Tema 2. DINÁMICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Nota: El contenido de estos apuntes pretende ser un resumen de la materia desarrollada en el curso. Por ello, el alumno debe de completarlo con las explicaciones y discusiones llevadas a cabo en clase y con la bibliografía recomendada.

2.1 Introducción

Hasta ahora se ha utilizado el modelo de partícula o punto material para el estudio de la dinámica de los cuerpos de dimensiones finitas. En ese caso la partícula material se ha considerado aislada, representando el resto del universo por la acción de fuerzas o por su energía potencial. Pero, *¿**qué ocurre cuando hay que considerar las dimensiones del cuerpo en estudio***?

La aproximación de punto material es válida en los movimientos de traslación y en aquellos casos en los que la precisión en la localización del cuerpo es del orden de las dimensiones de éste. Por tanto, hay de proponer un nuevo modelo que permita estudiar los cuerpos, y su evolución temporal, en los casos en que la aproximación anterior no sea válida. Este modelo es el de **sistemas de partículas**.

Sistema de partículas: Es un conjunto de partículas *cuyas propiedades globales queremos estudiar*. Podemos distinguir varios modelos:

- ***Sistema discreto,*** cuando *el cuerpo se considera formado por un número finito de partículas.* Dentro de este modelo podemos considerar:

    - ***Sistemas indeformables,*** en los que *la distancia relativa entre las partículas del sistema permanece inalterable* en el tiempo.
    - Sistemas **deformables**, en los que *puede cambiar la distancia relativa entre las partículas.*

- ***Sistemas continuos,*** cuando un *cuerpo puede considerarse formado por una distribución "continua" de materia* (llenando todo el espacio que ocupa). Estos sistemas se dividen en ***deformables*** e ***indeformables (sólidos rígidos***).

Las fuerzas que actúan en los sistemas de partículas se clasifican en ***fuerzas interiores*** y en ***fuerzas exteriores,*** ya que las partículas del sistema no sólo están interaccionando entre sí sino con otras partículas externas al sistema.

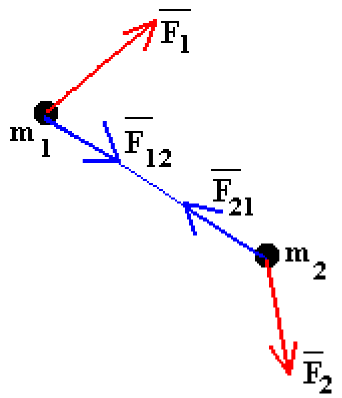
***Fuerzas interiores* o internas,** $\vec{F}_{\text{int}}$, son *las que están aplicadas a las partículas del sistema debidas a las interacciones con otras partículas del mismo sistema.*

***Fuerzas exteriores* o externas**, $\vec{F}_{ext}$, son *las que están aplicadas a partículas del sistema debidas a partículas o agentes que no pertenecen al sistema*

Por cada fuerza interna que actúa sobre una partícula del sistema existe otra igual y opuesta, o sea, las fuerzas internas se presentan en parejas.

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0$$

Supongamos un ***sistema sencillo formado por dos partículas***. Sobre cada partícula actúan las fuerzas exteriores al sistema y las fuerzas de interacción mutua entre las partículas del sistema..



Sobre la partícula 1 actúa la fuerza exterior $\vec{F}_1$ y la fuerza que ejerce la partícula 2, $\vec{F}_{12}$.

Sobre la partícula 2 actúa la fuerza exterior $\vec{F}_2$ y la fuerza que ejerce la partícula 1, $\vec{F}_{21}$.

Se cumple que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Un *ejemplo podría ser un sistema de partículas formado por la Tierra y la Luna*: las fuerzas exteriores serían las que ejerce el Sol (y el resto de los planetas) sobre la Tierra y sobre la Luna. Las fuerzas interiores serían la atracción mutua entre estos dos cuerpos celestes.

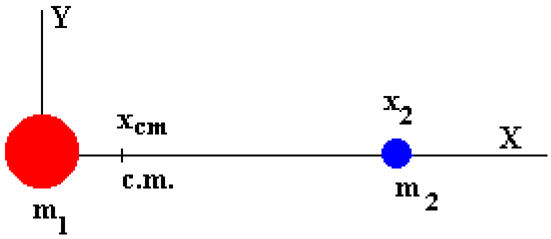
2.2 Centro de masas

El ***centro de masas de un sistema de partículas*** se define como *el punto en el que se considera aplicada la resultante de todas las fuerzas exteriores y concentrada toda la masa del sistema*.

El ***centro de masas de un sistema de partículas discreto*** puede expresarse como:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\ \vec{r}_1 + m_2\ \vec{r}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...} = \frac{\sum_1^N m_i\ \vec{r}_i}{\sum_1^N m_i}$$

Si tenemos un ***sistema sencillo formado por dos partículas*** de masas m_1 y m_2, y si m_1 es mayor que m_2, la posición del centro de masas del sistema está más cerca de la masa mayor.



El centro de masas de este sistema de dos partículas es:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

En un *caso de N partículas,* las coordenadas del vector c.d.m. será:

$$x_{cm} = \frac{\sum_1^N m_i\ x_i}{m_T} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_1^N m_i\ y_i}{m_T} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_1^N m_i\ z_i}{m_T}$$

siendo m_T *la masa total del cuerpo,* $m_T = \sum_1^N m_i$

El *centro de masas de un sistema de partículas continuo* puede expresarse como:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\ dm}{\int dm}$$

o, expresándolo en función de la densidad ρ del sistema para una distribución volumétrica de masa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\rho\, dv}{m_T}$$

siendo m_T la masa total del cuerpo continuo: $m_T = \int_M dm$

2.2.1 Movimiento del centro de masas

En general, *la posición* $\vec{r}_{CM}$ *del centro de masas de un sistema discreto de N partículas* es:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{r}_i}{\sum_1^N m_i}$$

La *velocidad del centro de masas* $\vec{v}_{CM}$ se obtiene derivando $\vec{r}_{CM}$ con respecto del tiempo:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{v}_i}{\sum_1^N m_i} = \frac{P_S}{M}$$

donde en el numerador figura el momento lineal total y en el denominador la masa total del sistema de partículas.

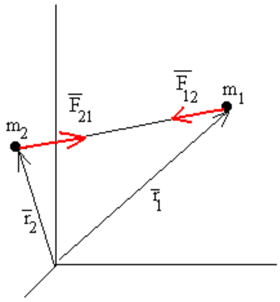
La *aceleración del centro de masas* $\vec{a}_{CM}$ se obtiene derivando $\vec{v}_{CM}$ con respecto del tiempo:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{a}_i}{\sum_1^N m_i} = \frac{\sum_1^N F_{i,ext}}{M}$$

> *El centro de masas se mueve como una sola partícula de masa M, sometida a la acción de una fuerza resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.*

2.2.2 Masa reducida

Sea un sistema aislado ($\vec{F}_{ext} = 0$) formado por dos partículas que interactúan entre sí. Sobre la partícula de masa m_1 actúa la fuerza $\vec{F}_{12}$, y sobre la partícula de masa m_2 actúa la fuerza $\vec{F}_{21}$. Ambas fuerzas son iguales y de sentido contrario. Las ecuaciones del movimiento de cada partícula son:



$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{21}$$

Como el sistema es aislado $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$, luego la aceleración del centro de masas es cero, lo que implica que el centro de masas de un sistema aislado se mueve con velocidad constante. $\vec{v}_{CM} = \text{cte}$

Este ***problema de dos cuerpos*** *se puede reducir a un problema de un solo cuerpo*, para ello, calculamos el valor de la aceleración relativa $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

Y poniendo $\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$, siendo μ la ***masa reducida*** del sistema: $\mu\vec{a}_{12} = \vec{F}_{12}$

El movimiento relativo de dos partículas sometidas únicamente a fuerzas de interacción mutua es equivalente al movimiento relativo, respecto a un sistema inercial, de una partícula de masa igual a la masa reducida y bajo una fuerza igual a la de interacción.

2.2.3 Conservación del Momento lineal

El momento lineal de un sistema de partículas es la suma de los momentos de cada una de las partículas que integran el sistema.

$$\vec{P}_S = \sum_1^N \vec{P}_i = \sum_1^N m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}$$

Si derivamos respecto al tiempo el momento lineal del sistema:

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = \sum_{1}^{N} F_{i,ext} = \vec{F}_{ext}$$

La resultante de las fuerzas exteriores aplicadas a un sistema coincide con la variación temporal del momento lineal del sistema de partículas.

Ley de conservación del momento lineal:

Si la fuerza neta externa que actúa sobre un sistema es nula, la velocidad del c.d.m. es constante y el momento lineal del sistema se conserva.

$$\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}_S}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_S = cte$$

Hay situaciones en las que *el momento lineal puede considerarse constante* aunque las fuerzas exteriores no son nulas. Esas situaciones se dan cuando las fuerzas que intervienen son ***fuerzas impulsivas*** (*fuerzas interiores muy grandes y de muy corta duración*).

En esos casos, como *por ejemplo explosiones, choques,* etc., el intervalo de actuación es muy pequeño, del orden de centésimas o milésimas de segundo, y *el resto de las fuerzas que están actuando, incluidas las exteriores pueden considerarse nulas*. Esta aproximación es válida si se considera que *los momentos lineales inicial y final se refieren al instante antes y después de la colisión*, (o de la explosión) respectivamente.

Si consideramos como sistema de referencia el centro de masas (*ver figura en clase*), observamos que:

$$m_1\vec{d}_1 + m_2\vec{d}_2 = 0$$

siendo $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$ los vectores de posición respecto del centro de masas, y que el momento lineal del sistema de partículas respecto del centro de masas es O:

$$P_{S,CM} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$$

Donde $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son las velocidades de las partículas respecto del centro de masas.

2.2.4 Conservación del momento angular

El ***momento angular*** (***L_O***) de un sistema discreto de partículas respecto de un sistema de referencia inercial O se define como *la suma de los momentos angulares individuales de cada partícula respecto del observador* O (***l_{io}***).

$$\vec{L}_{iO} = \vec{r}_i \times m_i\, \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L}_O = \sum_1^N \vec{L}_{iO} = \sum_1^N \vec{r}_i \times m_i\, \vec{v}_i = \sum_1^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Se ha visto que la cantidad de movimiento de un sistema solamente se modifica debido a las fuerzas exteriores, pero *¿quién modifica el momento angular o cinético del sistema*?

Si se calcula la derivada de la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \frac{d}{dt}\sum_1^N \vec{L}_{iO} = \frac{d}{dt}\sum_1^N \vec{r}_i \times m_i\, \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_1^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_1^N \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \sum_1^N \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

y como $\sum_1^N \vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$, ya que $\vec{v}_i$ y $\vec{p}_i$ *tienen igual dirección*, y *por tanto su producto vectorial es cero* y que la *suma de los momentos de las fuerzas internas se anula*, tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \sum_1^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,\,i}$$

La variación respecto al tiempo del momento angular de un sistema de partículas respecto a un punto es igual al momento de las fuerzas exteriores respecto al mismo punto.

Ley de conservación del momento angular: *Si el momento de las fuerzas exteriores respecto a un punto es nulo, [o el sistema es aislado ($F_{ext} = 0$)], el momento angular del sistema respecto del mismo punto permanece constante en magnitud y dirección.*

Si consideramos que: $\vec{r}_1 = \vec{d}_1 + \vec{r}_{CM}$ y $\vec{r}_2 = \vec{d}_2 + \vec{r}_{CM}$

$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{v}_{CM}$ y $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{v}_{CM}$

$$\vec{L}_O = \sum_1^N \vec{L}_{iO} = \sum_1^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \sum_1^N \vec{d}_i \times m_i \vec{u}_i$$

El momento angular del sistema respecto del sistema de referencia O es igual a la suma del momento angular del centro de masas respecto de O y la resultante de los momentos angulares de las partículas respecto del centro de masas.

2.3 Energía de un sistema de partículas

2.3.1 Energía cinética

*La **energía cinética de un sistema de partículas** respecto de un sistema de referencia inercial O es igual a la suma de las energías cinéticas individuales de cada partícula respecto de dicho sistema.*

$$E_{CS} = \sum_{1}^{N} E_{Ci} = \sum_{1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Veamos ahora como se relaciona la energía cinética de un sistema respecto a O con la energía cinética del sistema respecto del c.d.m. y la energía del c.d.m. respecto a O.

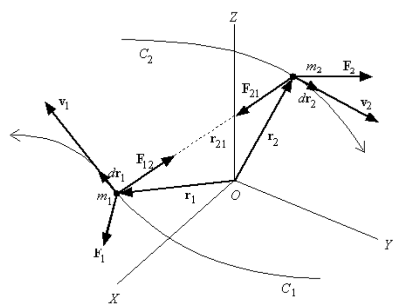
$$\vec{v}_i = \vec{u}_i + \vec{v}_{CM}$$

La *energía cinética de un sistema* es:

$$E_C = \sum_{1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 \;= \sum_{1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, (\vec{V}_{CM} + \vec{u}_i)^2 = \frac{1}{2} M\, V_{cm}^2 + \sum_{1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, u_i^2$$

O sea, la **energía cinética de un sistema** respecto a O es igual a la suma de la energía del c.d.m. respecto a O (**energía cinética de traslación del sistema**) y de la energía cinética del sistema respecto del c.d.m.(**energía cinética interna del sistema**).

Consideremos un sistema compuesto por dos partículas de masas m_1 y m_2, sujetas a las fuerzas externas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y a las fuerzas internas $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$. En un determinado instante (en que las partículas ocupan las posiciones indicadas en la figura), la partícula de masa m_1 se desplaza $d\mathbf{r}_1$ y la partícula de masa m_2 se desplaza $d\mathbf{r}_2$ moviéndose con velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ a lo largo de las trayectorias C_1 y C_2.



La ecuación del movimiento de cada partícula es:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} \quad ; \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$$

El *trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre la primera partícula* es: $\delta W_1 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \cdot d\vec{r}_1$

El *trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre la segunda partícula* es: $\delta W_2 = (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \cdot d\vec{r}_2$

$$W_S = \sum_i^N W_i = \sum_1^N \int (\vec{F}_i + \vec{F}_{ij}) \cdot d\vec{r}_i = W_{S,ext} + W_{S,\mathrm{int}}$$

El trabajo total de las fuerzas qua actúan sobre el sistema de partículas es igual a la suma del trabajo realizado por las fuerzas externas y el trabajo realizado por las fuerzas internas.

Las *fuerzas interiores* $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ *realizan trabajo siempre que haya un desplazamiento relativo* de la partícula 1 respecto de la 2, ya que $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d\vec{r}_{12}$ (y no necesariamente éste es nulo, a no ser que el sistema fuera indeformable).

Considerando que $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$:

$$W_S = \sum_i^N W_i = \sum_i^N \int_A^B m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_1^N (\frac{1}{2} m_i v_i(B) - \frac{1}{2} m_i v_i(A)) = \sum_1^N \Delta E_{Ci} = \Delta E_{CS}$$

El trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas cuando evoluciona entre 2 puntos del campo es igual a la variación de la energía cinética del sistema.

2.3.2 Energía potencial

La energía potencial es una energía asociada a la configuración del sistema, y en particular a la posición de las partículas dentro del campo.

Consideremos que las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema son conservativas (el trabajo realizado por la fuerza al desplazar una partícula entre 2 puntos de un campo no depende de la trayectoria que siga la partícula y solo depende de las coordenadas de los puntos inicial y final)

Si las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas son conservativas, el trabajo realizado por dichas fuerzas es igual a la diferencia entre la energía potencial inicial y final:

$$W_S = \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = W_S^{ext} + W_s^{\mathrm{int}} = -\Delta E_{P_s}$$

Supongamos que las fuerzas externas son no conservativas:

$$W_s = W_{ext} + W_{int} \Rightarrow W_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_p^{int} = \Delta E_m$$

El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual al cambio en la energía mecánica del sistema.

1.3.4 Conservación de la energía mecánica de un sistema

Ley de conservación de la energía mecánica: *Si las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, la energía mecánica del sistema permanece constante.*

Considerando que para fuerzas conservativas se cumple que $W_S = \Delta E_c$ y $W_S = - \Delta E_p$:

$$\Delta E_c = - \Delta E_p \quad \Rightarrow E_{mf} = E_{mi} \ \Rightarrow \Delta E_m = 0$$

Si sobre el sistema actúan fuerzas no conservativas, *el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica total del sistema.*

$$\Delta E_m = W_{no\ cons.}$$

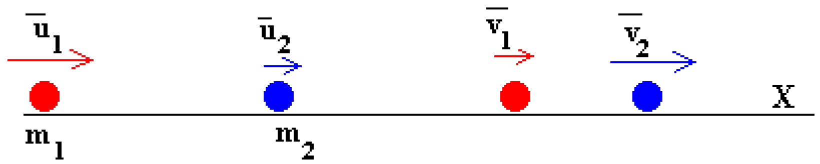
1.4 Colisiones elásticas e inelásticas.

Colisión*: Es una interacción entre dos o más cuerpos que tiene lugar en un intervalo muy corto de tiempo y en una región delimitada del espacio.* Cuando esto ocurre *se produce un intercambio de momento lineal y de energía.*

Si *el impulso debido a las fuerzas exteriores es despreciable ello implica que la cantidad de movimiento (o momento lineal) se conserva y también que la energía total se conserva.*

Cuando tenemos un choque, además de una conservación de la masa, *tanto el momento lineal como la energía total se conserva.*

Sean dos masas m_1 y m_2, cuyas velocidades antes del choque son u_1 y u_2 y después del choque son v_1 y v_2 ,, la conservación de la energía total implica:



$$Ec_{inicial} + Ep_{inicial} = Ec_{final} + Ep_{final}$$

Si llamamos Q a:

$$Q = Ec_{final} - Ec_{inicial} = Ep_{final} - Ep_{inicial}$$

Según los valores de Q podemos hacer una ***clasificación de los choques*** en:

Choque elástico: Cuando $Q = 0$

Se cumple el principio de conservación de la energía. La energía cinética inicial es igual a la final:

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Choque inelástico: Cuando $Q \neq 0$

- **Choque inelástico de primera clase o endoérgico:** $Q < 0$. *Disminuye la energía cinética y aumenta la energía potencial interna.*
-
- **Choque inelástico de segunda clase o exoérgico:** $Q > 0$. *Aumenta la energía cinética a expensas de la energía potencial interna.*

Cuando hay un choque ***siempre hay un intercambio de momento lineal*** *entre los dos cuerpos* ***pero no necesariamente un intercambio de energía cinética*** *entre ellos*.

Colisiones elásticas:

Se cumple la *conservación del momento lineal y de la energía cinética.*

1. Principio de *conservación del momento lineal*:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

2. Principio de conservación de la energía cinética (Q = 0).

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Dadas u_1 y u_2 (velocidades de las partículas m_1 y m_2 antes del choque), podemos calcular las *velocidades de las partículas v_1 y v_2 después del choque*:

$$v_1=\frac{2m_2u_2+(m_1-m_2)u_1}{m_1+m_2}$$

$$v_2=\frac{2m_1u_1+(m_2-m_1)u_2}{m_1+m_2}$$

Colisiones inelásticas.

Son aquellas en las que $Q \neq 0$.

Un caso particular es el de ***choque perfectamente inelástico***, que es cuando los dos objetos tienen la misma velocidad tras el choque.

Un ejemplo es el de un *sistema aislado formado por una bala y un bloque contra el que choca*, de modo que la bala penetra en el bloque hasta que ambos adquieren la misma velocidad. En estos choques se conserva el momento lineal (lo que no nos explica el mecanismo por el cual la bala disminuye su velocidad y aumenta la del bloque y tampoco la diferencia de energía cinética inicial y final) (la ***Ec no se conserva)***.

Sea *m* la masa de la bala *y M* la masa del bloque inicialmente en reposo, la velocidad v_f del conjunto bala-bloque después del choque en función de la velocidad v_0 de la bala antes del choque se obtiene aplicando el principio de *conservación del momento lineal*:

$$m\, v_0 = (m+M)\, v_f = (m+M)\, v_{cm}$$

La *variación de energía cinética*, de acuerdo al el balance energético de la colisión, es:

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

lo que significa que la Ec_{final} es menor que la $Ec_{inicial}$.

En el caso de un *choque inelástico* entre una bala y un bloque, *si el* ***choque es instantáneo***, se puede aplicar el principio de *conservación del momento lineal*, ya que las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema se anulan.

En el caso de que el ***choque sea de duración finita,*** las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema de partículas no se anulan durante el intervalo de tiempo que dura el choque, por lo que *no se puede aplicar el principio de conservación del momento lineal.*

En las colisiones inelásticas no se conserva la energía.

Para medir *el grado de elasticidad de una colisión*, se recurre al concepto de ***coeficiente de restitución,*** *K*, que en el caso unidimensional se define como:

$$K = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}$$

y cuyo valor varía entre *K* = 1 (*choque elástico*) y *K* = 0 (*perfectamente inelástico*).

> *K es el cociente entre la velocidad relativa de alejamiento y la velocidad relativa de acercamiento de las partículas.*

El coeficiente K se ha encontrado experimentalmente en colisiones frontales de dos esferas sólidas (como las de las bolas de billar). Esta relación fue propuesta por Newton y tiene validez solamente aproximada.

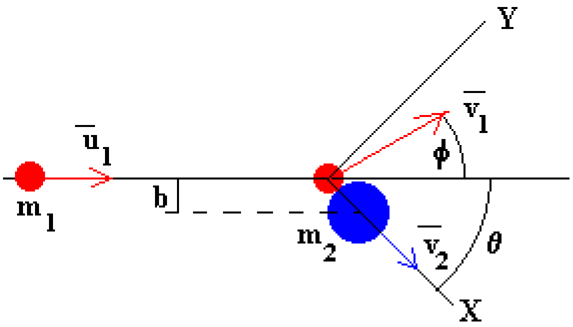
$$v_1 = \frac{(m_1 - Km_2)u_1 + m_2(1+K)u_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{m_1(1+K)u_1 + (m_2 - Km_1)u_2}{m_1 + m_2}$$

1.5 Colisiones en tres dimensiones

En el caso tridimensional es importante la naturaleza vectorial de la conservación del momento lineal. En los casos de choques totalmente inelásticos no presentan problema pero sí en los elásticos.

Veamos ahora un ***choque elástico*** de esferas (de masas m_1 y m_2 y radios r_1 y r_2), en el que se tiene en cuenta las dimensiones, según se ve en la figura:



Si se denomina ***parámetro de impacto b*** *a la distancia entre la dirección de la velocidad de la primera esfera* $\boldsymbol{u_1}$ *y el centro de la segunda esfera* (que suponemos inicialmente en reposo, $u_2 = 0$):

$$b = (r_1 + r_2)\sin\theta$$

Dado el parámetro de impacto b se puede obtener el ángulo θ.

La *conservación del momento lineal* respecto de los ejes X e Y (ver figura) es:

$$m_1 u_1 \cos\theta = m_2 v_2 + m_1 v_1 \cos(\theta + \phi)$$
$$m_1 u_1 \sin\theta = m_1 v_1 \sin(\theta + \phi)$$

El *coeficiente e* mide el cociente cambiado de signo, entre *la velocidad relativa de separación a lo largo del eje X y la velocidad relativa de aproximación* a lo largo del mismo eje.

$$e = \frac{v_2 - v_1\cos(\theta + \phi)}{u_1 \cos\theta}$$

De las ecuaciones anteriores se puede obtener el ángulo ($\theta + \phi$) (entre las direcciones de las velocidades v_1, v_2 de las partículas después del choque) y por tanto también ϕ:

$$\tan(\theta+\varphi)=\frac{m_1+m_2}{m_1-em_2}\tan\theta$$

Las velocidades v_1 y v_2 de las partículas después del choque son:

$$v_1=\frac{u_1\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)} \qquad v_2=\frac{m_1u_1(1+e)\cos\theta}{m_1+m_2}$$

Y la *velocidad del centro de masas* referida al sistema de ejes X, Y es:

$$\mathbf{v}_{cm}=\frac{m_1u_1\cos\theta}{m_1+m_2}\mathbf{i}+\frac{m_1u_1\operatorname{sen}\theta}{m_1+m_2}\mathbf{j}$$

Las *velocidades de las partículas respecto del centro de masas* son:

$$u_{1cm}=\frac{m_2u_1}{m_1+m_2} \qquad u_{2cm}=-\frac{m_1u_1}{m_1+m_2}$$

$$v_{1cm}=\frac{-em_2u_1}{m_1+m_2} \qquad v_{2cm}=\frac{em_1u_1}{m_1+m_2}$$

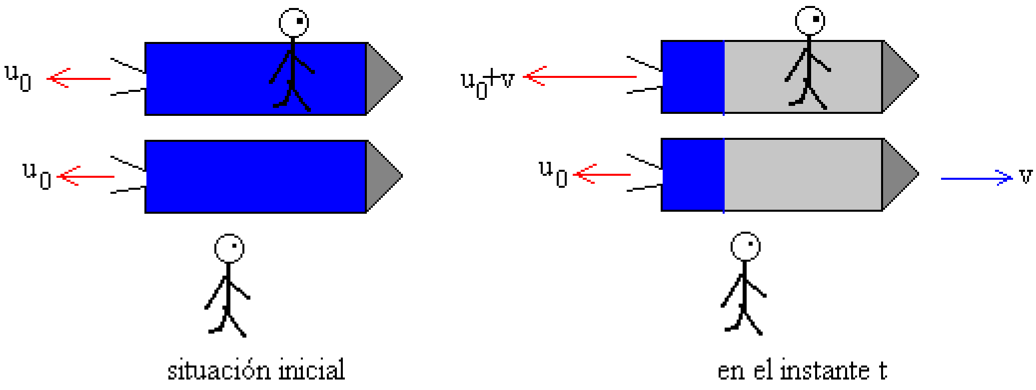
1.6 Propulsión de un cohete.

Es una aplicación de la tercera ley de Newton y de la conservación del momento lineal. Es también el sistema que usan los calamares y pulpos para propulsarse.

Los cohetes que usan combustibles de tipo químico lanzan los gases a gran velocidad hacia atrás. *El cohete ejerce una fuerza sobre los gases y los gases ejercen una fuerza igual y opuesta sobre el cohete.*

En general, si *u* es la velocidad de salida de los gases (respecto del cohete) y *D* el combustible expulsado en la unidad de tiempo, el empuje proporcionado es constante e igual a $u\cdot D$. Si el cohete se mueve con velocidad *v* (respecto de un observador terrestre), la velocidad de los gases (respecto a dicho observador terrestre) es $v-u$, que no es constante

El **cohete perfecto** es aquél en el que la velocidad de salida de los gases u_0 medida por el observador terrestre es constante *(ver parte de abajo de la figura)* y la velocidad de salida de los gases (relativa al cohete) no es constante y vale u_0+v *(ver parte de arriba de la figura).*



La *conservación de la cantidad de movimiento del sistema aislado* formado por el cohete (de masa *m* y velocidad *v*) y los gases expulsados hasta el instante *t*, (masa $m_0 - m$ y velocidad u_0) es:

$$m\,v - (m_0 - m)\,u_0 = 0$$

Si *D* es la masa de combustible quemado en la unidad de tiempo, la *ecuación del movimiento del cohete* es:

$$v = \frac{m_0 - m}{m} u_0 = \frac{Dt}{m_0 - Dt} u_0$$

$$x = \int_0^t v \cdot dt = \frac{u_0}{D}\left[m_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - Dt} - Dt \right]$$

Cohete de empuje constante.

En un ***cohete ordinario*** la *cantidad de combustible* D que se quema en la unidad de tiempo es *constante (D = dm/dt)*, entonces el *empuje* que proporcionan los gases expulsados al cohete es también *constante*.

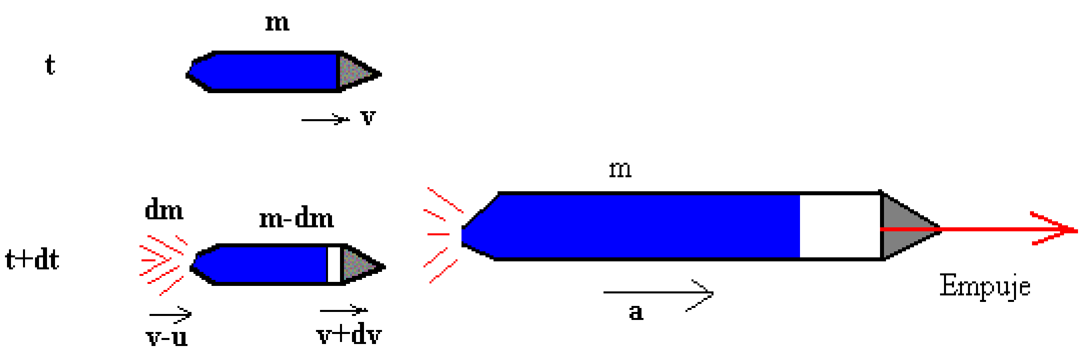
Si *v* es la *velocidad del cohete* respecto a la Tierra y *u* la *velocidad constante de los gases expulsados respecto del cohete*; *v-u* será la *velocidad de los gases respecto de la Tierra*. La masa *m* del cohete en el instante *t* vale $m = m_0 - D \cdot t$, donde m_0 es la suma de la carga útil más el combustible inicial, y $D \cdot t$ es el *combustible quemado* en un cierto tiempo *t*.

El momento lineal inicial es: $p_i = m \,.\, v$

Cuando el cohete expulsa una cantidad de combustible *dm*, su velocidad es *v+ dv*, y el *momento lineal final* es: $p_f = (m-dm) \,.\, (v+dv) + (v-u) \,.\, dm$

Luego *la variación del momento lineal del sistema* será:

$$dp = (m-dm) \cdot (v+dv) + (v-u) \cdot dm - m \cdot v$$



que si se desprecian los infinitésimos de orden superior:

$$dp = m \cdot dv - u \cdot dm$$

Como la definición general de fuerza dice:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

Si el ***cohete*** *está* ***en el espacio exterior***, *F* es cero, el momento lineal *p* permanece constante. ($F = 0$, p = cte , $dp = 0$).

$$m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} \qquad \text{o bien,} \qquad m\frac{dv}{dt} = uD \qquad\qquad dv = u\frac{dm}{m}$$

cuya integración entre los instantes 0 y *t* da el valor de la velocidad *v*:

$$v = v_0 + u \cdot \ln\frac{m_0}{m} \qquad \text{o bien,} \qquad v = v_0 + u \cdot \ln\frac{m_0}{m_0 - Dt}$$

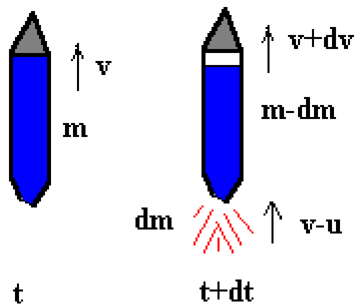
Y el *desplazamiento* x *del cohete* en el tiempo *t* es:

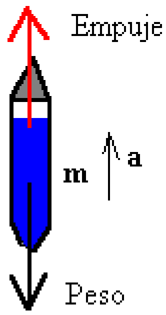
$$x - x_0 = \int_0^t v\,dt$$

$$x = x_0 + v_0 t + ut \ln m_0 + \frac{u}{D}\left[(m_0 - Dt)\ln(m_0 - Dt) + Dt - m_0 \ln m_0\right]$$

Movimiento vertical de un cohete.

Supongamos ahora un ***cohete que es lanzado verticalmente*** *desde la superficie de la Tierra* y consideremos que la gravedad *g* es aproximadamente constante (g = 9.8 m/s^2).





La *variación del momento lineal con el tiempo* es:

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt}$$

Y como *la derivada del momento lineal con el tiempo es igual a la fuerza* que actúa sobre el cohete $F = - m.\, g$, y que:

$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ se tiene que: $m\frac{dv}{dt} = uD - mg$ o bien: $\frac{dv}{dt} = -g + u\frac{D}{m_0 - Dt}$

Por lo que *un cohete puede considerarse como un móvil de masa m sometido a dos fuerzas en la misma dirección y de sentidos contrarios: el empuje de los gases uD y el peso mg.*

Las *ecuaciones del movimiento del cohete* son:

$$v = v_0 - gt + u\ln\frac{m_0}{m_0 - Dt}$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + ut\ln m_0 + \frac{u}{D}\left[(m_0 - Dt)\ln(m_0 - Dt) + Dt - m_0\ln m_0\right]$$

Cohete interestelar: *Caso particular en el que no existen fuerzas exteriores* (el peso *mg* vale cero), y *sobre el cohete actúa únicamente la fuerza de empuje proporcionada por la expulsión de los gases* al quemarse el combustible.

1.7 Sistemas de muchas partículas

Un ***sistema de muchas partículas*** *es cuando el número de partículas en muy grande*, tal como en un átomo de muchos electrones o un gas compuesto de millones de moléculas. En ese caso, el problema de considerar la energía interna resulta demasiado complicado matemáticamente por lo que se usan ciertos métodos estadísticos para calcular los valores promedio de las cantidades dinámicas en vez de valores individuales precisos para cada componente del sistema (ya que no estamos interesados en el comportamiento de cada componente individual, porque dicho comportamiento no es observable) sino en el comportamiento del sistema como un todo. La técnica matemática para tratar esos sistemas constituye lo que se llama la *mecánica estadística*.

Si nos olvidamos por un momento de la estructura interna del sistema y simplemente usamos los valores *medidos experimentalmente* de U y W, estamos empleando otra rama de la Física, la *Termodinámica*.

Así se puede relacionar la *temperatura T* del sistema con la energía cinética *promedio* de las partículas en el sistema. Por tanto la temperatura es definida independientemente del movimiento del sistema relativo al observador. La energía cinética promedio de una partícula es:

$$E_c = \frac{1}{N} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \, v_i^2 \right)$$

donde N es el *número total de partículas* y v_i es la *velocidad de la partícula* en el sistema.

No se necesita indicar aquí la relación precisa entre la temperatura y la energía cinética promedio. Es suficiente por el momento suponer que, *dada la energía cinética promedio en un sistema, se puede calcular la temperatura del sistema, y recíprocamente*. En este sentido hablamos de la temperatura de un sólido, de un gas, etc.

Un sistema que tiene la misma temperatura en todas sus partes, de modo que la energía cinética promedio de las partículas en cualquier región del sistema es la misma, se dice que *está en equilibrio térmico*.

En un sistema aislado, cuya energía interna es constante, la temperatura puede cambiar si la energía cinética interna cambia, debido a un cambio en la energía potencial interna. Pero si la energía potencial interna de un sistema aislado permanece constante, que es el caso de un gas contenido en una caja rígida, entonces la energía cinética promedio del sistema permanecería constante, o sea, su temperatura no cambiará.

Cuando el sistema no está aislado, puede intercambiar energía con el resto del universo, lo que puede resultar en un cambio de su energía cinética interna y, por tanto, de su temperatura.

De igual modo se pueden ver nuevos conceptos de trabajo, calor, etc y se puede aplicar a sistemas de muchas partículas como p.e. fluidos (gases, líquidos, etc.)

Trabajo: *El intercambio de energía de un sistema con el mundo exterior es representado por el trabajo externo* W_{ext} como: $U - U_0 = W_{ext}$

Si el trabajo es hecho ***hacia*** *el sistema* (W_{ext} positivo), *su energía interna aumenta*, *si el trabajo es hecho* ***por*** *el sistema* (W_{ext} negativo), *su energía interna disminuye*. Este trabajo externo es la suma de los trabajos externos individuales hechos en cada una de las partículas del sistema, que a veces puede ser fácilmente calculado estadísticamente.

Un *ejemplo es la presión ejercida por un gas* dentro de un cilindro en una de cuyas paredes es un pistón movible, *explicado como intercambio de energía y de momento lineal con las paredes a través de los choques e interacciones de sus moléculas con las moléculas de las paredes.*