TEMA 4. ESTÁTICA

Nota: El contenido de estos apuntes pretende ser un resumen de la materia desarrollada en el curso. Por ello, el alumno debe de completarlo con las explicaciones y discusiones llevadas a cabo en clase y con la bibliografía recomendada.

4.1 Introducción.

El movimiento general de un cuerpo rígido es una combinación de movimiento de traslación y de rotación.

A diferencia del ***punto material***, donde el ***equilibrio estático*** (*movimiento nulo*) implicaba solo que la *fuerza resultante que actúa sobre él sea igual a cero y que la velocidad inicial sea también cero*, en el ***cuerpo rígido*** *la fuerza resultante que actúa sobre él tiene que ser igual a cero y también que el momento resultante de las fuerzas que actúan tiene que ser también igual a cero.*

La rama de la Mecánica que estudia el equilibrio estático de los cuerpos se llama ***Estática***. La ***Estática (***o equilibrio de los sistemas) es entendida como *la ausencia de movimiento*. Se trata por tanto de un caso particular de la dinámica.

El objeto de la ***estática*** es el *análisis de una serie de condiciones para que se verifique el equilibrio y que éste sea estable*.

En este capítulo se tratan las condiciones necesarias para que un sólido (o conjunto de sólidos) inicialmente en reposo, se mantenga en equilibrio. Se trata de resolver tres problemas:

- Dado un sistema sometido a un conjunto de fuerzas dadas, *encontrar sus posiciones de equilibrio*.
- Analizar la *estabilidad de las posiciones de equilibrio*, que consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo a dicha configuración, o si por el contrario se aleja indefinidamente de la misma.
- Dada una posición una configuración geométrica determinada, determinar las *acciones necesarias* (tanto fuerzas activas como reacciones) que aseguren el equilibrio y su estabilidad.

Las fuerzas se pueden clasificar en *fuerzas activas (*o *directamente aplicadas)*, y fuerzas *pasivas*, también llamadas *reacciones* o *fuerzas de ligadura*.

Las *fuerzas activas* son las que tienen un valor conocido, variables con el tiempo o no (por ejemplo, cargas exteriores ejercidas sobre el cuerpo), o posiblemente en función de la configuración o estado del sistema (por ejemplo, fuerzas internas en muelles o amortiguadores).

Las reacciones son las que sirven para imponer una determinada ligadura o apoyo, y cuyo valor debe calcularse imponiendo las ecuaciones de equilibrio compatibles con dicha ligadura.

4.2 Composición de fuerzas concurrentes, coplanares y paralelas.

Fuerzas concurrentes: Son aquellas que están aplicadas a un mismo punto.

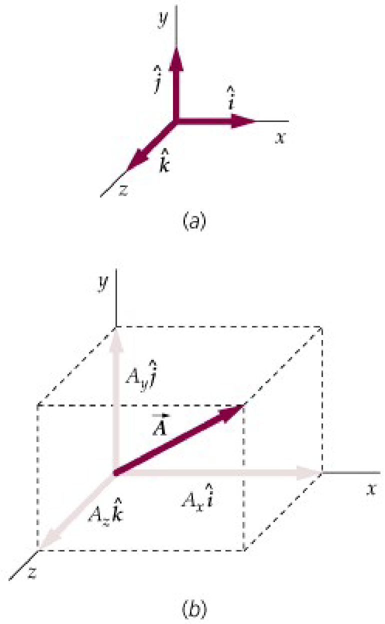
La resultante de estas fuerzas es el vector suma:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = R_x\ \vec{i} + R_y\ \vec{j} + R_z\ \vec{k}$$

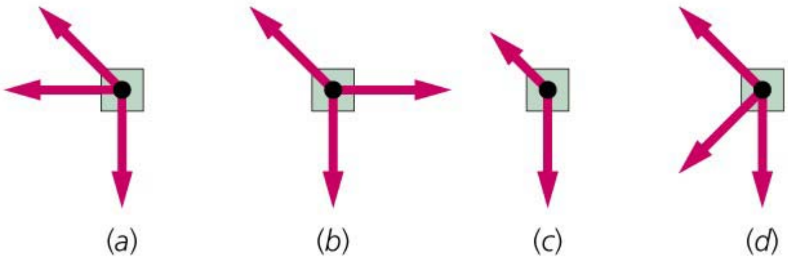
Fuerzas coplanares: Las que están contenidas en un mismo plano.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = R_x\ \vec{i} + R_y\ \vec{j}$$

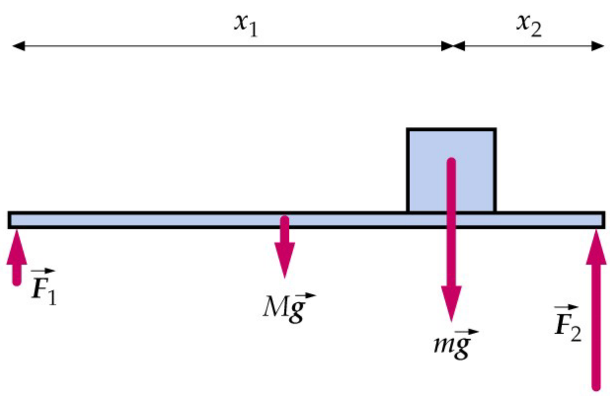
Fuerzas paralelas: Todas aquellas que tienen igual dirección (aunque pueden tener diferente sentido) que un determinado vector unitario.



Resultante de fuerzas concurrentes.



Ejemplo de fuerzas concurrentes y coplanares.



Ejemplo de fuerzas coplanares y paralelas.

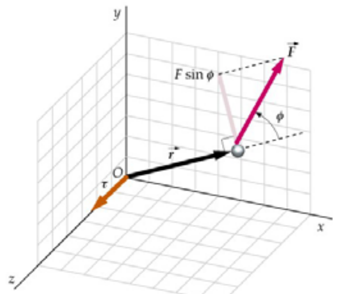
4.3 Momento de varias fuerzas.

4.3.1 Momento de una fuerza.

Se sabe que la causa de una rotación es el momento de una fuerza, calculemos ese momento.

El ***momento de una fuerza*** $\vec{F}$ respecto de un punto ***O*** (o respecto de un eje que pase por O) es un vector $\vec{M}_0$ que es igual al *producto vectorial de dos vectores* $\vec{r}$ y $\vec{F}$, o sea:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$$



Si las coordenadas de los puntos son ***O(x$_o$,y$_o$,z$_o$)*** y de aplicación de la fuerza ***A(x$_A$,y$_A$,z$_A$)***, el vector momento $\vec{M}_0$ tiene la expresión:

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_o & y_A - y_o & z_A - zo \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

y si las coordenadas de ***O*** son ***O(0,0,0)***.

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

El ***módulo de*** $\vec{M}_0$ es igual a $r\,F\,sen\,\phi$, siendo ϕ el ángulo formado entre el vector $\vec{r}$ y el vector $\vec{F}$. La cantidad $r\,sen\,\phi$, es la distancia d entre el punto O y la línea de acción de la fuerza.

4.3.2 Momento de varias fuerzas concurrentes.

El momento resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es igual a la suma vectorial de los momentos de cada una de las fuerzas e igual al momento de la resultante.

$$\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i = r \wedge \sum \vec{F}_i = \vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \cdots + \vec{r} \wedge \vec{F}_n = \sum \vec{M}_i = \vec{M}_R$$

4.3.3 Momento de varias fuerzas concurrentes y coplanares.

Si las fuerzas están en un plano y el punto O está en ese plano, los momentos son vectores perpendiculares a dicho plano lo que implica que las fuerzas concurrentes pueden reemplazarse por una sola fuerza: su resultante.

4.4 Composición de fuerzas aplicada a un sólido rígido.

Cuando las fuerzas $\vec{F}_i$ que se aplican a un sólido rígido no se aplican en un mismo punto del cuerpo tenemos dos efectos: traslación y de rotación.

La traslación viene dada por el *vector suma de las* $\vec{F}_i$ o sea la ***resultante***:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

y el efecto de rotación viene dado por el *vector suma de los momentos o* ***momento resultante.***

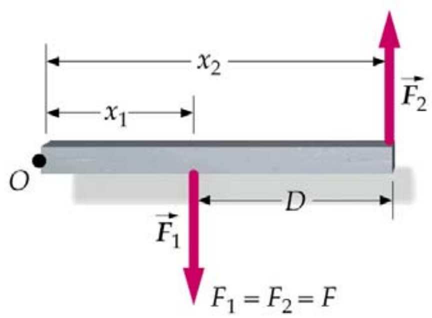
$$\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_1 + \cdots + \vec{M}_i = \sum \vec{M}_i$$

El punto de aplicación O’ debe ser tal que si $\vec{r}$ es el vector OO’:

$$\vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{M}_R$$

con lo que si $\vec{R}$ se aplica en O’ es equivalente al conjunto de fuerzas $\vec{F}_i$ cada una aplicada en O'_i, pero esto no es siempre posible en otros casos ya que si $\vec{R}$ y $\vec{M}_R$ no son perpendiculares el sistema de fuerzas $\vec{F}_i$ no puede reducirse a una $\vec{R}$ aplicada en O’, un ejemplo es el ***par de fuerzas***: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

La resultante de estas fuerzas es: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$



y el momento resultante respecto de O es:

$$\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{x}_2 \wedge \vec{F}_1 - \vec{x}_1 \wedge \vec{F}_1 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \wedge \vec{F}_1 = \vec{D} \wedge \vec{F}_1$$

Un sistema de fuerzas $\vec{F}_i$ *puede siempre reducirse a una fuerza* $\vec{R}$ *y a un par, aplicando la resultante* $\vec{R}$ *en un punto O’ respecto al cual se obtienen los momentos*, y se escoge un par igual a $\vec{M}_R$.

El momento producido por un par de fuerzas es el mismo respecto a cualquier punto del espacio y vale: $\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{D} \wedge \vec{F}_1$

4.4.1 Composición de fuerzas coplanares.

Si las fuerzas $\vec{F}_i$ son coplanares la resultante $\vec{R}$ está contenida en el mismo plano que las $\vec{F}_i$ y cada momento $\vec{M}_i$ es vertical al plano de las fuerzas y

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \cdots + \vec{M}_i = \sum \vec{M}_i$$

lo que implica que $\vec{R}$ y $\vec{M}_R$ son perpendiculares, o sea que siempre podemos encontrar un punto de aplicación O' tal que si colocamos en él la resultante $\vec{R}$:

$$\vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{M}_R$$

siendo $\vec{r}$ es el vector OO'.

En realidad $\vec{R}$ se puede aplicar en toda una línea de puntos O' situados en una recta en la ***línea de acción*** de la resultante.

Si el conjunto de fuerzas $\vec{F}_i$ está aplicado en el plano XY, el momento resultante $\vec{M}_R$ vale:

$$\vec{M}_R = (x\, R_y - y\, R_x)\, \vec{k}$$

y la ecuación de la ***línea de acción*** es:

$$\left| \vec{M}_R \right| = (x\, R_y - y\, R_x)$$

4.4.2 Composición de fuerzas paralelas.

Si las fuerzas $\vec{F}_i$ son paralelas a un vector unitario $\vec{u}$, cada fuerza puede expresarse como $\vec{F}_i = F_i\, \vec{u}$ y la resultante es: $\vec{R} = \vec{u} \sum F_i$

La suma de los momentos es: $\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \wedge F_i\, \vec{u} = \sum \vec{r}_i\, F_i \wedge \vec{u}$

Si ponemos $\vec{R}$ en un punto tal que: $\vec{r}_c \wedge \vec{R} = \vec{M}_R$

$$\vec{M}_R = \vec{r}_c \wedge \sum \vec{u}\, F_i = \sum \vec{r}_i \wedge F_i\, \vec{u} = \sum \vec{r}_i\, F_i \wedge \vec{u} = (\vec{r}_c \sum F_i) \wedge \vec{u} = (\sum \vec{r}_i\, F_i) \wedge \vec{u}$$

Con lo que se obtiene: $r_c = \dfrac{\sum r_i\, F_i}{\sum F_i}$

Un sistema de fuerzas paralelas $\vec{F}_i$ puede reducirse a una sola fuerza: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ paralela a todas las fuerzas $\vec{F}_i$ y actuando en un punto c cuyo radio vector es $\vec{r}_c$, tal que:

$$x_c = \frac{\sum x_i\, F_i}{\sum F_i} \qquad y_c = \frac{\sum y_i\, F_i}{\sum F_i} \qquad z_c = \frac{\sum z_i\, F_i}{\sum F_i}$$

4.5 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Un cuerpo está en equilibrio si se encuentra en reposo o se mueve con velocidad constante.

a) *Respecto de la translación:*

La resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo ha de ser cero.

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{F}_T = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} = 0 = \frac{d\vec{v}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \text{constante}$$

$$\text{si} \quad \vec{F}_T = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \\ F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0 \\ F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = 0 \end{Bmatrix}$$

b) *Respecto de la rotación:*

El momento externo resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo respecto a un punto cualquiera ha de ser cero.

$$\vec{M}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i x \vec{F}_i = 0$$

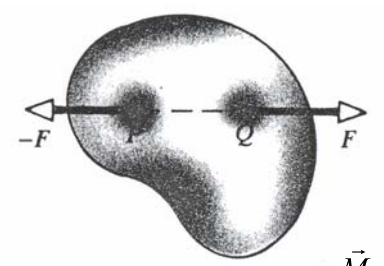
$$\vec{M}_T = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \text{constante}$$

$$\text{si } \vec{M}_T = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{i,x} = 0 \\ M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{i,y} = 0 \\ M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{i,z} = 0 \end{array} \right\}$$

En el caso particular de *equilibrio estático*, el cuerpo se encuentra en reposo: ($\vec{v} = 0$, $\vec{\omega} = 0$)

4.5.1 Casos particulares:

1) Si sobre un cuerpo en reposo actúan 2 fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, estará en equilibrio estático si dichas fuerzas tienen el mismo módulo, la misma dirección, sentidos contrarios y su línea de acción es la misma.



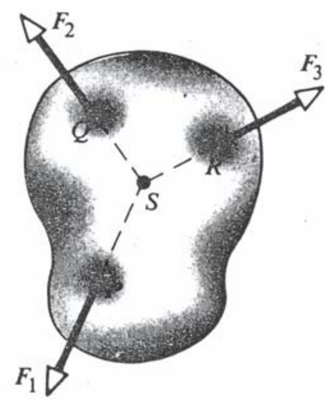
$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{M}_T = \sum_{i=1}^{2} \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 x\vec{F}_1 + \vec{r}_2 x\vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\vec{F}_1 = \vec{r}_{21} x\vec{F}_1 = 0$$

Se puede comprobar que el punto O (origen de los momentos) es arbitrario, es decir:

> *"Si el cuerpo está en equilibrio respecto de la translación y el momento neto es cero respecto de un punto, entonces debe de ser cero respecto de cualquier punto"*

2) Si sobre un cuerpo actúan 3 fuerzas, estará en equilibrio si las fuerzas son concurrentes (sus líneas de acción se cortan)



$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = 0$$

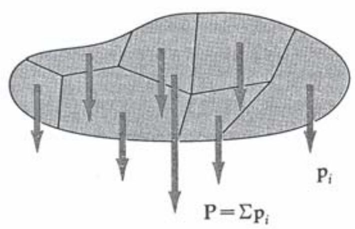
$$\vec{M}_T = \sum_{i=1}^{3} \vec{M}_i = 0$$

Una excepción a este caso es que ninguna de las líneas de acción se corten, en cuyo caso las fuerzas han de ser paralelas.

4.6 CENTRO DE GRAVEDAD

Supongamos un sistema de partículas de masas m_i en el interior de un campo gravitatorio uniforme ($\vec{g} = cte$).

El *centro de gravedad* del sistema de partículas es un punto del sistema en el cual se considera aplicada la fuerza peso total del sistema $\vec{P}$, de tal modo que el momento que produce dicha fuerza respecto a un punto cualquiera es igual a la resultante de los momentos de los pesos individuales $\vec{P}_i$ que constituyen el sistema.



$$\vec{M}_T = \vec{r}_{cg} x \vec{P}_T = \vec{r}_{cg} x \mathrm{M}\vec{g} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i x \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i x m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i x \vec{g} = \mathrm{M}\vec{r}_{cg} x \vec{g} \;\; => \;\; \vec{r}_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\text{si } \vec{r}_{cg} = x_{cg}\hat{i} + y_{cg}\hat{j} + z_{cg}\hat{k} \;\; => \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x_{cg}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\mathbf{M}} \\ \mathbf{y_{cg}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\mathbf{M}} \\ \mathbf{z_{cg}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\mathbf{M}} \end{array} \right\}$$

Si la distribución de masa es continua: $\vec{r}_{cg} = \dfrac{\int_{\mathrm{M}} \vec{r}dm}{\mathrm{M}} \;\; => \left\{ \begin{array}{l} x_{cg} = \dfrac{\int_{\mathrm{M}} xdm}{\mathrm{M}} \\ y_{cg} = \dfrac{\int_{\mathrm{M}} ydm}{\mathrm{M}} \\ z_{cg} = \dfrac{\int_{\mathrm{M}} zdm}{\mathrm{M}} \end{array} \right\}$

El centro de masas esta relacionado con la distribución de la masa, mientras que el centro de gravedad esta relacionado con la resultante de las atracciones gravitatorias.

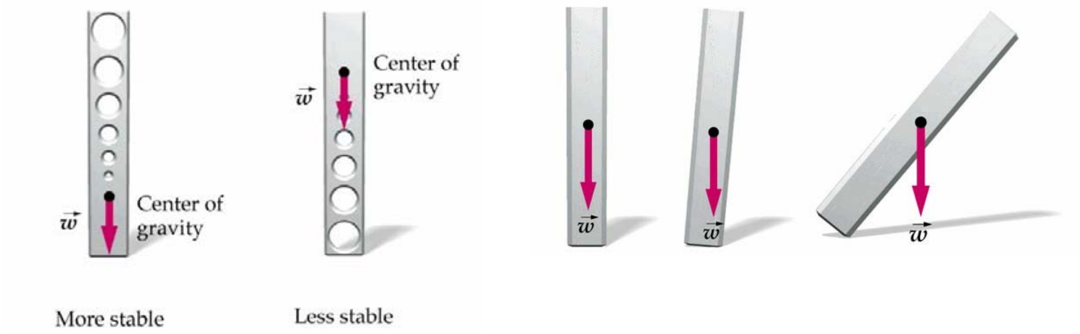
El centro de gravedad del sistema está localizado en el centro de masas, si el valor de $\vec{g}$ es constante sobre el cuerpo.

4.6.1 Propiedades

1) Si un cuerpo cuelga de un solo punto en un campo gravitatorio y está en equilibrio, el centro de gravedad siempre cae directamente debajo del punto de suspensión. Dicho equilibrio se conoce como *equilibrio estable*.

2) Si un cuerpo cuelga de un solo punto en un campo gravitatorio y está en equilibrio, estando el centro de gravedad en la vertical y por encima del punto de suspensión, se dice está en *equilibrio inestable*.

3) Una fuerza aplicada a un cuerpo directamente en su centro de gravedad no produce momento, mientras que aplicada en cualquier otro punto tiende a causarle un movimiento de translación y otro de rotación.



Situaciones de equilibrio estable e inestable.

4.7 PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Constituye un recurso para la resolución de problemas de estática.

"El trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas a un sistema material durante un desplazamiento virtual, a partir de la posición de equilibrio, vale cero".

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

Se entiende por *desplazamiento virtual* un desplazamiento infinitesimal, reversible y compatible con las ligaduras del sistema.

Existe una equivalencia entre las ecuaciones de equilibrio y el principio de los trabajos virtuales. Suponiendo que el sistema material experimenta un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$ y un cambio en la orientación del cuerpo $\delta\theta\, \hat{k}$:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_Q + \delta\theta\,\hat{k}\;\mathbf{x}\;\vec{r}_{Q,i}$$

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_Q + \delta\theta\;\hat{k}\;\mathbf{x}\;\vec{r}_{Q,i}$$

siendo:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n}\delta W_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \,.\, \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \,.\, (\delta\vec{r}_Q + \delta\theta\,\hat{k}\;\mathbf{x}\;\vec{r}_{Q,i}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right).\,\delta\vec{r}_Q + \left(\sum_{i=1}^{n}M_{Q,i}\right).\,\delta\theta\,\hat{k} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right) = \vec{F}_T = 0 \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{n}M_{Q,i}\right) = \vec{M}_Q = 0 \end{cases}$$

4.8 APLICACIONES

Se recomienda seguir los siguientes pasos en la resolución de las aplicaciones:

1) Trazar un esquema del problema que se está analizando.

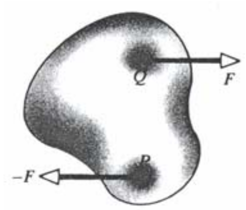
2) Dibujar un diagrama, indicando todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.

3) Resolver todas las fuerzas en componentes rectangulares, eligiendo un marco de referencia adecuado.

4) Elegir un origen conveniente para calcular el momento neto de torsión que actúa sobre el cuerpo.

5) Las condiciones de equilibrio conducen a un conjunto de ecuaciones lineales de varias incógnitas que permiten resolver el problema.

Ejemplo 1.- Demuestre que el sistema de la figura no está en equilibrio a pesar de que sobre él actúan dos fuerzas con el mismo módulo, misma dirección y sentidos contrarios.



Ejemplo 2.- Una viga uniforme de masa M soporta dos masas m_1 y m_2, como se muestra en la figura. Si la cuchilla del soporte está debajo del centro de gravedad de la viga y m_1 se encuentra a una distancia d del centro, determinar: a) La posición de m_2 para que el sistema esté en equilibrio; b) La fuerza de reacción en la cuchilla.

Solución: a) $x = \frac{m_1}{m_2} d$ b) $R = (m_1 + m_2 + \mathbf{M}) g\, \hat{j}$

Ejemplo 3.- Una escalera uniforme de 5m de longitud pesa 60N y está apoyada contra una pared vertical sin rozamiento. El pie de la escalera está a 3m de distancia de la pared. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento necesario entre el suelo y la escalera para que esta no descienda?
Solución: $\mu \geq 0.375$

Ejemplo 4.- Una viga uniforme y horizontal, cuya longitud es de 8m y pesa 200N tiene un pivote en la pared con su extremo alejado soportado por un cable que forma un ángulo de 53º con la horizontal. Si una persona que pesa 600N se sitúa sobre la viga a 2m de la pared. Determine: a) La tensión en el cable; b) La fuerza de reacción en el pivote.
Solución: a) T = 313N b) R = 581.5N

Ejemplo 5.- Una esfera uniforme de peso P está apoyada sobre dos superficies planas que forman con la horizontal ángulos de 30º y 45º respectivamente. Determine las fuerzas ejercidas sobre la esfera por las superficies de apoyo.
Solución:

Ejemplo 6.- Se va a levantar un cilindro de peso P y radio R sobre un escalón cuya altura es h<R. Se enrolla una cuerda alrededor del cilindro y se tira de ella horizontalmente. Suponiendo que el cilindro no resbala en el escalón, determine: a) La fuerza mínima F necesaria para levantar el cilindro; b) la fuerza de reacción en el escalón.

Solución: a) $F = \mathbf{M} g \sqrt{\frac{h}{2R - h}}$; b) $R = \mathbf{M} g \sqrt{\frac{2R}{2r - h}}$

Ejemplo 7.- Resolver el problema anterior considerando que la fuerza F está aplicada en el eje de la rueda.

Solución: a) $F = \mathbf{M} g \frac{\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}$, b) $R = \mathbf{M} g \left(\frac{R}{R - h} \right)$

4.5 BIBLIOGRAFÍA

R.A. SERWAY. *Física*. Interamericana
M.R. ORTEGA. *Lecciones de Física, Mecánica 2*. Universidad de Cordoba
D. J. McGILL & W. W. KING. *Mecánica para ingenieros, Estática.* Grupo editorial Iberoamericano.
P. A Tipler y , G. Mosca. *Física para la Ciencia y la Tecnología. Volumen I.* Ed. Reverté S.A. Barcelona, 2005.