerzas involucradas en el problema es el peso m**g**, la normal **N** y la fuerza de fricción **F**r. La determinación del coeficiente de fricción estática se realiza de la siguiente manera, el ángulo de inclinación del plano es incrementado hasta un valor θ_0 en el cual el cuerpo comienza a deslizarse, en estas condiciones extremas el cuerpo no tiene aceleración en la dirección paralela al plano, por lo tanto de acuerdo al sistema de referencia mostrado la segunda ley de Newton conduce al sistema de ecuaciones

$$Fr - mg\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = 0 \qquad 1$$

$$N - mg\cos\theta_0 = 0 \qquad 2$$

además se considera la ecuación

$$Fr = \mu_s N \qquad 3$$

de la ecuación 1 $Fr = mg\,\mathrm{sen}\,\theta_0$

análogamente de la ecuación 2 $N = mg\cos\theta_0$

substituyendo en la ecuación 3 $mg\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = \mu_s mg\cos\theta_0$

despejando μ_s

$$\mu_s = \mathrm{tg}\,\theta_0$$

El coeficiente de fricción cinética se puede determinar con el mismo arreglo del plano inclinado existiendo dos posibilidades que a continuación se desarrollan

a) si el ángulo de inclinación θ es adecuadamente menor que θ_0 de tal manera que el bloque deslice a velocidad constante, entonces su aceleración también es cero como en el caso estático, las ecuaciones 1 y 2 son las mismas y la ecuación 3 cambia por $Fr = \mu_k N$ entonces μ_k es igual a

$$\mu_k = \mathrm{tg}\,\theta$$

donde $\theta < \theta_0$

La otra posibilidad es que el ángulo $\theta > \theta_0$ entonces las fuerzas que afectan al cuerpo siguen siendo su peso m**g**, la normal **N** y la fuerza de fricción dinámica **F**r, sin embargo ahora el cuerpo deslizará hacia abajo con una aceleración **a** paralela al plano. Utilizando el mismo sistema de referencia las ecuaciones de movimiento en componentes son

$$Fr - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = -ma \qquad 4$$

$$N - mg\cos\theta = 0 \qquad 5$$

con la ecuación auxiliar

$$Fr = \mu_k N \qquad 6$$

de la ecuación de la ecuación 1 $Fr = (mg\,\mathrm{sen}\,\theta - a)$,

despejando N de la ecuación 2 $N = mg\cos\theta$

substituyendo en la ecuación 3 $m(g\,\mathrm{sen}\,\theta - a) = \mu_s mg\cos\theta$

entonces μ_K

$$\mu_k = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta - a}{g\cos\theta}$$

Aplicaciones

VII) El coeficiente de fricción estática entre las llantas de un automóvil y una carretera seca es de 0.62. La masa del automóvil es de 1500 Kg ¿Cuál es la fuerza de frenado máxima obtenible a) sobre una carretera a nivel y b) sobre una bajada de 8.6°?

SOLUCION

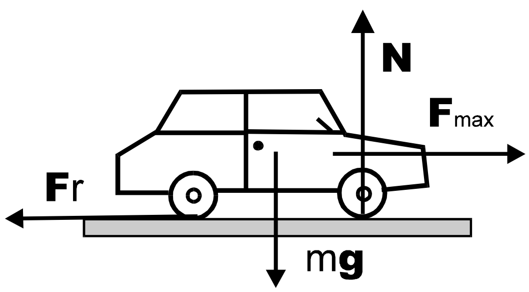


Figura a

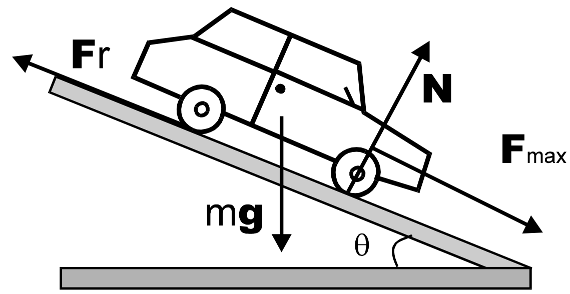


Figura b

La figura anterior muestra la situación para movimiento en superficie plana y en superficie inclinada, en ambos casos las fuerzas indicadas son la norma **N,** el peso m**g**, la fuerza de fricción **F**r, y la fuerza máxima de frenado del automóvil $\mathbf{F}_{max}$.

a) El diagrama de cuerpo libre para la figura a se muestra en figura c

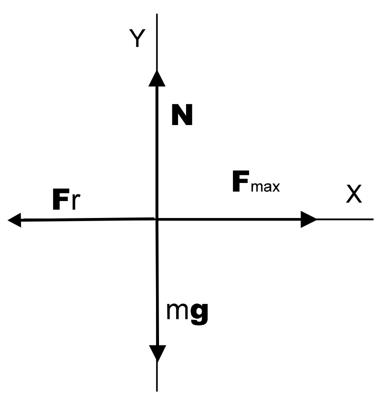


Figura c

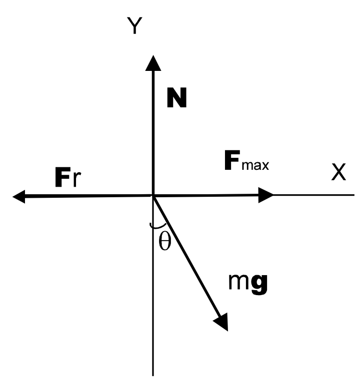


Figura d

Donde de acuerdo al sistema de referencia la aceleración se considera negativa (desaceleración). las ecuaciones de movimiento en componentes junto con la ecuación auxiliar son

$$-Fr + F_{max} = -ma \quad 1$$

$$N - mg = 0 \quad 2$$

$$Fr = \mu_s N \quad 3$$

de la ecuación de la ecuación 2 $N = mg$

así pues $Fr = \mu_s mg$

despejando de la ecuación 1 a F_{max}

$$F_{max} = Fr - ma = \mu_s mg - ma$$

la fuerza máxima de frenado se obtiene cuando a=0, entonces

$$F_{max} = \mu_s mg = (0.62)(1500\,kg)(9.8\,{}^{m}\!/\!_{s^2}) = 9114\ N$$

b) considerando ahora el diagrama de cuerpo libre de la figura d y la aceleración negativa las ecuaciones de movimiento y auxiliar son

$$-Fr + F_{max} + mg\operatorname{sen}\theta = -ma \qquad 4$$

$$N - mg\cos\theta = 0 \qquad 5$$

$$Fr = \mu_s N \qquad 6$$

de la ecuación de la ecuación 2 $N = mg\cos\theta$

entonces $Fr = \mu_s mg\cos\theta$

despejando de la ecuación 1 a F_{max}

$$F_{max} = Fr - mg\operatorname{sen}\theta - ma = \mu_s mg - mg\operatorname{sen}\theta - ma = mg(\mu_s\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) - ma$$

nuevamente la fuerza máxima de frenado se obtiene cuando a=0, entonces

$$F_{max} = mg(\mu_s\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) = (1500\ kg)\left(9.8\,{}^{m}\!/\!_{s^2}\right)(0.62\cos 8.6 - \operatorname{sen} 8.6) = 6813\,N$$

VIII) Un estudiante desea determinar los coeficientes de fricción estática y cinética entre una caja y un tablón. Coloca la caja sobre el tablón y gradualmente eleva un extremo del tabla. Cuando el ángulo de inclinación respecto a la horizontal alcanza 28°, la caja comienza a deslizarse y desciende 2.53 m por el tablón en 3.92 s. Halle los coeficientes de fricción.

SOLUCION

El experimento que realiza el estudiante corresponde exactamente al método descrito en la parte del *plano inclinado*, por lo tanto se utilizan directamente los resultados ahí obtenidos.

a) $\mu_s = \operatorname{tg}\theta_0 = \operatorname{tg} 28 = 0.53$

b) Como el movimiento es uniformemente acelerado con posición y velocidad inicial cero la ecuación de la cinemática $x = \frac{1}{2}a\,t^2$ se despeja la aceleración

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2(2.53\,m)}{(3.92)^2} = 0.33\,{}^{m}\!/\!_{s^2}$$

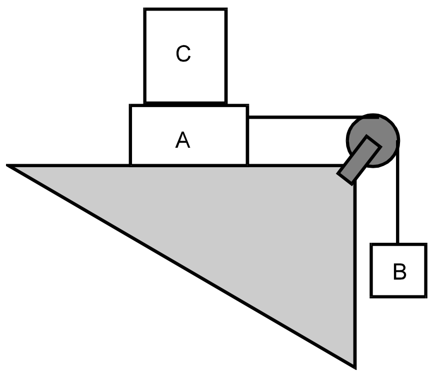
$$\mu_k = \frac{g\operatorname{sen}\theta - a}{g\cos\theta} = \frac{\left(9.8\,{}^{m}\!/\!_{s}\right)\operatorname{sen} 28 - 0.33\,{}^{m}\!/\!_{s^2}}{\left(9.8\,{}^{m}\!/\!_{s}\right)\cos 28} = 0.44$$

Poleas, problemas diversos

A continuación se presentan problemas donde se involucran cuerpos conectados por cuerdas mediante poleas, en los casos aquí expuestos las poleas se consideran pequeñas y sin masa y por lo tanto su función es servir de guía a las cuerdas. Posteriormente en el tema de dinámica del cuerpo rígido, se incluirá ejemplos donde el efecto de las poleas no puede considerarse como despreciable.

EJEMPLOS

IX) En la figura, A es un bloque de 4.4 kg y B es un bloque de 2.6 kg. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre A y la mesa son respectivamente 0.18 y 0.15. (a) Determine la masa mínima del bloque C que debe colocarse sobre A para evitar que se deslice. (b) El bloque C es levantado súbitamente ¿Cuál es la aceleración del bloque A?

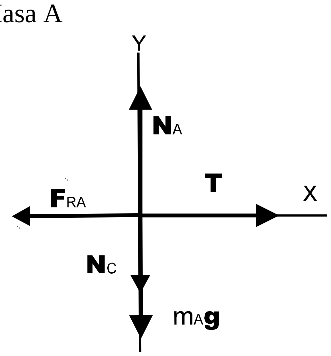


Figura

SOLUCION

Los diagramas de cuerpo libre para cada una de las masas y sus respectivas ecuaciones de movimiento en componentes son

Masa A

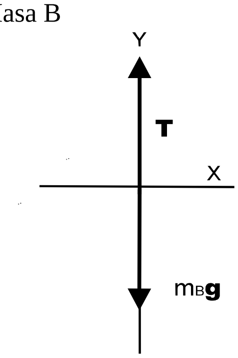


$$-F_{RA}+T=m_A a \qquad 1$$

$$N_A - N_C - m_A g = 0 \qquad 2$$

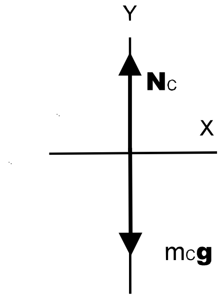
$$F_{RA} = \mu N_A \qquad 3$$

Masa B



$$T - m_B g = -m_B a \qquad 4$$

Masa C



$$N_C - m_C g = 0 \qquad 5$$

De la ecuación 5 $N_C - = m_C g$

Despejando de la ecuación 2 a N_A $N_A = N_C + m_A g = m_C g + m_A g = g(m_C + m_A)$

Entonces $F_{RA} = \mu N_A = \mu g(m_A + m_B)$ 6

Cambiando de signo a la ecuación 4 $-T + m_B g = m_B a$ y sumando a la ecuación 1, se obtiene $-F_{RA} + m_B g = (m_A + m_B)a$

O utilizando el resultado dado en la ecuación 6 anterior

$$-\mu g(m_A + m_C) + m_B g = (m_A + m_B)a \qquad 7$$

a) si en la ecuación anterior se considera que actúa la fricción estática, $\mu = \mu_S$ y $a = 0$

$$-\mu_s g(m_A + m_C) + m_B g = 0$$

despejando la masa C

$$m_C = \frac{m_B}{\mu_s} - m_A = \frac{2.6\,kg}{0.18} - 4.4\,kg = 10.0\,kg$$

b) En condiciones de movimiento se tendrá $\mu = \mu_k$ y $a \neq 0$, ahora si el bloque C es retirado entonces N_C =0 y por lo tanto la ecuación 6 se transforma en

$$F_{RA} = \mu_k N_A = \mu_k g m_A$$

por lo que la ecuación 7 se reduce a

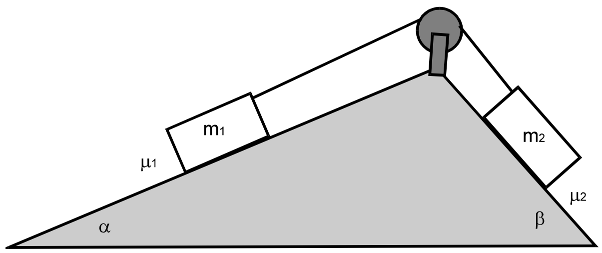
$$-\mu_k g m_A + m_B g = (m_A + m_B)a$$

Despejando a la aceleración

$$a = \frac{g(m_B - \mu_k m_A)}{m_A + m_B}$$

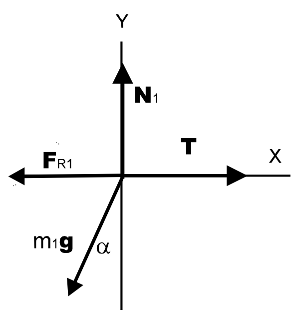
$$= \frac{(9.8\,{}^{m}\!/_{s^2})(2.6\,kg - (0.15)\,4.4\,kg)}{4.4\,kg - 2.6\,kg} = 2.72\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

X) Dos bloque de masas m_1=2.5 kg y m_2 =3 kg se encuentran sobre planos inclinados como muestra la figura, los ángulos de inclinación son $\alpha = 30^0$ $\beta = 60^0$ y los coeficientes de fricción cinética μ_1= 0.15, μ_2=0.2, ambos bloque se encuentran sujetos mediante una cuerda que pasa a través de una polea carente de masa, determine la aceleración del sistema

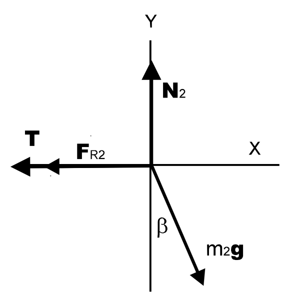


SOLUCION

Cada uno de los cuerpos se considera independiente. Los diagramas de cuerpo libre y las respectivas ecuaciones de movimiento se obtienen a continuación, además por estar unidos los cuerpos tendrán la misma aceleración la cual se considera a la derecha



Masa 1



Masa 2

$$-F_{R1} - m_1 g \operatorname{sen}\alpha + T = m_1 a \qquad 1$$
$$N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0 \qquad 2$$
$$F_{R1} = \mu_1 N_1 \qquad 3$$
$$-F_{R2} - T + m_2 g \operatorname{sen}\alpha = m_2 a \qquad 4$$
$$N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0 \qquad 5$$
$$F_{R2} = \mu_2 N_2 \qquad 6$$

de la ecuación 2 y 3 es fácil ver que $F_{R1} = \mu_1 N = \mu_1 m_1 g \cos\alpha$

análogamente para las ecuaciones 5 y 6 $F_{R2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cos\beta$

sumando las ecuaciones 1 y 4 y utilizando los resultados anteriores

$$-\mu_1 m_1 g \cos\alpha - m_1 g \operatorname{sen}\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\beta + m_2 g \operatorname{sen}\beta = (m_1 + m_2)a$$

despejando de la relación anterior la aceleración

$$a = \frac{-\mu_1 m_1 g \cos\alpha - m_1 g \operatorname{sen}\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\beta + m_2 g \operatorname{sen}\beta}{m_1 + m_2}$$

evaluando la expresión con los datos proporcionados se obtiene $a = 1.28 \, {}^{m}\!/_{s^2}$

despejando de la ecuación 1 la tensión en la cuerda

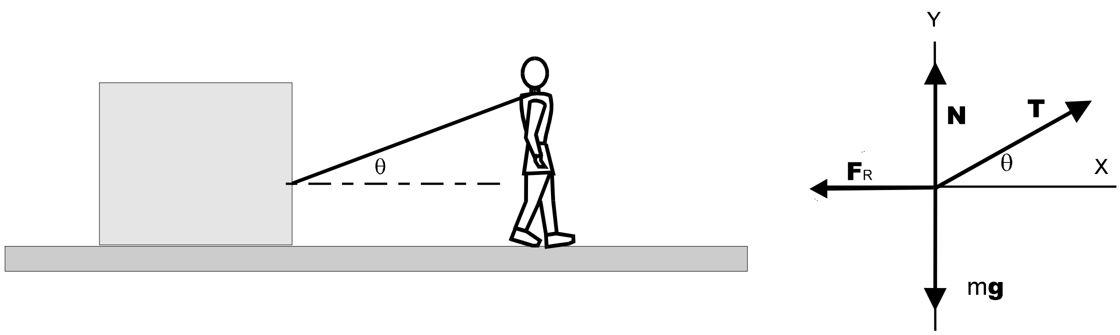
$$T = m_1 a + F_{R1} + m_1 g \operatorname{sen}\alpha = m_1 a + \mu_1 m_1 g \cos\alpha + m_1 g \operatorname{sen}\alpha$$
$$= m_1 (a + \mu_1 g \cos\alpha + g \operatorname{sen}\alpha)$$

Evaluando finalmente la expresión anterior $T = 18.63 \ N$

XI) Un obrero arrastra un caja de 150 lb por un piso jalando de ella por medio de una cuerda inclinada a 17° con respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción estática es de 0.52 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.35 a) ¿Qué tensión se requiere en la cuerda para hacer que la caja comience a moverse? b) ¿Cuál es la aceleración inicial de la caja?

SOLUCION

La figura siguiente muestra la situación y el diagrama de cuerpo libre correspondiente



Las ecuaciones de movimiento en componentes del problema junto con su ecuación auxiliar se escriben a continuación

$$-F_R + T\cos\theta = ma \qquad 1$$
$$N - mg + T\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad 2$$
$$F_R = \mu N \qquad 3$$

a) Para este caso en que el cuerpo comienza a moverse $\mu = \mu_S$ y $a = 0$

Entonces $N = mg - T\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $F_R = \mu_s(mg - T\,\mathrm{sen}\,\theta)$

Substituyendo en la ecuación 1

$$-\mu_s(mg - T\,\mathrm{sen}\,\theta) + T\cos\theta = 0$$

despejando la tensión

$$T = -\frac{\mu_s mg}{\mu_s\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta} = \frac{0.52(150\ lb)}{0.52\,\mathrm{sen}\,17^0 + \cos 17^0} = 70.38\,lb$$

b) En condiciones iniciales de movimiento se tendrá que $\mu = \mu_k$ y $a \neq 0$

despenado a la aceleración de la ecuación 1

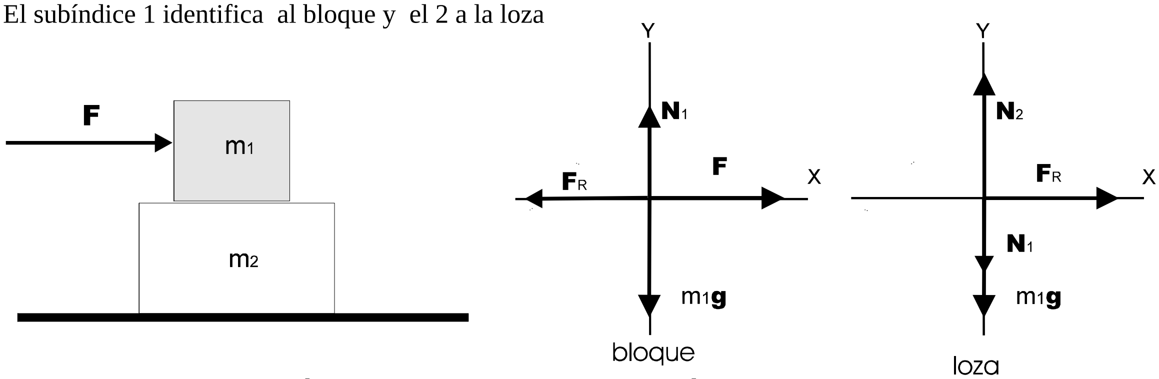
$$a = -\frac{-\mu_k(mg - T\,\mathrm{sen}\,\theta) + T\cos\theta}{m} = \frac{-\mu_k mg + T(\mu_k\,\mathrm{sen}\,\theta + T\cos\theta)}{m}$$

$$a = -\frac{-0.35(150\ lb) + (70.38\ lb)\left[0.35\,\mathrm{sen}\,17^0 + \cos 17^0\right]}{150/32\ slug} = 4.69\ ft/s^2$$

XII) Una loza de masa 40 kg está sobre un suelo sin fricción. Un bloque de 10 kg se coloca encima de la loza. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la loza es de 0.6 y el de fricción cinética de 0.4. Al bloque de 10 kg se le aplica una fuerza de 100 N ¿Cuáles son las aceleraciones de bloque y la loza?

SOLUCION

La figura muestra el problema así como los respectivos diagramas de cuerpo libre para cada uno de los cuerpos. El subíndice 1 identifica al bloque y el 2 a la loza



Las respectivas ecuaciones de Newton en componentes para cada cuerpo son

Bloque		Loza	
$-F_R + F = m_1 a_1$	1	$F_R = m_2 a_2$	4
$N_1 - m_1 g = 0$	2	$N_2 - N_1 - m_2 g = 0$	5
$F_R = \mu N_1$	3		

de la ecuación 2 $N_1 = m_1 g$

entonces la fuerza de fricción estática $\mathbf{F}_R$ entre los bloques es en magnitud

$$F_R = \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g = (0.6)(10\ kg)\left(9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}\right) = 58.8\ N$$

Lo cual es menor a 100 N, por lo tanto los bloques pueden deslizar uno sobre otro, en tal caso, la fuerza de fricción pasa a ser la dinámica

$$F_R = \mu_k N_1 = \mu_k m_1 g = (0.4)(10\ kg)\left(9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}\right) = 39.2\ N$$

la aceleración del bloque se obtiene despejando de la ecuación 1

$$a_1 = \frac{F - F_R}{m_1} = \frac{(100 - 39.2)}{10\ kg} = 6.08\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

y la aceleración 2 de la ecuación 4

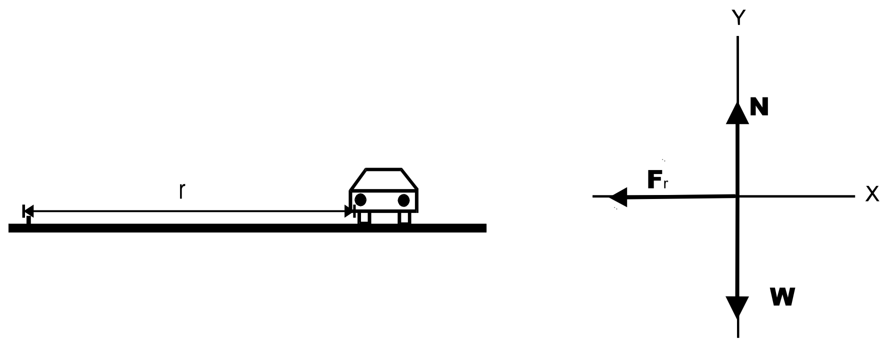
$$a_2 = \frac{F_R}{m_2} = \frac{39.2\ N}{40\ kg} = 0.98\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

Movimiento circular y fuerza centrípeta

XIII) Un auto de 10.7 KN de peso, viaja a 13.4 m/s intenta tomar una curva no peraltada con un radio de 61 m a) ¿Qué fuerza de fricción se requiere para mantener el auto en su trayectoria circular? b) ¿Qué coeficiente de fricción mínimo se requiere entre las llantas y la carretera?

SOLUCION

En el esquema siguiente se muestra la situación del automóvil al tomar la curva no peraltada y el diagrama de cuerpo libre



En el caso de un cuerpo que se mueve en una trayectoria circular, inmediatamente aparece la aceleración centrípeta $a_C = v^2/r$, por lo que las ecuaciones de movimiento de acuerdo al sistema de referencia mostrado son

$$-F_R = -ma_C = -m\frac{v^2}{r} \qquad 1$$

$$N - W = 0 \qquad 2$$

$$F_R = \mu_s N \qquad 3$$

a) La masa se obtiene de la expresión $m = \dfrac{W}{g} = \dfrac{10.7\,x10^3\,kN}{9.8\,m/s^2} = 1091.8\,kg$

La fuerza de fricción F_R calcula directamente de la ecuación 1

$$F_R = \frac{(1091.8\ kg)(13.4\,m/s)^2}{61} = 3214\ N$$

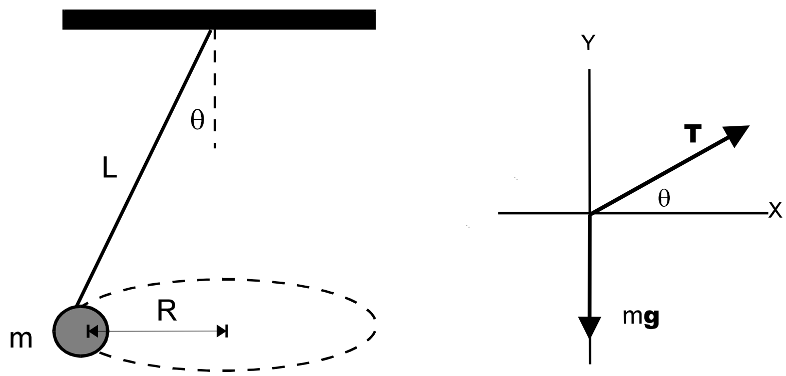
b) de la ecuación 2 $N = W$ substituyendo en la ecuación 3 $F_R = \mu_s W$, de donde el coeficiente de fricción estático mínimo para que el auto no patine es

$$\mu_s = \frac{F_R}{W} = \frac{3214\ N}{10.7\ x\,10^3\ N} = 0.300$$

XIV) Un péndulo cónico consta de un guijarro de 53 atado a un cordel de 1.4 m. El guijarro gira en un círculo de 25 cm de radio. (a) ¿Cuál es la velocidad del guijarro? (b) ¿Cuál es su aceleración? (c) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

SOLUCION

En un sistema de referencia mostrado en la figura la aceleración centrípeta está dirigida en el sentido positivo del eje X, y tiene una magnitud $a_c = \frac{v^2}{R}$



La aplicación de las leyes de Newton en componentes conduce al sistema de ecuaciones

$$T \operatorname{sen}\theta = ma_C = m\frac{v^2}{R} \qquad 1$$

$$T\cos\theta - mg = 0 \qquad 2$$

El ángulo θ mostrado en la figura se puede calcular considerando el triángulo formado por la cuerda, el radio y la vertical trazada desde el punto de apoyo

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{R}{L} = \operatorname{arcsen}\frac{0.25\,m}{1.4\,m}$$

c) De la ecuación 2 es fácil despejar la magnitud de **T**

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{\left(9.8\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)(0.053\,kg)}{\cos 10.28} = 0.528\,N$$

b) despejando la aceleración de la ecuación 1

$$a_C = \frac{T\operatorname{sen}\theta}{m} = \frac{(0.523\,N)\operatorname{sen}10.28}{0.053\,kg} = 1.77\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

a) la velocidad del guijarro se obtiene despejando directamente de la definición de la aceleración centrípeta

$$v = \sqrt{Ra_c} = \sqrt{(0.25\,m)\left(1.77\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)} = 0.66\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

CAPITULO V

Trabajo, energía y potencia

Concepto de trabajo

Trabajo hecho por una fuerza constante

La palabra trabajo se aplica en la vida corriente, a cualquier forma de actividad que requiera el ejercicio de un esfuerzo muscular o intelectual; sin embargo, en física dicho término se utiliza en un sentido muy restringido. La figura 6.1 representa un cuerpo que se mueve en dirección horizontal, que se toma como el eje X. Sobre el cuerpo se ejerce una fuerza **F** constante que forma un ángulo θ con la dirección del movimiento. El trabajo W realizado por la fuerza **F**. constante cuando el cuerpo se ha desplazado una distancia X, se define como el producto del desplazamiento, por la componente de la fuerza en la dirección del movimiento.

$$\boxed{W = FX\cos\theta} \qquad 5.1$$

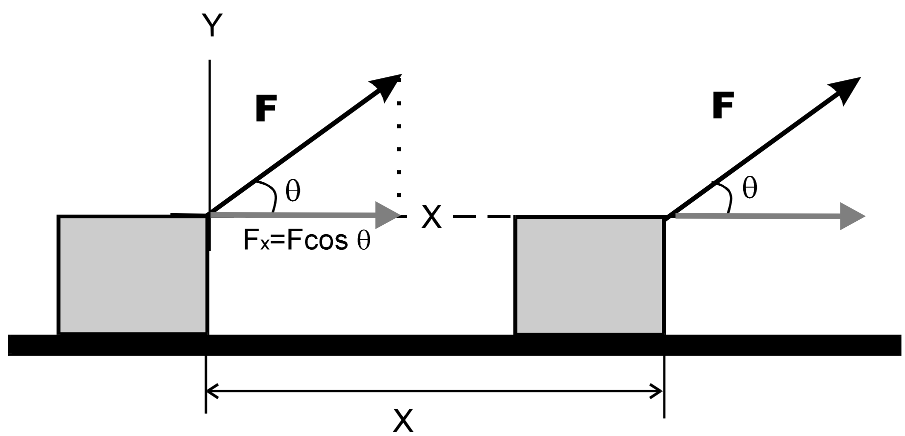


Figura 5.1. Trabajo realizado por una fuerza constante.

Trabajo hecho por una fuerza variable

En el caso más general, tanto la dirección de la fuerza como su magnitud varían durante el movimiento, Si se considera una fuerza que actúa en una dimensión esto es **F** = **F**(x), el trabajo se puede calcular como se indica a continuación:

a) El desplazamiento total se divide en pequeños intervalos ΔX_i y se considera que la fuerza F $=F_i$ es aproximadamente constante y actuando también a un ángulo y θ_i constante en dicho intervalo.

b) se calcula cada uno de los trabajos individuales. $W_i = F_i \Delta X_i \cos\theta_i$

c) Finalmente se realiza la suma de todos los trabajos individuales para dar el trabajo total

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta X \cos\theta_i$$

Sí el número de intervalos crece, lo cual es equivalente a hacer que el intervalo ΔX_i se haga cada vez más pequeño, la sumatoria anterior se convertirá en $W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \lim_{\Delta X_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta X_i \cos\theta_i$ lo cual se escribe como la integral

$$\boxed{W == \int_{x_1}^{x_2} F \cos\theta \, dx} \qquad 5.2$$

Para el caso particular en el cual θ=0, el trabajo en una dimensión es geométricamente igual a el área bajo la curva de la función $F_x = F_x(x)$ entre el intervalo [x1,x2] , tal como muestra la figura 5.2

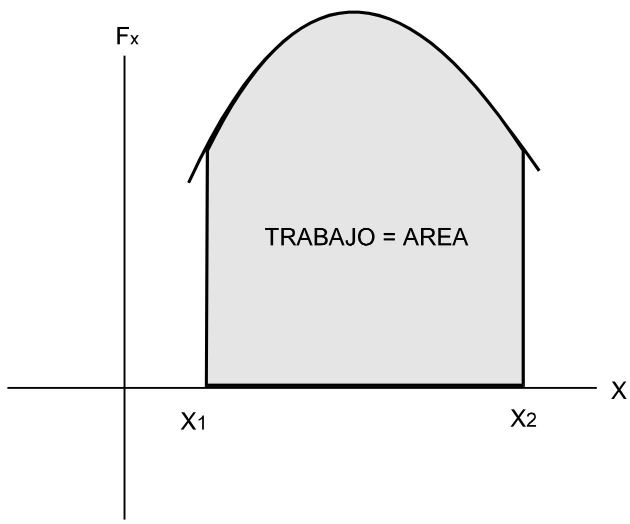


Figura 5.2. Interpretación del trabajo hecho por una fuerza en una dimensión como área bajo la curva.

Recordando que tanto la fuerza **F** como el desplazamiento diferencial d**r** son cantidades vectoriales, la ecuación 5.2 se puede escribir como

$$\boxed{W == \int_{x_1}^{x_2} F \cos\theta \, dr} \qquad 5.3$$

Haciendo uso de la definición del producto punto de vectores, la expresión anterior se expresa de la siguiente manera

$$\boxed{W == \int_{1}^{2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}} \qquad 5.4$$

la integral obtenida es conocida como *integral de línea* y constituye la definición general del trabajo realizado por una fuerza. La solución de problemas que involucran la aplicación de la expresión 5.4 solo es posible con el conocimiento de calculo de varias variables, lo cual queda fuera del alcance de un curso introductorio de Mecánica, por lo que los ejemplos y desarrollos posteriores dónde se involucre el concepto de trabajo se realizarán para caso de problemas en los cuales la aplicación se reduzca a una dimensión.

Cabe hacer unas aclaraciones sobre concepto de trabajo debido a su importancia y diferencia con el concepto cotidiano de trabajo. Al ser una cantidad escalar puede ser positiva, negativa o cero tal como muestra la figura 5.3

Se realiza trabajo únicamente cuando la fuerza ejercida sobre el cuerpo que se mueve, tiene componente en la dirección del movimiento. Así, se realiza trabajo cuando se levanta un peso, o se alarga un resorte, o se comprime un gas dentro de un cilindro. Por otra parte, aunque parezca extraño en principio, el "trabajo de sostener" un gran peso, no causa ningún trabajo mecánico en sentido técnico, puesto que no ha habido movimiento.

Las unidades del trabajo en el sistema MKS son: $[W] = Newton\ metro = N\ m \equiv Joule = J$

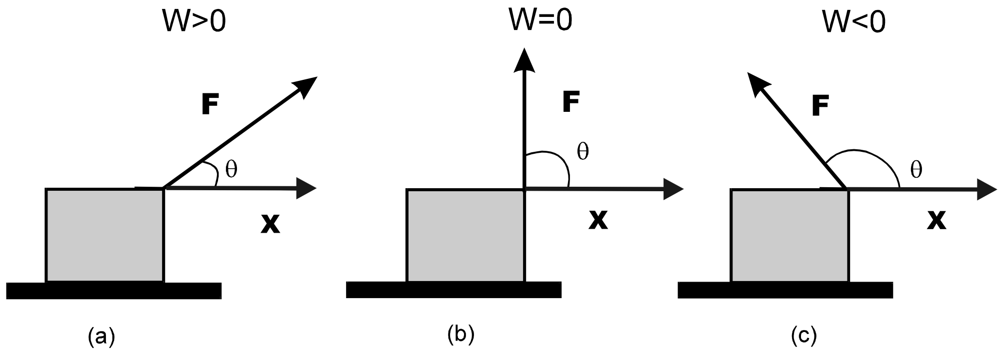
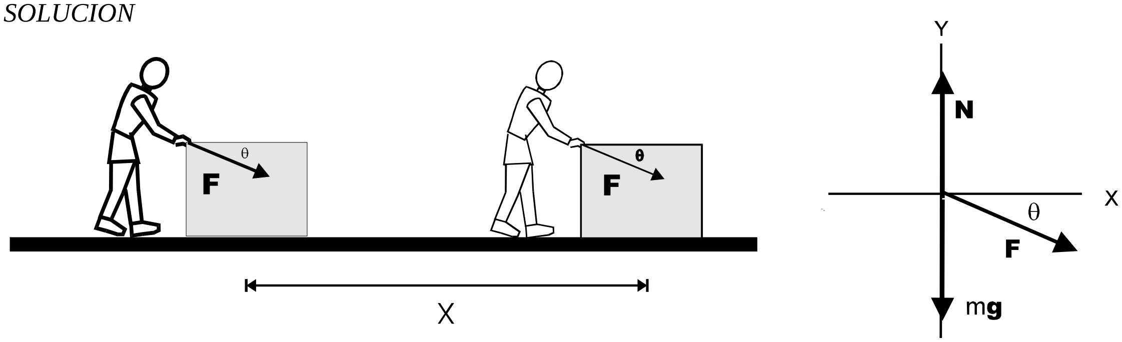


Figura 5.3 (a) trabajo positivo, (b) trabajo cero y (c) trabajo negativo

EJEMPLOS

I) Para empujar una caja de 52 kg por el suelo, un obrero ejerce una fuerza de 190 N. dirigida 22^0 abajo de la horizontal. Cuándo la caja se ha movido 3.3 m, ¿cuánto trabajo se ha realizado sobre la caja por (a) el obrero, (b) la fuerza de la gravedad, y (c) la fuerza normal del piso sobre la caja?

SOLUCION



El dibujo anterior muestra la situación y el diagrama de cuerpo libre, de donde se observa que la fuerza normal y el peso son fuerzas perpendiculares a la dirección de desplazamiento.

a) El trabajo efectuado por el obrero es

$$W_O = FX\cos\theta = (190\,N)(3.3m)\cos(22^0) = 581\ J$$

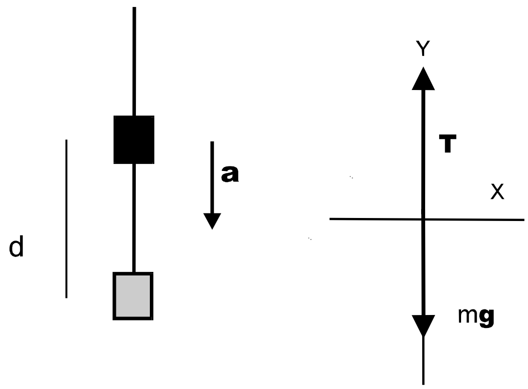
b) Puesto que peso m**g** es perpendicular a desplazamiento, el trabajo realizado por una fuerza de gravedad es

$$W_g = FX\cos\theta = (52\,kg)\left(9.8\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)(3.3m)\cos(90^0) = 0\ J$$

c) Nuevamente la fuerza normal es perpendicular al desplazamiento y por lo tanto en trabajo debido a está fuerza es cero como en el caso anterior.

II) Se usa una cuerda para bajar verticalmente un bloque de masa M a una distancia d con una aceleración constante hacia abajo de g/4. (a) Halle el trabajo efectuado por la cuerda sobre el bloque. (b) Halle el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad

SOLUCION



Como muestra el dibujo la masa cae y de acuerdo al sistema mostrado en el diagrama de cuerpo libre la aceleración a es negativa, por lo tanto aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical se obtiene la ecuación

$$T - mg = -ma$$

de donde despenado la tensión en la cuerda

$$T = mg - ma = m(g - a)$$

Puesto que $a = \frac{1}{4} g$

$$T = m(g - a) = m(g - \frac{1}{4} g) = \frac{3}{4} g$$

a) El trabajo efectuado por la cuerda es igual al trabajo realizado por la tensión, el ángulo θ formado por la tensión y el desplazamiento es de 180 ^{0} por lo tanto

$$W_T = Td\cos\theta = \frac{3}{4}mgd\cos\left(180^0\right) = -\frac{3}{4}mgd$$

b) En este caso la gravedad es paralela al desplazamiento y en este caso θ es igual a cero, entonces

$$W_g = mg\cos\theta = mgd\cos\left(0^0\right) = mgd$$

III) Un bloque de hielo de 47.2 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado de 1.62 m de longitud y 0.902 m de altura. Un obrero lo empuja paralelo al plano inclinado de modo que se deslice hacia abajo a velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre hielo y el plano inclinado es de 0.110. Halle (a) la fuerza ejercida por el obrero, (b) el trabajo efectuado por el obrero sobre el bloque de hielo, y (c) el trabajo efectuado por la gravedad sobre el hielo.

SOLUCION

La única forma de que el bloque de hielo deslice por el plano hacia abajo con velocidad constantes es que el obrero aplique una fuerza **F** en el sentido indicado en el diagrama de cuerpo libre, de no ser así el bloque caería con aceleración

Aplicando la segunda ley de Newton en componentes al diagrama de cuerpo libre se obtiene las siguientes ecuaciones

$$F + F_R - mg\,\text{sen}\,\theta = 0 \qquad 1$$

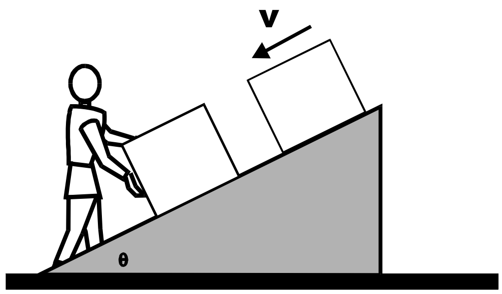
$$N - mg\cos\theta = 0 \qquad 2$$

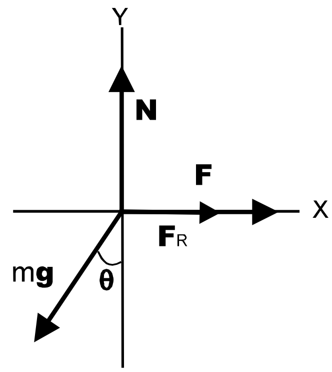
$$F_R = \mu_k N \qquad 3$$

Como se ha hecho ya en casos anteriores de la ecuación 2 $N = mg\cos\theta$

Substituyendo en la ecuación 3 $F_R = \mu_k mg\cos\theta$

Despejando de la ecuación1 a F





$$F = mg\,\text{sen}\,\theta - F_R = mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_k mg\cos\theta$$
$$= mg(\text{sen}\,\theta - \mu_k \cos\theta) \qquad 4$$

El ángulo θ se puede determinar utilizando los datos de longitud del plano inclinado s = 1.62 m (hipotenusa) y la altura h = 0.902 m cateto opuesto) mediante la función arcsen x.

$$\theta = \text{arcsen}\frac{h}{s} = \text{arcsen}\frac{0.902\,m}{1.620\,m} = 33.83^0$$

a) Sustituyendo en la ecuación 4 los datos dados en el problema

$$F = (25\,kg)\left(9.8\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)(\text{sen}\,33.83^0 - 0.11\cos 33.83^0) = 215.2\ N$$

b) La fuerza del obrero está aplicada contraria al desplazamiento, por lo tanto $\varphi = 180^0$. El trabajo hecho por el obrero se calcula como

$$W_O = Fs\cos\varphi = (215.2N)(1.62\,m)\cos\left(180^0\right) = -348.8\ J$$

c) El peso m**g** forma con el desplazamiento un ángulo $\varphi = 90^0 - \theta = 90^0 - 33.83^0 = 56.17^0$, entonces el trabajo realizado por la fuerza de gravedad es

$$W_g = Fs\cos\varphi = (47.2\,kg)\left(9.8\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)(1.62\,m)\cos\left(56.17^0\right) = 417\ J$$

d) La fuerza de fricción siempre actúa contraria al desplazamiento por lo tanto su ángulo siempre será $\varphi = 180^0$, luego entonces el trabajo debido a la fuerza de fricción es

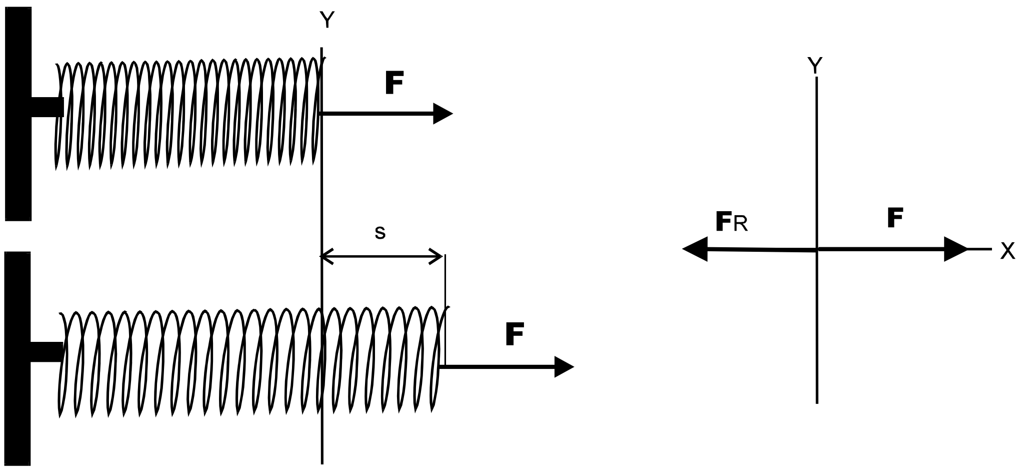
$$W_{F_R} = F_R s\cos\varphi = (\mu_k mg\cos\theta)s\cos\varphi$$

$$W_{F_R} = \left[(0.11)(47.2\,kg)\left(9.8\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)\cos\left(33.83^0\right)\right](1.62\,m)\cos 180^0 = -68.5\ J$$

IV) Un resorte tiene una constante de fuerza de 15.0 N/cm. (a) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirar el resorte 7.60 mm desde su posición relajada?

SOLUCION

La fuerza **F** que un agente externo debe de aplicar para alargar el resorte una distancia s como muestra la figura debe ser igual la fuerza $\mathbf{F}_R$ que presenta el resorte al tratar de ser estirado, la cual es igual de acuerdo con la ley de Hooke **F**= k**x**,



Aplicando la definición del trabajo para el caso unidimensional de una fuerza variable

$$W = \int_0^S F\ dx = \int_0^s kx\ dx = \frac{1}{2}k\,x^2\Big|_0^S = \frac{1}{2}k\,s^2$$

evaluando la expresión anterior

$$W = \frac{1}{2}k\,s^2 = \frac{1}{2}\left(1500\,{}^{N}\!/_{m}\right)\left(7.6\,x10^{-3}\ m\right)^2 = 0.043\ J$$

Energía cinética y teorema del trabajo y la energía

El tratar de resolver problemas aplicando directamente la segunda ley de Newton a algunos casos resulta difícil, debido a la naturaleza misma de las fuerzas que aparecen y en ocasiones al hecho de ser totalmente desconocidas sus expresiones matemáticas. Un proceso alternativo que permite resolver los problemas de movimiento es relacionar el trabajo hecho por la fuerza total que actúa sobre el cuerpo con su velocidad, para un desplazamiento determinado. La figura 5.4 muestra un bloque de masa m que se mueve hacia la derecha debido a una fuerza F=F(x) paralela al plano, en la posición A, el bloque tiene una velocidad Vi, y en la posición B el bloque ha recorrido una distancia s y tiene una velocidad V_f.

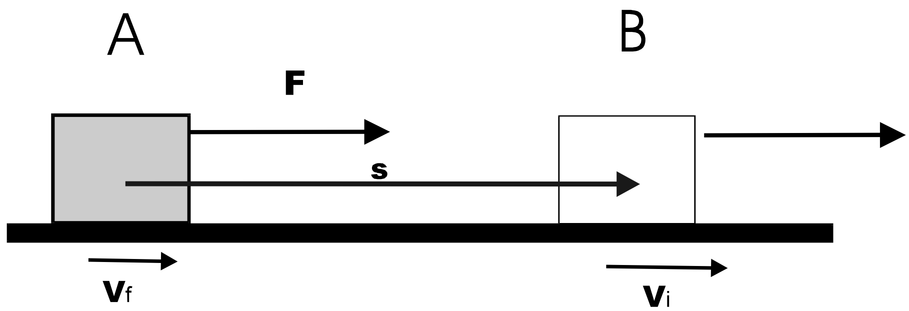


Figura 5.4

Como el movimiento y la fuerza son paralelos entonces θ = 0, además se mantienen en la misma dirección el problema puede sr resuelto en una dimensión, con estas consideraciones el trabajo total representado por la fuerza F se puede calcular la aplicando la ecuación 5.2

$$W == \int_{xi}^{x_f} F\,dx$$

Utilizando ahora la segunda ley de Newton en una dimensión, $F = ma$ la expresión anterior para el trabajo total cambia a

$$W = \int_{xi}^{x_f} F\,dx = \int_{xi}^{x_f} ma\,dx$$

por otra parte utilizando la definición de la aceleración en términos diferenciales y la regla de la cadena, la aceleración se puede expresar como

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Substituyendo en la ecuación anterior para el trabajo total

$$W = \int_{xi}^{x_f} ma\,dx = \int_{xi}^{x_f} m\left(v\frac{dv}{dx}\right)dx = \int_{vi}^{v_f} mv\,dv$$

Los límites de integración se modificaron debido al cambio de variable utilizado. La expresión anterior se integra considerando a la masa constante

$$\boxed{W = \int_{vi}^{v_f} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2} \qquad 5.5$$

La expresión $\frac{1}{2}mv^2$ representa la energía asociada al movimiento del cuerpo. Debido a su gran importancia recibe el nombre de **energía cinética**. Se denota por la letra *K*, o sea

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2} \qquad 5.6$$

con esta definición la expresión 5.5 se puede escribir como

$$\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K} \qquad 5.7$$

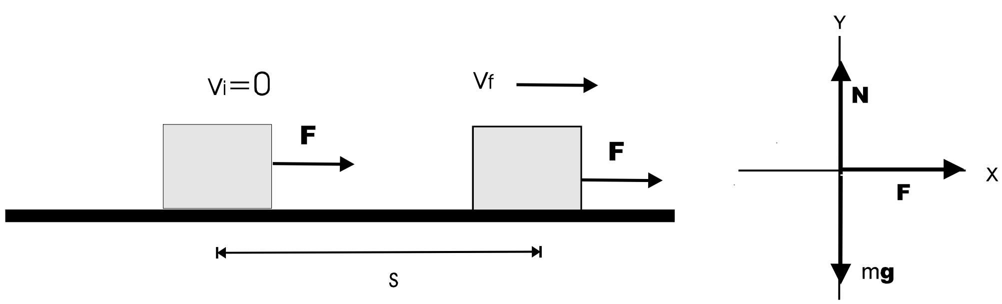
Resultado conocido como el **teorema de del trabajo y la energía cinética**

Cuando el trabajo total es positivo, la energía cinética final será mayor que la energía cinética lo cual se traduce en un aumento de la velocidad del cuerpo. Si el trabajo es negativo la velocidad final será menor que la inicial.

EJEMPLOS

V) Se tira de un bloque de 5 kg que inicialmente se encuentra en reposo hacia la derecha a lo largo de una superficie lisa horizontal por medio de una fuerza constante de magnitud F=15 N. Hállese la rapidez del bloque después de que se ha desplazado una distancia s =3.5 m

SOLUCION



El diagrama de cuerpo libre muestra las fuerzas que afectan al bloque, y peso m**g** y la fuerza normal **N** no realizan ningún trabajo por ser perpendiculares al movimiento. La fuerza **F** realiza un trabajo igual a

$$W_F = Fs\cos\theta = (15\ N)(3.5\,m)\cos 0^0 = 52.5\ J$$

El teorema del trabajo y la energía cinética aplicado al problema conduce a la expresión

$$W_F = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

de donde se puede despeja a v_f

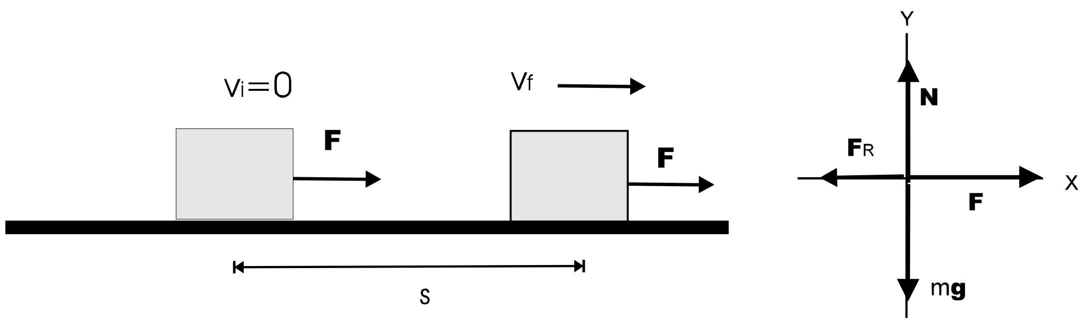
$$v_f = \sqrt{\frac{2W_F}{m}} = \sqrt{\frac{2(52.5\ J)}{5\ kg}} = 4.58\ {}^{m}\!/_{s}$$

VI) ¿Cómo se modificaría el problema anterior si existiera un coeficiente de fricción de cinética igual a 0.20)?

SOLUCION

En este caso el trabajo total se modifica y ahora tiene que incluir el trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_R$, la magnitud de la fuerza de rozamiento está dada por $F_R = \mu_k N$ y como se muestra en el diagrama de cuerpo libre N=mg; por lo tanto $F_R = \mu_k mg$. Entonces el trabajo debido a la fuerza de rozamiento es

$$W_{F_R} = \mu_k mgs\cos\theta = 0.20(5\ kg)\left(9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}\right)(3.5\,m)\cos 180^0 = -34.3\ J$$



El trabajo total es ahora

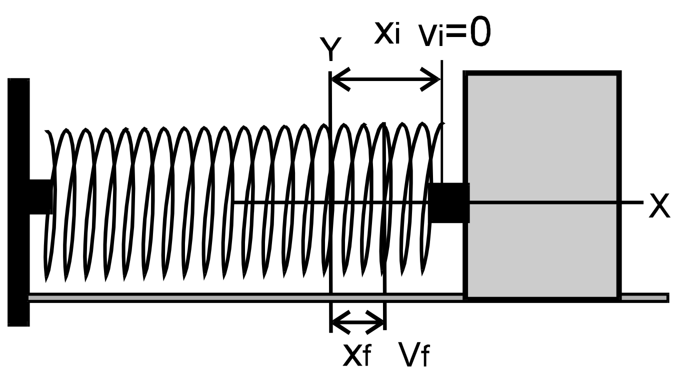
$$W = W_F + W_{F_R} = (52.5\ J - 34.3\ J) = 18.2$$

El teorema del trabajo y la energía cinética considerando $v_i = 0$

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(18.2\ J)}{5\ kg}} = 2.70\ {}^{m}\!/_{s}$$

VII) Una masa de 2 kg es atada a un resorte de constante de fuerza 20 N/cm que es alargado una distancia de 40 cm La mesa sobre la que se encuentran carece de fricción como muestra la figura. Calcúlese la velocidad cuando el bloque se ha desplazado 20 cm de su posición inicial.



Los valores de las distancias mostradas en la figura son X_i = 40 cm y X_f =20 cm, la única fuerza que realiza trabajo al ser soltado el bloque de la posición inicial es la fuerza del resorte que tendrá una dirección negativa respecto del sistema de referencia mostrado, esto es $F_R = -kx$, el trabajo realizado por dicha fuerza es

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_R \, dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx \, dx = -\frac{1}{2} k x^2 \Big|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2} k x_i^{\,2} - \frac{1}{2} k x_f^{\,2}$$

evaluando la expresión anterior con los valores transformados al sistema MKS

$$W = \frac{1}{2}\left(2000 \, {}^{N}\!/\!_{m}\right)\left(40 \, x10^{-2} \; m\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2000 \, {}^{N}\!/\!_{m}\right)\left(20 x10^{-2} \; m\right)^2 = 120 \; J$$

Aplicando el teorema del trabajo y la energía cinética considerando la velocidad inicial cero

$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(120 \; J)}{2 \; kg}} = 10.95 \, {}^{m}\!/\!_{s}$$

VIII) Si en el problema anterior, la superficie no fuese lisa y el coeficiente de fricción cinética es 0.15, determine nuevamente la velocidad en la posición Xf=20 cm.

SOLUCION

EL trabajo total incluye ahora el trabajo efectuado por el resorte y la fuerza de rozamiento. La magnitud de la fuerza de rozamiento está determinada para una superficie plana horizontal como $F_R = \mu_k N = \mu_k mg$, el desplazamiento s = 40 cm –20 cm = 20 cm, por lo tanto el trabajo efectuado por dicha fuerza es

$$W_{F_R} = \mu_k mgs\cos\theta = 0.15(2 \; kg)\left(9.8 \, {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)(0.20 \, m)\cos 180^0 = -0.59 \; J$$

El trabajo total es

$$W_{total} = W + W_{F_R} = (120.00 \; J - 0.59 \; J) = 119.41 \, J$$

El teorema del trabajo y la energía cinética considerando $v_i = 0$

$$W_{total} = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W_{total}}{m}} = \sqrt{\frac{2(119.14 J)}{2 \; kg}} = 10.93 \, {}^{m}\!/\!_{s}$$

IX) Un hombre que corre tiene la mitad de la energía cinética de un niño de la mitad de la masa que él posee. El hombre aumenta su velocidad a razón de 1.00 m/s y luego tiene la misma energía cinética que el niño. ¿Cuáles eran las velocidades originales del hombre y del niño?

SOLUCION

La masa M representa la masa del hombre y m la masa del niño, entonces M =2m. El problema se divide en dos partes, la primera es cuando el hombre tiene la mitad de la energía cinética del niño, lo cual se expresa como

$$\frac{1}{2}MV_{1H}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mV_N^2\right]$$

utilizando la relación entre las masas $M = 2m$

la ecuación anterior se reduce a $V_{1H}^2 = \frac{1}{4}V_N^2$ ó sacando raíz cuadrada

$$V_{1H} = \frac{1}{2}V_N \qquad 1$$

En la segunda parte el hombre aumenta la velocidad en 1.00 m/s esto es $V_{2H} = V_{1H} + 1$ y adquiere la misma energía cinética del niño esto conduce a la ecuación

$$\frac{1}{2}MV_{2H}^2 = \frac{1}{2}mV_N^2$$

Nuevamente debido a la relación entre las masas y la relación entre la velocidad del hombre antes y después de aumentar su velocidad, la expresión se simplifica a la siguiente ecuación

$(V_{1H} + 1)^2 = \frac{1}{2}mV_N^2$ ó sacando raíz cuadrada

$$V_{1H} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}V_N \qquad 2$$

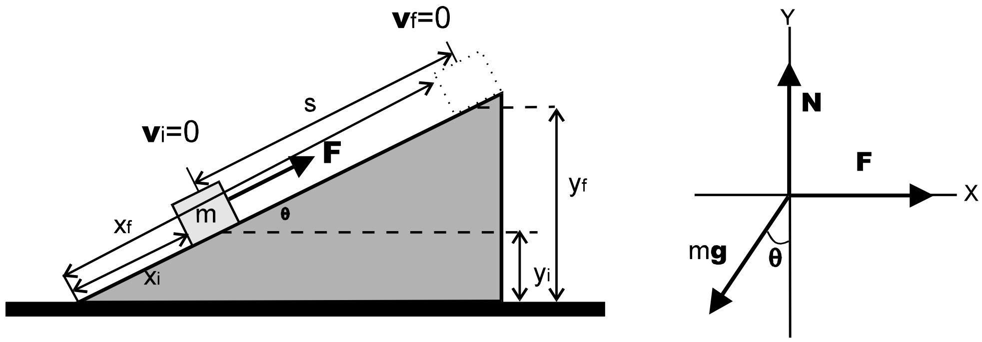
las ecuaciones 1 y 2 constituyen un sistema de ecuaciones cuya solución es

$$V_{1H} = 2.41\ {}^{m}\!/_{s}, \quad V_N = 4.82\ {}^{m}\!/_{s}$$

Energía potencial

Energía potencial gravitacional

Cuando un agente externo mueve un cuerpo sobre un plano inclinado sin fricción de tal manera que inicia su movimiento con velocidad cero y termina también con velocidad cero elevándolo una altura h, cabe preguntarse ¿Qué ha sucedido con el trabajo hecho por el agente externo? Para resolver la cuestión consideremos figura 5.4 (a) donde se muestran las condiciones descritas.



(a) (b)

Figura 5.4. Dibujo de objeto que es elevado por un plano inclinado sin fricción a una altura h = yf-yi mediante una fuerza **F**. (b) Diagrama de cuerpo libre correspondiente a (a).

La fuerza **F** y la componente del peso m**g** son las únicas fuerzas que realizan trabajo, de acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la es figura 5.4 (b) la componente de la fuerza resultante en la dirección de movimiento es $F - mg\,\mathrm{sen}\,\theta$, por lo tanto aplicando el teorema de la variación de la energía cinética y recordando que la velocidad inicial y final cero

$$\int_{xi}^{x_f} (F - mgsen\theta)dx = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0$$

$$\int_{xi}^{x_f} Fdx - \int_{xi}^{x_f} mgsen\theta dx = 0$$

despejando el trabajo realizado por el agente externo

$$\int_{xi}^{x_f} Fdx = \int_{xi}^{x_f} mgsen\theta dx = mgsen\theta(x_f - x_i)$$

como $y_i = mg\,\mathrm{sen}\,\theta\, x_i$ y $y_f = mg\,\mathrm{sen}\,\theta\, x_f$
entonces

$$\int_{xi}^{x_f} Fdx = \int_{xi}^{x_f} mgsen\theta dx = mgy_f - mgy_i \qquad 5.8$$

El término mgy es conocido como la **energía potencial gravitacional**, se denota por U

$$\boxed{U = mgy} \qquad 5.9$$

Utilizando la definición anterior la ecuación 5.8 se puede escribir como

$$\boxed{\int_{xi}^{x_f} Fdx = U_f - U_i = \Delta U} \qquad 5.10$$

El resultado anterior indica que si el trabajo realizado por el agente externo es igual al cambio de la energía potencial, si es positivo, ocasionará un aumento en la energía potencial del cuerpo, esto es el trabajo se "almacena" en forma de energía potencial y no se pierde.

Si el cuerpo a es soltado de la posición más alta o final realizará un trabajo al caer por el plano igual al realizado por un agente externo.

Energía potencial de un resorte

EL trabajo hecho por un agente externo sobre un resorte tampoco se pierde esto es, queda "almacenado" en el resorte de alguna manera y como en el caso anterior es posible utilizarlo para realizar un trabajo posteriormente,. Para obtener una expresión para la energía potencial del resorte aplicamos nuevamente el teorema de la variación de la energía cinética al experimento mostrado en la figura 5.5 (a), donde un agente externo aplica una fuerza que estira un resorte partiendo del reposo de una posición x_i y lo alarga hasta una posición final x_f en la cual vuelve a permanecer en reposo

La figura 5.5(b) muestra el diagrama de cuerpo libre de la situación las fuerzas son paralelas al eje X , nuevamente el problema se puede trabajar en una dimensión, la fuerza del resorte en magnitud es $F_R = k\,x$ (ley de Hooke)

$$\int_{xi}^{x_f} (F - F_R)dx = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0$$

$$\int_{xi}^{x_f} F dx - \int_{xi}^{x_f} kx\, dx = 0$$

despejando el trabajo realizado por el agente externo

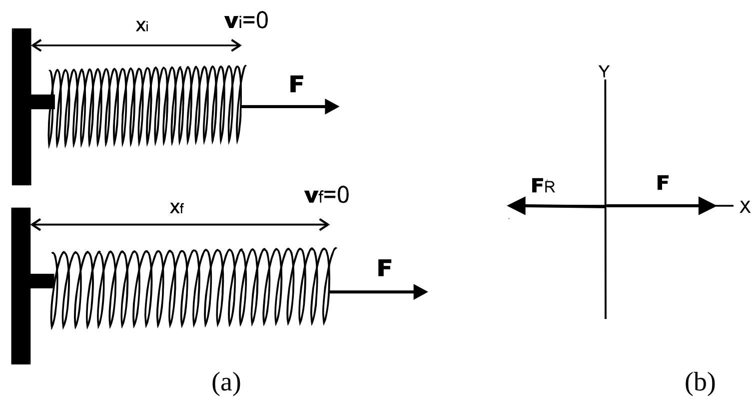


Figura 5.5. (a) Resorte estirado por una fuerza F. (b) Diagrama de cuerpo libre del resorte.

$$\int_{xi}^{x_f} F dx = \int_{xi}^{x_f} kx\, dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \qquad 5.11$$

El término $\frac{1}{2}kx^2$ en este caso conocido como la **energía potencial del resorte** también es denotada por U, pero para distinguir de la energía potencial gravitacional, se indicará como U_R

$$\boxed{U_R = \frac{1}{2}k\,x^2} \qquad 5.12$$

Utilizando el resultado anterior la ecuación 5.11 se escribe como

$$\boxed{\int_{xi}^{x_f} F dx = U_f - U_i = \Delta U_R} \qquad 5.13$$

la cual en esencia es parecida a la ecuación 5.8 del campo gravitacional.

Fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas

En los ejemplos de levantar un cuerpo por una plano inclinado sin fricción ó el estirar un resorte, se observa que el trabajo realizado por un agente externo no se pierde sino que se transforma en energía potencial y es totalmente "recuperable". Por ejemplo, el bloque al ser soltado de la parte superior del plano puede utilizarse para levantar un segundo cuerpo unido a él mediante una cuerda que pase por una polea, sí el segundo cuerpo tiene el mismo peso, podrá levantarlo hasta una altura igual a la del primer cuerpo, en otras palabras el trabajo obtenido, es igual al trabajo "almacenado" en energía potencial el cual a su vez es igual al trabajo hecho por el agente externo.

EL tipo de fuerzas tales como la gravitatoria y el resorte en las cuales el trabajo es "recuperable" se llaman **fuerzas conservativas**, y aquellas fuerzas como la fricción en las que no se conserva se denominan **fuerzas no conservativas**.

Matemáticamente una fuerza conservativa si el trabajo realizado sobre una partícula es independiente de la trayectoria seguida por la partícula o equivalentemente el trabajo en una trayectoria cerrada cero.
Por ejemplo cuando un cuerpo es deslizado sobre una superficie plana rugosa se realiza un trabajo por parte del agente externo para llevarlo de una posición a otra, si el cuerpo es regresado a su posición inicial, en lugar de recuperar el trabajo efectuado por el agente externo en el primer desplazamiento, se tendrá que realizar un nuevo trabajo para llevarlo a su posición inicial y por lo tanto el trabajo neto en el recorrido cerrado no será cero. Por tal motivo las fuerzas de fricción son no conservativas.

Para el caso de fuerzas conservativas siempre es posible asignarles una función de energía potencial como en el caso de la fuerza de gravedad $U = mgy$ ó la fuerza elástica del resorte $U_R = \frac{1}{2} m v^2$, en general la relación entre el trabajo realizado por una fuerza conservativa y la energía potencial asociada es

$$\boxed{U(r) = -\int \mathbf{F} \bullet dr} \qquad 5.14$$

para el caso de una dimensión se reduce a

$$\boxed{U(x) = -\int F \bullet dx} \qquad 5.15$$

Como la energía potencial se define mediante una integral, su expresión estará definida salvo una constante (llamada constante de integración) que en la mayoría de los casos se elige para que sea cero en el origen del sistema de coordenadas elegido.

Conservación de la energía

Uno de los principios generales que gobiernan los procesos naturales, sean físicos, químicos o biológicos, es la ley de conservación de la energía. Este principio, en cuanto se refiere a problemas de mecánica pura, es una consecuencia necesaria de las leyes del movimiento de Newton, como se mostrará más adelante. Su generalización para otros sistemas no mecánicos fué realizada hasta que se comprendió que el calor es una forma de la energía con los trabajos Joule (1818-1889), y otros, sobre la medida del equivalente mecánico del calor.

Considérese una partícula sometida a fuerza total **F** conservativa compuesta por supuesto de una suma de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,….,$\mathbf{F}_n$ conservativas, para facilitar el resultado se considera el movimiento en una dimensión. Partiendo de la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

integrando la expresión respecto de x entre los limites x_i y x_f

$$\int_{xi}^{x_f} F\,dx = \int_{xi}^{x_f} ma\,dx$$

Por otra parte utilizando la ecuación 5.15

$$-U(x)\Big|_{x_f}^{x_i} = \int_{xi}^{x_f} ma\,dx$$

Recordando que la expresión a la derecha ya ha sido integrada anteriormente y corresponde al cambio de la energía cinética.

$$-\left(U(x_f) - U(x_i)\right) = K_f - K_i$$

o en una notación compacta

$$-\left(U_f - U_i\right) = K_f - K_i$$

de donde

$$\boxed{U_i + K_i = K_f + U_f} \qquad 5.16$$

La ecuación anterior representa el **principio de la conservación de la energía mecánica**, e indica que para una partícula sometida a fuerzas conservativas, la suma de la energía potencial y cinética inicial es igual a la suma de la energía potencial y cinética final.

Definiendo **la energía total mecánica** como

$$\boxed{E = U + K} \qquad 5.17$$

la expresión 6.16 se escribe en forma compacta

$$\boxed{E_i = E_f} \qquad 5.18$$

La conservación de la energía también se puede representar por la ecuación

$$\boxed{E = constante} \qquad 5.19$$

SI la fuerza resultante sobre la partícula incluye fuerzas no conservativas (fricción) el resultado anterior no es aplicable, pero se puede generalizar para incluir el caso de la energía perdida por la fuerza de fricción constante. Sea $F = F_c - f_r$ donde F_c representa a las fuerzas conservativas y f_r a la fuerza de fricción, nuevamente a partir de la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

$$F_c - f_r = ma$$

integrando la expresión respecto de x entre los limites x_i y x_f

$$\int_{xi}^{x_f} F\,dx - \int_{xi}^{x_f} f_r\,dx - = \int_{xi}^{x_f} ma\,dx$$

Por otra parte utilizando la ecuación 6.15 y la suposición de f_r constante

$$-U(x)\Big|_{x_f}^{x_i} - f_r(x_f - x_i) = \int_{xi}^{x_f} ma\,dx$$

.de donde

$$-\left(U_f - U_i\right) - f_r(x_f - x_i) = K_f - K_i$$

o en una notación compacta

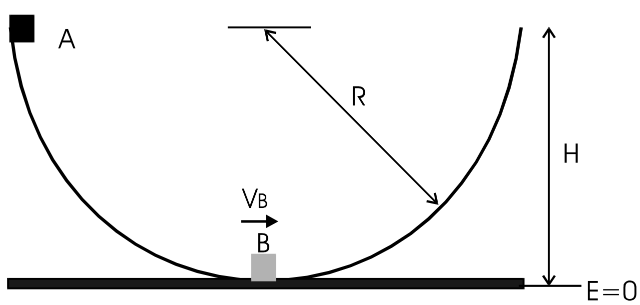
$$U_i + K_i = K_f + U_f + f_r(x_f - x_i) \qquad 6.20$$

Aplicaciones de la ley de la conservación de la energía mecánica

X) Un cubo de hielo muy pequeño cae desprendido desde el borde de una cubeta semiesférica sin fricción cuyo radio es de 23.6 cm. ¿A qué velocidad se mueve el cubo en el fondo de la cubeta?

.

SOLUCION



El nivel de energía potencial cero se coloca en la parte más baja. En la parte A, el bloque solo posee energía potencial

$$E_A = mgH = mgR$$

En el punto B el bloque tendrá solamente energía cinética

$$E_B = \frac{1}{2} m V_A^2$$

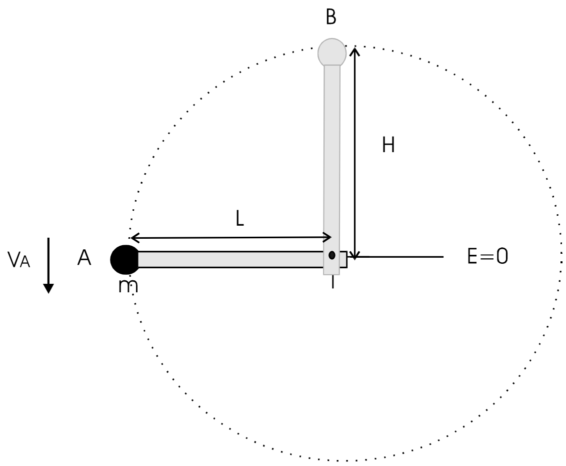
Puesto que no hay fricción se cumple $E_A = E_B$ o sea $mgR = \frac{1}{2} m V_A^2$

De donde

$$V_A = \sqrt{2gR} = \sqrt{2(9.8\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2})(0.236\ m)} = 2.15\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

XI) Una bola de masa m está unida al extremo de una varilla muy ligera de longitud L. El otro extremo de la varilla está pivotado de modo que la bola pueda moverse en círculo vertical. La varilla se lleva a la posición horizontal, como se muestra en la figura siguiente y se empuja hacia abajo, de modo que la varilla oscile y alcance la posición vertical hacia arriba. ¿Qué velocidad inicial se le impartió a la bola?

SOLUCION



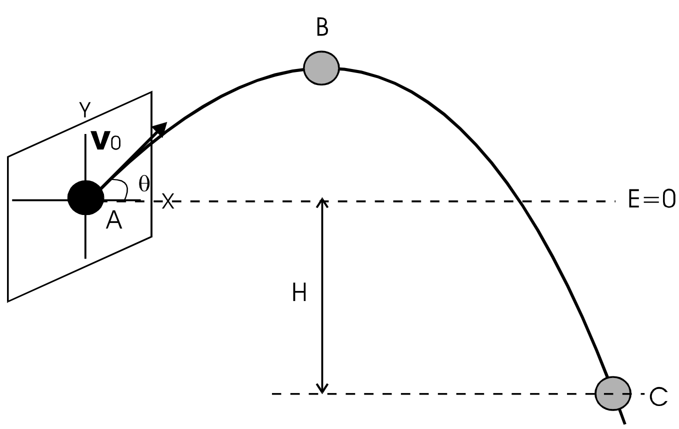
La energía total en el punto A es $E_A = \frac{1}{2} m V_A^2$ y la del punto B $E_A = mgL$

Por conservación de la energía $E_A = E_B$

Entonces $\frac{1}{2} m V_A^2 = mgL$ despenado V_A

$$V_A = \sqrt{2gL}$$

XII) Una bola de 112 g es arrojada desde una ventana a una velocidad inicial de 8.16 m/s y un ángulo de $34.^0$ sobre la horizontal. Usando la conservación de la energía, determine (a) la energía cinética de la bola en la parte más alta de su vuelo y (b) su velocidad cuando está a 2.87 m debajo de la ventana. Desprecie la fuerza de arrastre del aire



SOLUCION

La figura anterior muestra la situación de la pelota en la parte más alta y a una distancia H debajo de la ventana. El vector velocidad $\mathbf{V}_0$ se puede expresar en componentes como

$$\mathbf{V}_0 = V_0(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \left(8.16 \, {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)\left(\cos 34^0, \operatorname{sen} 34^0\right) = \left(6.77, \quad 4.56\right) {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

a) La energía cinética en el punto B es $K_B = 1/2\, m V_B^2$, pero debido a que la componente vertical de la velocidad en B es cero en el punto más alto, $\mathbf{V}_B = (6.77, \quad 0.00) {m}/{s}$ su magnitud es $V_B = 6.77 {m}/{s}$

entonces

$$K_B = \frac{1}{2}(0.112\ kg)(6.77\ {m}/{s})^2 = 2.57\ J$$

b) Las respectivas energías en A y C tomando el nivel cero de energía potencial como se muestra en la figura son $E_A = \frac{1}{2}mV_0^2$ y $E_C = \frac{1}{2}mV_C^2 - mgH$

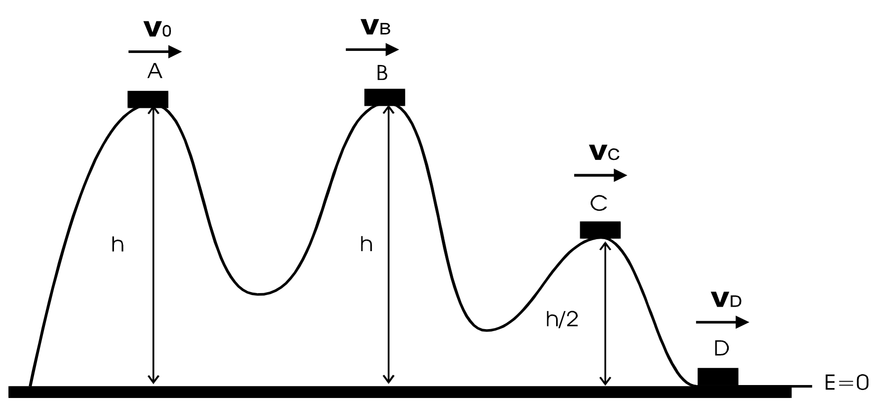
Como se considera que no hay fricción $E_A = E_B$, esto es $\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_C^2 - mgH$

Despejando a Vc

$$V_C = \sqrt{V_0^2 + 2gH} = \sqrt{(8.16 {m}/{s})^2 + 2(9.8 {m}/{s^2})(2.87\, m)} = 10.0\ {m}/{s}$$

XIII) El carrito (sin fricción) de una montaña rusa parte del punto A en la figura siguiente, a la velocidad V_o. ¿Cuál será la velocidad del carrito (a) en el punto B. (b) en el punto C,? y (c) en el punto D? Supóngase que el carrito puede ser considerado como una partícula y que siempre permanece sobre la vía.

SOLUCION



El nivel de energía potencial se coloca en el punto indicado en la figura. De esta manera las energías totales en cada uno de los puntos indicados son

$$E_A = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgh$$

$$E_B = \frac{1}{2}mV_B^2 + mgh$$

$$E_C = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}mgh$$

$$E_D = \frac{1}{2} m V_D^2$$

El sistema es conservativo esto significa que $E_A = E_B = E_C = E_D$, aplicando la igualdad adecuada a cada caso se obtendrá la velocidad deseada.

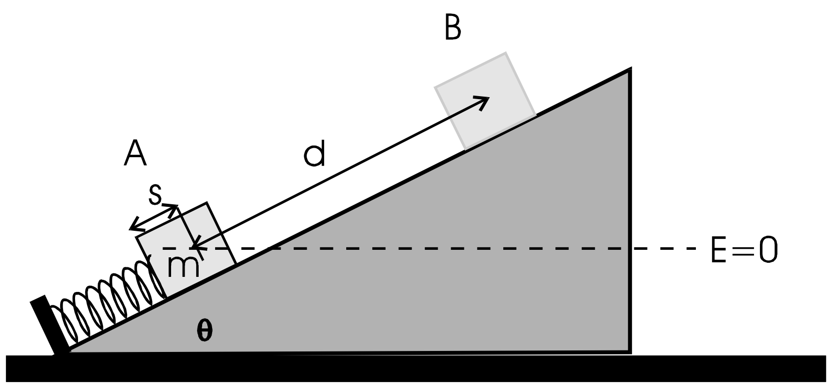
a) $E_A = E_B$ $\quad \frac{1}{2} m V_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m V_B^2 + mgh$ entonces $V_B = V_0$

b) $E_A = E_C$ $\quad \frac{1}{2} m V_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} mgh$ entonces $V_C = \sqrt{V_0^2 + gh}$

c) $E_A = E_D$ $\quad \frac{1}{2} m V_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m V_D^2$ entonces $V_D = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$

XIV) Un bloque de 1.93 se coloca contra un resorte comprimido sobre un plano inclinado de 27° sin fricción (véase la Figura). El resorte, cuya constante de fuerza es de 20.8 N/cm, se comprime 18.7 cm, después de lo cual el bloque se suelta. ¿Qué tanto subirá el bloque antes de alcanzar el reposo? Mídase la posición final del bloque con respecto a su posición precisamente antes de ser soltado.

SOLUCION



El nivel de energía potencial adecuado para resolver el problema es el indicado en el dibujo, en esta situación las energías en cada punto indicado son respectivamente

$$E_A = \frac{1}{2} k s^2 \quad \text{y} \quad E_B = mgd \operatorname{sen}\theta$$

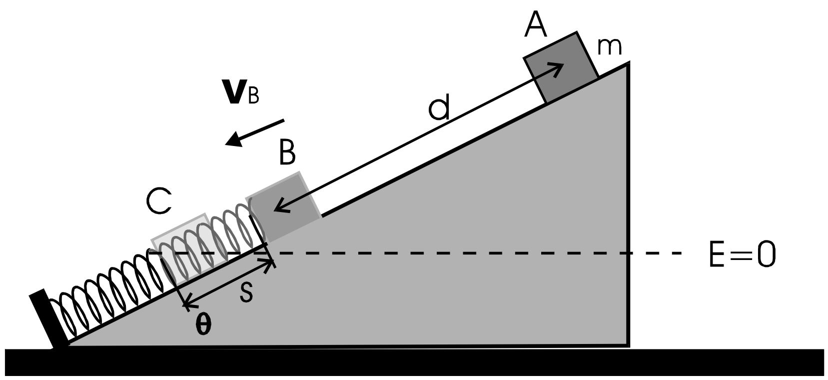
aplicando la conservación de la energía $E_A = E_B$, esto es $\frac{1}{2} k s^2 = mgd \operatorname{sen}\theta$

de donde

$$d = \frac{k s^2}{2 m g \operatorname{sen}\theta} = \frac{\left(2080 \frac{N}{m}\right)(0.187\, m)^2}{2(1.93\, kg)\left(9.8\, m/s^2\right)\operatorname{sen} 27^0} = 222\ m$$

XV) Un resorte ideal sin masa puede comprimirse 2.33 cm por una fuerza de 268 N. Un bloque de masa m = 3.18 kg es lanzado a partir del reposo desde lo alto de un plano inclinado como se muestra en la figura, siendo $32.^0$ la inclinación del plano. El bloque llega momentáneamente al reposo después de haber comprimido al resorte 5.48 cm (a) ¿Cuánto se movió el bloque hacia abajo del plano en ese momento? (b) ¿Cuál era la velocidad del bloque en el momento en que toca el resorte?

SOLUCION



En la figura la posición A corresponde al punto más alto sobre el plano inclinado, el punto B al instante cuando el bloque toca al resorte y finalmente el punto C corresponde al momento en que el resorte es completamente comprimido, el nivel de energía potencial cero es colocado precisamente en el punto C como muestra el dibujo.

Las energías del bloque en cada uno de los puntos indicados es

$$E_A = mg(s+d)\operatorname{sen}\theta$$
$$E_B = \tfrac{1}{2} mV_B^2 + mgs\operatorname{sen}\theta$$
$$E_C = \tfrac{1}{2} ks^2$$

La constante k del resorte se determina con los datos siguientes la fuerza F=268 N comprime al resorte una distancia x = 0.0233 m

$$k = \frac{F}{x} = \frac{268\ N}{0.0233\ m} = 11502\ N/m$$

a) la distancia que recorre el bloque es D = s +d, puesto que no hay fricción la energía se conserva entonces
$$E_A = E_C$$
$$mg(s+d)\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}ks^2$$
$$D = s+d = \frac{ks^2}{2mg\operatorname{sen}\theta}$$
$$D = \frac{(11502\ N/m)(0.0548\ m)^2}{2(3.18\,kg)(9.8\ m/s^2)\operatorname{sen}32^0} = 1.045\ m$$

b) Para determinar la velocidad del bloque en el instante antes de que comience a comprimir el resorte se aplica la conservación de la energía en el punto B y C, $E_B = E_C$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 + mgs\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2}ks^2$$

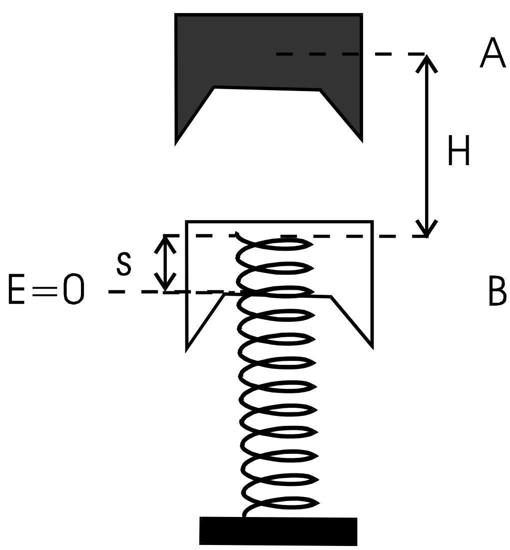
de donde

$$V_B = \sqrt{\frac{ks^2}{m} - 2gs\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$V_B = \sqrt{\frac{\left(11502\ {}^{N}\!/_{m}\right)(0.0548\ m)^2}{3.18\ kg} - 2\left(9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}\right)(0.0548\ m)\,\mathrm{sen}\,32^0} = 3.2\,{}^{m}\!/_{s}$$

XVI) Un bloque de 2.14 kg se deja caer desde una altura de 43.6 cm contra Un resorte de constante de fuerza k= 18.6 N/cm, como se muestra en la figura. Halle la distancia máxima de compresión del resorte

SOLUCION



EL nivel de energía es colocado en el momento justo de máxima compresión del resorte que en este caso corresponde al punto B. Las respectivas energías en cada uno de los puntos indicados es

$$E_A = mg(s+H)$$
$$E_B = \frac{1}{2}ks^2$$

Aplicando la conservación de la energía $E_A = E_C$

$$mg(s+H) = \frac{1}{2}ks^2$$

lo cual conduce a la ecuación de segundo grado

$$\frac{1}{2}ks^2 - mgs - mgH = 0$$

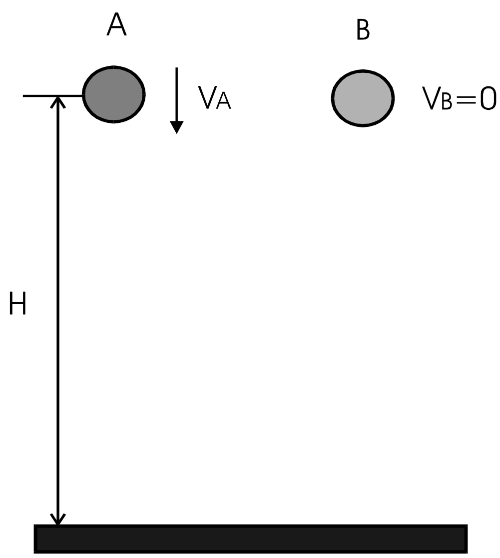
Substituyendo los datos previamente transformados al sistema MKS, en la ecuación anterior

$$930s^2 - 20.97s - 9.14 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos resultados S= 0.111 m y S = -0.089 m, la solución adecuada debe ser S = 0.111 m

XVII) Una pelota pierde el 15.0 % de su energía total cuando rebota en una acera de concreto. ¿A qué velocidad deberá usted de arrojarla hacia abajo verticalmente desde una altura de 12.0 m para que rebote a esa misma altura? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCION



La energía total en el punto A es

$$E_A = \frac{1}{2}mV_A{}^2 + mgH$$

Al rebotar con el suelo se pierde el 15 % de la energía, por lo tanto después del rebote solo queda

$$(1-0.15)E_A = 0.85\left[\frac{1}{2}mV_A{}^2 + mgH\right]$$

Está energía se convierte posteriormente en la energía en el punto B, la cual es igual

$$E_B = mgH$$

Igualando las energías mencionadas $(0.85)E_A = E_B$

$$0.85\left[\frac{1}{2}mV_A{}^2 + mgH\right] = mgH$$

Despejando la velocidad V_A

$$V_A = \sqrt{2(0.15)gH} = \sqrt{2(0.15)\left(9.8\,{}^{m}\!/\!_{s^2}\right)(12.4\ m)} = 6.0\ {}^{m}\!/\!_{s}$$

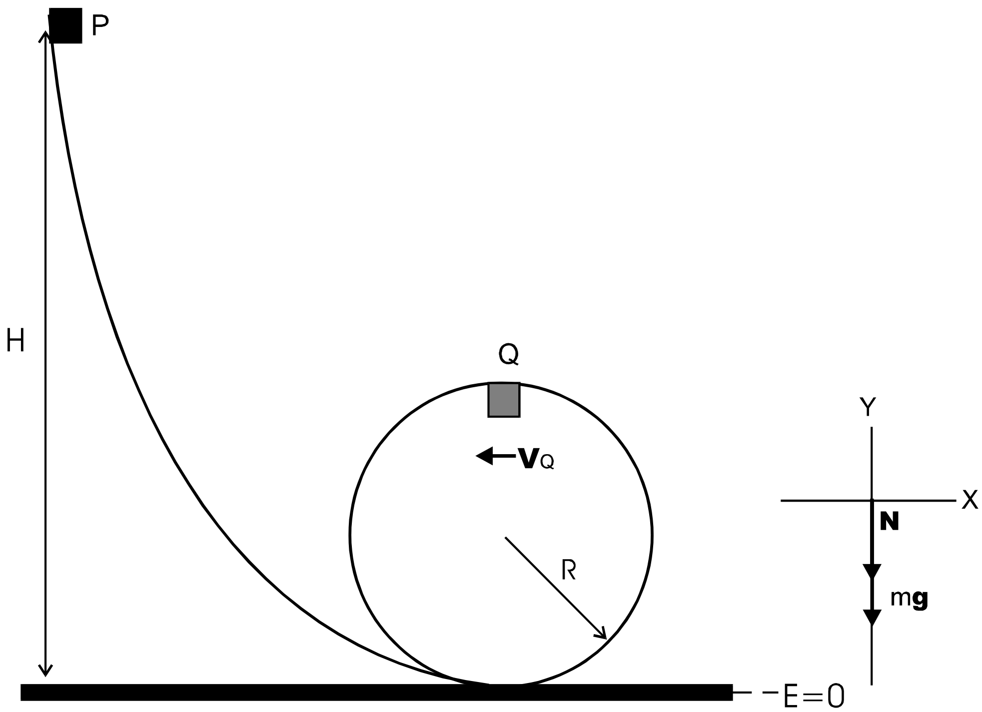
XVIII) Un pequeño bloque de masa m se desliza sin fricción a lo largo de una pista en rizo como se muestra en la figura ¿Desde qué altura sobre el fondo del rizo debería soltarse el bloque de modo que llegue a punto de perder el contacto con la pista en la parte superior del rizo?

SOLUCION

EL bloque dentro del rizo se mueve en una trayectoria circular, por lo que en esta parte tiene una aceleración centrípeta. El diagrama de cuerpo libre muestra las fuerzas que actúan sobre el bloque en el punto Q, aplicado la Segunda ley de Newton el la dirección Y únicamente

$$-N - mg = -ma_C = -m\frac{V_Q{}^2}{R}$$ de donde

$$V_Q^2 = \frac{RN}{m} + Rg \qquad 1$$



las energías en los puntos P y Q son respectivamente

$$E_P = mgH$$
$$E_Q = \frac{1}{2}mV_Q^2 + 2Rmg$$

aplicando la conservación de la energía $E_P = E_Q$

$$mgH = \frac{1}{2}mV_Q^2 + 2Rmg$$ despejando H de la ecuación

$$H = \frac{1}{2g}V_Q^2 + 2R$$

substituyendo el resultado obtenido en 1 en la ecuación 2

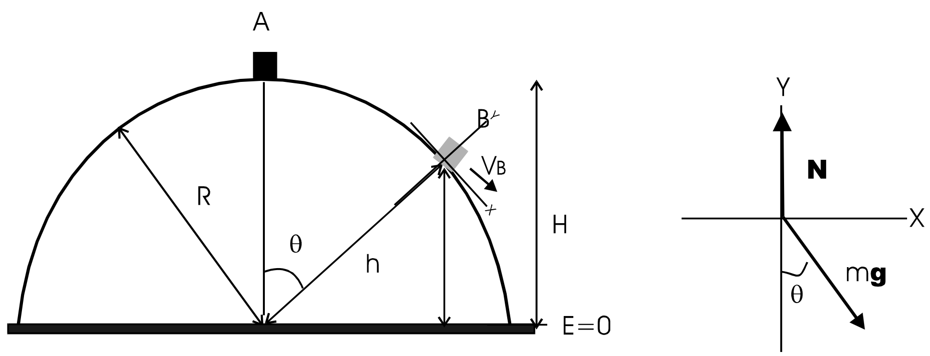
$$H = \frac{1}{2g}\left(\frac{RN}{m} + Rg\right) + 2R = \left(\frac{RN}{2mg} + \frac{R}{2}\right) + 2R \qquad 3$$

puesto que se considera que el cuerpo en el punto Q apenas toca la pista se tiene que N=0 y la ecuación 3 se reduce a

$$H = \frac{5}{2}R$$

XIX) Un pequeño bloque se encuentra en la parte superior de un casquete semiesférico sin fricción, ver la figura. Se le da un pequeño impulso y comienza a deslizarse hacia abajo. Demuestre que abandona la superficie en un punto cuya altura es de 2R/3 (Sugerencia: La fuerza normal se anula cuando el bloque abandona la superficie)

SOLUCION



Aplicando la segunda ley de Newton en componentes al diagrama de cuerpo libre de la figura en el punto B recordando que ahora las componentes de la aceleración **a**=(a_X, a_Y) no son necesariamente cero.

$$mg\,\text{sen}\,\theta = ma_X \qquad 1$$

$$N - mg\cos\theta = ma_Y = ma_C \qquad 2$$

La componente a_Y es igual a la aceleración centrípeta a_C, la ecuación 2 queda como

$$N - mg\cos\theta = -m\frac{V_B^2}{R}$$

si el bloque apenas toca la pista en el punto Q entonces N=0 y despejando de la expresión anterior a V_B^2

$$V_B^2 = Rg\cos\theta \qquad 3$$

La energía total en cada uno de los puntos A y B es

$$E_A = mgR$$

$$E_B = \tfrac{1}{2} mV_B^2 + mgh$$

aplicando el principio de la conservación de la energía $E_A = E_B$

$$mgR = \tfrac{1}{2} mV_B^2 + mgh$$

de donde

$$V_B^2 = 2(gR - gh) \qquad 5$$

igualando la ecuación 3 y 5 $Rg\cos\theta = 2(gR - gh)$

de la figura $h = R\cos\theta$ 6

Entonces $Rg\cos\theta = 2(gR - gR\cos\theta)$

Despejando a $\cos\theta$

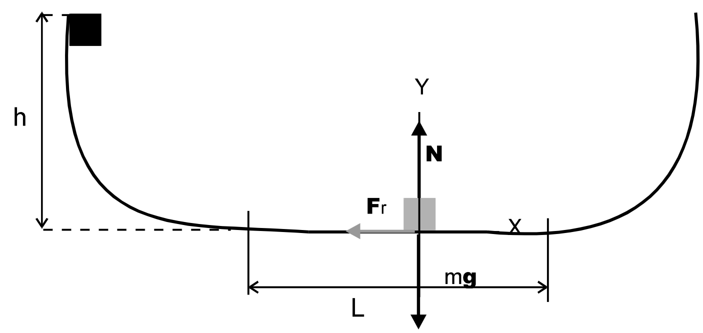
$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}$$

sustituyendo en 6

$$h = \tfrac{2}{3}R$$

XX) Un objeto pequeño de masa m = 234 g se desliza por un carril con extremos elevados y una parte central plana, como se muestra en la figura 12. La parte plana tiene una longitud L = 2.1fi m. Las porciones curvas del carril carecen de fricción. Al atravesar la parte plana, el objeto pierde 688 mJ de energía mecánica, debido a la fricción. El objeto es soltado en el punto A, que tiene una altura h = 1.05 m sobre la parte plana del carril. ¿Dónde llega el objeto finalmente al reposo?

SOLUCION



La única fuerza que realiza trabajo es la fuerza de fricción **F**r. entonces la energía perdida al atravesar la parte plana es igual al trabajo realizado por la fuerza de fricción, esto es $E_{perdida} = W_{Fr}$ como $W_{Fr} = F_r L$

$$F_r = \frac{E_{perdida}}{L} = \frac{688\ x10^{-3}}{2.16\ m} = 0.319\ N$$

En las partes curvas de la figura al no haber fricción se conservara la energía y solo servirán para modificar el sentido del movimiento, si el carril fuese lo suficientemente largo el cuerpo se detendría a una distancia x la cual se puede calcular considerando que toda la energía se convierte en trabajo realizado por la fuerza de fricción. La energía total es la que tiene el en punto antes de ser soltado; $E = mgh$, entonces $F_r x = mgh$ de donde

$$x = \frac{mgh}{F_r} = \frac{(0.234\ kg)\left(9.8\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)(1.05\ m)}{0.319\ N} = 7.55\ m$$

Dividiendo la distancia entre L

$$\frac{x}{L} = \frac{7.55\ m}{2.16\ m} = 3.3.495$$

Por lo tanto el cuerpo se detendrá aproximadamente en el centro de la pista.

Definición de Potencia y algunas plicaciones.

Supóngase que se quiere realizar un trabajo y este consiste en levantar un cuerpo una determinada altura h, este trabajo no importa quien lo realice es siempre el mismo (mgh), pero el trabajo puede realizarse en un segundo, en una hora, o en un año. Sin embargo, en muchos casos, es necesario considerar tanto el trabajo total realizado como el tiempo en que se efectúa, la razón del trabajo realizado entre el tiempo en que se lleva a cabo el conocida como la **potencia promedio**, sí $\Delta t = t_2 - t_1$ es el intervalo de tiempo en que se realiza el trabajo W la potencia promedio se expresa como

$$\overline{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

Cuando el intervalo de tiempo se hace cada vez más pequeño esto es tiende a cero, la potencia promedio cambia a la potencia instantánea

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}} \qquad 5.21$$

dW representa un trabajo infinitesimal igual a $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por lo tanto, la potencia instantánea se puede calcular como

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

puesto que $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

$$\boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} \qquad 5.22$$

En el sistema mks, la unidad de potencia es

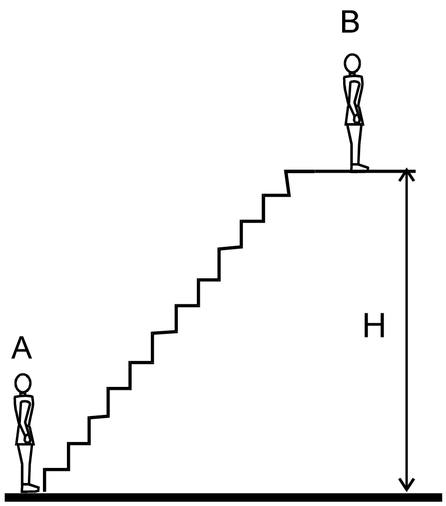
$$[P] = \frac{joule}{segundo} = \frac{J}{s} \equiv watt = W$$

el símbolo *W* no debe confundirse con el trabajo

EJEMPLOS

XXI) Una mujer de 57 kg asciende por un tramo de escalones que tiene una pendiente de 4.5 m en 3.5 s. ¿Qué potencia promedio deberá emplear?

SOLUCION



Considerando el nivel de energía en la parte inferior, la diferencia de energías para subir las escaleras es

$$\Delta E = E_B - E_A$$

la energía en A es igual a cero y la energía en B es $E_B = mgH$, por lo tanto

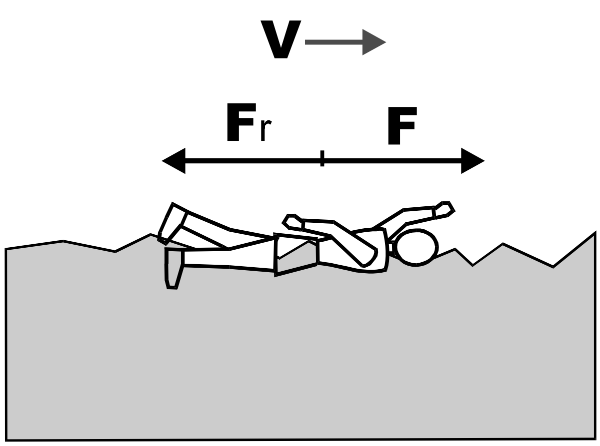
$$\Delta E = mgH$$

está energía es igual al trabajo que tiene que realizar la persona para subir las escaleras entonces la potencia promedio es

$$\overline{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{mgH}{\Delta t} = \frac{(57\,kg)\left(9.8\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)(4.5\,m)}{3.5\,s} = 718W$$

XXII) Un nadador se mueve en el agua a una velocidad de 0.22 m/s. La fuerza de arrastre que se opone a este movimiento es de 110 N. ¿Cuál es la potencia desarrollada por el nadador?

SOLUCION



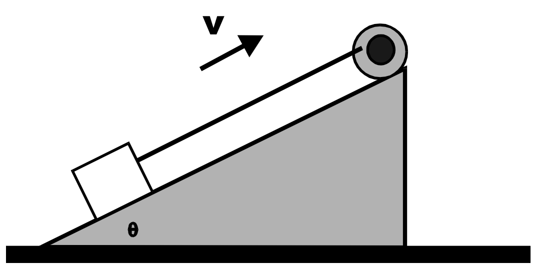
En la figura se muestra al nadador, para mantener la velocidad constante tiene que mantener una fuerza **F** igual a las fuerzas de fricción **F**r, entonces la potencia desarrollada será

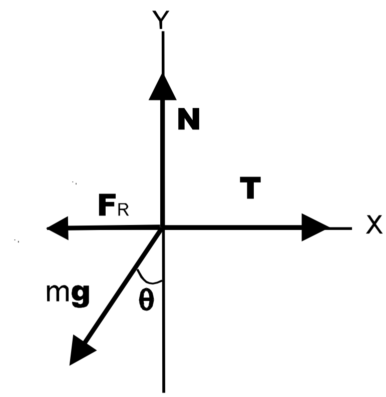
$$P = FV$$

$$= (110\ N)(0.22\,{}^{m}\!/_{s}) = 24.2\ W$$

XXIII) Un bloque de granito de 1380 kg es arrastrado hacia arriba por un plano inclinado a una velocidad constante de 1.50 m/s por un motor de vapor. El ángulo de inclinación del plano es $\theta = 35^0$ El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es de 0.41. ¿Qué potencia debe suministrar el malacate?

SOLUCION





La fuerza realizada por el motor es igual a la tensión en la cuerda. Considerando el diagrama de cuerpo libre de la figura se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones aplicando la segunda ley de Newton en componentes con **a** =0.

$$T - F_R - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad 1$$
$$N - mg\cos\theta = 0 \qquad 2$$

Junto con la ecuación

$$F_R = \mu_k N \qquad 3$$

Forman un sistema completo. De la ecuación 2 $N = mg\cos\theta$

Substituyendo en la ecuación 3 $F_R = \mu_k mg\cos\theta$

Despejando de la ecuación1 a **T**

$$T = mg\,\mathrm{sen}\,\theta + F_R = mg\,\mathrm{sen}\,\theta + \mu_k mg\cos\theta$$
$$= mg(\mathrm{sen}\,\theta + \mu_k\cos\theta) \qquad 4$$

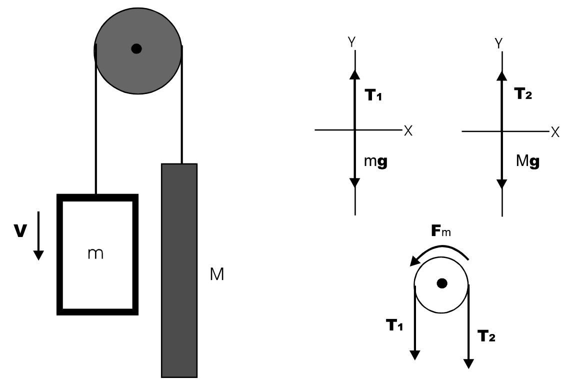
La potencia suministrada por el motor es

$$P = Tv = mg(\mathrm{sen}\,\theta + \mu_k\cos\theta)v$$

$$P = (1380\,kg)\left(9.8\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)(\mathrm{sen}\,35^0 + 0.41\cos 35^0)(1.50\,{}^{m}\!/_{s}) = 18449\,W$$

XXIV) Un elevador de carga totalmente lleno tiene una masa total de 1220 kg. Debe descender 54.5 m en 43.0 s. El contra peso tiene una masa de 1380 kg. Halle la potencia de salida, en HP del motor del elevador. Desprecie el trabajo requerido para arrancar y detener al elevador; esto es, suponga que viaja a velocidad constante.

SOLUCION



La figura anterior muestra el esquema del problema, la masa m corresponde a la masa del elevador y M a la masa del contrapeso. También se muestran los diagramas de cuerpo libre para cada masa y para el motor.
Aplicando la segunda ley de Newton a cada uno de los diagramas de cuerpo libre y recordando que debido a que la velocidad es constante, la aceleración es cero, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

Masa m $$T_1 - mg = 0 \qquad 1$$

Masa M $$T_2 - Mg = 0 \qquad 2$$

Motor del elevador $$T_1 + F_m = T_2 \qquad 3$$

De la ecuación 1 $$T_1 = mg$$

Y de la 2 $$T_2 = Mg$$

La fuerza del motor se obtiene despejando de la ecuación 3

$$F_m = T_2 - T_1$$

substituyendo los valores de las tensiones

$$F_m = Mg - mg = g(M - m) \qquad 5$$

$$F_m = \left(9.8\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)(1380\,kg - 1220\,kg) = 1568\ N$$

La velocidad supuesta constante con que se desplaza el elevador se puede calcular de los datos de H = 54.5 m y t =43 s

$$v = \frac{H}{t} = \frac{54.5\ m}{43\,s} = 1.27\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

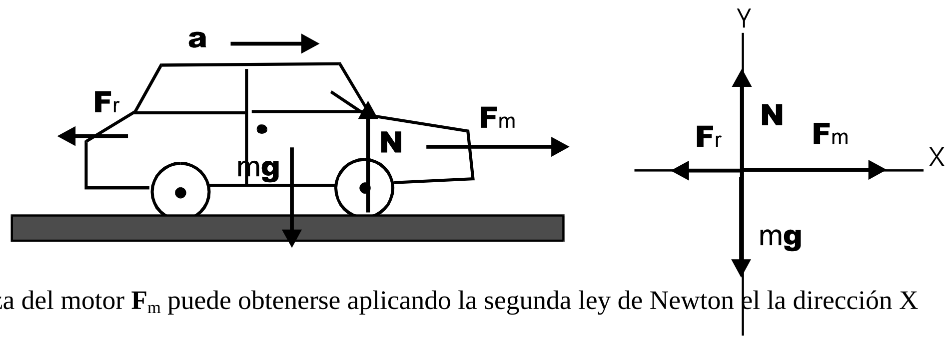
finalmente la potencia del motor es

$$P = F_m v = (1568\ N)(1.27\ {}^{m}\!/\!_{s}) = 1991\,W = \frac{1991W}{745.7} = 2.67\,HP$$

XXV) La resistencia al movimiento de un automóvil de- pende de la fricción con la carretera, la cual es casi independiente de su velocidad v, y del arrastre aerodinámico, el cual es proporcional a v^2. Para un automóvil en particular, de 12,000 N. la fuerza resistente total **F**r está dada por **F**r = 300 + 1.8v^2, donde **F** está en newtonts y v está en metros por segundo. Calcule la potencia necesaria para que el motor acelere al automóvil a 0.92 m/s^2 cuando la velocidad es de 80 km/h.

SOLUCION

La figura siguiente muestra las fuerzas que actúan sobre el automóvil y son las : el peso m**g**, la normal o reacción del piso **N**, la fuerza de fricción **F**r y la fuerza del motor **F**m



La fuerza del motor $\mathbf{F}_m$ puede obtenerse aplicando la segunda ley de Newton el la dirección X

$$F_m - F_r = ma$$

despejando $F_m = F_r + ma$ puesto que $F_r = 300 + 1.8v^2$

$$F_m = 300 + 1.8v^2 + ma$$

La potencia desarrollada por el motor es entonces

$$P = F_m v = (300 + 1.8v^2 + ma)v$$

convirtiendo a unidades adecuadas los datos proporcionados

$$m = \frac{W}{g} = \frac{12000}{9.8\ {}^{m}\!/\!_{s^2}} = 1224\ kg\,, \qquad 80\ {}^{km}\!/\!_{h} = 22.2\ {}^{m}\!/\!_{s}$$

evaluando la expresión para la potencia

$$P = \left(300 + 1.8\left(22.2\,{}^{m}\!/\!_{s}\right)^2 + (1224\,kg)\left(0.92\,{}^{m}\!/\!_{s^2}\right)\right)\left(22.2\,{}^{m}\!/\!_{s}\right) = 51445\,W = 68.96\,HP$$

XXVI) ¿Cuánta potencia, en HP. debe ser desarrollada por el motor de un automóvil de 1600 kg que avanza a 26 m/s (94 km/h) en una carretera llana si las fuerzas de resistencia totalizan 720 N?

SOLUCION

Este problema es análogo al del nadador (problema anterior), para mantener la velocidad constante el motor del automóvil debe proporcionar una fuerza igual a las fuerzas de fricción, entonces

$$P = F_r V = (720\ N)(26\,{}^{m}\!/_{s}) = 18720\ W = \frac{18720W}{745.7} = 25.1\ HP$$

CAPITULO VI

Momento e Impulso

Concepto de impulso y momento lineal

. La experiencia y el análisis correspondiente de los fenómenos mecánicos muestran, que para la caracterización del movimiento mecánico de algunos de los fenómenos como las colisiones es necesario, además de los conceptos de energía cinética y potencial y conservación de la energía, introducir una magnitud más, llamado el momentum, cantidad de movimiento ó **momento lineal**

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}} \qquad 6.1$$

.Esta magnitud es fundamental en la descripción del movimiento de los cuerpos, brinda la oportunidad de distinguir entre partículas ligeras y pesadas que se mueven a la misma velocidad. Por su definición es una cantidad vectorial, la cual puede ser escrita en componentes como

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Las unidades del momento lineal son en el sistema MKS

$$[\mathbf{p}] == kg\frac{m}{s} = N\ s$$

RELACION ENTRE FUERZA Y MOMENTO LINEAL

Pasemos al estudio más detallado del momento lineal. Ante todo la ecuación fundamental de la dinámica newtoniana (segunda ley de Newton), puede ser escrita mediante el impulso lineal:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}} \qquad 6.2$$

es decir, la derivada de la impulsión de un punto material respecto al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre él.

En particular, $\mathbf{F} \equiv 0$. entonces $\mathbf{p} = \textbf{constante}$

La ecuación 6.2 permite encontrar el incremento del momento lineal de la partícula en cualquier intervalo de tiempo, si se conoce la dependencia de la fuerza **F** y el tiempo. En realidad, de 6.2 se deduce que el incremento elemental del momento lineal de la partícula en el lapso dt es d**p** = **F** dt. Integrando esta expresión de t_i, a t_f, se encuentra el incremento del momento lineal

$$\boxed{\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}dt} \qquad 6.3$$

La magnitud en el segundo miembro, la denominan **impulso** de una fuerza.

$$\boxed{\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}dt} \qquad 6.4$$

Las unidades del impulso **J** son las mismas que las unidades de momento lineal **p**
De ese modo. el incremento del momento lineal de una partícula en cualquier intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es igual al impulso de una fuerza en este mismo tiempo. Este enunciado es equivalente a la segunda ley de Newton.

En general puesto que la fuerza puede variar como muestra la figura 6.1 es adecuada introducir el término de fuerza promedio

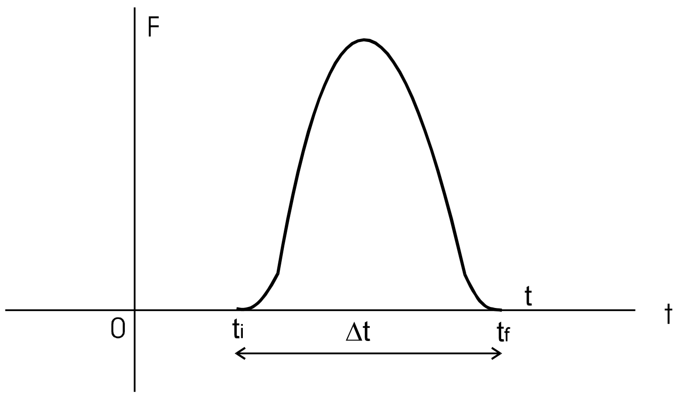


Figura 6.1. Representación del impulso como el área bajo la curva en el intervalo Δt.

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}dt \qquad 6.5$$

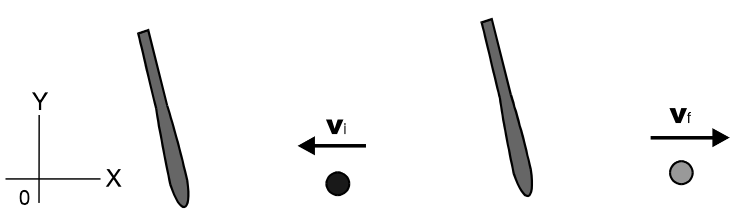
el calculo del impulso se vuelve sencillo se considera la fuerza constante o la fuerza promedio,

$$\boxed{\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} = \overline{\mathbf{F}}\Delta t} \qquad 6.6$$

EJEMPLOS.

I) Una bola de béisbol de 150 g lanzada a una velocidad de 41.6 m/s es bateada directamente hacia el lanzador a una velocidad de 61.5 m/s. El bate estuvo en contacto con la bola durante 4.70 ms. Halle la fuerza promedio ejercida por el bate sobre la bola.

<u>SOLUCION</u>

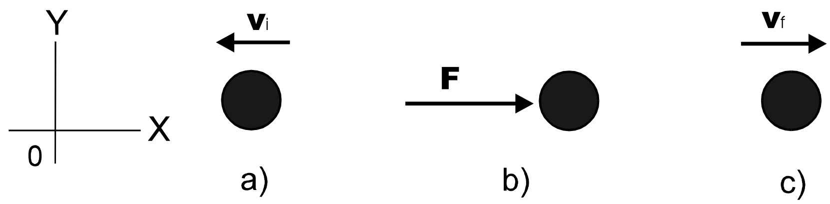


Se considera el problema en una dimensión, por lo tanto se aplica directamente la ecuación

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{mv_f - mv_i}{\Delta t} = \frac{m(v_f - v_i)}{\Delta t} = \frac{(0.150\ kg)\left(61.5\,{}^{m}\!/\!{}_{s} - \left(-41.6\,{}^{m}\!/\!{}_{s}\right)\right)}{4.70x10^{-3}\ s} = 3290\ N$$

II) Una fuerza que promedia 984 N es aplicada a una bola de acero de 420 g que se mueve a razón dé 1:l.8 m/s a causa de una colisión de 27.0 ms de duración. Si la fuerza está en dirección opuesta a la velocidad inicial de la bola, halle la velocidad final de la bola.

SOLUCION



El momento lineal inicial que tiene la bola en la figura a) es modificado por la fuerza **F** que actúa como se muestra en la figura b) el resultado es mostrado en la figura c). Aplicando la ecuación del impulso

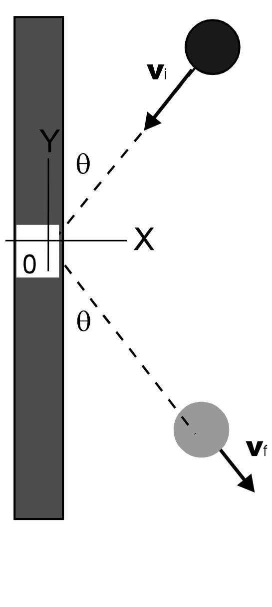
$$F\,\Delta t = \Delta P = mv_f - mv_i$$

despejando la velocidad final

$$v_{fi} = \frac{F\,\Delta t}{m} + v_i = \frac{(984\ N)(27x10^{-3})}{0.420\ kg} - 13.8\ {}^{m}\!/\!{}_{s} = 49.5\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

III) Una bola de 325 g a una velocidad v de 6.00 m/s golpea una pared con un ángulo de 30.0^0 y luego rebota con la misma velocidad y ángulo. Está en contacto con la pared durante 10.0 ms. (a) ¿Qué impulso experimentó la bola? (b) ¿Cuál fue la fuerza promedio ejercida por la bola contra la pared?

SOLUCION



a) El impulso se calcula mediante la ecuación

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{P} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$$

el momento lineal inicial y final utilizando el sistema de referencia de la figura es

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i = mv_i(-\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta) = (-mv_i \operatorname{sen}\theta, -mv_1\cos\theta)$$

$$\mathbf{p}_f = m\mathbf{v}_f = mv_{fi}(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta) = (mv_{fi} \operatorname{sen}\theta, -mv_{f1}\cos\theta)$$

las velocidades inicial y final tienen la misma magnitud, entonces

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = (mv\operatorname{sen}\theta, -mv\cos\theta) - (-mv\operatorname{sen}\theta, -mv\cos\theta)$$

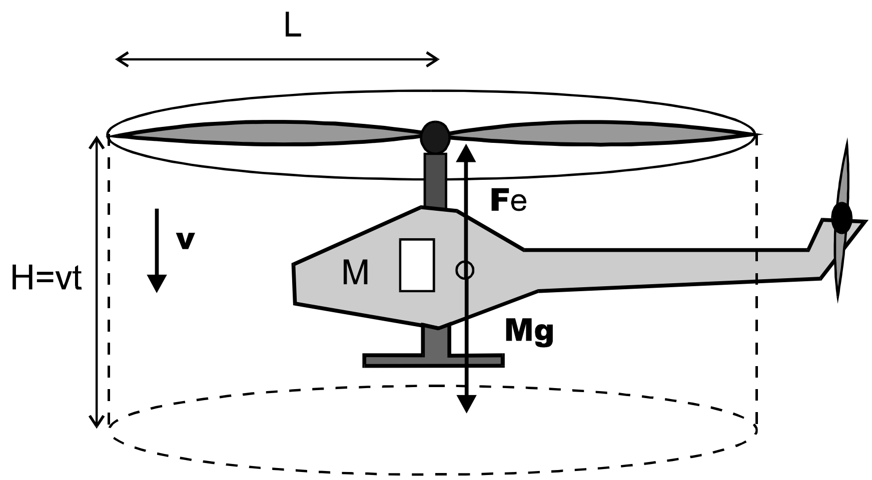
$$= (2mv\operatorname{sen}\theta, 0) = \left(2(0.325\ kg)\left(6.00\ {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)\operatorname{sen}30^0, 0\right) = (1.95\,Ns, 0)$$

b) la fuerza promedio ejercida por la pared es

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{1}{10.0x10^{-3}\ s}\left(1.95\ {}^{N}\!/\!{}_{s}, 0\right) = (195, 0)N$$

IV) Supóngase que las hélices de un helicóptero empujan verticalmente hacia abajo la columna cilíndrica de aire que barren al girar. La masa total del helicóptero es de 1820 kg y la longitud de las hélices es de 4.88 m. Halle la potencia mínima necesaria para mantener al helicóptero en el aire. Supóngase que la densidad del aire es de 1.23 kg/m^3.

SOLUCION



La fuerza ejercida por el motor para mantener suspendido el helicóptero es igual al peso del mismo $\mathbf{F}_e = M\mathbf{g}$ la potencia del mismo es entonces

$$P = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v} = Mgv \qquad 1$$

Por otra parte la fuerza $\mathbf{F}_e$ se puede calcular mediante el cambio del impulso que sufre el aire debido a las aspas, se supone una velocidad vertical antes de pasar por las aspas igual a cero y después igual a la velocidad v. En un tiempo t una partícula del aire recorre una distancia $H = vt$, de tal manera que el volumen del cilindro formado por una de las aspas en el tiempo t es

$$V = \pi\, L^2 H = \pi\, L^2 vt$$

La masa m del aire desplazado por una aspa es $m = \rho V = \rho\pi L^2 vt$, como el helicóptero tiene entonces la fuerza $\mathbf{F}_e$ en magnitud es

$$F_e = \frac{\Delta P}{t} = \frac{mv}{t} = \frac{\left(\rho\,\pi\, L^2 vt\right)v}{t} = \rho\pi\, L^2 v^2 \qquad 2$$

comparando con la ecuación 1

$Mg = \rho\pi\, L^2 v^2$ de donde se despeja a v

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{\rho\pi L^2}} \qquad 3$$

substituyendo la ecuación 3 en la ecuación 1

$$P = \frac{Mg}{L}\sqrt{\frac{Mg}{\rho\pi}} = \frac{(1820\,kg)\left(9.8\ {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)}{4.88\ m}\sqrt{\frac{(1820\,kg)\left(9.8\ {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)}{\left(1.23\ {}^{kg}\!/\!_{m^3}\right)\pi}} = 248.3\ kW$$

Esta potencia corresponde a un helicóptero con una sola aspa, puesto que se deben considerar las dos entonces la potencia obtenida se divide a la mitad

$$P = 124.1\ kW$$

V) Es bien sabido que las balas y otros proyectiles disparados contra Supermán simplemente rebotan en su pecho. Supóngase que un gángster dispara contra el pecho de Supermán balas de 3 g a razón de 100 balas/min, siendo la velocidad de cada bala de sao m/s. Supóngase también que las balas rebotan directamente hacia atrás sin cambiar la velocidad. Demuestre que la fuerza promedio ejercida por la ráfaga de balas sobre el pecho de Supermán es de 5.0 solamente.

SOLUCION

El cambio de momento $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ que experimenta cada una de las balas se puede calcular utilizando el resultado del problema anterior para θ=0, en tal caso solo existe el cambio de momento en la componente X, así pues $\Delta p_x = 2mv$, si N es el numero de balas que rebotan en el pecho de Supermán el momento total es $\Delta P_x = 2Nmv$, por lo tanto la fuerza ejercida por las balas

$$F_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{2Nmv}{\Delta t} = 2mv\frac{N}{\Delta t} = 3(3x10^{-3})(500\ {}^{m}\!/\!_{s})(\frac{5}{3}\ {}^{balas}\!/\!_{s}) = 5\ N$$

en el resultado se utilizó que $\frac{N}{\Delta t} = 100\ {}^{balas}\!/\!_{min} = 100\ \frac{balas}{min}\frac{1\ min}{60} = {}^{5}\!/\!_{3}\ {}^{balas}\!/\!_{s}$

Centro de masa y conservación de la cantidad de movimiento

En cualquier sistema de partículas hay un punto notable, llamado centro de masas, que posee una serie de importantes e interesantes propiedades. Se considera que en ese punto se encuentra concentrada la masa del cuerpo y su movimiento translacional corresponde al de la partícula sin importar que el cuerpo gire ó vibre. Su posición con relación al origen O del sistema coordenado dado de referencia se determina por la fórmula siguiente:

$$\boxed{\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i\mathbf{r}_i} \qquad 6.7$$

Donde m_i y $\mathbf{r}_i$ son la masa y el radio vector de la partícula i-ésima, $M = \sum m_i$ es la masa de todo el sistema (ver figura 6.2) la suma se realiza sobre las N partículas del sistema.

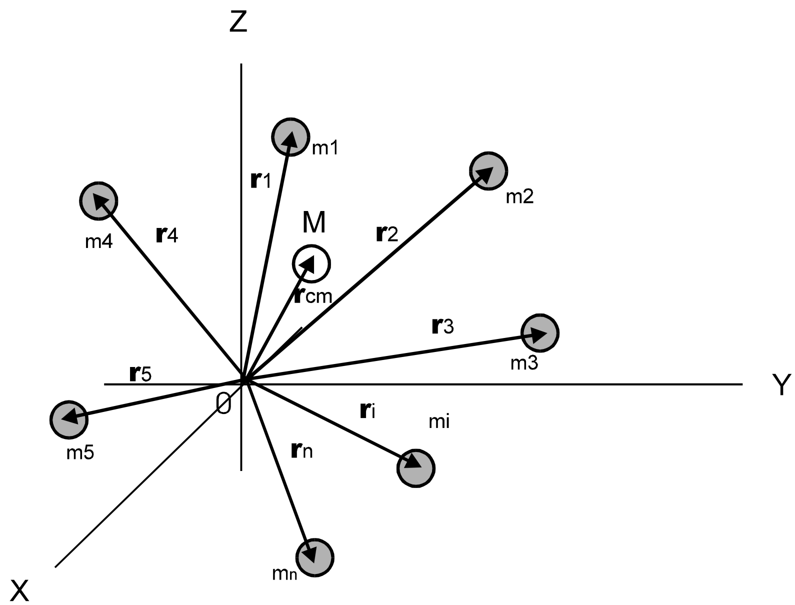


Figura 6.2. Definición del centro de masa.

Se debe señalar, que el centro de masa de un sistema coincide con su centro de gravedad sólo en aquellos casos, cuando el campo de las fuerzas de gravedad se puede considerar homogéneo.
Es verdad que esta afirmación es justa La velocidad del centro de masa en el sistema de referencia dado se obtiene diferenciando la ecuación 6.7 respecto del tiempo

$$\frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

la expresión anterior se puede transformar en

$$M\mathbf{v}_{cm} = \sum m_i \mathbf{v}_i \qquad 6.8$$

La velocidad $\mathbf{V}_{cm}$ adquiere el sentido de velocidad del movimiento del sistema como un todo. La parte derecha de la ecuación 6.8 corresponde al momento lineal total del sistema que es la suma de los momentos lineales individuales

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i \qquad 6.9$$

Entonces

$$M\mathbf{v}_{cm} = \mathbf{P} \qquad 6.10$$

Es decir, El momento lineal del sistema es igual al producto de la masa total de éste por la velocidad de su centro de masa.

Derivando la ecuación 6.9 respecto del tiempo se obtiene

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{F}_i$$

En la parte derecha se ha aplicado la segunda ley de Newton $m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$

Cada partícula i del sistema se encuentra sometida a Fuerzas internas debidas a las restantes partículas y fuerzas externas, como muestra la figura 6.3, la fuerza **F**i sobre la partícula i se puede escribir como la suma siguiente

$\mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}_{ij} + F_{i\,ext}$ la suma se realiza para i ≠j

entonces $\displaystyle\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{i\,j} + \sum \mathbf{F}_{i\,ext}$

La tercera ley de Newton aplicada a este caso indica que $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$

Por lo que $\displaystyle\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{i\,j} = \mathbf{0}$ y si además la fuerza total externa es $\mathbf{F}_{ext} = \sum \mathbf{F}_{i\,ext}$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad 6.11$$

ó

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{a}_{cm} \qquad 6.12$$

Si en el sistema solo actúan fuerzas internas, y las externas son cero entonces $\displaystyle\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0}$ de donde se concluye que $\mathbf{P} = \textbf{constante}$ 6.13

Lo cual es equivalente a

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f \qquad 6.14$$

expresiones que son equivalentes a

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N = \textbf{constante} \qquad 6.15$$

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} + \cdots + \mathbf{p}_{Ni} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} + \cdots + \mathbf{p}_{Nf} \qquad 6.16$$

Cualquiera de las expresiones de la 6.13 a la 6.16 señala que el **momento total se conserva** si la fuerza externa toral sobre el sistema es cero.

Aún cuando pueden variar con el tiempo momentos lineales de partículas aisladas o de partes del sistema cerrado, la ú]tima expresión indica que estas variaciones siempre transcurren de modo que el incremento del momento lineal de una parte del sistema es igual al decremento del momento lineal de la parte restante del sistema de tal forma que la suma total se mantiene constante.

Si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema no es cero, entonces la ley de conservación del momento no será válida. Sin embargo en algunos caso se puede redefinir el sistema para de manera que incluya otros objetos y así aplicar el principio de conservación del momento: Por ejemplo si se considera el sistema piedra que cae, el momento no se conserva sino que aumenta a medida que cae hacia la tierra, esto se debe a la fuerza de gravedad que se considera externa. Si el sistema se amplia para incluir la Tierra, el momento total piedra + tierra visto desde un sistema de referencia inercial se conserva. En marco de referencia inercial la piedra cae hacia la tierra y la tierra se mueve también hacia la piedra, pero debido a su tamaño su velocidad es pequeñísima y no sería notorio.

En un sistema no cerrado se puede conservar no la misma impulsión **P**, sino su proyección P_x en cierta dirección x. Esto sucede cuando la proyección de la fuerza externa resultante **F** en la dirección x es igual a cero, es decir, el vector **F** es perpendicular a ella. Efectivamente, proyectando la ecuación 6.11 en la dirección X se obtiene

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x \qquad 6.17$$

De donde se deduce que sí $F_x \equiv 0$ entonces $P_x = constante$

Por ejemplo, durante el movimiento de un sistema en un campo homogéneo de fuerzas de gravedad se conserva la proyección de su momento lineal en cualquier dirección horizontal, suceda lo que suceda en el sistema. Resultado que será muy utilizado en la solución de problemas posteriormente.

La experiencia muestra que a ley de conservación del momento lineal, es una la ley fundamental de la Naturaleza, que no conoce excepción alguna. Pero en esta amplia concepción ella ya no es resultado de las leyes de Newton y debe considerarse como un principio general independiente, que es generalización de factores experimentales.

EJEMPLOS

VI) Un Chrysler con una masa de 2210 kg se está moviendo a lo largo de un tramo recto de carretera a 105 km/h. Es seguido por un Ford de 2080 kg de masa que se mueve a 43.5 km/h. ¿Qué velocidad tiene el centro de masa de los dos carros en movimiento?

SOLUCION

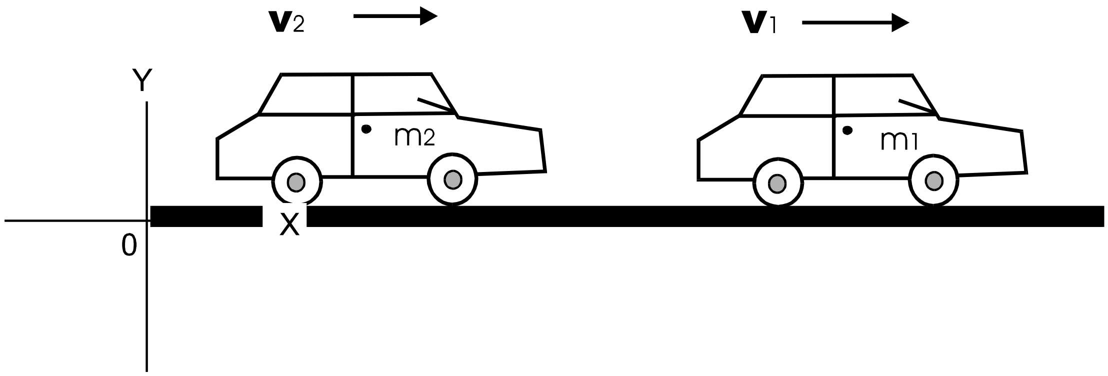
La figura muestra la situación, los valores de masa y velocidad de los autos son:

$$m_1 = 2210\ kg \qquad v_1 = 105\ {}^{km}/_{h} = 29.2\ {}^{m}/_{s}$$
$$m_2 = 2080\ kg \qquad v_2 = 43.5\ {}^{km}/_{h} = 12.1\ {}^{m}/_{s}$$

La velocidad del centro de masa se obtiene directamente

$$v_{cm} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1 v_1 + m_2 v_2\right]$$

$$= \frac{1}{2210\ kg + 2080\ kg}\left[(2210\,kg)\left(29.2\ {}^{m}/_{s}\right) + (2080\,kg)\left(12.1\ {}^{m}/_{s}\right)\right] = 20.9\,{}^{m}/_{s}$$



VII) Dos patinadores, uno con 65 kg de masa y el otro con 42 kg de masa, están de pie en una pista de hielo sosteniendo una vara de 9.7 m de longitud y de masa despreciable. Comenzando desde los extremos de la pértiga, los patinadores se jalan a sí mismos a lo largo de la vara hasta que se encuentran. ¿Qué distancia recorrerá el patinador de 42 kg?

SOLUCION

Para la figura se considera que

$$m_1 = 42\ kg \qquad m_2 = 65\ kg \qquad L = 9.7\ m$$

EL centro de masas del sistema formado por los patinadores y la vara no se mueve, no importa quien de los dos sea el que jale la vara, puesto que estas fuerzas se consideran fuerzas internas. La figura a muestra el inicio del movimiento y la figura b el momento en que se encuentran en el centro de del sistema al final de jalar la vara todo lo posible Colocando el sistema de referencia justo donde se encuentra el patinador de menor masa o sea m_1

$$x_{cm} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1 x_1 + m_2 x_2\right] \quad = \frac{1}{65\ kg + 42\ kg}\left[(42kg)(0\ m) + (65kg)\left(9.7\ {}^{m}\!/_{s}\right)\right] = 5.9\,m$$

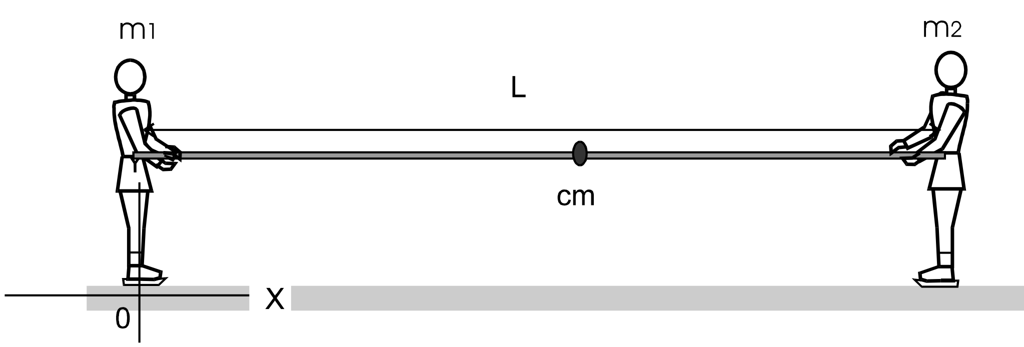


Figura a

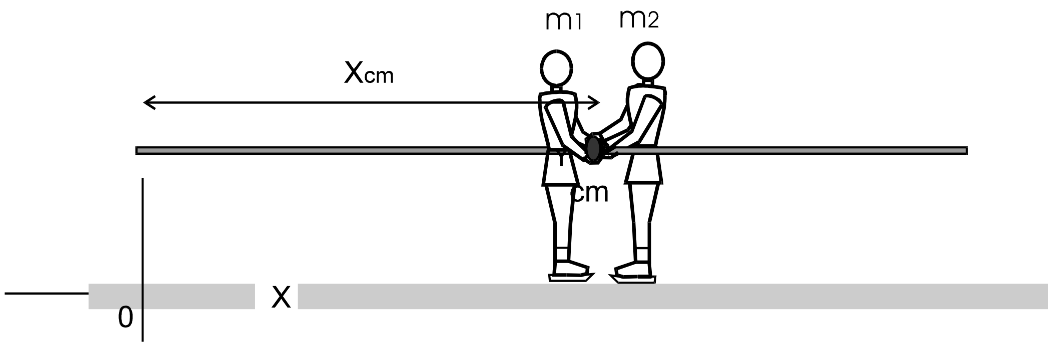
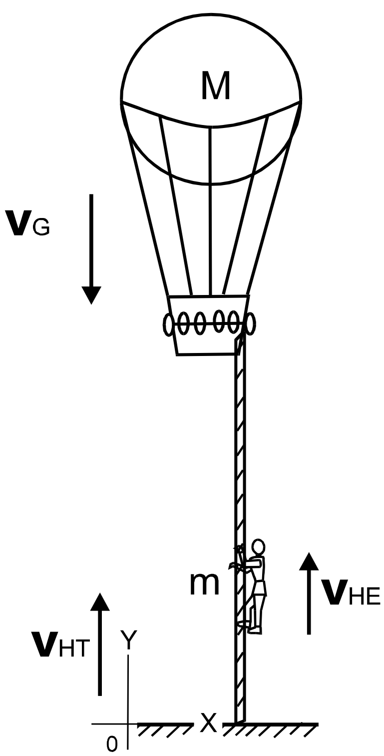


Figura b

VIII) Un hombre de masa m se halla asido a una escalera de cuerda suspendida de un globo de masa M. El globo se halla estático respecto al terreno. (a) Sí el hombre comienza a trepar por la escalera a una velocidad v (con respecto a la escalera), ¿en qué dirección y a que velocidad (respecto a la Tierra) se moverá el globo? (b) ¿Cuál es el estado de movimiento después de que el hombre deja de trepar?

SOLUCION



a) Las fuerzas que actúan en la dirección vertical y son el peso total del globo y el hombre, la fuerza de sustentación del globo y la tensión en la escalera, la resultante de la fuerzas es cero, por lo que se puede aplicar la conservación del momento en esa dirección. Las velocidades deben ser referidas a un sistema inercial el cual se considera que es la tierra como se muestra en el dibujo. La velocidad del globo V_G se supone dirigida hacia abajo, con esta condición la velocidad del hombre respecto de la tierra es V_{HT} es

$$v_{HT} = v_G - v_{HE}$$

donde V_{HE} es la velocidad del hombre respecto a la escalera
La velocidad del centro de masas del sistema Globo-Hombre es cero y la acción del hombre se considera fuerza interna por lo tanto se mantendrá sin desplazarse mientras el hombre sube por la escalera, entonces

$$0 = mv_{HT} + Mv_G$$

$$0 = m(v_G - v_{HE}) + Mv_G$$

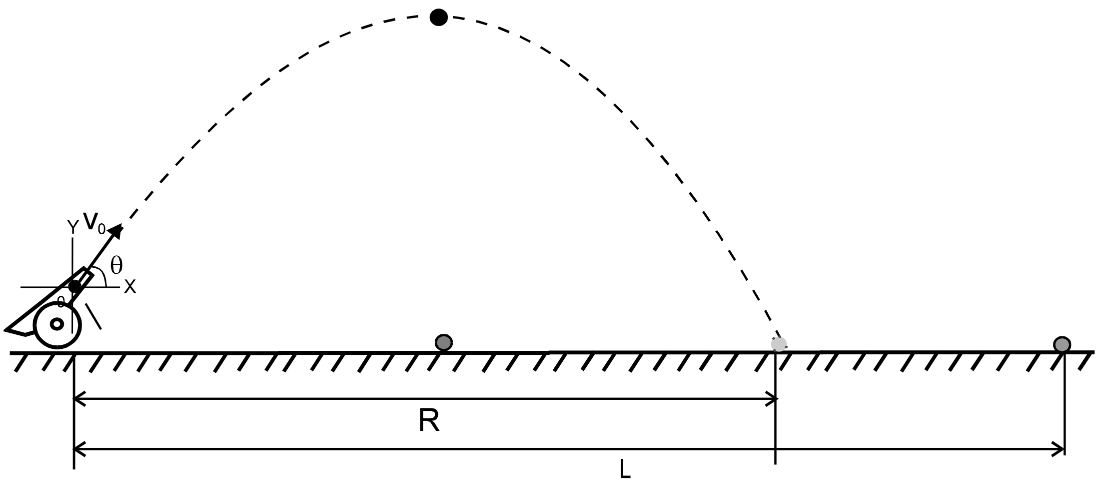
$$0 = (m + M)v_G - mv_{HE}$$

$$v_G = \frac{mv_{HE}}{(m + M)}$$

b) Una vez que el hombre deje de subir por la escalera la fuerza de sustentación del globo hará que este regrese a su posición inicial.

IX) Se dispara una bala de un arma a una velocidad de salida de 466 m/s, a un ángulo de 57.4 con la horizontal. En la parte más alta de la trayectoria, la bala explota en dos fragmentos de igual masa. Uno de los fragmentos, cuya velocidad inmediatamente después de la explosión es cero, cae verticalmente. ¿A qué distancia del cañón cae el otro fragmento, suponiendo un terreno llano?

SOLUCIÓN



La figura anterior muestra la situación del problema donde $v_0 = 466\ {}^{m}\!/_{s}$ y $\theta = 57.4^o$

El centro de masas sigue la misma trayectoria de la parábola, el alcance máximo se puede determinar por:

$$R = \frac{v_o^{\,2}}{g}\operatorname{sen} 2\theta = \frac{(466\ {}^{m}\!/_{s})^2\ \operatorname{sen} 2(57.4)}{9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}} = 20115.23\ m$$

Utilizando el sistema de referencia de la figura el centro de se tiene que el centro de masas es

$$x_{cm} = R = \frac{1}{m}\left[\frac{m}{2}\frac{R}{2} + \frac{m}{2}L\right] = \frac{R}{4} + \frac{L}{2}$$

de donde

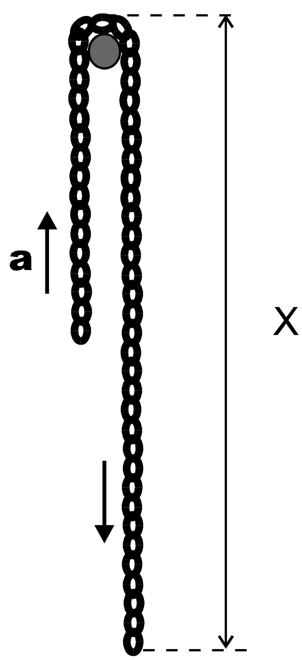
$$L = 2\left[R - \frac{1}{4}R\right] = 2\left(\frac{3}{4}R\right) = \frac{3}{2}R$$

por lo tanto la distancia a donde cae el segundo bloque es:

$$L = R + \frac{1}{2}R = 20115.23\ m + 10057.6\ m = 30172\ m$$

X) Una cadena flexible, uniforme, de longitud L, con un peso por unidad de longitud λ pasa sobre una clavija pequeña, sin fricción; véase la figura 2. Se deja caer desde una posición de reposo de modo que una longitud de cadena x cuelga de un lado, y una longitud L - x cuelga del otro lado. Halle la aceleración a en función de x.

SOLUCION



La cadena del lado izquierdo corresponde a la masa m1 y la cadena del lado derecho a la masa m2, las fuerzas que actúan sobre cada uno de los pedazos de cadena son solamente su peso entonces se puede calcular la aceleración de la cadena mediante la ecuación

$$Ma_{cm} = F_1 + F_2 = m_1 g + m_2 g$$

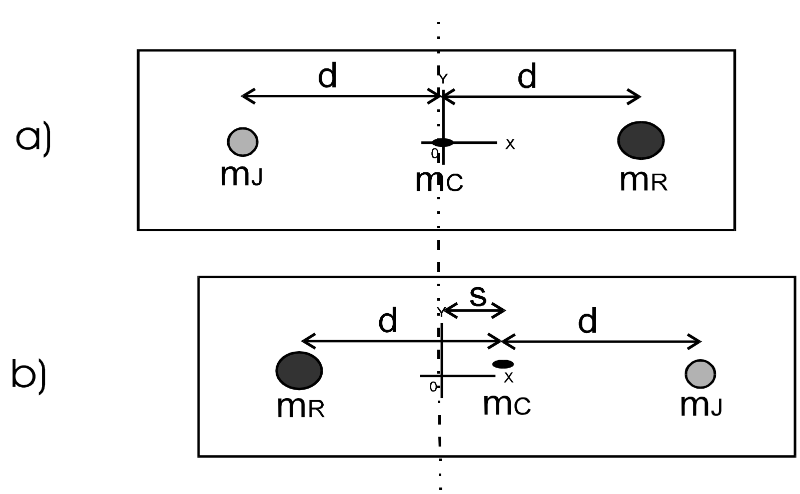
$$a_{cm} = \frac{1}{\lambda L}\left[-(L-x)\lambda g + X\lambda g\right] = \frac{1}{L}\left[-Lg + xg + xg\right]$$

$$= g\left[-1 + \frac{2x}{L}\right]$$

el signo menos de la en el peso de la cadena del lado izquierdo se debe a que esta jala a la parte derecha que se toma como positivo.

XI) Ricardo que tiene una masa de 78.4 kg, y Judith, quien pesa menos, se divierten al anochecer en un lago dentro de una canoa de 31.6 kg. Cuando la canoa está en reposo en aguas tranquilas, intercambian asientos, los cuales se hallan separados a una distancia de 2.93 m y simétricamente situados con respecto al centro de la canoa. Ricardo observa que la canoa se movió 41.2 cm con relación a un tronco sumergido y calcula la masa de Judith. ¿Cuál es esta masa?

SOLUCION



De la figura $m_R = 78.4\ kg$ es la masa de Ricardo, m_J la masa de Judith, $m_c = 31.6\ kg$ la masa de la canoa, $d = 2.93\ m$ la distancia entre asientos y $s = 41.2\ cm$ el desplazamiento de la canoa respecto del tronco.

El sistema que se debe tener en cuenta es canoa – Ricardo – Judith, debido a que se considera que no hay fricción entre la canoa y el agua y todas las fuerzas ejercidas por los pasajeros el centro de masas no se mueve respecto de un sistema de referencia inercial antes y después de que han cambiado de lugar los pasajeros. El sistema de referencia que facilita los resultados es el mostrado en la figura y pasa exactamente por el centro de masas individual de la canoa, calculando en cada posición a) y b) el centro de masas

$$x_{cm} = \frac{1}{M_T}\left[dm_R - dm_J + m_C(0)\right].$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M_T}\left[(d+s)m_J + (d-s)m_R + sm_C\right]$$

Igualando:

$$dm_R - dm_j = (d+s)m_J - (d-s)m_R + sm_c$$

$$dm_R - dm_j = (d+s)m_J - dm_R + sm_R + sm_c$$

$$dm_R + dm_R - s(m_R + m_c) = (d+s)m_J + dm_J$$

$$2dm_R - s(m_R + m_c) = (2d+s)m_J$$

despejando a m_J

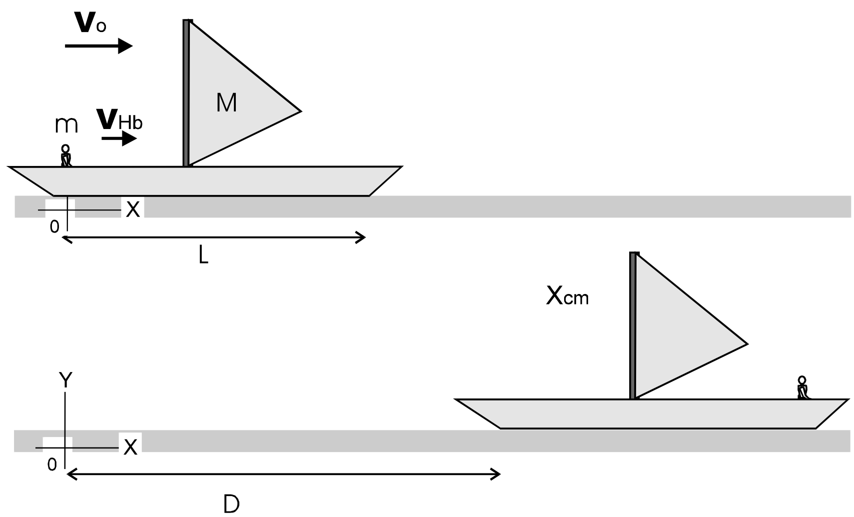
$$m_J = \frac{2dm_R - s(m_R + m_c)}{2d+s}$$

evaluando

$$= \frac{2(2.93\ m)(78.4\ kg) - 0.412\ m(78.4\ kg + 31.6\ kg)}{2(2.93\ m) + 0.412\ m} = \frac{414.1}{6.27} = 66.02\ kg$$

XII) Una persona de 84.4 kg está parada en la parte posterior de un trineo de vela que se mueve sobre el hielo; el trineo pesa 425 kg y avanza a 4.16 m/s por el hielo, que puede considerarse sin fricción. Decide caminar hacia el frente del bote, de 18.2 m de longitud y lo hace a una velocidad de 2.08 m/s respecto al bote. ¿Qué distancia recorrió el bote sobre el hielo mientras él estuvo caminando?

SOLUCION



Las indicaciones del dibujo se refieren a $m = 84.4\ kg$ masa del hombre, $M = 425\ kg$ masa del bote, $v_0 = 4.16\ m/s$ velocidad inicial del sistema bote – hombre, $L = 18.2\ m$ longitud del bote y $v_{Hb} = 2.08\ m/s$ la velocidad del hombre respecto del bote.

Antes de que el hombre comience a moverse la velocidad de todo el sistema junto con su centro de masa es v_0. Al moverse la persona, el centro de masas se mueve a la misma velocidad v_0, pero el bote retrocede ligeramente, la velocidad del hombre respecto al sistema tierra es $v_{HT} = v_{bT} + v_{Hb}$ donde V_{bT} es la velocidad del bote respecto a la tierra.
Aplicando la ley de la conservación del momento lineal

$$M_T v_{cm} == m_H v_{HT} + M v_{bT}$$

$$M_T v_0 = m_H (v_{bt} + v_{Hb}) + M v_{bT}$$

$$v_{bT} = \frac{M_T v_0 - m_H v_{Hb}}{M + m}$$

$$= \frac{(84.4\ kg + 425\ kg)(4.16\ m/s) - (84.4\ kg)(2.08\ m/s)}{425\ kg + 84.4\ kg} = 3.815\ m/s$$

El tiempo que se mueve el bote es igual al tiempo que tarda el hombre recorrer la longitud del barco, entonces

$$t = \frac{L}{v_{Hb}} = \frac{18.2\ m}{2.08\ m/s} = 8.75\ seg$$

La distancia recorrida por el barco es

$$D = v_{bT}t = \left(3.81\ m/s\right)\left(8.75\ seg\right) = 33.384\ m$$

XIII) El trineo de un cohete con una masa de 2870 kg se mueve a razón de 252 m/s sobre unos rieles. En cierto punto, un compartimento especial del trineo se hunde en un depósito de agua situado entre los rieles y saca agua para echarla dentro de un tanque vacío del trineo. Determine la velocidad del trineo después de que el tanque se ha llenado con 917 kg de agua.

SOLUCION

En la figura m_T es la masa del trineo, m_a la masa de agua en el compartimento, $\mathbf{v}_A$ la velocidad cuando el trineo está vacío y $\mathbf{v}_B$ la velocidad cuando el trineo con el agua.

Para resolver el problema se aplica la conservación del momento lineal en la dirección de movimiento X, esto es

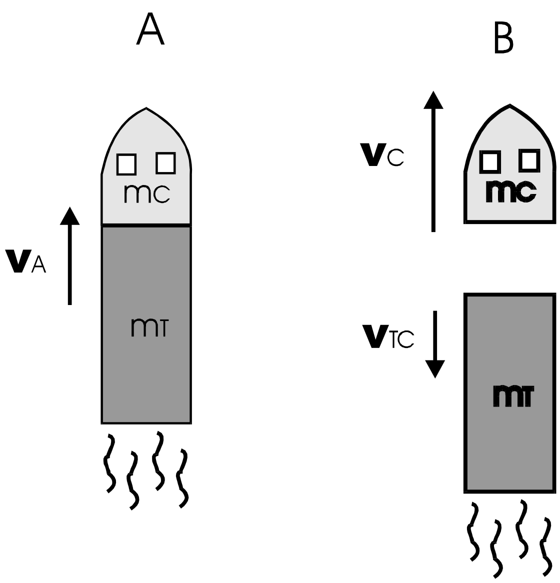
$$P_A = P_B$$

$$m_T v_A = (m_T + m_a)v_B$$

$$v_B = \frac{m_T v_A}{m_T + m_a} = \frac{\left(2870\,kg\right)\left(252\ m/s\right)}{2870\,kg + 917\,kg} = 190.0\ m/s$$

XIV) Un vehículo espacial viaja a 3860 km/h con respecto a la Tierra cuando el motor vacío del cohete se desprende y es enviado de regreso a una velocidad de 125 km/h con respecto al módulo de mando. La masa del motor es el cuádruple de la masa del módulo. ¿Cuál es la velocidad del módulo de mando después de la separación

SOLUCION



En la figura m_C es la masa del módulo de mando, m_T la masa de motor, $\mathbf{v}_A$ la velocidad cuando el vehículo espacial viaja unido, $\mathbf{v}_C$ la velocidad del módulo de mando después de separarse el motor y $\mathbf{v}_{TC}$ la velocidad del motor respecto del módulo de mando.

Las velocidades deben referirse a un sistema inercial que en este caso es la tierra, de esta manera la velocidad del motor en este sistema es

$$\mathbf{v}_T = v_C - v_{TC}$$

El momento lineal se conserva en la dirección Y, esto es $P_A = P_B$

$$(m_T + m_C)v_A = m_T v_T + m_C v_C = m_T(v_C - v_{TC}) + m_C v_C =$$

de donde $\mathbf{v}_C$

$$v_C = \frac{(m_T + m_c)v_A + m_T v_{TC}}{m_T + m_C}$$

puesto que $m_T = 4m_C$

$$v_C = \frac{5m_c v_A + 4m_C v_{TC}}{5m_C} = \frac{5v_A + 4v_{TC}}{5} = \frac{5\left(3860\ {}^{km}\!/\!_{h}\right) + 4\left(125\ {}^{km}\!/\!_{h}\right)}{5} = \left(3960\ {}^{km}\!/\!_{h}\right)$$

Colisiones en una y dos dimensiones

Colisión de dos partículas

Una colisión es la interacción de dos cuerpos en un tiempo pequeño, En el momento de la colisión las fuerzas externas son insignificantes comparadas con las fuerzas que cada cuerpo ejerce sobre el otro, estas grandes fuerzas internas que aparecen deforman los cuerpos y al regresar a su forma original los dos cuerpos ó al menos uno de ellos ha modificado su movimiento original, esto es se distinguen claramente fases de colisión a saber:

a) *antes de la colisión*
b) la colisión
c) después de la colisión

La figura 6.3 muestra las fases de la colisión de dos cuerpos.

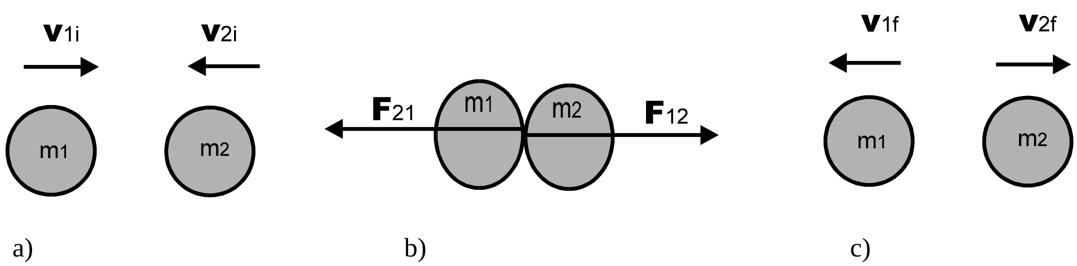


Figura 7.3

Generalmente se desconoce exactamente como varían las fuerzas internas de la colisión, la figura 6.1 muestra aproximadamente la gráfica de una de estas fuerzas. Sin embargo se puede saber que sucede después de la colisión si es conocido el movimiento inicial de los cuerpos aplicando de las leyes de conservación del momento y la energía.

Para demostrar que en momento lineal se conserva tómese como base la figura la 7.3, donde como se observa m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos, p_{1i}, p_{2i} los respectivos momentos lineales iniciales y p_{1f}, p_{2f} los momentos lineales finales. Durante la fuerza de interacción que actúa sobre el cuerpo 1 es $\mathbf{F_{21}}$ y para el cuerpo 2 es $\mathbf{F_{12}}$, pero recordando la tercera ley de Newton $\mathbf{F_{21}} = -\mathbf{F_{12}}$ el cambio de momento lineal durante la colisión del cuerpo 1 se puede calcular aplicando la ecuación 7.3

$$\Delta\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{1f} - \mathbf{p}_{1i} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{21} dt$$

y del cuerpo 2

$$\Delta\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{2f} - \mathbf{p}_{2i} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{12} dt = -\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{21} dt$$

comparando las ecuaciones anteriores

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2$$
$$\mathbf{p}_{1f} - \mathbf{p}_{1i} = -(\mathbf{p}_{2f} - \mathbf{p}_{2i})$$

ordenado términos

$$\boxed{\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}} \qquad 6.18$$

Ecuación que indica que el momento se conserva.

Por otra parte durante una colisión la energía cinética no se conserva necesariamente debido a que la energía se puede transformar en otros tipos de energía como el calor, sonido, ó radiación y puede no existir la posibilidad de recuperarla por parte del sistema. Si durante la colisión se conserva **la energía cinética total**, la colisión es llamada **colisión elástica**, y se cumple que

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2} \qquad 6.19$$

. La colisión de bolas elásticas duras como las de billar ó las colisiones en el ámbito de partículas atómicas resultan ser casos muy cercanos a las colisiones elásticas.

En el caso de no conservarse la energía cinética durante la colisión esta se llamara **colisión inelástica**, que es realmente donde quedan comprendidas La casi totalidad de las colisiones reales.

Colisiones elásticas en una dimensión

Consideremos el caso de la colisión en una dimensión, esto es antes y después de la colisión los cuerpos permanecen en la misma línea, la cual por conveniencia se toma como eje X del sistema de referencia como muestra a figura 6.5, además las cantidades se pueden trabajar directamente como escalares. Aplicando la conservación del momento lineal y suponiendo que la colisión es elástica y por lo tanto se cumple la conservación de la energía cinética, se obtienen el sistema de ecuaciones

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad 6.20$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \qquad 6.21$$

Conociendo las masas y las velocidades iniciales son posibles determinar las velocidades finales despejando de las ecuaciones anteriores.

La ecuación 6.20 se puede escribir así $m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right)$ 6.22

y la ecuación 6.21 como $m_1\left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2\right) = m_2\left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2\right)$

ó $m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right)\left(v_{2f} + v_{2i}\right)$ 6.23

Dividiendo la ecuación 6.23 entre la ecuación 6.22 se obtiene

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

ordenando términos $v_{1i} - v_{2i} = -\left(v_{1f} - v_{2f}\right)$ 6.24

La ecuación anterior muestra que en el caso de colisiones elásticas la velocidad relativa de acercamiento de los cuerpos es igual a la velocidad relativa de alejamiento sin importar las masas de los cuerpos involucrados en la colisión.

Despejando a v_{2f} de la ecuación 6.24 $v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} - v_{2i}$

Substituyendo en la ecuación 6.20 $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 (v_{1i} + v_{1f} - v_{2i})$

De donde se despeja a v_{if}

$$\boxed{v_{1f} = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] v_{1i} + \left[\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right] v_{2i}} \qquad 6.25\ (a)$$

$$\boxed{v_{2f} = \left[\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right] v_{1i} + \left[\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right] v_{2i}} \qquad 6.25\ (b)$$

las ecuaciones anteriores permiten conocer las velocidades finales de los cuerpos durante una colisión elástica

Colisiones inelásticas en una dimensión

El caso de las colisiones inelásticas, se conserva el momento lineal, esto es la ecuación 7.20 es correcta, pero no así la conservación de la energía cinética ecuación 7.21, por lo que no se cuenta con un sistema de ecuaciones que pueda resolverse en general como en el caso anterior de colisiones elásticas. Sin embargo existe el caso en que la colisión es completamente inelástica lo cual significa que los cuerpos quedan “pegados” o “incrustados” uno dentro del otro como muestra la figura 7.4 y de esta manera después de la colisión se moverán con la misma velocidad final.

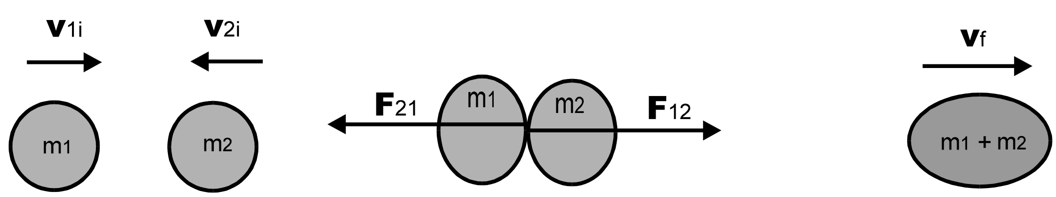


Figura 7.4

La ecuación de la conservación del momento lineal se reduce a

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2) v_f$$

de donde puede determinar la velocidad final

$$\boxed{v_f = \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right] v_{1i} + \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right] v_{2i}} \qquad 6.26$$

Colisiones elásticas en dos dimensiones

Los cuerpos al sufrir una colisión frontal no necesariamente siguen una trayectoria sobre la línea recta que los une antes de la colisión, tal como muestra la figura 6.7 y por lo tanto la colisión debe ser considerada al menos en dos dimensiones.

En estas condiciones la conservación de momento ecuación 6.18 se escribe en componentes

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \qquad 6.27a$$

$$p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \qquad 6.27b$$

y la ecuación de la energía cinética final

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \qquad 6.28$$

El conjunto de ecuaciones anteriores cuenta con cuatro incógnitas que son las componentes de las velocidades finales, o sea $\mathbf{v}_{1f} = (v_{1fx}, v_{1fy})$ y $\mathbf{v}_{2f} = (v_{2fx}, v_{2fy})$
Y como se observa solo se tiene 3 ecuaciones por lo tanto no es posible resolver para las velocidades finales hasta conocer alguna componente finales ó dato que permita completar el sistema de ecuaciones.

EJEMPLOS

XV) Un elefante furioso embiste a razón de 2.1 m/s contra una mosca que revolotea. Suponiendo que la colisión sea elástica, ¿a qué velocidad rebota la mosca? Nótese que el proyectil (el elefante) es mucho más masivo que el blanco (la mosca).

SOLUCION

Las velocidades finales para una colisión elástica son

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

Se considera que para este caso

$$m_1 = M = masa\ del\ elefante \qquad v_{1i} = velcidad\ inicil\ del\ elefante$$
$$m_2 = m = masa\ de\ la\ mosca \qquad v_{21} = 0 = velocidad\ inicil\ de\ la\ mosca$$

de esta manera las ecuaciones anteriores se simplifican a

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} = \left(\frac{M - m}{M + m}\right)v_{1i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} = \left(\frac{2M}{M + m}\right)v_{1i}$$

como la masa de la mosca es mucho menor que la masa del elefante m<<M, entonces
$M + m \cong M$ y $M - m \cong M$ por lo tanto

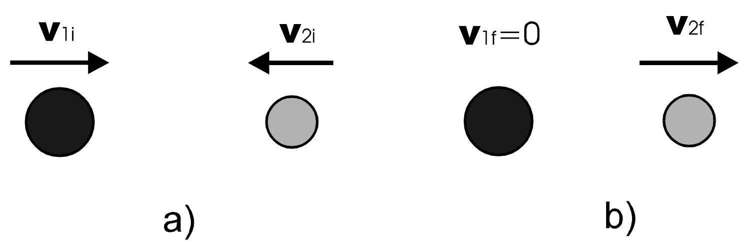
$$v_{1f} = \left(\frac{M - m}{M + m}\right) \cong \frac{M}{M}v_{1i} = v_{1i} = 2.1\, {}^{m}\!/_{s} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \left(\frac{2M}{M + m}\right)v_{1i} \cong \frac{2M}{M}v_{1i} = 4.2\, {}^{m}\!/_{s}$$

El resultado muestra en general que si el proyectil es más masivo que el blanco, en proyectil no modifica sustancialmente su velocidad, en cambio el blanco adquirirá una velocidad del doble la velocidad del proyectil.

XVI) Dos esferas de titanio se aproximan una a la otra frontalmente a la misma velocidad y chocan elásticamente. Después de la colisión una de las esferas, cuya masa de 300 g, permanece en reposo. ¿Cuál es la masa de la otra esfera?

SOLUCION

Supóngase que m_1= 300 g y que m_2 es la masa desconocida, la velocidad v_{1i}=v y v_{2i}=-v, debido a que se aproxima de derecha a izquierda como se muestra en la figura a)



La figura b) muestra el resultado de la colisión en la cual la bola 1 queda en reposo. Substituyendo los datos dados en la primer ecuación para colisiones elásticas

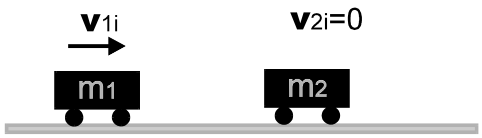
$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

$$0 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v - \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v = \left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}\right)v$$

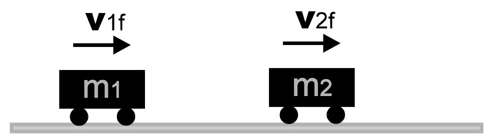
de donde $m_2 = \frac{1}{3}m_1 = \frac{1}{3}(300\ g) = 100\ g$

XVII) Un carrito de 342 g de masa que se mueve sobre una pista lineal sin fricción a una velocidad inicial de 1.24 m/s choca contra otro carrito de masa desconocida que está en reposo. La colisión entre los carritos es elástica. Después de la colisión, el primer carrito continuo en su dirección original a 0.636 m/s. (a) ¿Cuál es la masa del segundo carrito? (b) ¿Cuál es su velocidad después del impacto?

SOLUCION



(a)



(b)

La figura (a) muestra la situación antes de la colisión y la figura (b) el momento después de la colisión. La colisión es elástica por lo que se aplican directamente las ecuaciones

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \qquad 1$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - -m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \qquad 2$$

a) de la ecuación 1 aplicando que el segundo carro está en reposo

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \text{ de donde } (m_1 + m_2) v_{1f} = (m_1 - m_2) v_{1i} \text{ ó } m_2 (v_{1f} + v_{1i}) = m_1 (v_{1i} - v_{1f})$$

finalmente despejando m_2

$$m_2 = m_1 \frac{(v_{1i} - v_{1f})}{(v_{1f} + v_{1i})} = (342\ x10^{-3}\ kg) \frac{\left(1.24\ {}^{m}\!/\!{}_{s} - 0.636\ {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)}{\left(1.24\ {}^{m}\!/\!{}_{s} + 0.636\ {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)} = 0.110\ kg$$

b) la ecuación 2 conduce a

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2(342\ x10^{-3}\ kg)}{342\ x10^{-3}\ kg + 110\ x10^{-3}\ kg} \left(1.24\ {}^{m}\!/\!{}_{s}\right) = 1.88\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

XVIII) Un objeto de 2.0 kg de masa choca elásticamente contra otro objeto en reposo y continua moviéndose en la dirección original pero a un cuarto de su velocidad original. ¿Cuál es la masa del objeto golpeado?

SOLUCION

La colisión es elástica aplicando la ecuación

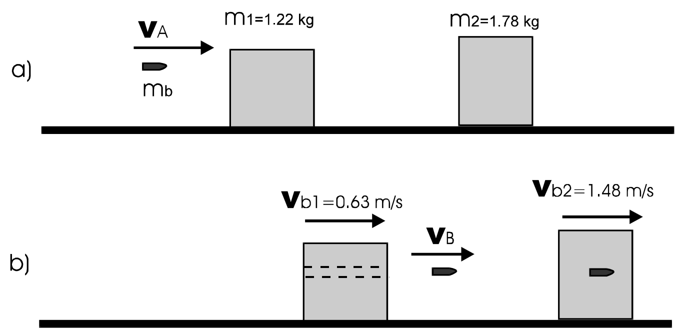
$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

con la condición $V_{2i} = 0$ y $V_{if}=1/4V_{1i}$, $\frac{1}{4} v_{1i} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$ despejando m_2

finalmente $m_2 = 3/5 m_1 = 3/5(2\ kg) = 1.2\ kg$

XIX) Una bala de 3.54 g se dispara horizontalmente contra dos bloques que descansan sobre una mesa sin fricción, como se muestra en la figura a. La bala atraviesa el primer bloque, que tiene una masa de 1.22 kg y se empotra en el segundo, que tiene una masa de 1.78 kg. Al hacerlo, se imprimen en los bloques velocidades de 0.630 m/s y 1.48 m/s, respectivamente, como se muestra en la figura b. Despreciando la masa extraída del primer bloque por la bala, halle (a) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque y (b) la velocidad original de la bala.

SOLUCION



EL problema se puede considerar como dos colisiones, en la primera figura a) la bala choca con el primer bloque de donde aplicando la conservación del momento lineal para esta colisión

$$m_b v_A = m_b v_B + m_1 v_{b1} \qquad 1$$

En la segunda colisión figura b) la bala sale con una velocidad V_B después de atravesar el primer bloque y se incrusta en el segundo bloque, entonces el bloque y la bala tendrán la misma velocidad final V_{b2} , aplicado la conservación de momento lineal para esta colisión

$$m_b v_B = (m_b + m_2) v_{b2} \qquad 2$$

a) de la segunda ecuación se obtiene la velocidad después de salir del primer bloque
b)

$$v_B = \frac{(m_b + m_2) v_{b2}}{m_b} = \frac{(0.00354\,kg + 1.78\,kg)(1.48\ m/s)}{0.00354\,kg} = 746\ m/s$$

b) de la primer ecuación y utilizando el resultado anterior la velocidad de la bala antes de colisionar con el primer bloque es

$$v_A = \frac{m_b v_B + m_1 v_{b1}}{m_b} = \frac{(0.00354\,kg)(745.6\ m/s) + (1.22\,kg)(0.63\ m/s)}{0.00354\,kg} = 962.8\ m/s$$

XX) Un cuerpo de 8.0 kg de masa avanza a 2.0 m/s sin la influencia de fuerza externa alguna. En cierto instante ocurre una explosión interna, que divide al cuerpo en dos trozos de 4.0 kg de masa cada uno; la explosión transmite al sistema de dos trozos una energía cinética de traslación de 16 J. Ninguno de los trozos abandona la línea de movimiento original. Determine la velocidad y la dirección del movimiento de cada uno de los trozos después de la explosión.

SOLUCION

(a) (b)

La figura a) muestra la situación antes de la explosión en la cual las dos partes tiene la misma velocidad igual a la velocidad del centro de masas. La figura b) el momento después de la explosión. La ley de la conservación del momento conduce a la ecuación

$$Mv_{cm} = mv_1 + mv_2 \qquad 1$$

Las incógnitas son las velocidades de las dos partes, por lo tanto se requiere de otra ecuación para resolver el problema, está se obtiene aplicando la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}Mv^2{}_{cm} + E_C = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad 2$$

La cantidad E_C es la energía de translación proporcionada por la explosión.

Utilizando los datos del problema y omitiendo las unidades para facilitar cálculos, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$16 = 4v_1 + 4v_2 \qquad v_1 + v_2 = 4 \qquad 3$$
$$16 + 16 = 2v_1^2 + 2v_2^2 \qquad v_1^2 + v_2^2 = 16 \qquad 4$$

de la ecuación 3 $v_2 = 4 - v_1$ 5

substituyendo en 4 $v_1^2 + \left(4 - v_1\right)_2^2 = 16$

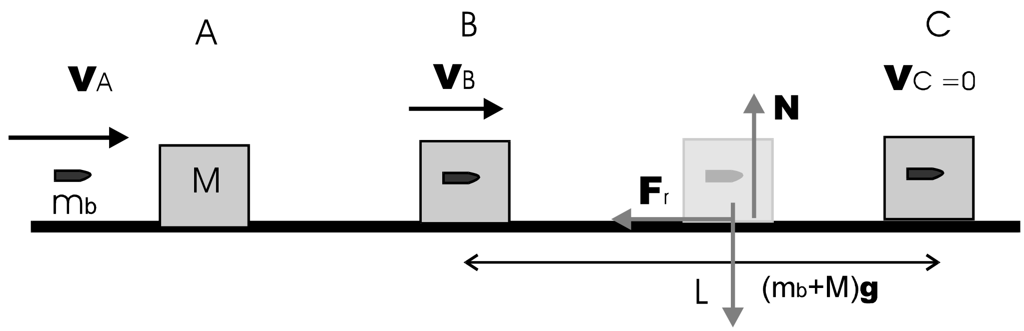
desarrollando y simplificando se obtiene $v_1\left(v_1 - 4\right) = 0$

de donde $v_1 = 0\ {}^{m}\!/_{s}$ ó $v_1 = 4\ {}^{m}\!/_{s}$

evaluando la ecuación 5 $v_2 = 4\ {}^{m}\!/_{s}$ ó $v_2 = 0\ {}^{m}\!/_{s}$

XXI) Una bala de 4.54 g de masa se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 2.41 kg en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la Superficie es de 0.27. La bala llega al reposo dentro del bloque, el cual se mueve 1.83 m (a) ¿Cuál es la velocidad del bloque inmediatamente después de que la bala llega al reposo dentro de él (b) ¿Cuál es la velocidad de la bala?

SOLUCION



En la parte A la bala colisiona con el bloque que se encuentra en reposo, Después de la colisión la bala queda incrustada en el bloque por lo que ambos tienen la misma velocidad final y la colisión es totalmente inelástica, aplicando la ley de la conservación del momento lineal

$$m_b v_A = (m_b + M)v_B \qquad 1$$

En la región de B a C la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie realizan un trabajo que disipa la energía cinética del bloque y la bala . De la figura anterior la fuerza de fricción se determina aplicando las leyes de Newton en componentes

$$F_r = (m_b + M)a\ , \qquad N - (m_b + M)g = 0$$

entonces

$$F_r = \mu_k N = \mu_k (m_b + M)g$$

el trabajo hecho por la fuerza de fricción es $W_{Fr} = F_r L = \mu_k (m_b + M)gL$

Por conservación de la energía $K_A = W_{Fr}$

$$\frac{1}{2}(m_b + M)v_B{}^2 = \mu_k (m_b + M)gL \qquad 2$$

a) de la ecuación 2

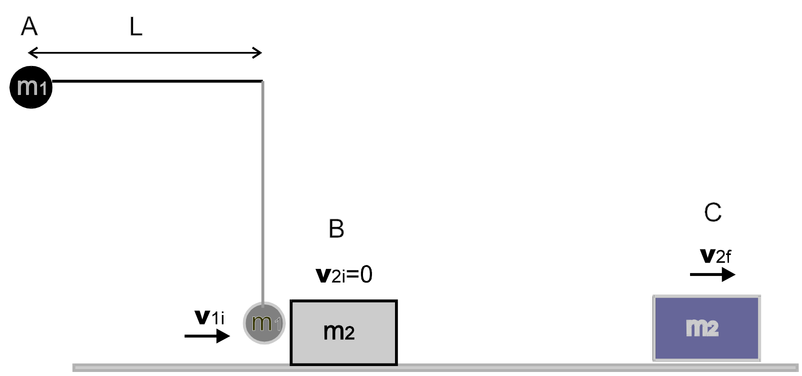
$$v_B = \sqrt{2\mu_k gL} = \sqrt{2(0.27)\left(9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}\right)(1.83\ m)} = 3.11\ {}^{m}\!/_{s}$$

b) despejando la velocidad de la bala de la ecuación 1

$$v_A = \frac{m_b + M}{m_b} v_B = \frac{4.54x10^{-3}\ kg + 2.41\ kg}{4.54x10^{-3}\ kg}\left(3.11\ m/s\right) = 1655\ m/s$$

XXII) Una bola de acero de 0.514 kg de masa está sujeta a un cordón de 68.7 cm de longitud del que se deja caer cuando el cordón está horizontal. En el fondo de su trayecto, la bola golpea un bloque de acero de 2.63 kg igualmente en reposo sobre una superficie sin fricción (Figura). La colisión es elástica. Halle (a) la velocidad de la bola y (b) la velocidad del bloque, ambos en el momento después de la colisión. (c) Suponga ahora que, durante la colisión, la mitad de la energía cinética mecánica se convierte en energía interna y en energía sónica. Halle las velocidades finales.

SOLUCION



a) la energía potencial que tiene el cuerpo m1 en la parte A se convierte en energía cinética en la parte B entonces

$$m_1 gL = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^{\ 2} \text{ de donde } v_{1i} = \sqrt{2gL} = \sqrt{2\left(9.8\ m/s\right)\left(0.687\ m\right)} = 3.67\ m/s$$

b) La colisión es elástica con velocidad inicial del segundo bloque igual a cero, entonces

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{0.514\ \ kg - 2.63\ kg}{0.514\ \ kg + 2.63\ kg}\left(3.67\ m/s\right) = -2.47\ m/s$$

$$v_{1f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2\left(2.63\ kg\right)}{0.514\ \ kg + 2.63\ kg}\left(3.67\ m/s\right) = 1.20\ m/s$$

c) El momento lineal se conserva sin importar el tipo de colisión entonces

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

sustituyendo los valores conocidos y omitiendo unidades

$$0.514\ v_{1f} + 2.630\ v_{2f} = 1.85 \qquad 1$$

Si hay perdida de energía cinética en la colisión $\frac{1}{4} K_i = K_f$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2\right] = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Nuevamente sustituyendo valores conocidos y omitiendo unidades

$$0.514\, v_{1f}^2 + 2..63\, v_{2f}^2 = 1.731 \qquad 2$$

Despejando V_{2f} de la ecuación 1

$$v_{2f} = 0.7034 - 0.1954 v_{1f} \qquad 3$$

Sustituyendo en la ecuación 2 y simplificando

$$0.514\, v_{1f}^2 + 2..63\left(0.7034 - 0.1954 v_{1f}\right)^2 = 1.731$$

$$0.6114\, v_{1f}^2 - 0.7230 v_{if} - 0.4298 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$v_{1f} = 1.617\, {}^{m}\!/_{s} \text{ y } v_{1f} = -0.434\, {}^{m}\!/_{s}$$

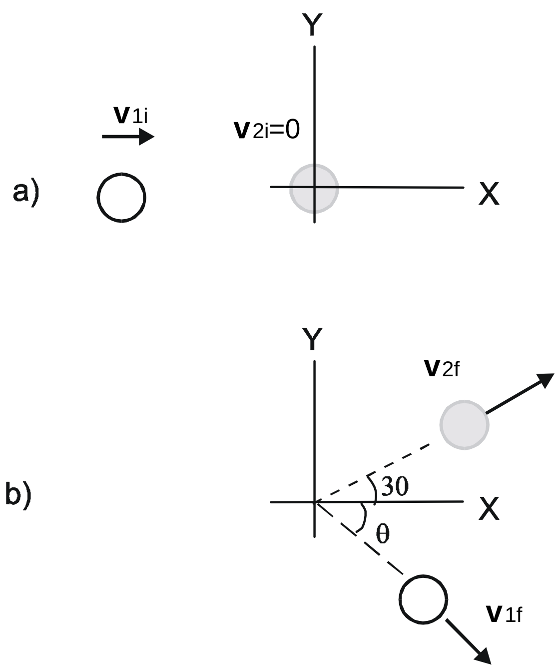
Los correspondientes valores para la velocidad V_{2f} se obtienen sustituyendo en la ecuación 3

$$v_{2f} = 0.387\, {}^{m}\!/_{s} \text{ y } v_{2f} = 0.740\, {}^{m}\!/_{s}$$

La solución físicamente aceptable es $v_{1f} = -0.434\, {}^{m}\!/_{s}$ y $v_{2f} = 0.740\, {}^{m}\!/_{s}$

XXIII) En un juego de billar un jugador desea meter la bola blanca en la buchaca, si el ángulo hacia la buchaca de la esquina es de 30° ¿a qué ángulo se desvía la bola roja?

SOLUCION



El momento lineal se conserva entonces

$$m_1\mathbf{v}_{1i} = m_1\mathbf{v}_{if} + m_2\mathbf{v}_{2f}$$

siendo las masas iguales

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f} \qquad 1$$

la conservación de la energía en la colisión elástica conduce a la ecuación

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \qquad 2$$

de la ecuación 1 la magnitud al cuadrado de la velocidad inicial es

$$v_{1i}^{\ 2} = \mathbf{v}_{ii}\cdot\mathbf{v}_{ii} = \left(\mathbf{v}_{if} + \mathbf{v}_{2f}\right)\cdot\left(\mathbf{v}_{if} + \mathbf{v}_{2f}\right)$$

$$v_{1i}^{\ 2} = v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2\mathbf{v}_{if} + \mathbf{v}_{2f}$$

$$v_{1i}^{\ 2} = v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2v_{if}v_{2f}\cos(30+\theta)$$

comparando con la ecuación 2

$$v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} = v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2v_{if}v_{2f}\cos(30+\theta)$$

de donde $2v_{if}v_{2f}\cos(30+\theta) = 0$ y finalmente

$$\theta = 90^0 - 30^0 = 60^0$$

XXIV) Dos objetos A y B chocan. A tiene una masa de 2.0 kg, y B una masa de 3.0 kg. Las velocidades respectivas antes de la colisión son $\mathbf{v}_{Ai} = (15,\, 30)$ y $\mathbf{v}_{Bi} = (-10,\, 5.0)$ Después de la colisión $\mathbf{v}_{Af} = (-6.0\ 30)$. Todas las velocidades las unidades son metros sobre segundo a) ¿Cuál es la velocidad final de B?

SOLUCION

aplicando la conservación del momento lineal

$$m_A \mathbf{v}_{Ai} + m_B \mathbf{v}_{Bi} = m_A \mathbf{v}_{Af} + m_B \mathbf{v}_{Bf}$$

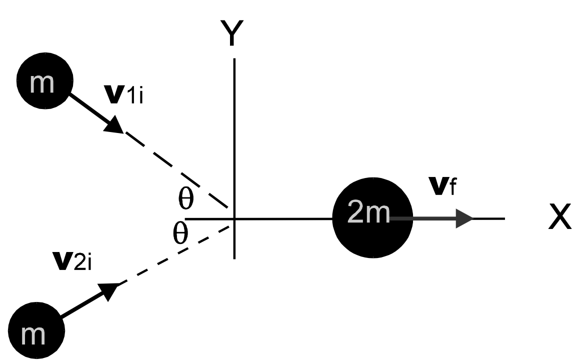
$$2(15,\, 30) + 3(-10,\, 5) = 2(-6,\, 30) + 3(v_{Bfx},\, v_{Bfy})$$

realizando operaciones y despejando la velocidad final

$$(v_{Bfx},\, v_{Bfy}) = \frac{1}{3}\left[2(15,\, 30) + 3(-10,\, 5) - 2(-6,\, 30)\right] = (4.0,\, 5)\, {}^{m}\!/_{s}$$

XXV) Después de una colisión totalmente inelástica, se encuentra que dos objetos de la misma masa y velocidad inicial se mueven juntos a la mitad de su velocidad inicial, halle el ángulo entre las velocidades iniciales de los objetos.

SOLUCION



La magnitud de las velocidades iniciales es la misma y se considera como v, la velocidad final de la colisión en magnitud es 1/2v de tal manera que

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} = mv(\cos\theta,\, -\operatorname{sen}\theta)$$
$$m_2 \mathbf{v}_{2i} = mv(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta)$$
$$M\mathbf{v}_f = M\,\frac{v}{2}(1,\ 0)$$

aplicando la conservación del momento lineal

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = M\mathbf{v}_f$$

$$mv(\cos\theta,\, -\operatorname{sen}\theta) + mv(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) = 2m\frac{v}{2}(1,\, 0)$$

$$(2mv\cos\theta,\, 0) = (2mv,\, 0)$$

igualando la componente x de cada vector $2mv\cos\theta = 2mv$

despejando $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^0$

el ángulo entre las velocidades $2\theta = (60^0) = 120^0$

CAPITULO VII

Mecánica de fluidos

Concepto de fluido

La materia en la experiencia cotidiana se presente ante nosotros en tres estados: sólido, liquido o gaseoso. Un cuerpo sólido tiene un volumen y forma definidos y generalmente no modifica ese estado en condiciones estables al paso del tiempo. El liquido tiene un volumen definido, pero no una forma definida se puede decir que adquiere la forma del recipiente que lo contiene. Por último, un gas no tiene ni volumen ni forma definidos, se expande siempre para ocupar el volumen total del recipiente que lo contenga, las definiciones anteriores no son tan precisas como se puede pensar debido a que existen estados de la materia entre dos estados anteriores en especial entre sólido y líquido ó liquido y gas. En general el estado de una sustancia cualquiera depende de las condiciones de temperatura y presión en las cuales se encuentra sometido.

Existe un estado de la materia que no cae dentro de la clasificación anterior compuesto de una mezcla de electrones y iones que microscópicamente es neutra llamado plasma, los átomos ionizados y electrones presentan interacciones eléctricas bastante fuertes lo que hace que su comportamiento no pueda ser clasificado en los estados de la materia antes mencionados. El plasma se forma al someter un gas a muy altas de temperaturas y es el estado más difundido de la materia en el universo, puesto que el Sol y la mayoría de las estrellas está formada por dicho estado.

Como se ha mencionado en secciones anteriores los cuerpos al ser sometidos a fuerzas externas pueden cambiar su forma, en particular los líquidos no soportan esfuerzos cortantes y si pueden soportar esfuerzos de compresión y los gases son incapaces de soportar esfuerzos cortantes y esfuerzos de compresión.

A escala atómica la diferencia entre sólidos, líquidos y gases se atribuye a la fuerza de interacción entre átomos, iones y las moléculas individuales y al movimiento mismo de las partículas resultado de la temperatura.

En un sólido las moléculas vibran ligeramente alrededor de una posición de equilibrio, al elevarse la temperatura las moléculas alcanzan la oscilaciones capaces de romper los enlaces entre las moléculas vecinas y mantener una unión mediante fuerzas de cohesión de largo alcance que les permite moverse con un cierto grado de libertad, en estas condiciones el sólido pasa al estado liquido. Continuando con el aumento de la temperatura las moléculas logran vencer las fuerzas de cohesión y pueden considerarse casi libres y en tan caso el liquido pasa al estado gaseoso. Las temperaturas para que la materia se presente en cualquiera de los estados mencionados depende de las fuerzas de interacción de cada caso particular

Definición: **Un fluido** es una sustancia que no puede soportar esfuerzos cortantes, o en términos moleculares corresponde a un conjunto de moléculas que se mantienen unidas por fuerzas cohesivas débiles y por fuerzas ejercidas por las paredes de un recipiente. Los líquidos como los gases son considerados como fluidos.

El estudio de la mecánica de fluidos no requiere de nuevos principios físicos, puede ser entendida aplicando principalmente las leyes de Newton.

Densidad y presión

Definición: la **densidad** ρ para un cuerpo homogéneo de masa m y volumen V se define como la razón la masa de la sustancia entre el volumen de la misma

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \qquad 7.1$$

por su definición las unidades de la densidad el en SI son $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

En general la densidad de un cuerpo no es constante sino que depende de otras condiciones como son la temperatura y la presión. Los sólidos y líquidos varían muy poco dentro de rangos de temperatura y presión grandes, en cambio los gases modifican mucho su densidad con variaciones moderadas de la presión y la temperatura.

Como ha sido mencionado en la parte anterior, los fluidos no soportan esfuerzos cortantes como sucede en los sólidos, por lo tanto la única fuerza a tomar en cuenta en condiciones estáticas es la fuerza normal o perpendicular a la superficie del fluido sin importar la forma del mismo.

Una cantidad más útil que la fuerza normal es la **presión** la cual es una cantidad escalar, esto es no tiene propiedad de dirección, se define como la magnitud de la fuerza normal por la unidad de área. La figura 7.1 muestra la fuerza normal Δ**F** aplicada en un elemento diferencial de área ΔA , entonces la presión p ejercida por el fluido en la región mostrada es

$$\boxed{p = \frac{\Delta F}{\Delta A}} \qquad 7.2$$

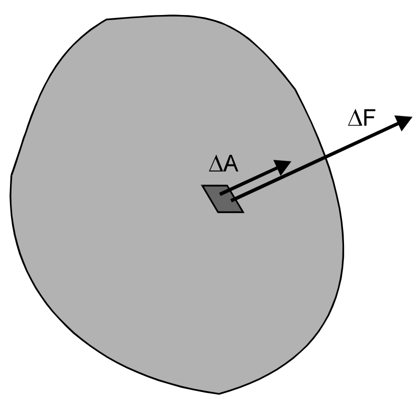


Figura 7.1. La presión es una mejor cantidad que la fuerza para describir las propiedades del fluido.

Para definir la presión de manera puntual se procede al límite cuando el elemento ΔA se aproxima a cero, esto es:

$$\boxed{p = \lim_{\Delta A \mapsto 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}} \qquad 7.3$$

Las unidades de la presión en el SI son $[p] = \dfrac{N}{m^2} = Pascal = Pa$

Es bastante común representar la presión en otros sistemas de unidades dependiendo de la actividad que se realice, por ejemplo los meteorólogos utilizan como unidad la presión que ejerce la atmósfera de la tierra al nivel del mar como unidad llamada presión atmosférica (atm), En el campo de la medicina se utiliza para medir la presión que ejerce en su base una columna de mercurio en condiciones 0ºC de temperatura a una gravedad de g=9.80665 m/s^2 . La presión se expresa como la altura de la columna de mercurio medida desde la base expresada en milímetros (mmHg). las equivalencias entre estas unidades de uso común son

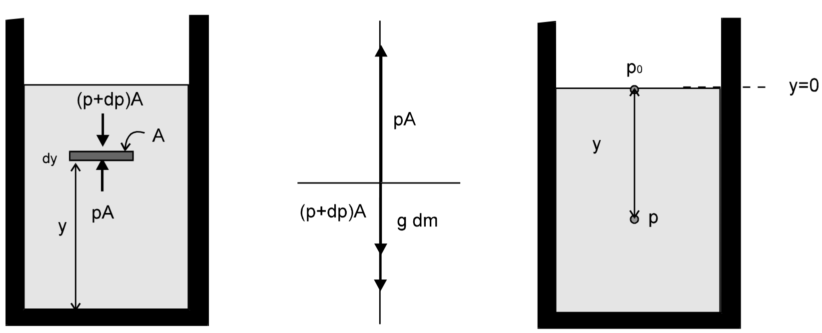
$$1\,atm = 760\ mmHg = 1.01325\ x10^5\ Pa$$

Presión Hidrostática

Cuando un cuerpo se encuentra en el interior de un liquido (ó fluido) este último ejercerá sobre el cuerpo una presión sobre cada punto del cuerpo, esto se conoce como **presión hidrostática** Este efecto es bastante conocido en especial por los buzos que sienten como aumenta la presión sobre su cuerpo al sumergirse cada vez más en las profundidades marinas.

Para obtener una expresión de cómo cambia la presión en un líquido con la profundidad. Considérese un líquido de densidad ρ en reposo y abierto a la atmósfera, puesto que el fluido se encuentra en reposo, cada porción del mismo se debe encontrarse en equilibrio translacional y rotacional (las fuerzas y torcas sobre la porción considerada son cero). Considérese un hipotético elemento diferencial de fluido de forma cilíndrica con sección transversal es A y espesor dz sometido a las presiones mostradas en la figura 7.2 (a). La masa del elemento es $dm = \rho\, dV = \rho\, Adz$ y por lo tanto su peso $dW = gdm = g\rho\, Adz$. La fuerza sobre la tapa superior es $(p + dp)A$ y en la parte inferior es pA , el diagrama de cuerpo libre es mostrado en la figura 7.2 (b) indica las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en la dirección vertical solamente, aplicado la condición de equilibrio en esta dirección se obtiene

$$\sum F_y = pA - (p + dp)A - \rho\ gAdz = 0$$



(a) (b) (c)

Figura 7.2. figura para mostrar la dependencia de la presión hidrostática con la profundidad.

simplificando la expresión se obtiene

$$\frac{dp}{dy} = -\rho\, g \qquad 7.4$$

la ecuación anterior expresa como cambia la presión con la variación de la altura. La cantidad ρg se denomina comúnmente como *el peso especifico* del fluido.

Realizando la integración de la ecuación 7.4 y considerando las condiciones mostradas en la figura 7.2 (c), donde p_o es la presión en la superficie del liquido (en la mayoría de los casos es la presión atmosférica), y es la profundidad en el liquido y p la presión en un punto a dicha profundidad

$$\int_{p_o}^{P} dp = -\int_{0}^{-y} \rho\, g dy$$

Para las distancias que manejan en las aplicaciones prácticas tanto la gravedad g como la densidad ρ del líquido se pueden considerar como constantes, por lo tanto:

$$p\Big|_{p_0}^{p} = -\rho\, g \int_{0}^{-y} dy = -\rho\, g\, y\Big|_{0}^{-y}$$

$$p - p_o = -\rho\, g\left(-\, y + 0\right)$$

$$p = \rho\, gy + p_o \qquad 7.5$$

La ecuación anterior muestra que la presión es directamente proporcional a la densidad y profundidad dentro del líquido

Principio de pascal y Arquímedes

Principio de Pascal

Cuando un tubo es sometido a una presión exterior mediante una fuerza **F** como muestra la figura 7.3 la presión en el fluido no depende ahora solamente de la presión hidrostática sino además de la presión externa p_{ext} debida a la fuerza **F**, entonces la presión en un punto P del fluido será de acuerdo a la ecuación 7.5:

$$p = \rho\, gy + p_{ext} \qquad 7.5$$

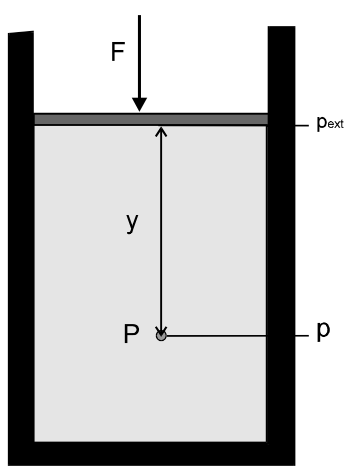


Figura 7.3. Principio de Pascal

Si ahora se aumenta la presión externa por una cantidad Δp_{ext} debida a un incremento en la fuerza externa, el cambio en la presión Δp que se observa es

$$\Delta p = \Delta(\rho g y) + \Delta p_{ext} \qquad 7.6$$

Considerando ahora un liquido incompresible esto es su densidad ρ es constante, entonces el primer término de la ecuación anterior es cero y por lo tanto se tiene que

$$\boxed{\Delta p = \Delta p_{ext}} \qquad 7.7$$

resultado que indica que ***el cambio de presión en cualquier punto de un fluido es igual al cambio de presión externa***. El resultado anterior es esencia el llamado **principio de Pascal**

Tanto los frenos de automóvil como el gato hidráulico aprovechan en su funcionamiento el principio de Pascal. Como una aplicación práctica considere la figura 7.4 en la cual se muestra de manera simplificada un gato hidráulico en la cual las cantidades de entrada se señalan mediante el subíndice "i" y las de salida mediante el subíndice "o", entonces

$$\Delta p_i = \Delta p_0$$

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_0}{A_0}$$

de donde

$$F_i = \frac{A_i}{A_0} F_0 \qquad 7.8$$

La relación A_i / A_o es en general menor que 1 y la fuerza F_i puede ser usada para levantar o ejercer fuerzas de gran magnitud. EL movimiento del embolo pequeño hacia abajo desplaza un volumen de liquido igual a $V = A_i d_i$, si el fluido se considera incompresible, entonces el volumen desplazado por el embolo de mayor área, por lo tanto $A_i d_i = A_o d_o$, de donde

$$d_o = (A_i / A_o) d_i \qquad 7.9$$

Nuevamente si la relación ${A_i}/{A_o}$ es menor que 1 un cuerpo de peso apreciable puede sor movido pero solamente una distancia pequeña.

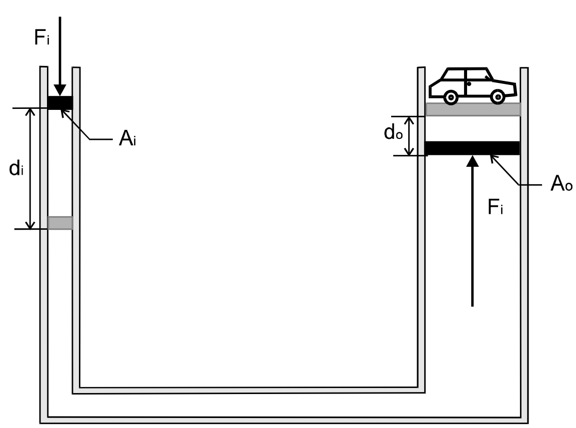
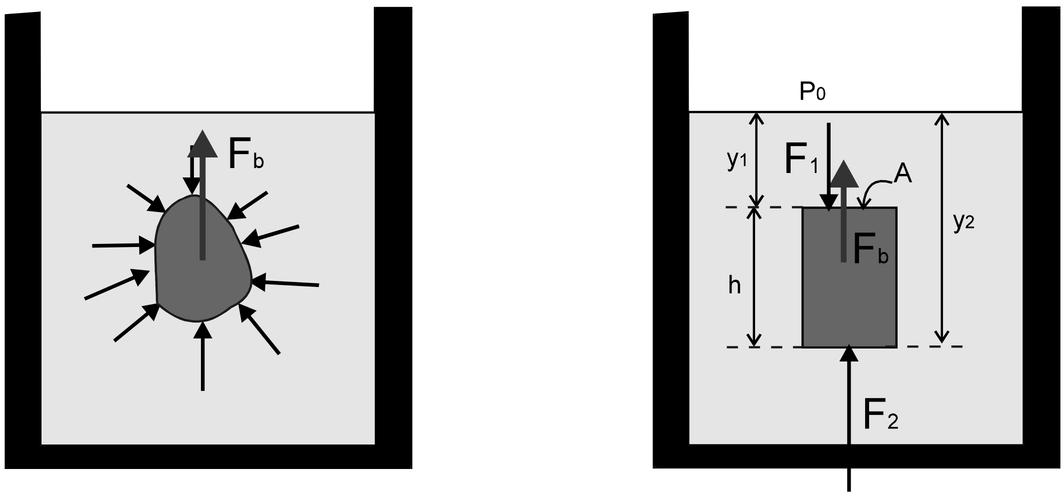


Figura 7.4. Aplicación del principio de Pascal al gato hidráulico.

Principio de Arquímedes

El bastante conocido y experimentado que un cuerpo cualquiera sumergido en un fluido experimenta una perdida del peso y en ocasiones el cuerpo puede permanecer flotando en la superficie del liquido. La figura 7.5a muestra un cuerpo totalmente sumergido en un fluido, la fuerza $\mathbf{F}_b$ mostrada en llamada la fuerza de flotación o empuje que es la resultante de todas las fuerzas ejercidas por el fluido en cada punto del cuerpo.



(a) (b)

Figura 7.5. Figura para demostrar el principio de Arquímedes.

La fuerza de flotación para el objeto de forma cilíndrica de altura *h* y área *A* como el mostrado en la figura 7.5 (b) se puede obtener como

$$F_b = F_2 - F_1 \qquad 7.9$$

La presión en la tapa superior es $p_1 = p_o + \rho_l\, g y_1$ entonces $F_1 = p_1 A = (p_o + \rho_l\, g y_1)A$
Y en la tapa inferior $p_2 = p_o + \rho_l\, g(y_1 + h)$ y $F_2 = p_2 A = (p_o + \rho_l\, g(y_1 + h))A$

Sustituyendo en la ecuación 7.9

$$F_b = (p_o + \rho_l\, g(y_1 + h))A - (p_o + \rho_l\, g y_1)A = \rho_l\, ghA \qquad 7.10$$

puesto que el volumen del cilindro es $V = Ah$ se tiene que

$$\boxed{F_b = \rho_l\, gV} \qquad 7.11$$

El resultado obtenido para un cilindro es aplicable para cualquier forma del objeto e indica que ***la fuerza de empuje que siente un objeto sumergido en un fluido es igual al peso del volumen del liquido desalojado por el objeto***. Resultado que fue descubierto por Arquímedes y por tal motivo es conocido como **principio de Arquímedes**.

Medición de la presión

La presión puede medirse utilizando un aparato bastante sencillo llamado barómetro de mercurio, inventado por Evangelista Torricelli (1608-1647). y consiste en un tubo largo de vidrio sellado en la parte superior conteniendo mercurio, la parte inferior que se encuentra abierta es colocada en un recipiente que contiene también mercurio, tal como se muestra esquemáticamente en la figura 7.6 (a). El extremo cerrado del tubo se encuentra conteniendo vapores de mercurio y puede considerarse casi al vacío, por lo que su presión en ese lugar se puede considerar cero ($p_0 = 0$). Si se aplica la ecuación 7.4 para determinar la presión en un punto P en la superficie del liquido se obtiene

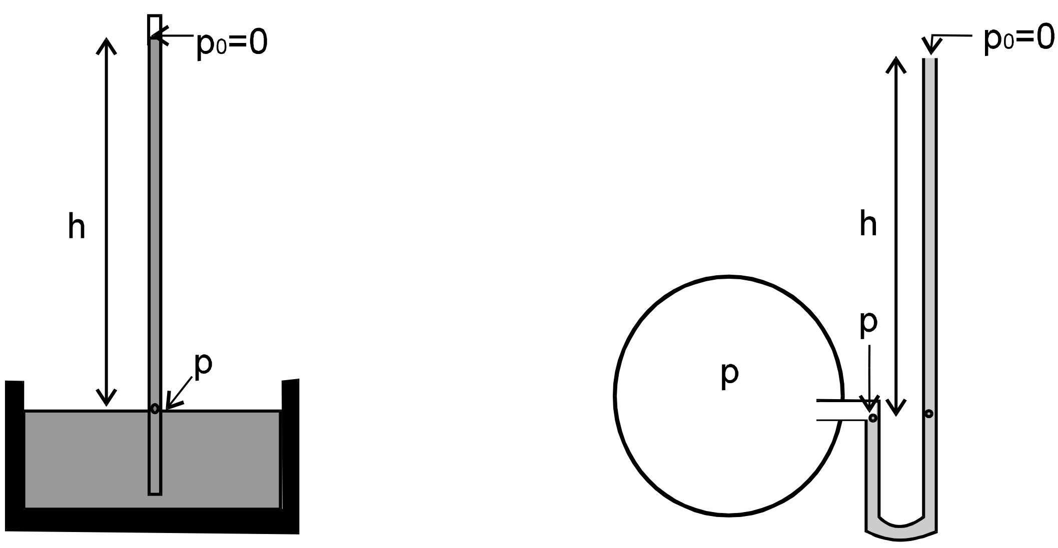
$$p = \rho g h \qquad 7.12$$

Esto es midiendo la altura de la columna de mercurio sobre la superficie del líquido se pude obtener la presión.

El manómetro (figura 7.6 (b) es otro instrumento para medir la presión, consiste en un tubo abierto en forma de U lleno de un liquido, un lado del tubo se encuentra abierto directamente a la atmósfera y el otro extremo se conecta directamente al sistema cuya presión p se desea medir, nuevamente utilizando la ecuación 7.4 con las condiciones mostradas en el punto P se obtiene en este caso

$$p - p_0 = \rho g h \qquad 7.13$$

la diferencia $p - p_0$ es conocida como *presión manométrica*.



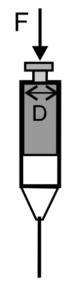
(a) (b)

Figura 7.6. (a) Columna de mercurio para medir la presión atmosférica. (b) Manómetro de tubo abierto.

EJEMPLOS

I) Halle el aumento de la presión en el fluido de una jeringa cuando una enfermera aplica una fuerza de 42.3 N sobre el émbolo.

SOLUCION



El aumento de presión de acuerdo al principio de Pascal es igual al cambio de presión externa. La presión externa se debe a la fuerza ejercida sobre el embolo de la jeringa, entonces

$$\Delta p = \Delta p_{et} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi/4\, D^2} = \frac{43.3\ N}{\pi/4\left(1.12\ x10^{-2}\ m\right)^2} = 0.429\ Pa$$

II) La ventana de una oficina tiene 3.43 m por 2.08 m. Como resultado del paso de una tormenta, la presión del aire exterior decae a 0.962 atm, pero en el interior la presión se mantiene a 1 atm. ¿qué fuerza neta empujará la ventana hacia fuera?

SOLUCION

la fuerza resultante es el producto de la diferencia de presión por el área de la ventana

$$F = \Delta pA = (p_{\text{int}} - p_{ext})ab = (1atm - 0.962\,atm)(1.013x10^5\ pa/atm)(3.43m)(2.08m)$$
$$= 27.5x10^3\ N$$

II) El pulmón humano funciona contra una diferencial de presión de menos de 0.050 atm. ¿A qué profundidad del nivel del agua puede nadar un buceador que respire por medio de un tubo largo (snorkel)?

SOLUCION

La diferencia de presión a la que puede funcionar el pulmón humano es de acuerdo al problema $\Delta p = (0.05\,atm)(1.013\ x10^5\ Pa/atm) = 5065\,Pa$ y la densidad del agua se puede considerar como $\rho = 1000\ kg/m^3$, por otra parte la variación de la presión con la profundidad se calcula mediante la ecuación

$$\Delta p = p - p_o = \rho\, gh$$

despejando la profundidad

$$h = \frac{\Delta p}{\rho\, g} = \frac{5065\ Pa}{\left(1000\ kg/m^3\right)\left(9.8\ m/s^2\right)} = 0.517\ m$$

III) Calcule la diferencia hidrostática en la presión de la sangre entre el cerebro y los pies de una persona de 1.83 m de altura.

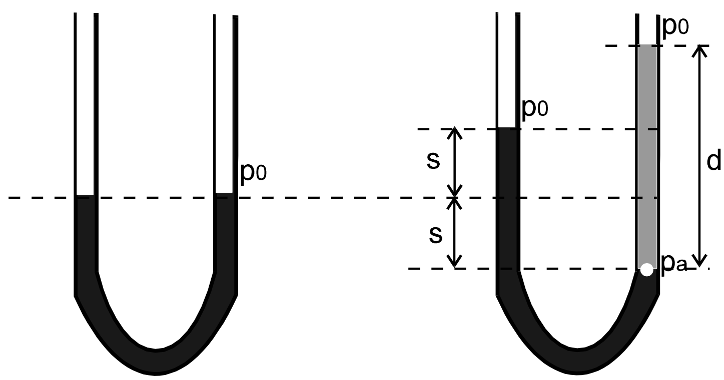
SOLUCION

La densidad de la sangre se obtiene recurriendo a las tablas respectivas y es $\rho = 1063\ kg/m^3$, la altura de la persona se considera como la profundidad h del fluido, entonces la diferencia de presión solicitada se obtiene directamente aplicando la ecuación

$$\Delta p = p - p_o = \rho g h = \left(1063\ kg/m^3\right)\left(9.81\ m/s^2\right)(1.83\ m) = 19003\ Pa$$

IV) Un tubo en U sencillo contiene mercurio. Cuando se vierten 11.2 cm de agua en la rama derecha, ¿a qué altura se elevará el mercurio en la rama izquierda a partir de su nivel inicial?

SOLUCION



Antes de agregar agua, el nivel del mercurio es el mismo, al agregar el agua (la cual no se mezcla con el mercurio) la referencia de la interface agua-mercurio baja una distancia s respecto al nivel original del mercurio, esa misma distancia la sube en la rama opuesta respecto a la misma referencia. La presión es la misma en cualquier punto que se encuentre en la misma línea de referencia, aplicando la condición anterior al punto Pa y a un punto en la rama opuesta al mismo nivel se obtiene

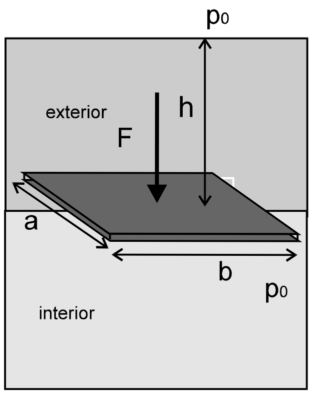
$$p_0 + \rho_a g d = p_0 + 2\rho_m g s$$

donde $\rho_a = 1000\ kg/m^3$ y $\rho_m = 13600\ kg/m^3$ son respectivamente las densidades del agua y el mercurio despejando la distancia s

$$s = \frac{\rho_a d}{2\rho_m} = \frac{\left(1000\ kg/m^3\right)(0.112\ m)}{2\left(13600\ kg/m^3\right)} = 0.00412\ m = 4.12\ mm$$

V) Los miembros de una tripulación tratan de escapar de un submarino averiado que está a 112 m bajo la superficie. ¿Cuánta fuerza deberán aplicar contra la escotilla que abre hacia afuera la cual tiene 1.22 m por 0.590 m, para poder abrirla?

SOLUCION



En el interior de submarino la presión es la presión atmosférica $p_{\text{int}} = p_0$, la presión hidrostática en la parte exterior a la escotilla $p_{ext} = \rho gh + p_0$. La fuerza que debe ser aplicada para abrir la escotilla es

$$F = A\Delta p = A(p_{ext} - p_{\text{int}}) = ab\rho gh$$

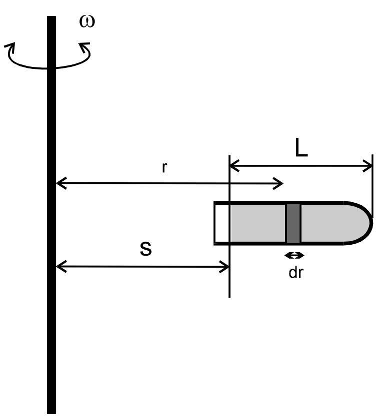
La densidad del agua de mar es $\rho_a = 1024 \, {kg}/{m^3}$. Entonces

$$F = (1.22\, m)(0.590\, m)\left(1024 \, {kg}/{m^3}\right)\left(9.8 \, {m}/{s^2}\right)(112\, m)$$

$$= 0.809x10^6 \, N$$

VI) Una probeta de 12.00 cm de longitud llena de agua se hace girar en un plano horizontal en una centrífuga a 655 rev/s. Calcule la presión hidrostática en la base exterior de la probeta. El extremo inferior de la probeta está a 5.30 cm del eje de rotación.

SOLUCION



El elemento diferencia mostrado en la figura gira alrededor del eje con una velocidad angular ω constante, por lo que se encuentra sometido a una fuerza centrífuga igual a

$$dF = a_c dm = \omega^2 \, rdm$$

si A es la sección transversal del tubo y ρ la densidad del liquido en el tubo, entonces la diferencial de masa dm es

$$dm = \rho A dr$$

La presión diferencial sobre el elemento dm

$$dp = \frac{dF}{A} = \frac{\omega^2 \, r\rho \, Adr}{A} = \rho \omega^2 \, rdr$$

para obtener la presión en la base exterior del tubo de ensaye se integra la ecuación anterior, esto es

$$\Delta p = \int_s^{s+L} \rho \omega^2 rdr = \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 \Big|_s^{s+L} = \frac{1}{2}\rho \omega^2 \left[(s+L)^2 - s^2\right]$$

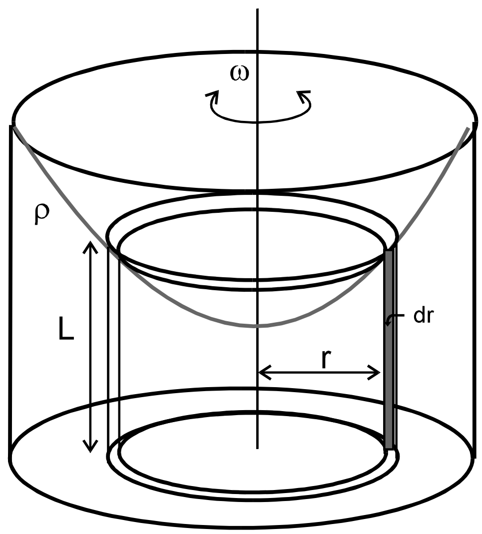
finalmente se evalúa la expresión anterior con los datos proporcionados en el problema

$$\Delta p = \frac{1}{2}\left(1000 \, {kg}/{m^3}\right)\left(2\pi 655 \, {rad}/{s}\right)\Big|\left[(0.0530 \, cm + 0.12\, cm)^2 - (0.0530 \, cm)^2\right]$$

$$= 229 \, x\, 10^6 \;\; Pa$$

VII) (a) Un fluido está girando con una velocidad angular constante as con respecto al eje vertical central de un recipiente cilíndrico. Demuestre que la variación de la presión en la dirección radial está dada por. $dp/dr = \rho\omega^2\ r$ (b) Sea p(0) = p_c muestre que $p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + p_c$

SOLUCION



a) El elemento diferencial dm mostrado en la figura es un cascarón cilíndrico de radio r altura L y espesor dr, si ρ la densidad del liquido entonces la diferencial de masa es

$$dm = \rho\, Adr$$

la masa dm se encuentra sometida a una fuerza centrifuga la cual es igual a

$$dF = a_c dm = \omega^2\ rdm = \omega^2\ \rho\, Ardr$$

por otra parte la fuerza también es igual a

$$dF = Adp$$

Comparando las dos expresiones anteriores $\omega^2\ \rho\, Ardr = A\, dp$

De donde

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2\ r$$

b) Para obtener la expresión solicitada, se aplica la condición de que para r=0 se tiene que p(0)=p_c en las condiciones de integración de la ecuación anterior

$$\int_{p_c}^{p} dp = \int_0^r \rho\omega^2 rdr$$

$$p\Big|_{p_c}^{p} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\Big|_0^r$$

$$p - p_c = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$$

de donde se obtiene el resultado

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + p_c$$

VIII) (a) Si el pequeño émbolo de una palanca hidráulica tiene un diámetro de 3.72 cm, y el émbolo grande uno de 51.3 cm, ¿qué peso sobre el embolo pequeño soportará 18.6 KN (p. eje. Un automóvil) sobre el émbolo grande? (b) ¿A qué distancia debe moverse el émbolo pequeño para que el automóvil se eleve 1.65 m?

SOLUCION

a) el problema corresponde a la aplicación del principio de Pascal a gato Hidráulico

$$F_1 = \frac{A_2}{A_1} F_2 = \frac{\pi/4\, d_2^{\,2}}{\pi/4\, d_1^{\,2}} F_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 F_2$$

en este caso d_1 es el diámetro del émbolo pequeño, d_2 el diámetro del émbolo grande y F_2 es el peso que soporta el embolo grande entonces

$$F_1 = \left(\frac{0.0372\,m}{0.513\,m}\right)^2 \left(18.6\ x10^3\ N\right) = 97.8\ N$$

b) para obtener la distancia que debe recorrer el émbolo pequeño se aplica que el volumen del liquido desplazado es el mismo, esto es $V_1 = V_2$ entonces

$$\frac{1}{4}\pi\, d_1^{\,2} s_1 = \frac{1}{4}\pi\, d_2^{\,2} s_2$$

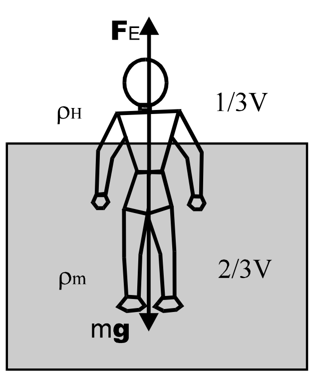
en la expresión s_1 y s_2 son las distancias recorridas por los respectivos émbolos, por lo tanto

$$s_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 s_2 = \left(\frac{0.513\,m}{0.0373\,m}\right)^2 \left(1.65\ m\right) = 314\ m$$

IX) Alrededor de una tercera parte del cuerpo de un físico que se halla nadando en el Mar Muerto está sobre el nivel del agua. Suponiendo que la densidad del cuerpo humano sea de 0.98 glcm^3, halle la densidad del agua en el Mar Muerto. ¿Por qué es mucho mas grande que 1.0 g/cm^3?

SOLUCION

a) La densidad del mar muerto se denota por ρ_m y la densidad del cuerpo humano por ρ_H. Como 1/3 parte del cuerpo se encuentra fuera del agua, entonces el volumen del liquido desalojado es 2/3 partes del volumen V del cuerpo, por lo que la fuerza de empuje es



$$F_E = \rho_m\, g\, \frac{2}{3} V$$

por otra parte el peso del cuerpo se puede expresar como

$$mg = \rho_H\, gV$$

puesto que el cuerpo se encuentra en equilibrio

$$F_E = m\, g$$

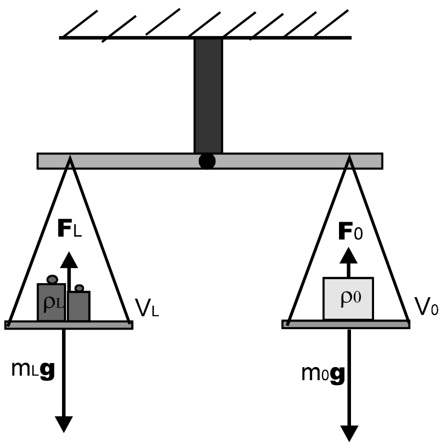
Entonces $\rho_m\, g\, \frac{2}{3} V = \rho_H\, gV$ de donde

$$\rho_m = \frac{3}{2}\rho_H = \frac{3}{2}\left(0.98\ {}^{gr}\!/\!_{cm}\right) = 1.47\ {}^{gr}\!/\!_{cm}$$

b) La alta densidad que presenta las aguas del mar muerto se debe a la gran cantidad de sales disueltas.

X) Suponga que la densidad de unas pesas de latón sea de 8.0 g/cm^3 y que la del aire sea de 0.0012 g/cm^3. ¿Qué error fraccionario surge de despreciar la flotabilidad del aire al pesar un objeto de 3.4 g/cm^3 de densidad en una balanza de brazos?

SOLUCION



En los cálculos siguientes el subíndice L corresponde al latón, O para el objeto y A para el aire.

Primero considérese que desprecia la acción del aire, en este caso las pesas de latón que equilibran la balanza tendrán un volumen V_{L1}.

Los respectivos pesos de los cuerpos son

$$W_{L1} = m_{L1}g = \rho_L V_{L1} g \qquad \text{y}$$

$$W_{O1} = m_O g = \rho_O V_O g$$

la condición de equilibrio es $W_{L1} = W_{O1}$

Entonces $\rho_L V_{L1} g = \rho_O V_O g$

De donde $V_{L1} = \dfrac{\rho_O}{\rho_L}V_O = \dfrac{3.4\ {}^{g}\!/\!_{cm^3}}{8.0\ {}^{g}\!/\!_{cm^3}}V_O = 0.425V_O$

Si ahora se considera el efecto del aire sobre cada uno de los cuerpos, las pesas de latón deberán tener un volumen V_{L2} y los respectivos pesos de los cuerpos son en este caso

$$W_{L2} = \rho_L V_{L2} g - \rho_A V_{L2} g = V_{L2} g(\rho_L - \rho_A) \qquad \text{y}$$
$$W_{O2} = \rho_O V_O g - \rho_A V_O g = V_O g(\rho_O - \rho_A)$$

nuevamente aplicando la condición de equilibrio $W_{L2} = W_{O2}$

$$V_{L2} g(\rho_L - \rho_A) = V_O g(\rho_O - \rho_A)$$

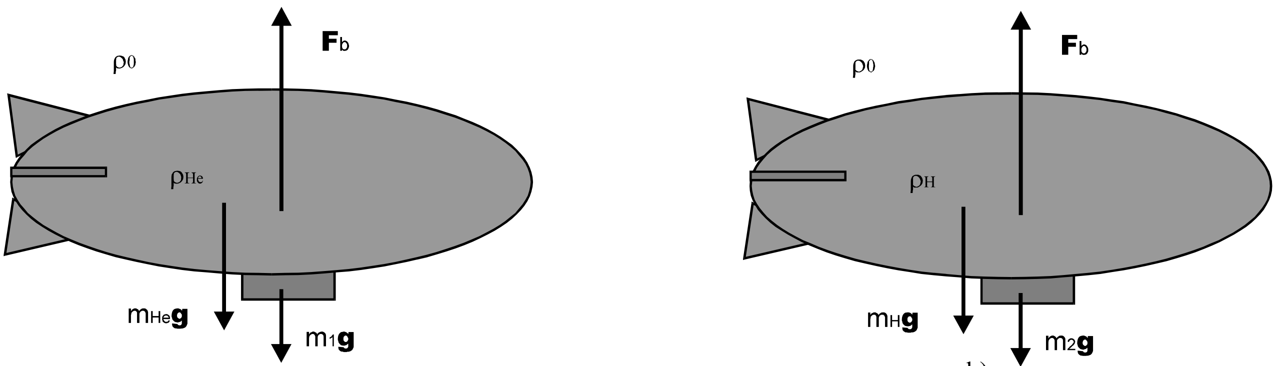
de donde $V_{L2} = \dfrac{(\rho_O - \rho_A)}{(\rho_L - \rho_A)}V_O = \dfrac{\left(3.4\ {}^{g}\!/\!_{cm^3} - 0.0012\ {}^{g}\!/\!_{cm^3}\right)}{\left(8.0\ {}^{g}\!/\!_{cm^3} - 0.0012\ {}^{g}\!/\!_{cm^3}\right)}V_O = 0.4249V_O$

el error fraccionario cometido en la medida de la masa al utilizar las pesas de latón es

$$\frac{m_{L1} - m_{L2}}{m_{L2}} = \frac{\rho_L V_{L1} - \rho_L V_{L2}}{\rho_L V_{L2}} = \frac{V_{L1} - V_{L2}}{V_{L2}} = \frac{0.425V_O - 0.4249V_O}{0.4249V_O} \cong 0.0002 = 2x10^{-4}$$

XI) El pequeño dirigible Columbia de Goodyear está navegando lentamente a baja altitud, lleno como es costumbre de gas helio. Su carga útil máxima, incluyendo la tripulación y la carga, es de 1280 kg. ¿Cuánta carga más podría transportar el Columbia si sustituimos el helio por hidrógeno? ¿Por qué no se hace? El volumen del espacio interior ocupado por el helio es de 5000 m^3. La densidad del gas helio es de 0.160 kg/m^3 y la densidad del hidrógeno es de 0.0810 kg/m^3.

SOLUCION



a) b)

En ambas situaciones mostradas en la figura se desplaza el mismo volumen de aire, entonces la fuerza de flotación es la misma, además se encuentran en equilibrio.

En la figura a) se encuentra lleno de gas helio y soporta una masa de carga m_1 entonces

$$F_b = m_1 g + \rho_{He} V g \qquad 1$$

en el caso b) la carga que soporta es carga m_2 y el gas que contiene es hidrógeno

$$F_b = m_2 g + \rho_H V g \qquad 2$$

la masa extra que puede soportar si se cambia el Helio por Hidrogeno es $\Delta m = m_2 - m_1$

comparando las ecuaciones 1 y 2

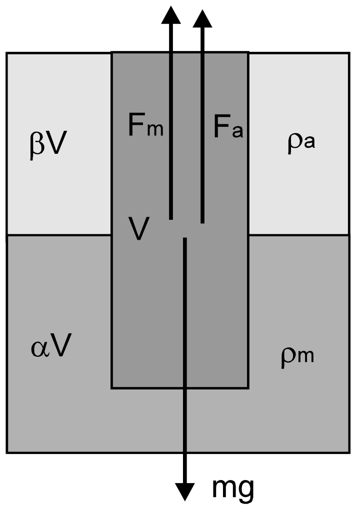
$$m_1 g + \rho_{He} V g = m_2 g + \rho_H V g$$

entonces

$$\Delta m = (\rho_{He} - \rho_H) V = \left(0.1600 \, {}^{kg}\!/\!{}_{m^3} - 0.0810 \, {}^{kg}\!/\!{}_{m^3}\right)\left(5000\, m^3\right) = 395\, kg$$

XII) Un objeto que flota en mercurio tiene una cuarta parte de su volumen sumergida. Si se añade agua suficiente para cubrir al objeto, ¿qué fracción de su volumen permanecerá sumergida en el mercurio?

SOLUCION



Antes de agregar el agua se tiene que una cuarta parte del cuerpo se encuentra sumergida en el mercurio, entones aplicando la condición de equilibrio

$$Mg = \rho_m \frac{1}{4} V \qquad 1$$

El dibujo anexo muestra la condición en la cual se agrega agua, las fracciones de del volumen sumergido en cada en mercurio y el agua se denotan por respectivamente por αV y βV . Aplicando el equilibrio en este caso

$$Mg = \alpha \rho_m V + \beta \rho_a V \qquad 2$$

Al comparar las ecuaciones 1 y 2 se obtiene la ecuación

$$\alpha \rho_m + \beta \rho_a = \frac{\rho_m}{4} \qquad 3$$

recordando ahora que la suma de fracciones es la unidad

$$\alpha + \beta = 1 \qquad 4$$

resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones 3 y 4, se obtiene para α

$$\alpha = \frac{\frac{\rho_m}{4} - \rho_a}{\rho_m - \rho_a} = \frac{1/4\left(13.6x10^3\, kg/m^3\right) - 1x10^3\, kg/m^3}{13.6x10^3\, kg/m^3 - 1x10^3\, kg/m^3} = 0.190$$

Dinámica de fluidos

En las secciones anteriores, los resultados se obtuvieron considerando que el fluido se encuentra en reposo, ahora se estudiará dinámica, esto es su movimiento.

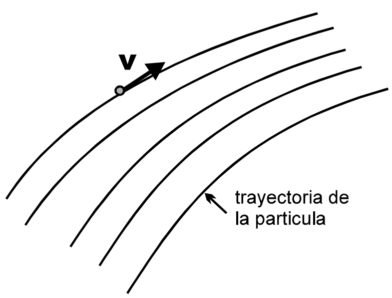
Una forma de proceder en la descripción del movimiento del fluido es considerarlo formado por partículas y conociendo las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas, describir su movimiento en función del tiempo, pero como el numero de partículas es muy grande resulta laborioso y en ocasiones imposible de realizar. Un tratamiento distinto del problema lo llevó acabo Leonard Euler (1707-1783). El fluido, en lugar de intentar de describirlo por el movimiento de cada partícula que lo conforma como una función del tiempo, se describe la densidad y velocidad en cada punto del fluido y para cualquier tiempo

Características de flujo de los fluidos

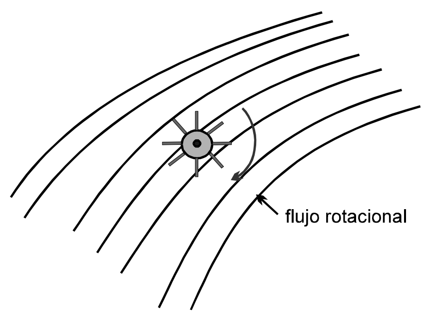
Flujo estacionario y no estacionario. Cada partícula de un fluido al moverse sigue una trayectoria si esta es uniforme y las trayectorias de las partículas diferentes no se cruzan nunca como muestra la figura 7.7 (a), entonces se dice que el flujo es estacionario, otra forma identificar al flujo estación es observando que la velocidad en cualquier punto del fluido permanece constante con el tiempo. El flujo estacionario se puede lograr con velocidades bajas, pero si estas superan un cierto límite entonces el fluido pasa a ser no estacionario o turbulento y la velocidad de cada punto dependería del tiempo, además se observarían la formación de remolinos en algunas regiones del fluido.

Flujo comprensible e incompresible. Si la densidad de un fluido se mantiene constante independientemente de la posición punto considerado y del tiempo, el flujo se dice que es incompresible en caso contrario es compresible. Los líquidos normalmente se consideran incompresibles, pero los gases son compresibles en especial en condiciones de alta presión y velocidad, pero para fines prácticos de bajas velocidades (menores que la del sonido) se consideran también incompresibles.

Flujo viscoso y no viscoso. El movimiento del fluido puede presentar fricción interna entre las capas laminares del mismo que se desplazan a diferentes velocidades una de otra, esta situación en su conjunto es conocida como la viscosidad. En el caso de fluidos viscosos parte de la energía cinética del fluido se transforma en energía interna del mismo aumentando su temperatura. En condiciones adecuadas de baja temperatura algunos fluidos como el hidrógeno reducen casi a cero su viscosidad y por lo tanto se puede considerar no viscoso.



(a)



(b)

Figura 7.7

Flujo rotacional e irrotacional. Si una pequeña rueda situada en cualquier lugar en el fluido y esta rota alrededor de su centro de masa, el flujo es rotacional (ver figura 7.7 (b) ,en caso contrario el fluido es irrotacional. Un caso de flujo rotatorio lo constituye el agua que fluye al ser desalojada por el drenaje de la bañera.

La solución de problemas utilizando fluidos reales es bastante compleja, por tal motivo se recurre a una modelo que simplifica al máximo la descripción matemática del movimiento llamado *fluido ideal* el estacionario, incompresible, no viscoso e irrotacional.

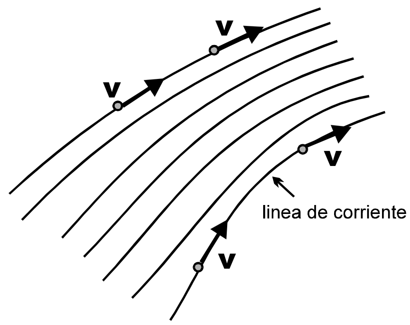
líneas de corriente y la ecuación de continuidad

La trayectoria tomada por una partícula de fluido en condiciones de flujo estable se denomina como **línea de corriente.**

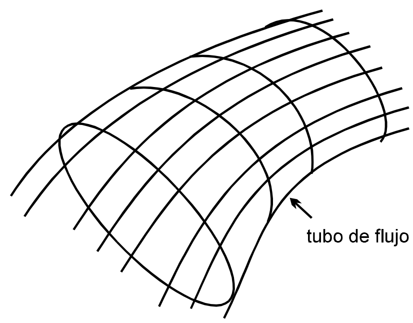
Las características de las línea de corriente son:

a) En el caso de fluido estacionario por cada punto del fluido pasa únicamente una línea de corriente.

b) La velocidad de la partícula del fluido siempre es tangente a la línea de corriente (figura 7.8 (a).
c) Dos líneas de corriente nunca se cruzan entre sí, ya que si esto ocurriera la partícula tendría que elegir un camino u otro y entonces el flujo deja de ser estacionario.



(a)



(b)

Figura 9.8 (a) velocidad tangente a cada línea de corriente. (b) Tubo de flujo formado por las líneas de corriente.

Si se traza por cada punto del fluido una línea de corriente el conjunto de líneas obtenido se denomina tubo de flujo tal como el que se muestra en la figura 7.8 (b). La frontera del tubo consiste en las líneas de corriente en las cuales la velocidad es siempre tangente y ninguna partícula podrá escapar del tubo de flujo.

Ecuación de continuidad

Considérese ahora un tubo de flujo con un poco más de detalle como el mostrado en la figura 7.9, el fluido entra en el punto P con una velocidad v_1 en el cual la sección transversal de tubo tiene una área A_1 en un intervalo de tiempo pequeño Δt el fluido se mueve una distancia $\Delta x = v_1 \Delta t$, si la densidad del fluido en ese punto es ρ_1, entonces la masa de fluido desplazado es $\Delta m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$,. Similarmente el punto Q donde la velocidad del fluido es v_2 , la sección transversal A_2 y la densidad ρ_2 la masa del fluido desplazado en el mismo intervalo de tiempo es $\Delta m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

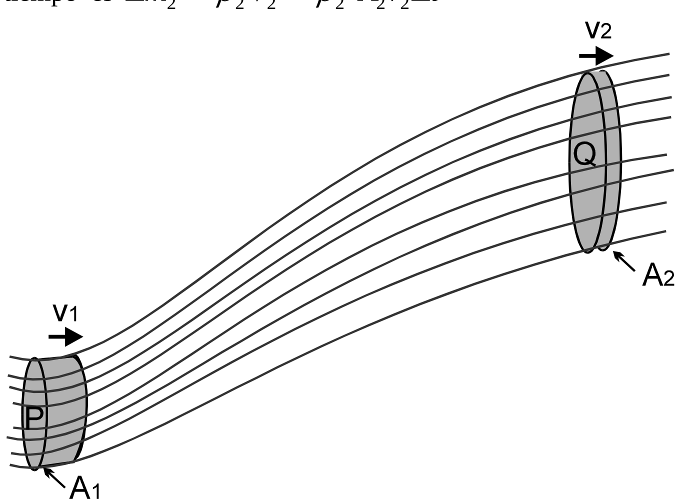


Figura 7.9. Figura para mostrar la ecuación de continuidad.

Por conservación de masa se debe tener que $\Delta m_1 = \Delta m_2$, por lo tanto

$$\rho_1\ A_1 v_1 = \rho_2\ A_2 v_2 \qquad 7.14$$

Esta expresión es conocida como la **ecuación de continuidad**.

La cantidad $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\ Av$ se denomina *flujo de masa*, y en términos generales la ecuación de continuidad se puede expresar como

$$\rho\ Av = constante \qquad 7.15$$

considerando un fluido incompresible o sea ρ constante, la ecuación 7. 14 se reduce a

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2} \qquad 7.16$$

El producto Av tiene unidades de volumen entre tiempo y se llama gasto o rapidez de flujo. También la expresión 7.16 se pude escribir como

$$\boxed{Av = constante} \qquad 7.15$$

Ecuación de Bernoulli

La ecuación fundamental de la Mecánica de Fluidos lo constituye la ecuación de Bernoulli, que relaciona la presión, velocidad y altura para cada punto situado a lo largo de una línea de corriente y en esencia es una forma que adopta el teorema de Trabajo y la energía.

Considérese un fluido ideal que se mueve en el interior de una tubería no uniforme como se muestra en la figura 7.10,

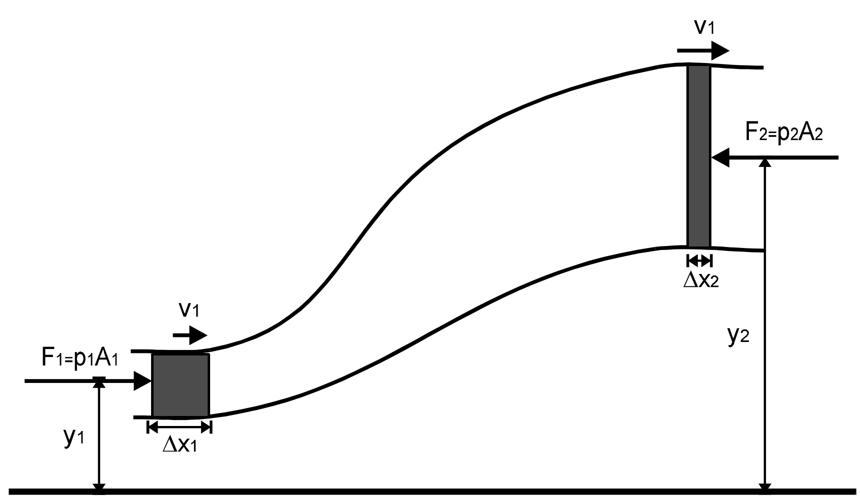


Figura 7.10. Esquema para obtener la ecuación de Bernoulli.

La fuerza sobre el extremo más bajo del fluido es $F_1 = p_1 A_1$ y en la parte superior $F_2 = p_2 A_2$ en un intervalo de tiempo Δt la fuerzas F_1 desplaza el volumen ΔV del fluido sombreado en la figura una distancia Δx_1 realizando un trabajo $W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1$, puesto que $A_1 \Delta x_1 = \Delta V$, entonces $W_1 = p_1 \Delta V$. Análogamente al mismo tiempo Δt en la parte superior se desplaza el mismo volumen ΔV una distancia Δx_2, pero en este caso la fuerza F_2 actúa en sentido al desplazamiento y el trabajo es negativo, así pues $W_2 = -p_2 A_2 \Delta x_2 = -p_2 \Delta V$ y el trabajo total es

$$W = (p_1 - p_2)\Delta V$$

Considerando que el elemento del fluido tiene masa Δm el cambio de energía potencial del mismo es

$$\Delta U = \Delta m\, g y_2 - \Delta m\, g y_1$$

y su cambio de energía cinética es

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v_2^{\,2} - \frac{1}{2}\Delta m v_1^{\,2}$$

Aplicando el teorema de trabajo-energia $\Delta W = \Delta U + \Delta K$

$$(p_1 - p_2)\Delta V = \frac{1}{2}\Delta m v_2^{\,2} - \frac{1}{2}\Delta m v_1^{\,2} + \Delta m\, g y_2 - \Delta m\, g y_1$$

como $\Delta V = \Delta m / \rho$ entonces

$$(p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho} = \frac{1}{2}\Delta m v_2^{\,2} - \frac{1}{2}\Delta m v_1^{\,2} + \Delta m\, g y_2 - \Delta m\, g y_1$$

simplificando y reacomodando términos

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^{\,2} + \rho g y_2 \qquad 7.16$$

El resultado anterior es conocido como la **ecuación de Bernoulli**, también se puede expresar como

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = constante} \qquad 7.17$$

APLICACIONES

El tubo de Venturi

El tubo Venturi .es mostrado en la figura 7.11, consta de un tubo horizontal y un tubo en forma de U en una de las conexiones de los tubos el tubo horizontal se estrecha, puede ser utilizado para medir la velocidad **V** de flujo en un fluido incompresible en el punto 1 si se conoce la diferencia de presión $p_2 - p_1$, pero esta última se relaciona con la diferencia de altura del fluido en el tubo en forma de U.

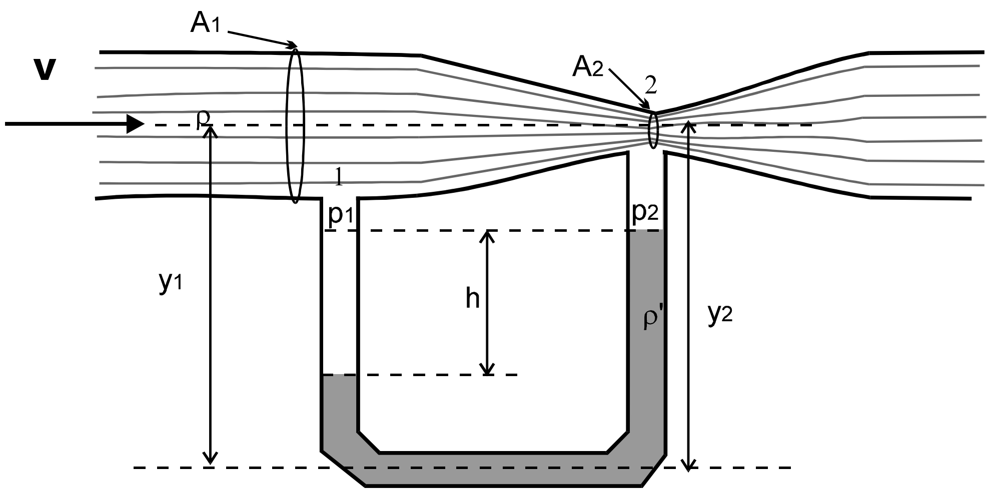


Figura 7.11. Tubo Venturi, utilizado para medir la velocidad de un fluido.

La aplicación de la ecuación de BERNOULLI el los puntos 1 y 2 tomando en cuenta que la tubería es horizontal, o sea $y_1 = y_2$ conduce a

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}_2{}^2 \qquad 7.18$$

La ecuación de continuidad 7.16 conduce a $A_1 \mathrm{v} = A_2 \mathrm{v}_2$

de donde

$$\mathrm{v}_2 = \frac{A_1}{A_2}\mathrm{v} \qquad 7.19$$

sustituyendo en la ecuación 9.18

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \mathrm{v}^2 \qquad 7.20$$

despejando la velocidad **V**

$$\mathrm{v} = A_1\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \qquad 7.21$$

por otra parte la diferencia de presiones $p_1 - p_2$ se puede obtener aplicando la ecuación 7.5 en donde se considera que $p_o = p_2$ y ρ' es la densidad del liquido en el tubo en forma de U, pero como el fluido ocupa parte de la rama izquierda del tubo, ejerce una presión adicional igual a ρgh que hay que tomar en cuenta, entonces

$$p_1 + \rho gh = \rho' gh + p_2$$

por lo tanto

$$p_1 - p_2 = (\rho' - \rho)gh$$

sustituyendo en la ecuación 7.21

$$\mathrm{v} = A_1\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \qquad 7.22$$

El tubo Pitot

El tubo Pitot mostrado en la figura 7.12 se utiliza generalmente para medir la velocidad de flujo de un gas.

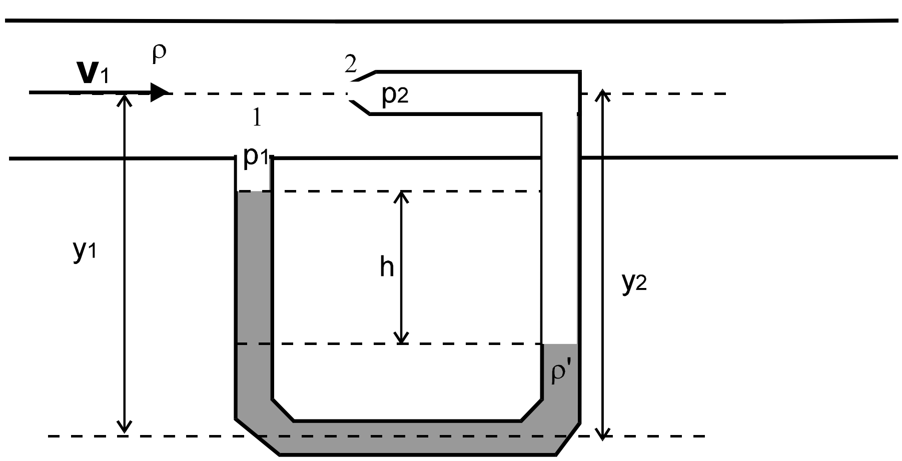


Figura 7.12. Tubo Pitot.

El tubo manométrico abierto se conecta al tubo principal como se muestra en la figura 7.12 con su abertura paralela al movimiento del fluido, entonces el gas que penetre en el tubo se detendrá en el interior del mismo, por lo que su velocidad ahí será cero y su presión es p_2 La presión en la rama izquierda del manómetro es la presión del gas p_1 y su velocidad v_1. Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 se obtiene

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}_1^2 = p_2 \qquad 7.23$$

de donde

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \qquad 7.24$$

El liquido en el manómetro tiene una densidad ρ' entonces , aplicando la ecuación 9.4 con $p_o = p_1$ se tiene que

$$p_2 = \rho' gh + p_1$$

por lo que

$$p_2 - p_1 = \rho' gh$$

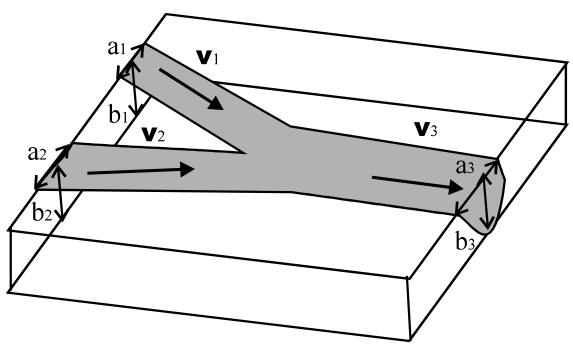
y sustituyendo este resultado en la ecuación 9.24

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{2\rho' gh}{\rho}} \qquad 7.25$$

EJEMPLOS

XIII) La figura muestra la confluencia de dos corrientes que forman un río. Una corriente tiene una anchura de 8.2 m, una profundidad de 3.4 m, y una velocidad de 2.3 m /s. La otra corriente tiene 6.8 m de anchura, 3.2 m de profundidad, y fluye a razón de 2.6 m/s. La anchura del río es de 10.7 m y la velocidad de su corriente es de 2.9 m/s. ¿Cuál es su profundidad?

SOLUCION



La ecuación de continuidad aplicada en el punto de confluencia de los ríos

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 = A_3 v_3$$

Si ahora se considera que las secciones de los ríos son aproximadamente rectangulares de ancho a y profundidad b, se obtiene

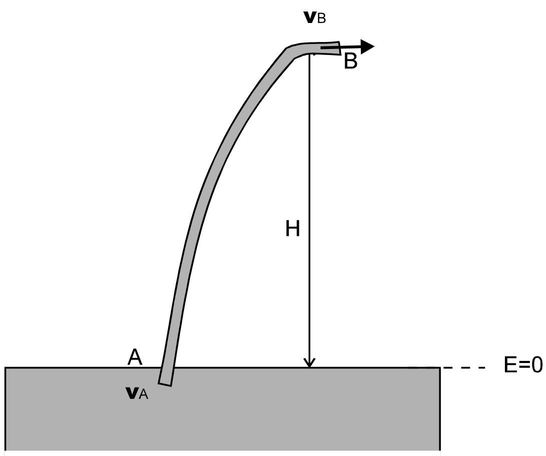
$$a_1 b_1 v_1 + a_2 b_2 v_2 = a_3 b_3 v_3$$

Despejando la incógnita b_3 que es la profundidad de la confluencia de los ríos

$$b_3 = \frac{a_1 b_1 v_1 + a_2 b_2 v_2}{a_3 v_3} = \frac{(8.2\,m)(3.4\,m)\left(2.3\,{}^{m}\!/\!_{s}\right) + (6.8\,m)(3.2\,m)\left(2.6\,{}^{m}\!/\!_{s}\right)}{(10.7\,m)\left(2.9\,{}^{m}\!/\!_{s}\right)} = 3.9\,m$$

XIV) Se bombea continuamente agua que se extrae de un sótano inundado con una velocidad de 5.30 m/s por medio de una manguera uniforme de 9.70 mm de radio. La manguera pasa por una ventana situada a 2.90 m sobre el nivel del agua. ¿Cuánta potencia proporciona la bomba?

SOLUCION



En el punto A la velocidad es cero, entonces la energía total respecto nivel indicado es

$$E_A = 0 \qquad 1$$

y en el punto o B

$$E_B = mgH + \frac{1}{2} m v_B^{\ 2} \qquad 2$$

en intervalo de tiempo Δt por la manguera fluye una masa igual a

$$m = Q\Delta t = \rho A v \Delta t$$

Por lo que la ecuación 1 se puede escribir como

$$E_B = m\left(gH + \frac{1}{2} v_B^{\ 2} \right) = \rho A v \Delta t \left(gH + \frac{1}{2} v_B^{\ 2} \right) \qquad 3$$

el trabajo hecho por la bomba es equivalente de acuerdo al teorema trabajo-energía es igual al cambio de energía

$$\Delta E = E_B - E_A = \rho A v \Delta t \left(gH + \frac{1}{2} v_B^{\ 2} \right)$$

de la definición de la potencia

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \rho A v \left(gH + \frac{1}{2} v_B^{\ 2} \right)$$

evaluando la expresión anterior, recordando que el área de la manguera es circular es $A = \pi r^2$

$$P = \left(1000 \, {}^{kg}\!/_{m^3} \right) \pi (0.0097\, m)^2 \left(5.3 \, {}^{m}\!/_{s} \right) \left[\left(9.8 \, {}^{m}\!/_{s^2} \right)(2.90\, m) + \frac{1}{2} \left(5.3 \, {}^{m}\!/_{s} \right)^2 \right]$$
$$= 66.5 W$$

XV) ¿Cuánto trabajo efectúa la presión al bombear 1.4 m^3 de agua por un tubo de 13 mm de diámetro interno si la diferencia de presión entre los extremos del tubo es de 1.2 atm?

SOLUCION

La diferencia de presión expresada en pascales es

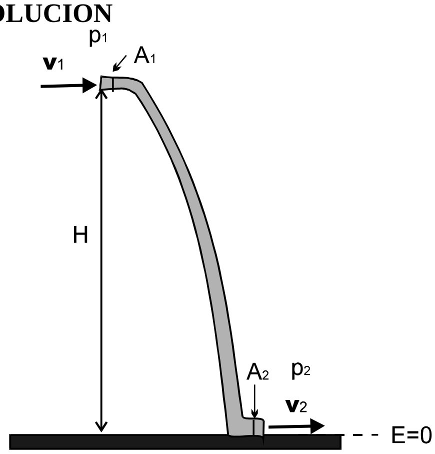
$$\Delta P = (1.2\,atm)\left(1.013x10^5\, {Pa}/{atm}\right) = 1.2\,x10^5\,Pa$$

El trabajo se calcula directamente de la ecuación

$$W = \Delta pV = \left(1.2\,x10^5\,Pa\right)\left(1.4\,m^3\right) = 1.7\,x10^5\,J$$

XVI) Por una tubería con un área de la sección transversal de 4.20 cm2 circula el agua a una velocidad de 5.18 m/s. El agua desciende gradualmente 9.66 m mientras que el área del tubo aumenta en 7.60 cm2. (a) ¿Cuál es la velocidad del flujo en el nivel inferior? (b) La presión en el nivel superior es de 152 kPa; halle la presión en el nivel inferior.

SOLUCION



a) la ecuación de continuidad aplicada al punto superior e inferior conduce a la ecuación

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

de donde

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{4.20\,cm^2}{7.60\,cm^2}\left(5.18\,{m}/{s}\right) = 2.86\,{m}/{s}$$

b) Aplicando el teorema de Bernoulli a una línea de corriente que una un punto de la parte superior con un punto de la parte inferior

$$p_1 + \rho gH + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2$$

Despejando de la ecuación anterior p_2

$$p_2 = p_1 + \rho gH + \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

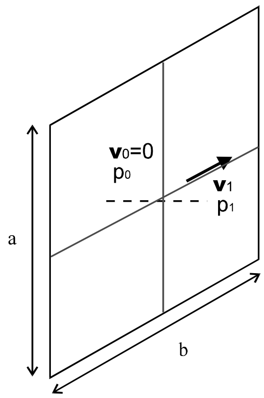
evaluando

$$p_2 = 15210^3\,Pa + \left(1000\,{kg}/{m^3}\right)\left(9.8\,{m}/{s^2}\right)(9.66\,m) + -\frac{\left(1000\,{kg}/{m^3}\right)}{2}\left(\left(5.18\,{m}/{s}\right)^2 - \left(2.86\,{m}/{s}\right)^2\right)$$

$$= 25610^3\,Pa$$

XVII) Las ventanas de un edificio de oficinas tienen 4.26 m por 5.26 m. En un día tempestuoso, el aire sopla a razón de 28.0 m/s al pasar por una ventana en el piso 53. Calcúlese la fuerza neta sobre la ventana. La densidad del aire es de 1.23 kg/m^3.

SOLUCION



En el interior del edificio (lado izquierdo del dibujo) la velocidad es cero $v_0 = 0$ y la presión en el interior es la presión atmosférica p_0. En el exterior el viento sopla con velocidad diferente de cero v_1 y por y existe una presión atmosférica p_1.
Aplicando la ecuación de Bernoulli en .dos puntos al mismo nivel de referencia

$$p_0 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2$$

de donde

$$\Delta p = p_0 - p_1 = \frac{\rho}{2} v_1^2$$

Por otra parte la fuerza sobre la ventana se puede calcular si se conoce la diferencia de presión por la ecuación

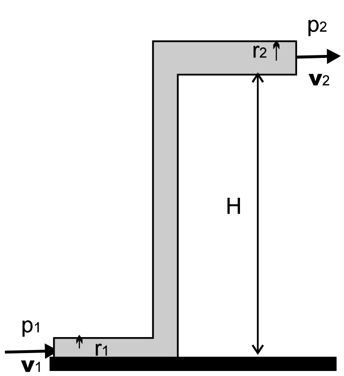
$$F = \Delta p A = (p_0 - p_1) ab = \frac{\rho}{2} v_1^2 ab$$

sustituyendo los valores dados en el problema en la ecuación anterior

$$F = \frac{\left(1.23\ {kg}/{m^3}\right)}{2} \left(28.0\ {m}/{s}\right)^2 (4.26\ m)(5.26\ m) = 10.8 x 10^3\ N$$

XVIII) Un líquido fluye por una tubería horizontal cuyo radio interior es de 2.52 cm. La tubería se dobla hacia arriba hasta una altura de 11.5 m donde se ensancha y se une con otra tubería horizontal de 6.14 cm de radio interior. ¿Cuál debe ser el flujo volumétrico sí la presión en las dos tuberías horizontales es la misma?

SOLUCION



El flujo volumétrico es $R = Av$ donde A es el área transversal de la tubería y v la velocidad de flujo

La ecuación de continuidad aplicado a los extremos del tubo conduce a la ecuación

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

de donde

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \qquad 1$$

Aplicando el teorema de Bernoulli a una línea de corriente que une el punto 1 con el 2

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g H + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

como $p_1 = p_2$ y utilizando la ecuación 1

$$\frac{\rho}{2}\left(\frac{A_2}{A_1} v_2\right)^2 = \rho g H + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

de donde despenando v_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(A_2/A_1\right)^2 - 1}}$$

el flujo volumétrico es entonces

$$R = A_2 v_2 = \pi r_2^2 \sqrt{\frac{2gH}{\left(A_2/A_1\right)^2 - 1}} = \pi r_2^2 \sqrt{\frac{2gH}{\left(\pi r_2^2/\pi r_1^2\right)^2 - 1}} = \pi r_2^2 \sqrt{\frac{2gH}{\left(r_2/r_1\right)^4 - 1}}$$

evaluando

$$R = A_2 v_2 = \pi (0.0614 m)^2 \sqrt{\frac{2\left(9.8\,m/s^2\right)(11.5 m)}{\left(0.0614 m/0.0252 m_1\right)^4 - 1}} = 0.0304\, m^3/s$$

BIBLIOGRAFIA

Resnick, R., Holliday, D. Física Vol. I, 4ta Edición, Ed. CECSA, México, 12006.
Serway, R. Física Vol. I, 4ta Edición, Ed. Mc Graw-Hill, México, 2007.
McKelvey, J., Grotch, H. Física para las ciencias e Ingeniería I, 1ra Edición, Ed. Harla S. A. de C.V., México, 1980.
Sear, S.W., Zemansky, M. W., Young., H. D. Física General Universitaria, 1ra Edición, Ed. Sitesa Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1980.
Buche, F. Fundamentos de física Vol. 1, 2da Edición, Ed. Mc.Graw-Hill, México, 1984
Eisber, R. M., Lerner, R.S. Física Vol. 1 1ra Edición, Ed. McGraw-Hill, México, 1984.
Alonso, M. y Finn, J. E., Física Vol. 1 Mécanica, 1ra Edición, Ed. Sistemas Técnicos de Edición, México, 1986.
Giancoli, C.D., Física General Vol. I, 1ra Edición, Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1988.
Jou, D.M., Llebot, J. E, Pérez G. C., Física para las ciencias de la vida, 1ra Edición, Ed. McGraw-Hill, México, 1986.