Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad Complutense de Madrid

Análisis Estocástico de los Procesos de Inversión

Tesis Doctoral

AUTORA:SUSANA CARABIAS LÓPEZ

DIRECTOR: ENRIQUE GARCÍA PÉREZ

Índice

Capítulo I

Planteamiento de los problemas de decisión ante los procesos de inversión

Capítulo III

Valoración en un modelo de múltiples periodos

Capítulo IV

Extensiones posibles y alcance del modelo

Índice de Teoremas

Capítulo I

Planteamiento de los problemas de decisión ante los procesos de inversión

1. DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO OBJETO DE ESTUDIO

1.1. Procesos de inversión y problemas de decisión ante un proceso de inversión

Un proceso de inversión consiste en una entrega, por parte de un individuo o de una empresa, de un conjunto de recursos económicos, entrega que se realiza con el objetivo de recibir, a cambio, otros recursos económicos. El proceso se lleva a cabo porque este individuo o empresa espera que los recursos recibidos le proporcionen mayor utilidad que los recursos entregados.

Ante la posibilidad de llevar a cabo un proceso de inversión, un individuo puede plantearse un problema de decisión, en que la elección posible es comenzar o no dicho proceso. Si este proceso se comienza, el individuo, en el caso más general, tendrá la facultad de tomar otro tipo de decisiones, como puedan ser interrumpir el proceso, o alterar en otra forma el intercambio de los recursos. El objeto de estudio de la presente Tesis es el conjunto de problemas de decisión que se puede plantear un individuo, o una empresa, por el hecho de tener la posibilidad de llevar a cabo un proceso de inversión o por estar llevándolo a cabo.

La definición de inversión dada recoge multitud de situaciones que obligan a plantear los problemas de decisión en formas muy distintas. En este capítulo se pretende, en primer lugar, describir los factores más importantes generadores de diversidad, y concretar el tipo de situaciones que analizaremos. A continuación, se describirán los elementos básicos de los modelos que se utilizarán para el análisis de estos problemas de decisión.

Toda inversión se reduce a un intercambio de recursos en el tiempo entre un individuo o empresa, que en el futuro llamaremos inversor, y su entorno. Podemos distinguir, así, tres elementos principales: el inversor, que desempeña el papel de decisor en el problema, el entorno de este inversor y los recursos económicos que se intercambian. Las características de cada uno de estos elementos y de las relaciones entre ellos generan gran heterogeneidad entre inversiones que, a continuación, se pretende estructurar.

1.2. Recursos económicos

Denominaremos activo a cualquier producto físico, servicio o derecho que resulte escaso y, por tanto tenga valor para los agentes económicos, por lo que no podrá conseguirse sin entregar algo a cambio. Se llamará activo real a cualquier bien físico o servicio, y activo financiero a cualquier derecho económico que no sea un producto físico o un servicio.

Llamaremos recurso económico a cierta cantidad de un activo que resulte disponible en un momento del tiempo dado.

Un primer criterio de clasificación de los procesos de inversión será que incluyan o no activos reales entre los recursos que se intercambian. En caso de que sí estén incluidos se hablará de inversión real y, si no es así, de inversión financiera. Para una discusión sobre la delimitación entre estos dos tipos de inversión, se puede ver Sharpe (1981), pp. 3-4.

Un segundo criterio de clasificación será el que algunos de los recursos intercambiados estén ligados o no por una función de producción. Dados dos recursos, si están relacionados a través de una función de producción, diremos que entre ellos existe una relación productiva. Si no fuera así, diremos que su relación se reduce a la posibilidad de intercambio financiero o a una relación financiera. Si en un proceso de inversión aparece alguna relación productiva se dirá que la inversión es productiva, y si no aparece ninguna relación productiva, diremos que la inversión es no productiva. Las inversiones productivas son siempre reales, puesto que la variable dependiente de una función de producción es siempre un bien físico o un servicio. En cambio, las inversiones no productivas pueden ser reales o financieras.

1.3. Entorno del inversor

1.3.1. Mercados de recursos y oportunidades de producción

El entorno del inversor desempeña el papel fundamental de definir los conjuntos de recursos económicos que resultan intercambiables por relaciones productivas o financieras. El entorno quedará especificado, en un momento dado, cuando estén definidos todos los conjuntos de recursos intercambiables para el inversor.

Llamaremos oportunidad de producción de un inversor a un par de conjuntos de recursos que dicho inversor puede intercambiar entre sí por medio de una relación productiva.

Llamaremos mercado a un conjunto de recursos económicos sobre el que están definidas relaciones de intercambio financiero. Cuando un recurso está incluido en un mercado se dice que se negocia en dicho mercado. Las oportunidades de inversión financiera de un inversor son los conjuntos de recursos que puede intercambiar por relaciones financieras, o mercados en los que puede operar.

1.3.2. Clasificación de los mercados de recursos

Si un mercado verifica que en todos los intercambios que define intervienen productos físicos o servicios, se dirá que es un mercado de bienes. En caso contrario, se dirá que es un mercado financiero. Los mercados de bienes y los mercados financieros tienen características distintas.

Cuando un recurso, obtenido por una relación financiera, puede intercambiarse a su vez por otro distinto, al mercado en que se produce este último intercambio se le denomina mercado secundario. Se dirá que un mercado es primario cuando en él se intercambian recursos que no han sido objeto de intercambios financieros anteriores.

Cuando un inversor, mediante una relación de intercambio financiero, puede desprenderse de un recurso obtenido previamente, se dice que el recurso tiene mercado secundario o bien que el recurso es recuperable. En caso contrario, se dice que el recurso es irrecuperable. Se presentan, a veces, situaciones intermedias, en que plantea dificultad clasificar un recurso como recuperable o irrecuperable. Caracterizaremos estas situaciones con el concepto de liquidez. Diremos que un recurso es completamente líquido si es recuperable, que un recurso no es nada líquido si es irrecuperable, y entre estos dos extremos quedarían definidos distintos grados de liquidez.

Es habitual que los recursos obtenidos en mercados financieros sean líquidos y, en cambio, no lo sean los recursos obtenidos en mercados de bienes.

1.3.3. Relación con el entorno en inversiones financieras y reales

Puesto que en las inversiones financieras sólo se intercambian activos financieros, en ellas se operará únicamente en mercados financieros.

En una inversión real no productiva todos los recursos se intercambian por relaciones financieras, pero dichos intercambios pueden realizarse en mercados de bienes o en mercados financieros.

En una inversión productiva se producen intercambios financieros y productivos. Independientemente de la complejidad del proceso de inversión, pueden distinguirse los tres tipos de intercambio que se describen a continuación.

Un primer tipo de intercambio viene dado por la adquisición de recursos que actúan como variables independientes en la función de producción. Dichos recursos se obtendrán por relaciones financieras en mercados de bienes, en mercados financieros o en ambos. Es habitual que los recursos obtenidos por estas relaciones sean muy poco líquidos

El segundo tipo de intercambio es una relación productiva. Se intercambiarán recursos obtenidos en los mercados por nuevos recursos económicos a través de la función de producción.

El tercer tipo de intercambio es financiero. Los recursos obtenidos a través de la función de producción se intercambian en mercados de bienes o mercados financieros por otros recursos líquidos. A este tipo de intercambio lo denominaremos venta de productos.

En el futuro supondremos que toda inversión real es productiva. En el caso de inversión real no productiva puede interpretarse que la función de producción es la función identidad. Este supuesto, por tanto, no implica pérdida de generalidad.

1.3.4. Incertidumbre del entorno

Supondremos que la concreción del entorno, en un momento del tiempo futuro es incierta. El papel que desempeña la incertidumbre del entorno en el proceso de inversión genera la clasificación de las inversiones más importante en cuanto a la metodología a seguir para su análisis. Puede ocurrir que el desarrollo del proceso de inversión no dependa de la evolución del entorno. En este caso, hablaremos de inversiones ciertas. En caso de que la evolución incierta del entorno influya sobre el desarrollo de la inversión, hablaremos de inversiones aleatorias.

El entorno puede tener una influencia sobre los recursos intercambiados, de manera directa, si las realizaciones de dichos recursos, en sí mismas, dependen del desarrollo en el tiempo del entorno; en este caso diremos que los recursos intercambiados son aleatorios, y, en caso contrario que dichos recursos son ciertos. También, el entorno puede tener una influencia indirecta sobre estos recursos a través del inversor, en el sentido de que las realizaciones de dichos recursos dependan de las decisiones del inversor y éstas dependan, a su vez, del desarrollo del entorno. Diremos, entonces que estamos ante un proceso con inversor activo, mientras que, en otro caso, hablaremos de un proceso con inversor pasivo.[1]

Con la terminología que se acaba de incorporar, quedarían definidos cuatro tipos de inversiones:

a) inversor pasivo que intercambia recursos ciertos

b) inversor pasivo que intercambia recursos aleatorios

c) inversor activo que intercambia recursos ciertos

d) inversor activo que intercambia recursos aleatorios.

---

[1] Se habla aquí de inversor activo y pasivo con un sentido distinto al utilizado en Huang (1987) p. 528 y siguientes. Huang se refiere a que sea el inversor quien gestione su inversión o encargue dicha gestión a una empresa especializada.

A continuación, examinaremos cada uno de estos tipos de inversión.

El primero se corresponde con una inversión cierta. Los recursos que se entregan y reciben, si se lleva a cabo el proceso, son conocidos en el momento en que se plantea la posibilidad de invertir. Con esta información, y la proporcionada por el mercado en el momento actual, se toma una decisión, donde las alternativas son invertir o no invertir. Si el decisor no invierte, el proceso habrá concluido. Si el inversor invierte, entregará y recibirá los recursos del proceso. Puesto que el inversor es pasivo, la información que proporciona la evolución del entorno no influye sobre las decisiones respecto de la inversión, por lo que la decisión tomada en el momento inicial no se modificará en ningún otro momento.

Cuando un inversor pasivo intercambia recursos aleatorios, no conoce con certeza todos los recursos que entregará y recibirá en el futuro, ya que sus concreciones dependerán de la evolución del entorno. La decisión de llevar a cabo la inversión o no es más complicada. Puede ocurrir que, bajo el supuesto de evolución del entorno favorable al inversor, sea conveniente llevarla a cabo, pero no sea así bajo el supuesto de evolución desfavorable del entorno. Con la información que tiene el inversor, en el momento inicial, respecto de la evolución del entorno y de los recursos que definirían la inversión, para las distintas evoluciones posibles, el inversor debe tomar una decisión. El hecho de que el inversor sea pasivo implica que las manifestaciones del entorno en el futuro no motivarán nuevas decisiones sobre el proceso de inversión.

Recordamos que se ha partido del supuesto de que el inversor siempre actúa en un entorno incierto, aunque es posible que se enfrente a una inversión cuyos recursos no dependan de la evolución de dicho entorno. De ahí que puedan existir inversores activos al intercambiar recursos ciertos.

Efectivamente, puede ocurrir que, en un momento del desarrollo del proceso, el mercado defina un conjunto de recursos intercambiables por los que el inversor posee en ese momento, que le proporcionen una mayor utilidad que aquellos que recibiría, con certeza, en caso de continuar con la inversión definida inicialmente. Este caso, de recursos ciertos con inversor activo, queda recogido como inversión aleatoria, ya que la incertidumbre del entorno tiene una influencia indirecta sobre los recursos, a través de las decisiones del inversor.

El último caso incluye la influencia directa e indirecta de la incertidumbre sobre los recursos económicos que definen un proceso de inversión. La toma de decisiones de inversión durante el desarrollo de la misma puede encontrar ahora dos motivos. El primero es el ya citado en el caso anterior, que el mercado defina un conjunto de recursos intercambiables por los que el inversor posee que le proporcionen una mayor utilidad que aquellos que recibiría en caso de continuar con la inversión definida inicialmente. El segundo motivo se refiere a la incidencia directa del entorno sobre los recursos. Recordamos que el hecho de que exista esta influencia directa implica que la decisión inicial puede ser comenzar la inversión, aun en el caso de saber que el entorno puede evolucionar de modo desfavorable y, en este caso, los recursos obtenidos no proporcionen al inversor mayor utilidad que los entregados.

Durante el desarrollo de la inversión el decisor obtiene más información sobre la evolución del entorno. Esta información le puede indicar que, en efecto, la evolución ha sido desfavorable y es conveniente interrumpir la inversión. Análogamente, si la evolución resulta favorable, se podría llegar a la conclusión de que, por ejemplo, conviene ampliar la inversión.

Se llega así, a dos conclusiones para la toma de decisiones de inversión:

Es claro que, dadas dos inversiones con recursos ciertos idénticos, tal que en una está permitida la "actividad" del inversor, y en la otra no, la primera será siempre preferida a la segunda por un inversor coherente. Es, por tanto, evidente que el hecho de que el inversor pueda o no tomar decisiones respecto de la inversión, durante el desarrollo de la misma, es un factor que debe tenerse en cuenta en el momento de tomar la decisión inicial de llevar a cabo o no dicho proceso. La posibilidad de tomar decisiones en el futuro hace una inversión más valiosa.

La segunda conclusión es que, en una inversión con inversor activo, la decisión inicial no puede concretarse en la descripción del conjunto de recursos económicos que se intercambiarán, puesto que la descripción definitiva no se puede conocer en el momento inicial. La decisión, por tanto, debe concretarse en la entrega o no del primer recurso del proceso, esto es, en comenzar o no el proceso de inversión.

En cuanto al conocimiento que tiene el inversor de la incertidumbre del entorno en cada momento, supondremos que el decisor conoce los estados de la naturaleza que se pueden realizar en cada momento del tiempo futuro. Es posible distinguir dos casos, en función de que, además, tenga o no definido su grado de creencia en la realización de cada uno de los estados de la naturaleza. Si está definido diremos que la decisión se plantea en ambiente de riesgo, y si no es así, diremos que la inversión se plantea en ambiente de incertidumbre. El planteamiento supondrá ambiente de riesgo, aunque se concluirá que, bajo determinados supuestos, la decisión es independiente de los grados de creencia asignados.

1.4. Clasificación de los inversores: agentes de consumo y agentes de producción.

Se utilizará la clasificación clásica de la Teoría Económica de los agentes entre agentes de consumo y agentes de producción. Identificaremos los agentes de consumo con individuos y los agentes de producción con empresas. Resaltaremos las dos diferencias básicas entre agentes de consumo y de producción que, a su vez, provocan diferencias en su forma de afrontar un problema de decisión ante un proceso de inversión.

La primera de estas diferencias es que los individuos sólo realizan inversión financiera, mientras que las empresas realizan inversión financiera y productiva. Obsérvese que el concepto de individuo como agente de consumo no se corresponde con persona física; si una persona física desarrolla inversión productiva, dividiremos sus decisiones en dos grupos: un grupo de decisiones definirá una empresa y, el otro, un individuo o agente de consumo.

La segunda diferencia se refiere al objetivo del agente que lleva a cabo un proceso de inversión. Este objetivo es obtener un aumento de utilidad con el intercambio de los recursos económicos. El análisis de un proceso de inversión cambiará en función de que el inversor sea un agente de consumo o un agente de producción por la diferencia sustancial entre las funciones que describen la utilidad de los agentes de un tipo y de otro.

Aceptaremos que, para un agente de consumo, la utilidad descrita por sus preferencias es una función del consumo de activos reales. Siempre supondremos que todo agente prefiere más consumo a menos consumo, esto es, los individuos no llegan a un estado de saturación.

La utilidad que reporta una inversión a un agente de consumo consiste en el aumento de las posibilidades de consumo futuro. El problema del análisis de los procesos de inversión para un agente de consumo es, por tanto, el de reparto en el tiempo del gasto del agente entre consumo e inversión. No se planteará el problema de asignación entre distintos bienes para aislar el problema objeto de estudio. Además, por las hipótesis que se fijarán en la sección tercera de este capítulo, el criterio de decisión que se utilizará no lleva a ninguna ordenación de las decisiones de inversión de los agentes de consumo. De acuerdo con este criterio, sólo dependen de sus preferencias de reparto en el tiempo de la riqueza.

Cuando el inversor es una empresa, las decisiones de inversión también se entienden incluidas en un problema global, constituido por la gestión de la empresa en su conjunto. Las decisiones de inversión dependerían, por tanto, de la definición del objetivo último de la gestión empresarial. La tendencia actual es aceptar, como objetivo último, la maximización del valor de la empresa para sus accionistas. En este caso, no es posible definir preferencias individuales del decisor. No obstante, puesto que los accionistas últimos de la empresa son individuos, sí puede ser relevante el tipo de preferencias de los individuos que forman parte del entorno en que está situado el inversor.

1.5. Organización del análisis de las decisiones de inversión en la Tesis.

El objetivo de esta Tesis es la elaboración de un modelo que proporcione una metodología para el análisis de los procesos de inversión real, partiendo de la información que proporcionan los mercados financieros.

Con esta finalidad, se construirá un modelo teórico de la realidad descrita en esta primera sección, basado en los modelos de Arrow y Debreu. No se tratará de un modelo de equilibrio, sino que, bajo determinadas hipótesis, tomará las variables relevantes observables como exógenas y, a partir de ellas, se estudiarán las consecuencias de utilizar un criterio de decisión determinado.

En la segunda sección de este capítulo se especifica el modelo matemático con que se trabajará. En la sección tercera se establece la hipótesis básica y se define el criterio para la toma de decisiones de inversión que se analiza a lo largo de los sucesivos capítulos.

En el capítulo segundo se estudian las decisiones de inversión en un modelo de un solo periodo. Solamente se considerarán dos momentos del tiempo: el momento inicial, en que pueden tomarse decisiones, y el momento final, en que se observan los resultados. No se plantean aquí procesos con inversor activo. La finalidad de este capítulo es analizar los principios básicos que se derivan del criterio adoptado para decisiones de un inversor pasivo. Se consideran dos casos: que los recursos intercambiados sean ciertos o aleatorios.

En el tercer capítulo se analiza un modelo con varios periodos. Se encontrará aquí, en primer lugar, la generalización de los principios obtenidos en el capítulo segundo para inversiones con recursos ciertos o aleatorios con inversor pasivo. En segundo lugar se considerará la posibilidad de que el inversor sea activo. Por restricciones del modelo utilizado únicamente se considerará inversor activo en el caso de intercambio de recursos aleatorios.

El cuarto, y último, capítulo puede dividirse en dos partes. La primera, de extensiones, recoge el planteamiento de modelos que parten de supuestos distintos en la representación de algunas de las variables. Algunos de estos modelos implican la relajación de restricciones impuestas en el aquí utilizado: la generalización a espacio de estados infinito y la consideración de tipos de interés estocásticos. Cuando los tipos de interés no son ciertos, se identifica el caso en que puede aparecer un inversor activo en el intercambio de recursos ciertos. Otras extensiones se refieren a supuestos diferentes en la modelización: tiempo continuo o decisiones de consumo endógenas.

La segunda parte del capítulo está destinada a recoger las conclusiones de la tesis. Aquí se relaciona el modelo desarrollado con los resultados obtenidos en las últimas décadas en los que se basa habitualmente la valoración financiera. Contemplar esta relación permite, en primer lugar, resaltar la generalidad de nuestro modelo, tanto porque numerosos trabajos resultan casos particulares de él como porque necesita menos supuestos iniciales que otros modelos de valoración. En segundo lugar, la relación presentada permite resaltar las aportaciones fundamentales de la tesis: un planteamiento completo para los modelos de valoración de opciones reales en el caso de tiempo discreto con espacio de estados finito, y un resultado de valoración cuando se relaja la hipótesis más exigente del modelo, que supone mercados completos.

2. MODELIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE UN PROCESO DE INVERSIÓN

2.1. Modelización del tiempo y la incertidumbre

2.1.1. Entorno dinámico incierto

Comenzaremos por aceptar la existencia de una variable que toma valores en un conjunto Λ que representa momentos del tiempo, que, generalmente representaremos como t, y denominaremos variable "tiempo".

Llamaremos origen del tiempo al menor valor para el que esté definida alguna variable relevante del modelo, en general $t = 0$, y, análogamente, llamaremos final al mayor de estos valores, que representaremos por $t = T$.

En un modelo se puede considerar que esta variable toma valores en el conjunto de los números reales no negativos; en este caso se habla de un modelo de inversión en tiempo continuo. Si se define como una variable que toma valores en el conjunto de los números enteros no negativos se dice que el modelo de inversión está planteado en tiempo discreto.

En la literatura económica, se acepta generalmente que no existen argumentos teóricos de peso para elegir planteamientos en tiempo discreto o en tiempo continuo. Algunos autores argumentan que un planteamiento en tiempo discreto representa mejor la realidad, puesto que el análisis sólo puede basarse en observaciones discretas, mientras otros defienden la representación en tiempo continuo, dada la alta frecuencia de intercambios que existe en los mercados financieros. En general, se acepta que el análisis en tiempo continuo permite cálculos más elaborados, por lo que lleva a conclusiones más enriquecedoras, pero que el análisis en tiempo discreto da lugar a planteamientos más claros.[2]

En la Tesis se trabaja con un modelo en tiempo discreto, que lleva a planteamientos matemáticos más sencillos. En el capítulo IV, se presentan las diferencias más importantes que surgen al trabajar con tiempo continuo, y se citan trabajos que utilizan este tipo de representación. El estudio, con tiempo continuo, de los problemas analizados en la Tesis, sería una prolongación natural de la misma.

Al conjunto de estados de la naturaleza en que puede concretarse el entorno, lo representaremos por un conjunto de sucesos, $\omega \in \Omega$. La descripción de la evolución de los mercados financieros a través de la especificación de los Estados de la Naturaleza posibles se desarrolló en la década de los años 50 por Arrow y Debreu. Desde entonces, se ha reconocido la validez teórica de este planteamiento pero, por las dificultades que presentaba su aplicación, no fue utilizado en general en la siguiente década. En la actualidad se han incrementado sus posibilidades de aplicación a modelos dinámicos que reflejen la evolución de la información del inversor.

Con un planteamiento en tiempo discreto, es necesario distinguir entre que el conjunto de estados de la naturaleza sea finito o infinito. En cada caso se dotará de un álgebra o σ-álgebra adecuado, que se representará por F. En la Tesis se utiliza el modelo más sencillo, esto es, con espacio de estados finito. En este caso, el álgebra será el conjunto de las partes de Ω. En el capítulo IV se comenta la generalización a espacio de estados infinito.

[2] Ver, en este sentido, Duffie (1988) pag. 1 y 75 , Musiela y Rutkowski (1997), pag. 69. Pueden encontrarse opiniones diferentes en Runggaldier y Schweizer (1995), pag 1.

2.1.2. Información del inversor sobre la evolución del entorno

Para cada momento del tiempo, $t \in \Lambda$, el conjunto Ω llevará asociado un álgebra (σ-álgebra en su caso), $F_t \subset F$, que representará la información de un inversor en el momento t. El álgebra F_t indica los estados de la naturaleza que el inversor es capaz de distinguir en el momento t. El inversor distingue dos estados de la naturaleza ω_i, ω_j entre sí en el momento t, si existe un conjunto $S \in F_t$, tal que $\omega_i \in S$, y $\omega_j \notin S$.[3]

Se supondrá que todos los inversores tienen la misma información, que $F_0=\{\emptyset,\Omega\}$, donde representa $\emptyset$ el suceso complementario de Ω, y que $F_T = F$. Si suponemos, además, que el inversor no olvida, la sucesión formada por las álgebras F_t es creciente y, por tanto, constituye una filtración.

Definición (filtración del inversor):

Se denomina filtración del inversor, y se representa por $\mathcal{J} = \{F_t\}_{t\in\Lambda}$, a la sucesión creciente de álgebras que incluyen, en cada momento los sucesos que el inversor es capaz de distinguir.

Se plantea el problema en ambiente de riesgo, esto es, se supone que el inversor dota al espacio (Ω,F) de una medida de probabilidad[4] P, por lo que en el entorno queda definido un espacio probabilístico (Ω,F,P), con una filtración asociada $\mathcal{J}$. En cuanto a la asignación de probabilidad que realizan los distintos inversores que operan en el mercado, supondremos que las asignaciones son, en general distintas, pero que todas las medidas de probabilidad definidas determinan los mismos conjuntos de probabilidad nula.

---

[3] En Roger (1991) pag. 72 –74, se trata de forma desarrollada el concepto de álgebra como indicador de información.

[4] La probabilidad se define bajo la concepción subjetiva (Savage).

2.2. Modelización de los recursos

2.2.1. Los recursos como capitales financieros

Se ha definido recurso económico como cierta cantidad de un activo que resulta disponible en un momento del tiempo dado.

La especificación de un activo real, resultará de sus características físicas, que determinarán tanto sus relaciones productivas con el resto de los recursos como su situación en las preferencias de los consumidores.

La especificación de un activo financiero (o título financiero) resultará de la descripción de los derechos económicos que proporciona. Supondremos, salvo indicación en contrario, que dos activos financieros que dan lugar a los mismos derechos son indistinguibles.

La especificación de un recurso económico, basado en un activo, real o financiero, exige indicar un número de unidades de dicho activo y el momento en que son disponibles.[5] El par formado por el número de unidades y el momento de disponibilidad de un recurso se representará por un capital financiero.

Cuando, con la información $F_{t'}$, se define un recurso disponible en $t > t'$, la cuantía dependerá, en general, del estado de la naturaleza en que se concrete el entorno en el momento t.

[5] La modelización de los recursos coincide con la descrita de forma detallada en Debreu (1959), con la salvedad de la especificación de la localización que, en nuestro modelo se supondrá siempre el lugar donde se encuentra el inversor.

Representamos la cantidad de un recurso disponible en un momento dado, como una variable aleatoria, $Q(\omega)$, sobre el espacio (Ω, F, P). Es necesario exigir que la cuantía de un capital con vencimiento en t, sea medible respecto de F_t, el álgebra de la filtración del inversor en el momento t. Incluir este requisito, significa suponer que en un momento del tiempo, el inversor conoce la cantidad de recurso dispuesta en ese momento.

Si los recursos económicos son ciertos o es cierta, al menos, su cuantía, ésta quedará representada por una variable que toma el mismo valor para todos los estados de la naturaleza. Para presentar la modelización de estos capitales, nos basaremos en el concepto de función indicador de un suceso.

Definición (función indicador de un suceso):

Denominaremos función indicador de un suceso A, y representaremos por 1_A a una variable aleatoria cuyo valor es la unidad, si se presenta el suceso A, y que es nula si el suceso A no se presenta.

Una cuantía cierta, que en su vencimiento, t, toma el mismo valor, Q, para cualquier estado de la naturaleza que se presente, puede representarse como $Q.1_\Omega$. En discusiones en que se trabaje fundamentalmente con capitales de cuantía cierta, puede simplificarse la notación, y representar un capital con cuantía $Q.1_\Omega$, como un capital de cuantía Q. Para diferenciar las cuantías aleatorias de capitales, pueden escribirse con tilde: $Q(\omega) = \tilde{Q}$.

El vencimiento de un capital puede depender también del estado de la naturaleza que se presente. Cuando así sea, el vencimiento se definirá como una variable aleatoria, τ, sobre el espacio (Ω,F,P).

Para que nuestro modelo sea coherente deberemos exigir que el suceso $\tau = t$, con $t \in \Lambda$, esté incluido en F_t; esto es, que el vencimiento aleatorio sea un tiempo de parada respecto de la filtración del inversor. Cuando el vencimiento sea cierto, quedará representado por una variable de la forma $t.1_{\Omega}$, que, generalmente, simbolizaremos como $t \in \Lambda$.

El hecho de que las variables cuantía y vencimiento sean medibles respecto de la misma filtración, hace que un capital con cuantía cierta, y vencimiento aleatorio, (Q,τ), pueda interpretarse como un conjunto de capitales con cuantía aleatoria y vencimiento cierto, $(\tilde{Q}, t)$ para todo $t \in \Lambda$, definiéndolo del siguiente modo: $\tilde{Q} = Q.1_A$, donde $A=\{\tau = t\}$.[6] De forma análoga, un capital con cuantía aleatoria y vencimiento aleatorio puede interpretarse como un conjunto de capitales con cuantía aleatoria y vencimiento cierto. Por esta razón, sólo se trabaja con vencimientos aleatorios cuando hacerlo facilita el análisis del proceso.

En el análisis de los procesos de inversión surge la necesidad de analizar a lo largo del tiempo, recursos económicos definidos sobre un mismo activo. Es necesario, entonces estudiar cuantías de un activo, en general aleatorias, para distintos momentos del tiempo. Estas cuantías se representarán por una familia de variables aleatorias $Q(t,\omega)$, con $\omega \in \Omega$ y $t \in \Lambda$, que definen, en el espacio de probabilidad dado, un proceso estocástico, adaptado a la filtración del inversor, que denominaremos proceso de cantidad. Puede tratarse de un proceso en tiempo discreto o en tiempo continuo. La evolución de cuantías de recursos económicos definidos sobre distintos activos, se representará por un proceso estocástico de dimensión mayor que uno.

---

[6] Para un ejemplo de esta transformación, ver Merton (1971), pp.399, 400.

2.2.2. Precio de mercado de los recursos

Los recursos económicos han quedado representados por capitales financieros, con cuantía medida en unidades del activo que corresponda y vencimiento en unidades de tiempo. La definición de intercambios entre dichos recursos, lleva a la conveniencia de expresar, para cada momento del tiempo, las cuantías de los recursos en una misma unidad.

Supondremos que existe una unidad de cuenta para el intercambio, que denominaremos moneda, que se puede cambiar por activos reales o activos financieros, pero no se puede almacenar.

Salvo indicación en contrario, utilizaremos la moneda como numerario y diremos que los recursos están medidos en unidades monetarias.[7]

Definición (precio de un recurso):

Llamaremos precio de un recurso a la cantidad de unidades monetarias que hay que entregar en un mercado, en su momento de disponibilidad, para obtener una unidad de dicho recurso.[8]

---

[7] Es también habitual tomar como numerario un activo real (en muchas ocasiones el que se supone único activo real) y los recursos se miden en unidades físicas de dicho activo. Para un estudio de la relación entre planteamientos con numerarios físicos y con numerarios monetarias ver Arrow (1964). Es también frecuente utilizar como numerario un activo financiero; ver sección 2.3.1.

[8] Al precio de mercado de los recursos como se ha definido se le llama también precio al contado, para diferenciarlo del "precio a plazo", que es el precio que se acuerda en un momento t_1 por un recurso disponible en un momento t_2 posterior.

El precio de mercado de un recurso será, entonces, el número de unidades monetarias por las que se intercambia una unidad de dicho recurso en el entorno del inversor; o número de unidades por las que se intercambia el activo sobre el que se ha definido el recurso en el momento t. El precio de mercado de un recurso es, así, el precio de mercado de un activo en un momento del tiempo t.

Este precio de un activo será, en general, una variable aleatoria, $S(\omega)$, definida sobre el espacio (Ω,F,P), medible, en cada momento t, respecto del álgebra F_t. En caso de que tome el mismo valor, $S(t)$, para cualquier estado de la naturaleza será la variable $S(t).1_\Omega$.

Es habitual que se pueda disponer de un activo en distintos momentos del tiempo ciertos, $t\in\Lambda$, a precios distintos para cada valor de t. La representación de la evolución del precio aleatorio de un activo en el tiempo, vendrá dada por una familia de variables aleatorias $S(t,\omega)$, con $\omega\in\Omega$ y $t\in\Lambda$, que formarán un proceso estocástico.

Los procesos estocásticos de este tipo se denominarán procesos de precios, y se representarán por $S = \{S_t(\omega)\}_{t\in\Lambda} = \{S_t\}_{t\in\Lambda}$. En función de que se plantee el modelo en *tiempo discreto* o *continuo*, la evolución del precio de los activos quedaría representada por un proceso estocástico en tiempo discreto o en tiempo continuo respectivamente. Si se trabaja con un conjunto de activos, la evolución conjunta de su precio podría representarse por un proceso estocástico de dimensión mayor.

Un proceso de precios debe ser siempre adaptado a la filtración del inversor. Esta afirmación supone que el inversor conoce, en el momento t, el precio S_t; o, lo que es lo mismo, que la información que proporciona el precio está incorporada a la información que se le supone al inversor.

La información que proporciona la evolución del precio está representada por la filtración engendrada por el proceso de precios. La filtración engendrada por los procesos de precios de los activos negociados en los mercados financieros es la mínima información que se le supone al inversor. En los modelos en que no se considera explícitamente la información del inversor se supone que éste conoce los precios, luego la filtración del inversor sería la filtración engendrada por estos procesos de precios.

En la literatura económica, se suele suponer que sólo el entorno puede tener una influencia directa sobre el precio de los activos; esto es, el precio no se verá influido por las decisiones del inversor. La aceptación de este supuesto implica que el precio de los activos es una variable exógena del problema de decisión y, por lo tanto, puede definirse independientemente del carácter de este problema, en cuanto a la actitud activa o pasiva del inversor.

Este supuesto se conoce con el nombre de existencia de competencia perfecta e implica que al precio de mercado es posible intercambiar tantas unidades de activo como se desee, pero a un precio ligeramente superior es imposible intercambiar ninguna unidad del activo. La aceptación de este supuesto se basa en la hipótesis de que en el entorno opera un número suficientemente grande de inversores.[9] [10]

El supuesto de competencia perfecta se ajusta relativamente bien a la realidad en las relaciones de intercambio financiero. En el caso de inversiones productivas, resulta más restrictivo, pero se puede aceptar, sin problema, que una empresa no influya en el precio de los activos que adquiere en el mercado.

[9] Ver Krouse (1986) pp. 45-46.

[10] En la actualidad se está estudiando el caso en que el inversor tiene influencia en el precio. Se puede encontrar uno de los últimos desarrollos en este sentido en Cvitanic (1997).

En cuanto a los activos que la empresa vende en el mercado tenemos que distinguir dos casos: que se vendan en mercados financieros o que se vendan en mercados de bienes. En los mercados de bienes es difícil defender la hipótesis de competencia perfecta. Por el contrario, se ajusta más a la realidad suponer que los productos físicos o servicios que vende una empresa en un mercado de bienes reciben una demanda que varía de forma continua en función del precio.

El precio de estos bienes se determina por la empresa para conseguir el par (precio, demanda) que más se ajuste a sus objetivos; a los criterios seguidos para la determinación de estos precios lo denominaremos política de precios. Para poder trabajar en el análisis de problemas de decisión sobre inversiones reales que producen activos que se venden en mercados de bienes, con el precio de los activos como variable exógena, es necesario suponer que la política de precios es independiente de las decisiones de inversión.

2.2.3. Valor de mercado de los recursos

Dado un capital que representa un recurso financiero (Q,t) con precio S(t), llamamos valor de mercado, o simplemente valor, del recurso financiero al capital financiero (V, t), donde $V = Q.\ S(t)$.

Obsérvese la diferencia entre estos capitales y los definidos en la sección 2.2.1. Mientras en aquellos la cuantía está medida en unidades de activo, en los definidos ahora, la cuantía está medida en unidades monetarias.

Cuando se trabaja con capitales que representan el valor de un activo para distintos momentos del tiempo, queda definido un proceso estocástico, que denominaremos proceso de valor. Un proceso de valor queda definido como producto de un proceso de cantidad y un proceso de precio. Este proceso sería de dimensión mayor que uno si se trabaja con varios activos.

2.2.4. Procesos de cobros y pagos. Flujos de caja.

El conjunto de recursos que se reciben como consecuencia de la realización de una inversión, o cobros de la inversión, se representa por un conjunto de capitales financieros, cuya cuantía representa el valor de mercado de estos en el momento en que se reciben. Si suponemos, sin pérdida de generalidad, que los vencimientos de dichos capitales son ciertos, el conjunto de cobros es un conjunto de variables aleatorias sobre el espacio (Ω,F,P) definidas para los distintos momentos del tiempo. El conjunto de cobros puede modelizarse como un proceso de valor, que se denomina proceso de cobros. De manera análoga puede definirse un proceso de pagos. El valor que toman estos procesos en un momento dado indica el valor de mercado de los recursos que se reciben o se entregan en ese momento.

Si un proceso de cobros está formado por un conjunto de recursos económicos definidos sobre un mismo activo, el conocimiento de dicho proceso vendrá dado por el conocimiento del proceso de precios del activo y el proceso de cantidad que representa las unidades de activo recibidas.

Si los recursos económicos que forman el proceso de cobros están definidos sobre distintos activos, el razonamiento será el mismo, trabajando con varios procesos de precios y de cantidad, uno por cada activo distinto, o bien trabajando con un proceso de mayor dimensión. Si intervienen N activos distintos, es necesario definir sus N procesos de precios, $S^n = \{S_t^n\}_{t\in\Lambda}$, con n=1,..., N; y los N procesos de cuantía que indican las unidades recibidas de activos, $Q^n = \{Q_t^n\}_{t\in\Lambda}$, con n=1,...N. El proceso de cobros será:

$$V_t(\text{cobros}) = \sum_{n=1}^{N} Q_t^n . S_t^n$$

De forma equivalente, pueden definirse los procesos de dimensión N:

$$S_t(\text{cobros}) = \begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^N \end{pmatrix},\ Q_t(\text{cobros}) = \begin{pmatrix} Q_t^1 \\ \vdots \\ Q_t^N \end{pmatrix},$$

y el proceso de cobros vendrá dado por el producto entre vectores:

$$V_t(\text{cobros}) = Q_t(\text{cobros})'.S_t(\text{cobros})$$

donde $Q_t(\text{cobros})'$ representa el vector traspuesto de $Q_t(\text{cobros})$.

El razonamiento sería idéntico para los procesos de pagos.

Es posible, también, recoger en un único proceso los cobros y los pagos, tomando con signo negativo el proceso de cantidad asociado a los pagos. A este proceso lo denominaremos proceso de cobros netos, flujos de caja, o proceso de flujos.

El proceso de flujos de caja asociado a un proyecto de inversión es un proceso de valor, medido en unidades monetarias. Sus valores positivos representan los cobros derivados de dicho proyecto; y sus valores negativos, en valor absoluto representan los pagos que se deben efectuar si tal proyecto se lleva a cabo. Para cada momento del tiempo será una variable medible respecto de la filtración del inversor. Los procesos de flujos se representarán del siguiente modo: $f=\{f_t\}_{t\in\Lambda}$

Un proyecto con inversor pasivo queda representado por la especificación de los flujos de caja a que da lugar.

2.3. Modelización de los mercados

2.3.1. Elementos de un mercado

Identificamos como elementos de un mercado el conjunto de recursos que en él se negocian y las relaciones financieras que se establecen entre ellos.

En cuanto a los recursos intercambiados, en los mercados de bienes se intercambian activos reales. Se supondrá que estos activos no pueden almacenarse, por lo que se destinarán de forma inmediata al consumo o a la producción.[11] En los mercados financieros se intercambian activos financieros y reales. Se supondrá un único mercado financiero en que se negocian m activos.

Los derechos económicos que proporcionan los activos financieros consistirán en el pago al poseedor del título de una o varias cantidades de unidades monetarias en distintos momentos del tiempo. Cada pago futuro será representado por un capital financiero con cuantía aleatoria, medida en unidades monetarias. Se supondrá que siempre existe en el mercado un activo financiero que da lugar a derechos independientes del estado de la naturaleza en que se concrete el entorno. Este activo se denominará activo sin riesgo y será el representado por el índice 0.

Si el activo financiero da derecho a recibir varios pagos a lo largo del tiempo, éstos se representan por un proceso de pagos, definido para $t \in \Lambda$, adaptado a la filtración del inversor; este proceso toma valores reales, que indican las cantidades a que da derecho el activo, medidas en unidades monetarias. El caso más sencillo es aquel en el que el activo da derecho a recibir un único pago en el momento final.

[11] Este es un supuesto que se suele establecer en los modelos de forma que la única manera de transferir consumo o riqueza de un momento a otro esté en los mercados financieros.

Si existen otros pagos entre t = 0 y t = T, dichos pagos reciben el nombre de dividendos. Obsérvese que, necesariamente, el pago en el momento final debe coincidir con el precio del activo en dicho momento; de hecho no se impone restricción alguna al suponer que hay un pago final en ese momento, puesto que siempre puede venderse el título por su precio de mercado.

No hay problema en suponer también que los activos reales dan derecho a un pago final igual a su precio de mercado, puesto que se puede obtener ese pago vendiendo el activo. Al contrario que en el caso de los mercados de bienes, se supondrá que estos activos se pueden almacenar. De hecho, en ocasiones, puede resultar ventajoso almacenar un bien frente a esperar a adquirirlo; el valor de esta ventaja desempeña un papel análogo al de los dividendos y recibe el nombre de "rendimiento de conveniencia".

El segundo elemento de un mercado es el conjunto de relaciones financieras entre los recursos que en él se negocian. Las relaciones financieras quedan definidas por la cantidad de unidades monetarias que hay que pagar por una unidad de un recurso y por las cantidades de los recursos que pueden ser mantenidas por cada agente en cada momento.

La cantidad de unidades monetarias que hay que pagar para adquirir una unidad de un recurso es el precio de mercado del mismo, ya definido. El precio de un activo a lo largo del tiempo quedará representado por un proceso de precios, tal y como se indicó en la sección 2.2.2.

Representaremos por $S^i = \{S_t^i\}_{t\in\Lambda}$ el proceso de precios del activo i, para $i=0,1,\ldots,m-1$. El proceso conjunto de los bienes negociados en el mercado financiero quedará representado por un proceso estocástico en R^m,

$$S = \{S_t\}_{t\in\Lambda} = \begin{pmatrix} S^0 \\ S^1 \\ \vdots \\ S^{m-1} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} S_t^0 \\ S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^{m-1} \end{matrix} \right\}_{t\in\Lambda} .$$

El numerario utilizado es la moneda. Como ya se ha indicado, es también posible tomar como numerario un activo financiero y, concretamente, es habitual tomar un activo sin riesgo al que, habitualmente, asignaremos el superíndice $i = 0$. Así surge la siguiente definición.

Definición (proceso de precios descontado):

Se denomina proceso de precios descontado de los bienes negociados en el mercado financiero, y se representa por $\mathcal{S}$, el proceso de precios de los activos, en unidades del activo sin riesgo: $\mathcal{S} = \left\{ \mathcal{S}_t = \frac{1}{S_t^0} . S_t \right\}_{t\in\Lambda}$.

En cuanto a la cantidad de recurso que puede ser mantenida por los agentes, nos centramos en los mercados financieros, puesto que en los mercados de bienes no puede mantenerse cantidad alguna. Para los mercados financieros, formulamos la siguiente definición.

Definición (estrategia):

Denominaremos estrategia a un proceso de cantidad que representa las cantidades de activos que un inversor mantiene en el momento t.

Una estrategia tendrá dimensión m, y quedará representada en la forma:

$$\theta = \{\theta_t\}_{t\in\Lambda} = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^{m-1} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \theta_t^0 \\ \theta_t^1 \\ \vdots \\ \theta_t^{m-1} \end{pmatrix} \right\}_{t\in\Lambda}$$

Las variables θ_t^i tomarán valores reales, para cada concreción del entorno, pero su campo de variación puede estar restringido; son frecuentes, por ejemplo, las restricciones de no negatividad[12].

Se exige que los procesos de estrategia sean predecibles respecto de la filtración del inversor, lo que indica que el inversor actúa sin anticipar el futuro. En tiempo discreto, se dice que un proceso es predecible $\alpha = \{\alpha_t\}_{t\in\Lambda}$ si la variable α_t es medible respecto de F_{t-1}.

El significado de esta exigencia con un planteamiento en tiempo discreto es muy claro: el inversor alcanza el momento t-1, con una estrategia θ_{t-1}, y el precio de los activos es S_{t-1}. Con la información de este momento, F_{t-1}, toma una decisión de compra o venta de activos, que definirá la estrategia θ_t, estrategia que tendrá un coste $C_t(\theta) = \theta_t'.\ S_{t-1}$, para $t = 1,\ldots,T$. El inversor mantendrá esta estrategia hasta el momento t, cuando alcanzará un valor $V_t(\theta) = \theta_t'.\ S_t$, para $t = 1,\ldots,T$.

[12] Obsérvese que un valor negativo de θ representa una posición corta en el activo correspondiente.

Definición (conjunto de estrategias posibles):

El conjunto formado por todas las estrategias que pueden seguirse por algún inversor se denomina conjunto de estrategias posibles. Este conjunto se representará por Θ.

Si no existen restricciones, Θ será el conjunto de procesos predecibles respecto de la filtración del inversor, con valores en R^m. Obsérvese que, en este caso se acepta la perfecta divisibilidad de los activos. Supondremos que todos los agentes pueden acceder a los mercados. Técnicamente, todos pueden elegir cualquier estrategia del conjunto Θ. Sus restricciones tendrán, por lo tanto carácter económico.

2.3.2. Ganancias de una estrategia e integral estocástica

La diferencia entre el proceso de coste y de valor para cada t,

$$V_t(\theta) - C_t(\theta) = \theta_t' . (S_t - S_{t-1}),$$

representa las ganancias del inversor en el periodo [t-1, t], al seguir la estrategia θ, y es el término elemental para el cálculo de las ganancias totales del inversor.

El objetivo de esta sección es la definición de un proceso que, en cada momento, indique las ganancias obtenidas por el inversor al seguir una estrategia θ. Esta definición encuentra su formalización en el concepto de integral estocástica. A continuación se define este concepto en tiempo discreto. En el capítulo cuarto se plantea, sin desarrollar la construcción completa, este concepto en tiempo continuo.

La definición de integral estocástica en tiempo discreto, que se presenta a continuación, puede encontrarse en cualquier texto que incluya cálculo estocástico en tiempo discreto, como Duffie (1988) pag. 139, Dothan (1990) pag. 99.[13]

Definición (integral estocástica en tiempo discreto):

Para dos procesos cualesquiera $\alpha = \{\alpha_t\}_{t=0,1,\ldots,T}$ y $x = \{x_t\}_{t=0,1,\ldots,T}$, con valores reales, la integral estocástica $\int_0^t \alpha_s dx_s$ es el proceso

$$\int_0^t \alpha_s dx_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \sum_{s=1}^{t} \alpha_s (x_s - x_{s-1}) & \text{si } 1 \le t \le T \end{cases}$$

La integral $\int_0^t \alpha_s dx_s$ también se denomina la transformada del proceso x por el proceso α y se representa por $(\alpha \bullet x)_t$.

La definición de proceso de ganancias de una estrategia es ahora inmediata.

Definición (ganancias de una estrategia en tiempo discreto):

Dada una estrategia $(\theta_t)_{t=1,\ldots,T}$, de activos de un mercado financiero, con proceso de precios $(S_t)_{t=0,1,\ldots,T}$, se denomina ganancias de la estrategia al proceso:

$$G_t(\theta) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\theta^i \bullet S^i\right)_t$$

Desarrollando, de acuerdo con la definición, queda:

$$G_t(\theta) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^t \theta_s^i dS_s^i = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{t} \theta_s^i . \left(S_s^i - S_{s-1}^i\right) = \sum_{s=1}^{t} \theta_s' . \left(S_s - S_{s-1}\right)$$

[13] En este texto se desarrolla un tratamiento excepcional de las bases del cálculo estocástico en tiempo discreto.

2.3.3. Estrategias autofinanciadas. Estrategias de arbitraje.

Definición (estrategia autofinanciada)

Se dice que una estrategia θ es autofinanciada si y sólo si verifica, para todo $t = 1, 2,\ldots,T$:

$$V_t(\theta) = C_1(\theta) + G_t(\theta)$$

Por tanto, una cartera autofinanciada se caracteriza porque la diferencia entre el valor de la cartera y su coste inicial es el valor de las ganancias recogidas. La variación de valor de la cartera se debe únicamente a la variación de los precios de los activos mantenidos en la cartera. El inversor no realiza aportaciones ni retira dinero en ningún momento.

Esto es, en todo momento de negociación, el coste de la cartera que se adquiere es igual al valor de la cartera que se vende. Formalmente, podemos escribir que, entonces, una cartera es autofinanciada si y sólo si verifica:

$$V_t(\theta) = \theta_t'.S_t = \theta_{t+1}'.S_t = C_{t+1}(\theta), \text{ para todo } t = 1,\ldots, T-1$$

Esta igualdad provoca que, cuando se trabaja con estrategias autofinanciadas no se haga mención del proceso definido por el coste de la estrategia para cada momento del tiempo, $C_t(\theta) = \theta_t'.S_{t-1}$, para $t = 1, 2, \ldots, T$; y se trabaje basando los desarrollos en el proceso definido por el valor de la estrategia después de mantenerla un periodo: $V_t(\theta) = \theta_t'.S_t$, para $t = 1, 2, \ldots, T$.

El único problema que surge es el desfase temporal de un periodo, que provoca que no quede definido el coste de la estrategia inicial: $C_1(\theta) = \theta_1'. S_0$. Este problema se resuelve tomando este coste como valor inicial de la estrategia. Queda así definido:

$$V_0(\theta) = \theta_1'. S_0$$

Obsérvese cómo se utiliza así la igualdad que define las estrategias autofinanciadas y se consigue dar coherencia al modelo sin necesidad de trabajar con el proceso de coste. En cualquier caso, este valor en el momento inicial debe entenderse como un coste y no como valor de una estrategia tras ser mantenida un periodo, puesto que antes de t = 0 no hay negociación.

Para los razonamientos que se seguirán en adelante, se trabajará únicamente con estrategias autofinanciadas. A continuación se definen dos conjuntos de estrategias autofinanciadas que tendrán especial importancia.

Definición (oportunidad de arbitraje de tipo I)

Se dice que una estrategia autofinanciada θ es una oportunidad de arbitraje de tipo I si y solo si verifica:

$$V_0(\theta) = 0$$
$$P(V_T(\theta) \geq 0) = 1$$
$$P(V_T(\theta) > 0) > 0$$

Definición (oportunidad de arbitraje de tipo II)

Se dice que una estrategia autofinanciada θ es una oportunidad de arbitraje de tipo II si y solo si verifica:

$$V_0(\theta) < 0$$
$$P(V_T(\theta) \geq 0) = 1$$

Entre estos dos tipos de carteras existe una relación que se plantea en el siguiente teorema.

Teorema 1

Si existe un activo financiero cuyo precio es siempre positivo, en un mercado financiero la existencia de oportunidades de arbitraje tipo II implica la existencia de oportunidades de arbitraje de tipo I.

Demostración:

Sea f un activo financiero negociado en el mercado con precio $S_t^f > 0$, $\forall t \in \Lambda$. Si existe una oportunidad de arbitraje tipo II, esto es una cartera autofinanciada θ que verifica $V_0(\theta) < 0$, con $P(V_T(\theta) \geq 0) = 1$, es posible construir una cartera Ψ que constituye una oportunidad de arbitraje tipo I.

Sea φ una estrategia con todas sus componentes nulas salvo la asociada al activo f, que es constante y toma un valor:

$$\varphi^f = \frac{-V_0(\theta)}{S_0^f} > 0$$

La cartera $\Psi = \theta + \varphi$ es autofinanciada (se comprueba, con la definición, que la suma de carteras autofinanciadas es una cartera autofinanciada), con valor:

$$V(\Psi) = V(\theta) + V(\varphi)$$

y verifica $V_0(\Psi) = 0$, $P(V_T (\Psi) \geq 0) = 1$, $P(V_T(\Psi) > 0) > 0$. Por lo tanto, Ψ constituye una oportunidad de arbitraje de tipo I.

Corolario:

Si en un mercado existe un activo financiero con precio estrictamente positivo, la ausencia de oportunidades de arbitraje de tipo I asegura la ausencia de oportunidades de arbitraje de tipo II.

2.4. Modelización del inversor

2.4.1. Agentes de consumo

Se denomina agente de consumo a un individuo que desarrolla actividades de consumo y de inversión financiera, cuyo objetivo es función de su consumo a lo largo del tiempo.

La primera característica relevante de un agente de consumo son sus preferencias, que relacionan sus actividades con el mejor cumplimiento de su objetivo. Las preferencias se representan, en principio, por una relación de orden entre alternativas de consumo en el tiempo. Se hace, así, necesario definir estas alternativas de consumo.

Cada alternativa de consumo queda representada por un plan de consumo. La forma inmediata de definir un plan de consumo consiste en especificar capitales que representen los recursos que se consumen en cada momento del tiempo, con su cuantía medida en unidades de activo. Obsérvese que, para momentos futuros, estas cuantías son variables aleatorias. El paso siguiente en la modelización es representar los capitales en unidades monetarias, con lo que se obtienen capitales intercambiables por los originales, medidos en la misma unidad. El hecho de que los capitales estén medidos en la misma unidad, permite sumar las cuantías de aquellos que, referidos a distintos bienes tengan el mismo vencimiento; la suma se denomina "proceso de consumo" Este planteamiento evita abordar el problema de reparto de la cantidad dedicada al consumo entre distintos bienes, y es suficiente indicar la cantidad total dedicada al consumo en cada momento del tiempo.

La segunda característica de un agente de consumo es la cantidad de unidades monetarias de que dispone en cada momento para inversión o consumo. El proceso que representa esta cuantía se denomina proceso de riqueza. Los valores que toma el proceso de riqueza en sucesivos momentos del tiempo dependen de la riqueza inicial, de las decisiones de consumo e inversión que haya tomado el individuo hasta ese momento y de los estados de la naturaleza en que se concrete el entorno.

La riqueza inicial debe quedar determinada de forma exógena, y se suele representar por una dotación que recibe el agente. Es posible recoger la posibilidad de que el agente reciba más dotaciones a lo largo del tiempo, que dependan de los estados de la naturaleza. Las cantidades recibidas a lo largo del tiempo se representarían por un proceso estocástico, denominado proceso de dotaciones. Los procesos de dotaciones son variables exógenas del modelo y se suponen medibles respecto de la filtración del inversor. El hecho de que las dotaciones sean exógenas hace que las consecuencias del análisis no se alteren sustancialmente si se considera que solamente hay dotaciones en el momento inicial.

Conocidas las dotaciones del agente, para cada conjunto de decisiones de inversión y de consumo hasta un momento del tiempo dado queda definida la riqueza en ese momento. Esto permitirá definir la restricción presupuestaria que delimitará los planes de consumo factibles para el individuo. Se supone que las oportunidades de inversión financiera son comunes a todos los agentes.

Medidos los procesos de consumo en unidades monetarias y, dado que el conjunto de consumos que puede alcanzar depende únicamente de la riqueza, es inmediato representar las preferencias por una función de utilidad de la riqueza, que se suele denominar función de utilidad indirecta.

El único supuesto que se establecerá sobre las preferencias de los individuos es que son crecientes. Decimos que un orden de preferencia es creciente si y sólo si para un mismo plan de consumo hasta un momento t, se prefiere alcanzar el momento t con la riqueza mayor posible. La especificación de una forma concreta para estas preferencias permite resolver, en muchas ocasiones el problema de reparto del individuo de su riqueza entre consumo e inversión[14].

2.4.2. Agentes de producción

Se denomina agente de producción a una empresa que desarrolla actividades de inversión, tanto financiera como productiva. Aceptaremos que su objetivo es función del valor real de la empresa a largo plazo. Entendemos por valor real de la empresa el que le asignaría un mercado eficiente.

El valor de la empresa está medido en unidades monetarias. No es posible definir, para un agente de producción, preferencias análogas a las definidas para un agente de consumo pero sí existe cierta analogía entre la riqueza y el valor de una empresa. Supondremos que, en igualdad de condiciones, para un agente de producción es preferible tener un valor mayor que un valor menor.

El valor de la empresa en un momento dado dependerá de su valor inicial, de las decisiones de inversión, real y financiera, adoptadas y de los estados de la naturaleza en que se concrete el entorno.

[14] Uno de los primeros artículos que plantean este problema de forma dinámica es el de Fama (1971). El enfoque que se acepta mayoritariamente en la actualidad es el que se plantea en Merton (1973), que utiliza técnicas de optimización dinámica estocástica.

El valor inicial de la empresa será exógeno y las oportunidades de inversión financiera se suponen comunes a todos los agentes. El elemento más importante de la empresa será el conjunto de oportunidades de inversión productiva o conjunto de planes de producción factibles, o tecnología de la empresa.

Llamaremos tecnología de la empresa al conjunto de funciones de producción con las que la empresa puede intercambiar recursos. Interpretaremos que la capacidad de superar restricciones técnicas para conseguir las materias primas queda incluida dentro de la tecnología. Los supuestos sobre los mercados financieros son suficientemente flexibles para que no existan restricciones técnicas para conseguir recursos financieros.

Las funciones de producción que no dependan de decisiones futuras del inversor determinarán conjuntos de flujos intercambiables que definen proyectos de inversión, o planes de producción, con inversor pasivo. Si el inversor no tiene la obligación de llevar a cabo dicho proyecto, lo que tiene es la oportunidad de invertir, la opción de ejecutar el proyecto.

Si la función de producción depende de las decisiones que tome el inversor a lo largo del proyecto, diremos que el proyecto permite inversor activo. Obsérvese que cada decisión da al inversor la posibilidad de elegir, pero no la obligación. Estas oportunidades u opciones guardan cierta analogía con la oportunidad de invertir en el momento inicial. En la literatura económica se suelen conocer con el nombre de opciones reales.

3. CRITERIO PARA LA TOMA DE DECISIONES

3.1. Hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje en los mercados financieros

Todo el análisis sobre decisiones de inversión se basará en la hipótesis de que en los mercados financieros no existen oportunidades de arbitraje. Se acepta, con generalidad, en la literatura financiera, que las oportunidades de arbitraje son incompatibles con cualquier modelo de equilibrio y con cualquier hipótesis de eficiencia del mercado. El argumento teórico que avala nuestra hipótesis es la imposibilidad de obtener un recurso escaso sin entregar nada a cambio (ver sección 1.2). La contrastación empírica de esta hipótesis ha sido el centro de numerosos estudios[15]. A continuación, se plantea una consecuencia inmediata de la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado financiero. El teorema se basa en que, por la definición de activo financiero, su valor será el de los pagos a que da derecho.

Teorema 2

Si no existen oportunidades de arbitraje en el mercado, cualquier función que asigne precios a los activos financieros es un operador lineal de los pagos a que dan derecho estos activos.[16]

Demostración:

Supongamos dos activos financieros: el activo 1 da derecho a un pago d_1 en el momento t_1, y un activo 2 que da derecho a un pago d_2 en el momento t_2.

[15] Para contrastes sobre ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado financiero español, se puede ver Balbás, Longarela y Pardo (1997).

[16] Obsérvese que estos pagos pueden ser ciertos o depender del estado que se manifieste.

Denominamos $S_t^i = \varphi(d_i)$ a la función que asigna a los pagos, el precio en el momento t, para $t < t_1$, $t < t_2$.

El teorema afirma que φ es un operador lineal: si existe un activo, 3, que da derecho a un pago igual a $\lambda_1. d_1 + \lambda_2.d_2$, con λ_1, λ_2 reales, bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, debe verificarse que $S_t^3 = \lambda_1. S_t^1 + \lambda_2. S_t^2$, para todo $t < t_1$, $t < t_2$.

Veamos la demostración para el caso de t = 0. Si $S_0^3 > \lambda_1. S_0^1 + \lambda_2. S_0^2$, se puede construir una estrategia de arbitraje del modo siguiente: con la adquisición en el momento inicial de λ_1 unidades del activo 1 y λ_2 unidades del activo 2; y la venta en descubierto de una unidad del activo 3; esto es, $\theta_0^1 = \lambda_1$, $\theta_0^2 = \lambda_2$, $\theta_0^3 = -1$.

Observamos que coste inicial de esta estrategia sería negativo:

$$V_0(\theta) = C_1(\theta) = \theta_1'. S_0 = \lambda_1. S_0^1 + \lambda_2. S_0^2 - S_0^3,$$

y daría lugar a un pago nulo, por lo que dicha estrategia constituye una oportunidad de arbitraje de tipo II, y dados los supuestos sobre el mercado, implicaría la existencia de oportunidades de arbitraje de tipo I. El razonamiento sería análogo si $S_0^3 < \lambda_1. S_0^1 + \lambda_2. S_0^2$, con una estrategia $\theta_1 = -\lambda_1$, $\theta_2 = -\lambda_2$, $\theta_3 = 1$.

La generalización para otro momento del tiempo t, es inmediata. Si $S_t^3 > \lambda_1. S_t^1 + \lambda_2. S_t^2$, construyendo la estrategia con la adquisición en el momento t de λ_1 unidades del activo 1 y λ_2 unidades del activo 2; y la venta en descubierto de una unidad del activo 3, en el momento t; esto es, $\theta_t^1 = \lambda_1$, $\theta_t^2 = \lambda_2$, $\theta_t^3 = -1$. Para que la estrategia fuese autofinanciada desde el origen, con coste negativo, bastaría vender en descubierto, en el momento inicial, las unidades necesarias de activo sin riesgo.

3.2. Valor de la oportunidad de invertir

3.2.1. Concepto de valor de la oportunidad de invertir

Para definir el valor de la oportunidad de invertir, nos basamos en unas definiciones previas.

Definición (valor de mercado de un intercambio)

Se llamará valor de mercado de un intercambio en un momento dado, al precio que debería tener, en ese momento, un activo financiero ficticio que diese derecho a todos los flujos[17] netos que intervienen en dicho intercambio, para que la negociación de dicho activo en el mercado no generase oportunidades de arbitraje.

Esta definición nos permite formular de un modo diferente la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje en los mercados financieros. La hipótesis podría plantearse ahora del siguiente modo: suponemos que el valor de mercado de cualquier intercambio realizado en los mercados financieros es cero.[18] Bajo esta hipótesis, sólo tendrá sentido estudiar el valor de intercambios originados por una relación productiva.

Se plantearán dos problemas respecto de este valor. El primero es el de calcularlo; y el segundo, el de utilizarlo como base para la toma de decisiones de inversión en la forma siguiente: es aconsejable realizar un intercambio si su valor de mercado es positivo, y dadas dos intercambios, es preferible aquél que tenga un valor de mercado mayor.

---

[17] Los flujos pueden ser ciertos o aleatorios.

[18] Obsérvese que el precio que se paga por el activo en el mercado está incluido en el conjunto de flujos netos de caja de la inversión.

Definición (oportunidad de un intercambio)

Diremos que un inversor tiene una oportunidad en un momento dado cuando *tiene la posibilidad, pero no la obligación, de realizar un intercambio de recursos en* ese momento.

De acuerdo con el criterio fijado, un inversor decidiría llevar a cabo (o ejercitar) una oportunidad de un intercambio, solamente si el valor de mercado de dicho intercambio es positivo. El valor de la oportunidad en t, de un intercambio entre los flujos $\{(f_t, t), (f_{t+1}, t+1), ..., (f_T, T)\}$, en el momento en que se puede ejercitar, $Vop_t(f_t, f_{t+1}, ..., f_T)$, es el máximo entre cero y el valor de dicho intercambio. El problema que se planteará es el de encontrar el valor que tiene esa oportunidad en un momento anterior, $V_\tau[op_t(f_t, f_{t+1}, ..., f_T)]$. La definición del valor (de mercado) de una oportunidad es análogo al dado para intercambios de recursos.

Definición (valor de una oportunidad de intercambio)

Se llamará valor de una oportunidad de intercambio, al precio que debería tener un activo financiero ficticio que diese derecho a tal oportunidad, para que la negociación de dicho activo en el mercado no generase oportunidades de arbitraje.

Si un inversor tiene varias oportunidades de intercambio estas pueden estar relacionadas entre sí. Si dos oportunidades de intercambio son excluyentes, deben valorarse conjuntamente, y su valor conjunto será el máximo entre el valor de mercado de cada uno de los intercambios y cero. Si dos oportunidades son complementarias, es necesario estudiar si el valor del agregado se puede obtener sumando los valores de ambas, denominaremos a este problema "problema de aditividad de los valores".

Definición (oportunidad en un proceso de inversión)

Diremos que un inversor tiene una oportunidad cuando tiene la posibilidad, pero no la obligación, de desarrollar una actuación que le da derecho a intercambios de recursos y / o a oportunidades de intercambio.

La definición de valor de una oportunidad en un momento dado, es análoga a los valores definidos para un intercambio o una oportunidad de intercambio. La primera oportunidad que puede definirse es la de comenzar un proceso de inversión en un momento dado, que llamaremos oportunidad de invertir. Tradicionalmente se ha estudiado en finanzas el valor de la oportunidad de invertir en un momento determinado, como el derecho a intercambiar un conjunto de recursos. Se observan entonces dos carencias fundamentales.

La primera consiste en no contemplar el hecho de que además de adquirir el derecho a los intercambios, se pueden adquirir el derecho a oportunidades de intercambio. En este trabajo se contempla esta posibilidad cuando se trabaja con inversor activo. Las oportunidades se han representado como variables de la función de producción, y se han denominado opciones reales. El problema fundamental de esta Tesis es la valoración de "opciones reales".

La segunda carencia consiste en que, en general, no se considera la posibilidad de oportunidades complementarias o excluyentes. En cuanto a la complementariedad, analizaremos cómo, en muchas ocasiones, al aplicar los criterios de valoración tradicionales no se respeta la aditividad de los valores. En cuanto a la posibilidad de que sean excluyentes, tradicionalmente se ha estudiado el caso en que la razón de la exclusión es la escasez de recursos, que se resuelve con técnicas de optimización matemática.[19] Este motivo de exclusión entre oportunidades no

[19] El artículo más representativo de este tipo de planteamiento es el de Baumol y Quandt (1965).

aparecerá en nuestro modelo, porque parte de hipótesis muy flexibles de los mercados financieros. Un tipo de exclusión que adquiere importancia en nuestro modelo es la que existe entre ejercitar una oportunidad (u opción) en un momento y ejercitarla en un momento posterior, cuando se dispone de más información. Para considerar esta relación es necesario estudiar el valor que toma en función del momento en que se ejercita. Obsérvese que, de nuevo, el problema planteado se reduce a la valoración, en un momento dado, de oportunidades futuras, u opciones reales, para comparar su valor con el de la oportunidad en el momento actual.

El valor de la oportunidad de invertir en un proyecto en un momento dado es el valor de todos los intercambios y de todas las oportunidades a que da derecho. Si el ejercicio de esta oportunidad puede realizarse en modos alternativos (por ejemplo, en distintos momentos) el valor será el máximo que se pueda alcanzar.

El análisis de inversión que se desarrollará en esta Tesis se centra en este concepto. El objetivo que se pretende alcanzar es doble. En primer lugar, se analizarán las condiciones bajo las cuales puede calcularse el valor de la oportunidad de invertir (Vop), que se basarán en las condiciones bajo las cuales se puede calcular el valor de mercado de un intercambio. Este será el contenido de los capítulos segundo y tercero.

En segundo lugar, se analizarán las consecuencias de utilizarlo como base para la toma de decisiones de inversión en la forma siguiente: una inversión es aconsejable cuando el Vop de la misma es no negativo, dadas dos inversiones es preferible aquella que tenga un Vop mayor y, si existen diferentes modos de llevar a cabo un proyecto, deberá elegirse aquél que de al proyecto el mayor Vop.

Puede observarse que, conocido el valor de la oportunidad de invertir (Vop), el criterio de decisión que se plantea es el mismo que tradicionalmente se ha enunciado a partir del valor del valor actual neto de los flujos de caja (VAN). Es, pues, evidente que si el valor del Vop y del VAN no coinciden, se entraría en contradicción con la regla tradicional del VAN, mientras que si coinciden el concepto de "valor de la oportunidad de invertir" no supondría aportación alguna. La razón para enunciar una nueva regla es que se entiende que la del VAN no define un criterio de selección de inversiones, sino múltiples criterios. Cada criterio queda definido cuando se especifica cómo se calcula ese valor actual neto. En la actualidad, los únicos casos de cálculo del valor actual neto de una inversión que están perfectamente resueltos se encuentran en ambiente de certeza.[20]

De hecho, observaremos que si es posible obtener un valor para la oportunidad de invertir, éste puede obtenerse como un valor actual neto. Se puede entender que estamos utilizando el criterio del valor actual neto, especificando cómo debe calcularse bajo distintos supuestos. Concretamente, analizaremos bajo qué supuestos es posible calcularlo sin necesidad de conocer o elaborar más hipótesis sobre las expectativas y las preferencias de los individuos que las establecidas en la sección 2.4.

Cuando no sea posible calcular el valor de la oportunidad de invertir, con el criterio fijado, será necesario buscar otros criterios de selección de inversiones, probablemente basados en valores actuales netos. Quede claro, así, que la "regla del Vop" no pretende contradecir la "regla del VAN", sino respetar el sentido de valor actual neto como un concepto mucho más amplio, capaz de recoger muchos otros criterios.

[20] En estos casos, veremos, que estos criterios coinciden con el criterio de decisión definido por el Vop.

3.2.2. Valor de la oportunidad de inversiones financieras y reales

Puesto que todas las inversiones en activos financieros tienen un Vop nulo, la primera conclusión que se deriva de la regla de decisión planteada es que, de acuerdo con este criterio, todas las inversiones financieras son igualmente recomendables, pero resultaría preferida cualquier inversión real con un Vop estrictamente positivo. Resulta evidente que esta afirmación no sería cierta si no se verifica la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje en los mercados financieros.

No resulta falto de coherencia con la realidad este resultado, ya que si todos los agentes de la economía tienen las mismas oportunidades de invertir en los mercados financieros, a los que se accede sin coste alguno, el valor de la oportunidad de realizar una inversión financiera debe ser nulo. La existencia de oportunidades de arbitraje y, por tanto, la ruptura de este principio puede deberse a la diferencia de información entre distintos inversores, lo que lleva a que aquellos con menos información permitan la creación de oportunidades con un Vop positivo, por ejemplo, vendiendo activos a un precio inferior a aquél que garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje, por no tener conocimiento de que pueden venderlo a un precio superior.

Por esta razón, el análisis se referirá siempre a valoración de inversión real, aunque, con un planteamiento ligeramente diferente, gran parte de los resultados son aplicables a la valoración de activos financieros. En las sucesivas secciones se tratará el problema de calcular el valor de la oportunidad de invertir en un proyecto real, con dificultad creciente.

La referencia para la valoración será un único mercado financiero, M, que no contiene oportunidades de arbitraje. Se definirá entonces un mercado M*, como un mercado ampliado por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da los mismos derechos que el proyecto de inversión. El valor de la oportunidad de invertir será el precio que debe tener tal activo ficticio para que en el mercado M* no existan oportunidades de arbitraje, si tal precio es positivo, y cero si es negativo.

Capítulo II

Valoración en un modelo de un periodo

1. VALORACIÓN DE INVERSIÓN CIERTA

1.1. Modelización de un proyecto de inversión

Nos situamos en el caso más sencillo: intercambio de flujos en dos momentos del tiempo que representamos por $t = 0$ y $t = 1 = T$. Los flujos que definen la inversión serán:

$$\{(f_0, 0), (f_1, 1)\}$$

Obsérvese que, por tratarse de una operación de inversión, necesariamente f_0 tiene signo negativo y f_1 tiene signo positivo. Como se ha indicado en la sección 1.5, en modelos de un periodo no hay lugar para inversor activo o, equivalentemente, no se presentan más opciones reales que la de invertir o no invertir.

1.2. Oportunidades de inversión financiera

Las oportunidades de inversión financiera vendrán dadas por el único mercado financiero, M, sin oportunidades de arbitraje. Tal y como se ha supuesto, en M se negocian m activos con procesos de precios S^i, para i = 0, 1,...,m-1. Puesto que se trabaja en un modelo de un periodo y las estrategias deben ser predecibles, serán ciertas, y tomarán valores en R^m.

Ya se ha supuesto que el activo con índice cero representa un activo sin riesgo, con precio inicial, $S_0^0 \in R$, y precio final que no depende de los estados de la naturaleza, $S_1^0 \in R$. Estos dos valores siempre se pueden relacionar del siguiente modo:

$$S_1^0 = S_0^0.(1+r)$$

por lo que r tiene significado de tipo de interés.

Es un resultado conocido que para la valoración de inversión cierta, solamente es relevante el conocimiento del activo o los activos sin riesgo, si existen. Se llegará aquí a este mismo resultado. La proposición que se presenta a continuación, permitirá que en el futuro se suponga, sin pérdida de generalidad, que en un modelo de un periodo existe un único activo sin riesgo.

Proposición II.1

En un modelo de un periodo de un mercado M, sin oportunidades de arbitraje, cualquier activo, o cartera de activos negociados con proceso de precios cierto y, por tanto sin riesgo, tendrá un proceso de precios igual o proporcional al del activo S^0.

Demostración[21]:

Supongamos que, efectivamente existe un activo sin riesgo en el mercado con un proceso de precios no proporcional a S^0; entonces, existe $1 \leq b \leq m-1$, con S^b tal que, para un valor $A \in R$, verifica:

$$S_0^b = A.\, S_0^0$$

$$S_1^b \neq A.\, S_1^0$$

Si $S_1^b > A.\, S_1^0$, es posible construir una estrategia de arbitraje, comprando una unidad del activo con índice b y vendiendo en descubierto A unidades del activo con índice cero. Formalmente, esta estrategia queda definida del modo siguiente:

$$\theta^b = 1,\ \theta^0 = -A,\ \theta^i = 0,\ \forall\ i = 1,..m-1,\ i \neq b.$$

Efectivamente, su valor es nulo en el momento inicial:

$$V_0(\theta) = S_0^b - A.\, S_0^0 = 0$$

y tiene valor positivo en t:

$$V_1(\theta) = S_1^b - A.\, S_1^0 > 0$$

Si $S_1^b < A.\, S_1^0$, se seguiría un razonamiento análogo al anterior. La oportunidad de arbitraje sería entonces la siguiente:

$$\theta^b = -1,\ \theta^0 = A,\ \theta^i = 0,\ \forall\ i > 0,\ i \neq b.$$

con lo que queda demostrado que si $S_0^b = A.\, S_0^0$, la ausencia de oportunidades de arbitraje implica que $S_1^b = A.\, S_1^0$; y, con ello, queda demostrada la proposición.

[21] Esta proposición recoge uno de los resultados más básicos de valoración por arbitraje. En el capítulo III se presentará el análogo para múltiples periodos. La demostración puede encontrarse en diversos textos, por ejemplo en Björk (1997), pag 58.

Puesto que, si existe otro activo sin riesgo en el mercado M, su proceso de precios será proporcional al del activo de índice cero, y se puede adquirir la cantidad deseada de dicho activo, las oportunidades de inversión financiera son idénticas cualquiera que sea el número de activos sin riesgo que se negocien. Por tanto, llegamos a la conclusión esperada, esto es, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe un único activo sin riesgo en el mercado.

En el futuro y, sin pérdida de generalidad, supondremos además que $S_0^0 = 1$.

1.3. Valor de la oportunidad de invertir

Sea el mercado M* definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al flujo cierto $(f_1, 1)$.

Proposición II.2

La ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado M* implica que el precio inicial del activo ficticio debe ser $S_0^f = \frac{f_1}{S_1^0} = \frac{f_1}{1+r}$.

Demostración:

La demostración es inmediata partiendo de la proposición II.1., que indica que la ausencia de oportunidades de arbitraje implica proporcionalidad entre procesos de precios de activos sin riesgo. Puesto que el activo ficticio tiene un precio final cierto, exigimos dicha proporcionalidad:

$$\frac{S_1^f}{S_1^0} = \frac{S_0^f}{S_0^0}$$

Pero, puesto que el pago f_1 se realiza en el momento final, el precio del activo en ese momento coincidirá con el valor de dicho pago: $S_1^f = f_1$. Basta sustituir esta igualdad en la expresión anterior, junto con el supuesto $S_0^0 = 1$, y queda demostrada la proposición.

Obsérvese que se ha demostrado que la ausencia de oportunidades de arbitraje en M* implica que el activo ficticio tome ese valor o, dicho de otro modo, si el activo ficticio tomase otro valor, en el mercado M* habría oportunidades de arbitraje. Para afirmar que se ha obtenido el valor por razonamientos de arbitraje, claramente es necesario probar la implicación inversa: si el activo ficticio toma tal valor en el mercado M* no existen oportunidades de arbitraje. El orden natural de la exposición se conseguiría demostrando aquí tal implicación que, de hecho, es cierta; sin embargo, tal demostración se realizará en la sección 2 de este capítulo (pag. 98-99), porque se obtiene directamente al probar otros resultados necesarios.

La proposición II.2, nos permite afirmar que, si existe un precio para el activo ficticio, el único precio posible es $\frac{f_1}{1+r}$. El valor en $t = 0$ del flujo $(f_0, 0)$ es obviamente f_0. Utilizamos, entonces el resultado de linealidad en la valoración, del Teorema 2, para afirmar que, si existe[22] un valor para el intercambio de los capitales[23], $\{(f_0, 0), (f_1, 1)\}$, tal valor será:

$$VI_0(f_0, f_1) = f_0 + \frac{f_1}{1+r}$$

[22] Este condicionante desaparecerá al demostrar la implicación inversa a la de la proposición II.3.

[23] El concepto de valor de un intercambio o valor de mercado de un intercambio se ha definido en la página 42.

El valor de la oportunidad de invertir, será entonces el máximo entre tal valor y cero, que habitualmente se representará como:

$$\mathrm{Vop}_0(f_0, f_1) = \max\left[0, f_0 + \frac{f_1}{1+r}\right] = \left(f_0 + \frac{f_1}{1+r}\right)^+ .$$

Este resultado es coherente con el enfoque tradicional de valoración de inversiones. Así, planteando el problema para un periodo se llega, por un argumento de arbitraje, al llamado "Teorema de separación de Fisher". Este resultado, debido a Irving Fisher (1930), se considera el comienzo de la valoración moderna de inversiones. La primera aportación de este Teorema es la necesidad de tener en cuenta la información de los mercados financieros para tomar decisiones de inversión real. Esta conclusión se conoce también como "principio de comparación"; como señala Luenberger (1998), "se evalúa la inversión comparándola con otras inversiones en el mercado financiero. El mercado financiero da la base para la comparación".

Efectivamente, si se toma la decisión ignorando el mercado, aun suponiendo que el decisor es un individuo y, por tanto, tiene preferencias, y suponiendo que éstas son conocidas, la decisión es peor (en términos de dichas preferencias) que si se ignoran tales preferencias y se tiene en cuenta la información del mercado. De aquí se sigue la conclusión más importante: se pueden separar las decisiones de consumo e inversión o, dicho de otro modo, las preferencias de los individuos son irrelevantes para la valoración de inversiones con flujos de caja ciertos, si existe en el mercado un activo cuyo precio no depende del azar, que se puede comprar y vender sin restricciones. Esta conclusión resulta especialmente interesante para el problema de valoración de inversiones por parte de las empresas.

2. VALORACIÓN DE INVERSIÓN ALEATORIA CON ESPACIO DE ESTADOS FINITO

2.1. Modelización de un proyecto de inversión

Sea el espacio de sucesos $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$, que representa todos los estados de la naturaleza en que puede concretarse el entorno. Sea F el conjunto de las partes de Ω; y P una medida de probabilidad cualquiera, definida sobre (Ω, F), que asigna probabilidad estrictamente positiva a todos los sucesos ω_j, para todo $1 \leq j \leq k$. Dado el espacio de probabilidad (Ω, F, P) y el conjunto de momentos de tiempo t = 0, 1; sea $\mathfrak{I} = \{F_t\}_{t=0,1}$ la filtración que representa la evolución de la información de los agentes que operan en el mercado. Supondremos que $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $F_1 = F$.

En este entorno, un proyecto de inversión quedaría modelizado por el derecho a intercambiar los siguientes capitales aleatorios:

$$\{(f_0, 0), (f_1, 1)\}$$

donde f_t es medible respecto de F_t. Por tanto, $f_0 \in R$, y f_1 es función del estado de la naturaleza: tomará el valor $f_1(\omega_j)$ si se presenta el estado ω_j para $j = 1, \ldots, k$. El pago f_1 puede representarse por un vector de componentes $f_1(\omega_j)$ que, abusando de la notación, denominaremos también f_1:

$$f_1 = \begin{pmatrix} f_1(\omega_1) & \ldots & f_1(\omega_k) \end{pmatrix} \in R^k$$

Puesto que el modelo se plantea para un único periodo no aparecen opciones reales futuras. Aunque podría considerarse que el inversor pueda decidir, en t =1, tomar un flujo sólo si es positivo, no se trata de un caso importante en inversiones reales. En este caso se considerará un flujo diferente; su tratamiento como opción puede verse como caso particular del modelo de varios periodos.

2.2. Oportunidades de inversión financiera

Sean el espacio de probabilidad (Ω, F, P) y la filtración $\mathfrak{F} = \{F_t\}_{t=0,\ 1}$ introducidos en la sección 2.1. Este modelo limita la información que suponemos tienen los inversores y, puesto que partimos de que dicha información incluye todos los hechos observables en los mercados financieros, limita el conjunto de oportunidades de inversión financiera que se pueden recoger en el modelo.

Supondremos un único mercado, M en que se negocian m activos, cuyo precio en cada momento t, S_t^i, es una variable aleatoria medible respecto de F_t, para i= 0, 1, 2,..., m-1.

Puesto que $F_0=\{\emptyset,\Omega\}$, el precio inicial de estos activos será un valor conocido en todo momento, $S_0^i \in R$, para i = 0,...,m-1. Llamaremos vector de precios iniciales al que recoge los de todos los activos negociados en el mercado, y lo representaremos por:

$$S_0 = \begin{pmatrix} S_0^0 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^{m-1} \end{pmatrix}$$

El precio final de los activos será una variable aleatoria que puede tomar k valores. Utilizamos una notación vectorial análoga a la planteada para la representación del flujo aleatorio f_1. El precio en t=1 del activo i será:

$$S_1^i = \left(S_1^i(\omega_1) \quad S_1^i(\omega_2) \quad \ldots \quad S_1^i(\omega_k)\right) \in R^k, \text{ para i =0, 1,..., m-1.}$$

donde $S_1^i(\omega_j)$ representa el precio del activo i en el momento t =1, si se presenta el estado de la naturaleza ω_j.

Supondremos que el activo a que corresponde el índice cero, sigue un precio que no depende del estado de la naturaleza que se presente, por lo que para cualquier momento podría representarse por un valor real. Por comodidad en la notación, representaremos este precio en t = 1 por un vector de k componentes iguales.

Llamaremos matriz de precios finales a la que recoge los vectores de precios finales de todos los activos negociados en el mercado, y lo representaremos por:

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_1^0 \\ S_1^1 \\ S_1^2 \\ \vdots \\ S_1^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+r) & (1+r) & \cdots & (1+r) \\ S_1^1(\omega_1) & S_1^1(\omega_2) & \cdots & S_1^1(\omega_k) \\ S_1^2(\omega_1) & S_1^2(\omega_2) & \cdots & S_1^2(\omega_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^{m-1}(\omega_1) & S_1^{m-1}(\omega_2) & \cdots & S_1^{m-1}(\omega_k) \end{pmatrix}$$

En este tipo de mercados podemos representar el proceso de precios de un activo como un vector con k+1 componentes, donde la primera representa el precio en el momento inicial, y las k últimas el vector de precios en el momento final. Así, el proceso de precios del activo i sería:

$$S^i = \begin{pmatrix} S_0^i & S_1^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^i & S_1^i(\omega_1) & S_1^i(\omega_2) & \dots & S_1^i(\omega_k) \end{pmatrix}$$

con $S_0^i, S_1^i(\omega_j) \in R$, para $i = 0, 1, \dots, m-1$; $j = 1, 2, \dots, k$

En el estudio de inversiones ciertas, la proposición II.1 limitaba el número de activos sin riesgo con procesos de precios linealmente independientes. El teorema que se presenta a continuación puede entenderse como una generalización de dicha proposición.

Teorema 3

En un modelo uniperiódico con k estados de la naturaleza sin oportunidades de arbitraje, el número máximo de activos con procesos de precios linealmente independientes es k.

Demostración:

Supongamos que hay k+1 procesos de precios linealmente independientes:

$$S^0, S^1, S^2, \ldots, S^k$$

Si de tales procesos tomamos los vectores de precios del periodo 1:

$$S_1^0,\ S_1^1,\ S_1^2, \ldots,\ S_1^k$$

observamos que, necesariamente, uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás, ya que se trata de un conjunto de k+1 vectores de R^k.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que se trata del asociado al índice k. Existen así, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ reales, tales que:

$$S_1^k = \alpha_0 .\ S_1^0 + \alpha_1 .\ S_1^1 + \alpha_2 .\ S_1^2 + \ldots + \alpha_{k-1} .\ S_1^{k-1}$$

Bajo el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje, por la linealidad de la valoración que se deriva del Teorema 2, debe verificarse:

$$S_0^k = \alpha_0 .\ S_0^0 + \alpha_1 .\ S_0^1 + \alpha_2 .\ S_0^2 + \ldots + \alpha_{k-1} .\ S_0^{k-1}$$

Pero, de las dos igualdades anteriores se sigue que:

$$S^k = \alpha_0 .\ S^0 + \alpha_1 .\ S^1 + \alpha_2 .\ S^2 + \ldots + \alpha_{k-1} .\ S^{k-1}$$

lo que contradice la hipótesis inicial de independencia entre los k+1 procesos de precio, y demuestra el teorema.

Si existen activos cuyos procesos de precios dependen linealmente de otros, no aportan variedad a las oportunidades de inversión financiera. Efectivamente, si existe un activo con proceso de precios S, que depende linealmente de n activos negociados en el mercado, con procesos de precios $S^1,\ldots,S^n$, podemos escribir:

$$S = \alpha_1 .\, S^1 + \alpha_2 .\, S^2 + \ldots + \alpha_n .\, S^n$$

De la igualdad anterior, se deduce que adquirir el activo dependiente da al inversor los mismos derechos que adquirir la cartera formada por α_1 unidades del activo con precio S^1, α_2 unidades del activo con precio S^2, y así sucesivamente hasta α_n unidades del activo con proceso de precio S^n. Diremos, entonces que el activo con precio S ha quedado replicado por la estrategia $(\alpha_1,\ldots\alpha_n)$.

En este sentido podemos decir que los activos que pueden replicarse con estrategias adecuadas no implican nuevas oportunidades de inversión o que son activos redundantes, y no serán considerados. Por lo tanto, en un modelo uniperiódico sobre un mercado M, con k estados de la naturaleza, las oportunidades de inversión financiera vendrán dadas por m activos con procesos de precios independientes, donde $m \leq k$.

Obsérvese que, para que exista replicación de un proceso de precios, basta exigir que puedan replicarse los vectores de precios del momento final (o pagos del momento final). Si es así, por la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, y el Teorema 2, el precio inicial quedará replicado por la misma cartera.

Las posibilidades de replicación que proporcionan los activos negociados en un mercado, generan una clasificación de los mercados que resultará esencial en el análisis posterior. Se trata de la división de los mercados entre completos e incompletos, conceptos que se definen a continuación.

Definición (mercado uniperiódico completo)

Se dice que un mercado uniperiódico es completo si es posible construir una estrategia de activos negociados en dicho mercado que replique cualquier vector de pagos en el momento final.

Definición (mercado uniperiódico incompleto)

Se dice que un mercado uniperiódico es incompleto si existe algún vector de pagos en el momento final que no es posible replicar con una estrategia de activos negociados en dicho mercado.

Puesto que los pagos finales tienen k componentes, y se ha supuesto que los m activos negociados en el mercado tienen procesos de precios independientes, con $m \leq k$, resulta evidente una primera caracterización de mercados completos. Un mercado será completo si el número de activos negociados en él coincide con el número de estados de la naturaleza definidos, k, y será incompleto si se negocian en él menos de k activos.

2.3. Modelo con dos estados de la naturaleza

2.3.1. Mercados completos

Sea M un mercado definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, F, P), donde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $F = \{\emptyset, (\omega_1), (\omega_2), \Omega\}$, y P es una medida de probabilidad con $P(\omega_1) > 0$, $P(\omega_2) > 0$. Se definen dos momentos $t = 0, 1$, y la filtración asociada, $\mathcal{F} = \{F_t\}_{t=0,1}$, con $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $F_1 = F$. Suponer que es un mercado completo, es suponer que en él se negocian dos activos con vectores de pagos linealmente independientes.

Puesto que uno, y sólo uno, es un activo sin riesgo, supondremos que se negocia, además un activo con riesgo, de modo que está garantizada la independencia lineal entre los vectores de pagos a que dan lugar estos activos. El vector de precios iniciales será:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ S_0^1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de pagos, o precios finales, tendrá la forma siguiente.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ S_1^1(\omega_1) & S_1^1(\omega_2) \end{pmatrix}$$

con $S_1^1(\omega_1) \neq S_1^1(\omega_2)$, puesto que sólo hay un activo sin riesgo.

En este entorno, un proyecto de inversión estará definido por el intercambio de dos capitales:

$$\{(f_0,0), (f_1, 1)\}$$

donde $f_0 \in R$ y $f_1 = (f_1(\omega_1), f_2(\omega_2)) \in R^2$.

Sea el mercado M* definido por la incorporación a M de la negociación del activo ficticio que da derecho al flujo f_1. Puesto que M es un mercado completo, este activo ficticio es redundante, o replicable. Una estrategia $\theta = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \end{pmatrix}$ representa la adquisición de θ^0 unidades del activo sin riesgo, y θ^1 unidades del activo con riesgo, en el momento $t = 0$, y venta (o cobro del pago correspondiente) en el momento $t = 1$. Para replicar el flujo f_1, debe verificar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \theta^0.(1+r)+\theta^1.S_1^1(\omega_1) = f_1(\omega_1) \\ \theta^0.(1+r)+\theta^1.S_1^1(\omega_2) = f_1(\omega_2) \end{array}\right\}$$

Puesto que $S_1^1(\omega_1) \neq S_1^1(\omega_2)$, el sistema tiene una única solución, la única estrategia que replica el vector f_1:

$$\theta^0 = \frac{S_1^1(\omega_2).f_1(\omega_1) - S_1^1(\omega_1).f_1(\omega_2)}{(1+r).\left[S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)\right]} \qquad \theta^1 = \frac{f_1(\omega_2) - f_1(\omega_1)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)}$$

El valor la estrategia en el momento inicial será:

$$V_0(\theta) = \frac{S_1^1(\omega_2).f_1(\omega_1) - S_1^1(\omega_1).f_1(\omega_2)}{(1+r).\left[S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)\right]} + \frac{f_1(\omega_2) - f_1(\omega_1)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)}.S_0^1$$

que se puede escribir del siguiente modo:

$$V_0(\theta) = \left[\frac{S_1^1(\omega_2) - S_0^1.(1+r)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)} f_1(\omega_1) + \frac{S_0^1(1+r) - S_1^1(\omega_1)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)} f_1(\omega_2)\right].\frac{1}{1+r}$$

Por simplicidad en la notación se denominarán q_1 y q_2 los coeficientes de la expresión anterior:

$$q_1 = \frac{S_1^1(\omega_2) - S_0^1.(1+r)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)} \qquad q_2 = \frac{S_0^1(1+r) - S_1^1(\omega_1)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)}$$

Se demuestra que, bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, estos valores definen una medida de probabilidad, Q, sobre F, equivalente a P[24], en la forma:

$$Q(\omega_1) = q_1 \qquad Q(\omega_2) = q_2$$

[24] Dos medidas de probabilidad definidas sobre el mismo espacio (Ω, F) se dicen equivalentes si asignan probabilidad no nula a los mismos sucesos.

Así, se observa que: $q_1 + q_2 = 1$, y demostramos a continuación que, bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$.

Sabiendo que $S_1^1(\omega_2) \neq S_1^1(\omega_1)$, supongamos que $S_1^1(\omega_1) < S_1^1(\omega_2)$. Entonces, bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, necesariamente,

$$S_1^1(\omega_1) < S_0^1.(1+r) < S_1^1(\omega_2).$$

Efectivamente, si $S_1^1(\omega_1) < S_1^1(\omega_2) \leq S_0^1.(1+r)$, es posible construir una estrategia de arbitraje en M. La estrategia $\theta = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^1 \\ -1 \end{pmatrix}$ verifica:

$$V_0(\theta) = 0$$

$$V_1(\theta, \omega_1) = S_0^1.(1+r) - S_1^1(\omega_1) > 0$$

$$V_1(\theta, \omega_2) = S_0^1.(1+r) - S_1^1(\omega_2) \geq 0$$

y, por tanto, constituye una oportunidad de arbitraje. El razonamiento sería análogo si $S_0^1.(1+r) \leq S_1^1(\omega_1) < S_1^1(\omega_2)$, con la cartera $\theta = \begin{pmatrix} -S_0^1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si $S_1^1(\omega_2) < S_1^1(\omega_1)$, se seguiría el mismo procedimiento para demostrar que, bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, debe verificarse:

$$S_1^1(\omega_2) < S_0^1.(1+r) < S_1^1(\omega_1)$$

Por esta razón concluimos que, bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, las diferencias:

$$S_1^1(\omega_2) - S_0^1.(1+r)$$

$$S_0^1(1+r) - S_1^1(\omega_1)$$

$$S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)$$

son distintas de cero, y tienen el mismo signo, por lo que $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, y Q define una medida de probabilidad sobre F, equivalente a P, como se quería demostrar.

Si denotamos por E_Q la esperanza matemática bajo la medida de probabilidad Q, el valor en el momento inicial de la cartera θ, replicante de f_1, será:

$$V_0(\theta) = [Q(\omega_1).f_1(\omega_1) + Q(\omega_2).f_1(\omega_2)]\frac{1}{1+r} = \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$$

A continuación se demuestra que si el precio inicial del activo ficticio que da derecho a f_1, S_0^f, no coincide con el valor inicial de esta estrategia, el mercado M* contendrá oportunidades de arbitraje. Obsérvese que las estrategias en M* tienen tres componentes, donde la primera representa unidades del activo sin riesgo, la segunda, unidades del activo con riesgo, y la tercera, unidades del activo ficticio.

Supongamos que $S_0^f > V_0(\theta)$, donde θ es la estrategia que replica el activo ficticio. La estrategia $\varphi = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \\ -1 \end{pmatrix}$, consistente en seguir la estrategia θ, y vender al descubierto una unidad del activo ficticio, constituye una oportunidad de arbitraje de tipo II. Su valor inicial, $V_0(\theta) - S_0^f$ es negativo, y da lugar a un pago nulo en el momento final. Si $S_0^f < V_0(\theta)$, se consigue una oportunidad de arbitraje de tipo II con la estrategia $\varphi = \begin{pmatrix} -\theta^0 \\ -\theta^1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por el Teorema 1, sabemos que, entonces, existen oportunidades de arbitraje tipo I.

Ha quedado demostrado que si el precio inicial del activo ficticio, S_0^f, no es $\frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$, en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje. Esto nos permite afirmar que éste es el único precio posible para tal activo. Faltaría demostrar que, si éste es el precio, en M* no existirán oportunidades de arbitraje. Tal y como se hizo en valoración de inversión cierta, esta demostración se aplaza, porque es más directo contemplarla como un caso particular de la demostración análoga con k estados de la naturaleza.

Dado este resultado y el Teorema 2, sí podemos asegurar que, si existe un valor para el intercambio de f_0 y f_1 que garantice la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado M*, tal valor será:

$$VI_0(f_0, f_1) = f_0 + \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$$

Si es posible calcular el "valor de la oportunidad de invertir" en el proyecto descrito por los flujos de caja $(f_0, 0)$ y $(f_1, 1)$ se obtendría del siguiente modo:

$$Vop_0(f_0, f_1) = \left(f_0 + \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}\right)^+$$

Observamos que la forma de obtener el "valor de la oportunidad de invertir" coincide con la utilizada en ambiente de certeza, sustituyendo el valor cierto de los flujos de caja por la esperanza matemática de los flujos bajo cierta medida de probabilidad equivalente a la medida de probabilidad original.

Destacamos que el valor de la oportunidad de invertir es independiente de la medida de probabilidad original P. En este sentido, se afirma que el resultado no depende de las expectativas de los inversores, que pueden asignar distintas probabilidades a los diferentes estados de la naturaleza; aunque sí es necesario que los agentes estén de acuerdo en qué estados pueden presentarse y los precios que tomarán los activos en estos estados.

A continuación se presenta un resultado que permite dar significado a la nueva medida de probabilidad, Q, equivalente a la inicial.

Proposición II.3

Bajo la medida de probabilidad Q definida como:

$$Q(\omega_1) = q_1 = \frac{S_1^1(\omega_2) - S_0^1.(1+r)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)} \qquad Q(\omega_2) = q_2 = \frac{S_0^1(1+r) - S_1^1(\omega_1)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)}$$

el precio esperado del activo con riesgo es $S_0^1.(1+r)$

Demostración:

La verificación es inmediata, calculando la esperanza:

$$E_Q\left[S_1^1\right] = \frac{S_1^1(\omega_2) - S_0^1.(1+r)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)} S_1^1.(\omega_1) + \frac{S_0^1(1+r) - S_1^1(\omega_1)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)} S_1^1.(\omega_2) = S_0^1.(1+r)$$

El valor esperado, bajo la medida de probabilidad definida, es el precio que debería tener un activo sin riesgo negociado en el mercado con un precio inicial igual a S_0^1, esto es, igual al precio del activo con riesgo. Esta propiedad de la medida de probabilidad Q, lleva a que se le conozca con el nombre de "probabilidad neutral al riesgo".[25]

[25] Obsérvese que la proposición se refiere solamente al activo con riesgo porque el activo sin riesgo la verifica de forma trivial, por lo que los dos activos del mercado la verifican.

2.3.2. Mercados incompletos

Un mercado uniperiódico es incompleto si se negocia en él un número de activos inferior al número de estados de la naturaleza. En un modelo con dos estados de la naturaleza de mercado incompleto se negociará, por tanto, un único activo. Mantenemos el supuesto de que existe un activo sin riesgo y, entonces, éste será el único activo negociado. Su proceso de precios será:

$$S^0 = \left(S_0^0, S_1^0\right), \text{ con } S_0^0=1 \quad S_1^0=(1+r)$$

En este caso, es imposible replicar los flujos generados por una inversión si dichos flujos no son ciertos. Observamos que:

$$\theta^0.(1+r) = f_1(\omega_1) \Rightarrow \theta^0.(1+r) \neq f_1(\omega_2) \text{ siempre que } f_1(\omega_1) \neq f_1(\omega_2)$$

pero, si el flujo f_1 no es cierto, necesariamente $f_1(\omega_1) \neq f_1(\omega_2)$.

Por no ser posible la replicación, no se obtendrá el valor de la oportunidad de invertir en un proyecto como en la sección anterior, siempre que tal proyecto dependa de un flujo aleatorio. Si todos los flujos fuesen ciertos, puede seguirse el razonamiento utilizado para valorar inversión cierta o el razonamiento seguido para mercados completos, y se llegaría por ambos al mismo resultado.

Demostraremos que, sin realizar nuevos supuestos sobre las expectativas y las preferencias del inversor, es posible acotar el valor de la oportunidad de invertir en el proyecto descrito por los flujos $(f_0,0)$, $(f_1,1)$, f_1 aleatorio, del siguiente modo:

$$\left(f_0 + \frac{\min\{f_1(\omega_1), f_1(\omega_2)\}}{(1+r)}\right)^+ < Vop_0(f_0, f_1) < \left(f_0 + \frac{\max\{f_1(\omega_1), f_1(\omega_2)\}}{(1+r)}\right)^+$$

Sea M* un mercado definido por la incorporación a M de un activo ficticio que da derecho al flujo f_1 en el momento final. Buscamos el precio que debe tener dicho activo en el momento inicial para que no existan oportunidades de arbitraje en M*.

Si el precio de dicho activo ficticio, S_0^f, fuese mayor o igual que $\frac{\max\{f_1(\omega_1), f_1(\omega_2)\}}{(1+r)}$, se generarían oportunidades de arbitraje en el mercado. La estrategia que consiste en comprar S_0^f unidades del activo sin riesgo, y vender una unidad del activo ficticio constituye una de estas oportunidades. Esta estrategia tiene un coste nulo en el momento inicial y su valor en el momento final, será no negativo si se presenta el estado ω_1:

$$S_0^f.(1+r) - f_1(\omega_1) \geq 0, \text{ puesto que } S_0^f \geq \frac{f_1(\omega_1)}{(1+r)}$$

y será no negativo si se presenta el estado ω_2:

$$S_0^f.(1+r) - f_1(\omega_2) \geq 0, \text{ puesto que } S_0^f \geq \frac{f_1(\omega_2)}{(1+r)}$$

siendo estrictamente positivo en alguno de los dos casos, ya que $f_1(\omega_1) \neq f_1(\omega_2)$.

El razonamiento sería análogo si el precio del activo ficticio, S_0^f, fuese menor o igual que $\frac{\min\{f_1(\omega_1), f_1(\omega_2)\}}{(1+r)}$. La estrategia consistente en comprar una unidad del activo ficticio y vender S_0^f unidades del activo sin riesgo constituye una oportunidad de arbitraje.

Ha quedado demostrado así que la pertenencia al intervalo considerado es condición necesaria de ausencia de oportunidades de arbitraje en M*. Demostraremos, a continuación, que también es condición suficiente.

Se demuestra que si se verifica:

$$\frac{\min\{f_1(\omega_1), f_1(\omega_2)\}}{(1+r)} < S_0^f < \frac{\max\{f_1(\omega_1), f_1(\omega_2)\}}{(1+r)}$$

está garantizada la ausencia de oportunidades de arbitraje en M*.

Efectivamente, si se trata de construir una estrategia de arbitraje, con θ^0 unidades del activo sin riesgo y con θ^f unidades del activo ficticio que da derecho a f_1, para que tenga coste nulo, debe verificarse que $\theta^0 = -\theta^f. S_0^f$. El valor de dicha estrategia en el momento final dependerá del estado de la naturaleza que se presente. Así si se presenta el estado ω_1, el valor de la estrategia será:

$$\theta^f. [f_1(\omega_1) - S_0^f.(1+r)]$$

mientras que si se presenta el estado ω_2, el valor de la estrategia será:

$$\theta^f. [f_1(\omega_2) - S_0^f.(1+r)]$$

Pero, dados los extremos del intervalo en que se encuentra S_0^f, por hipótesis, se verifica que:

$$f_1(\omega_1) - S_0^f.(1+r) > 0 \Rightarrow f_1(\omega_2) - S_0^f.(1+r) < 0$$

$$f_1(\omega_2) - S_0^f.(1+r) > 0 \Rightarrow f_1(\omega_1) - S_0^f.(1+r) < 0$$

por lo que nunca puede constituir una oportunidad de arbitraje.

Queda así demostrado que se puede asignar, como valor de la oportunidad de una inversión que da derecho a los flujos $(f_0,0)$, $(f_1,1)$ en el mercado descrito, cualquier valor del intervalo planteado, y no es posible asignarle ningún valor que no se encuentre en dicho intervalo.

2.3.3. Coherencia con el Teorema de Separación de Fisher.

. En este caso, se demuestra que, bajo los supuestos planteados, el "valor de la oportunidad de invertir" obtenido es el único compatible con la valoración en certeza y, así, con el Teorema de Separación de Fisher. A continuación, se plantea esta demostración para mercados completos, caso en que ha sido posible obtener un valor concreto.

Si el mercado M es completo, el activo ficticio que da derecho a f_1 es redundante en M*. Entonces, será posible construir una cartera cuyo valor en el momento t=1 no dependa del estado de la naturaleza que se presente, en la que interviene el activo ficticio. Si asignamos a este último el índice f, vemos que para que la cartera no tenga riesgo, esto es, su valor no dependa del estado de la naturaleza, debe verificar:

$$\theta^0.(1+r)+\theta^1.S_1^1(\omega_1)+\theta^f.f_1(\omega_1)=\theta^0.(1+r)+\theta^1.S_1^1(\omega_2)+\theta^f.f_1(\omega_2)$$

Tomamos, sin pérdida de generalidad, $\theta^0=0$, $\theta^1=1$, y obtenemos que la estrategia a seguir será:

$$\theta' = (\theta^0, \theta^1, \theta^f) = \left(0, 1, \frac{S_1^1(\omega_2)-S_1^1(\omega_1)}{f_1(\omega_1)-f_1(\omega_2)}\right)$$

El pago a que dará derecho esta estrategia en el momento 1, independientemente del estado de la naturaleza que se presente será:

$$\frac{S_1^1(\omega_2).f_1(\omega_1)-S_1^1(\omega_1).f_1(\omega_2)}{f_1(\omega_1)-f_1(\omega_2)}$$

El valor de la estrategia en el momento inicial será:

$$V_0(\theta)=S_0^1+\frac{S_1^1(\omega_2)-S_1^1(\omega_1)}{f_1(\omega_1)-f_1(\omega_2)}.S_0^f$$

A continuación, sustituimos el precio S_0^f por el valor que debería tener de acuerdo con el valor del "Vop" obtenido, y llegamos el siguiente valor para la estrategia en el momento inicial:

$$S_0^1+\frac{S_1^1(\omega_2)-S_1^1(\omega_1)}{f_1(\omega_1)-f_1(\omega_2)}.\left[\frac{S_1^1(\omega_2)-S_0^1.(1+r)}{S_1^1(\omega_2)-S_1^1(\omega_1)}f_1(\omega_1)+\frac{S_0^1(1+r)-S_1^1(\omega_1)}{S_1^1(\omega_2)-S_1^1(\omega_1)}f_1(\omega_2)\right].\frac{1}{1+r}$$

Operando, se obtiene la siguiente expresión para este valor:

$$\left[\frac{S_1^1(\omega_2).f_1(\omega_1)-S_1^1(\omega_1).f_1(\omega_2)}{f_1(\omega_1)-f_1(\omega_2)}\right]\frac{1}{1+r}$$

Expresado así, permite observar que el precio propuesto es el que garantiza la proporcionalidad entre el valor de la cartera sin riesgo construida y el precio del activo sin riesgo exigida por la Proposición II.1. Dicho de otro modo, este precio es el que conduce a que el valor en este momento de un pago cierto dentro de un periodo se calcule como el valor de dicho pago descontado a la tasa de interés (sin riesgo) del mercado; el único precio coherente con el Teorema de separación de Fisher.[26]

[26] Obsérvese que el precio podría haberse obtenido por este razonamiento, construyendo una cartera libre de riesgo y exigiendo la proporcionalidad de la Proposición II.1. Este procedimiento fue el seguido para la valoración de opciones financieras europeas en el artículo pionero de Black y Scholes (1973). Merton (1977) utilizó un procedimiento distinto que se asemeja al utilizado en general en esta tesis, procedimiento que se reveló más útil para planteamientos generales tras las aportaciones de Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981).

2.4. Modelo con k estados de la naturaleza

2.4.1. Medidas de probabilidad neutrales al riesgo

Definición (medida de probabilidad neutral al riesgo de un modelo uniperiódico con espacio de estados discreto)

Se denomina medida de probabilidad neutral al riesgo de un modelo uniperiódico con espacio de estados discreto, y se denota por Q, a una función de probabilidad definida sobre el conjunto de estados de la naturaleza, tal que todos los activos negociados en el mercado, con precio inicial S_0^i tienen un precio esperado, bajo dicha probabilidad igual a $S_0^i.(1+r)$.

Podemos caracterizar las medidas de probabilidad neutrales al riesgo de distintas formas. A continuación se presentan algunas que serán utilizadas después.

Una medida de probabilidad neutral al riesgo, Q, se puede representar por un vector:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\omega_1) \\ Q(\omega_2) \\ \vdots \\ Q(\omega_k) \end{pmatrix}$$

que verifica:

$$q_j \geq 0, \ \forall \, j= 1,2,\ldots,k$$

$$S_1.q = S_0.(1+r)$$

donde S_1 es la matriz de pagos (o precios finales) y S_0 el vector de precios iniciales.

Obsérvese que no exigimos que la suma de las componentes de q sea 1, porque se sigue de la primera ecuación del sistema de ecuaciones planteado, asociada al activo sin riesgo.

Para una segunda caracterización, utilizaremos como numerario el activo sin riesgo; recuérdese que los precios de los activos en dicho numerario se denominan precios descontados, y se representan en cursiva, así:

$$\mathcal{S}_t^0 = 1, \text{ para } t = 0, 1$$

$$\mathcal{S}_0^i = S_0^i, \text{ para } i = 1, \ldots, m\text{-}1; \text{ por haber supuesto que } S_0^1 = 1$$

$$\mathcal{S}_1^i(\omega_j) = \frac{S_1^i(\omega_j)}{S_1^0} = \frac{S_1^i(\omega_j)}{(1+r)}, \text{ para } i = 1, \ldots, m\text{-}1,\ j = 1, \ldots, k.$$

Es inmediato comprobar que, en este modelo de mercado, una función de probabilidad, Q, definida sobre (Ω, F), es una *medida de probabilidad neutral al riesgo* si y solo si verifica:

$$E_Q[\mathcal{S}_1^i] = \mathcal{S}_0^i = S_0^i, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, m\text{-}1$$

o, de forma equivalente, puesto que $\mathcal{S}_0^i$ es constante, si verifica:

$$E_Q[\mathcal{S}_1^i - \mathcal{S}_0^i] = 0, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, m\text{-}1$$

donde E_Q representa la esperanza matemática bajo la medida de probabilidad Q.

Se representará por D^i el vector de diferencias de precios descontados del activo i, para los distintos estados de la naturaleza:

$$D^i = \left(S_1^i(\omega_1) - S_0^i \quad \cdots \quad S_1^i(\omega_k) - S_0^i\right)$$

Y se representará por D la matriz que recoge estas diferencias para todos los activos:

$$D = \begin{pmatrix} D^0 \\ D^1 \\ \vdots \\ D^{m-1} \end{pmatrix}$$

De forma análoga se definen el vector D^i, y la matriz D, para precios sin descontar.

Esta notación permite caracterizar las medidas de probabilidad neutrales al riesgo del siguiente modo. La función Q, definida como $Q(\omega_1) = q_1 \ldots Q(\omega_k) = q_k$, es una medida de probabilidad neutral al riesgo si y sólo si verifica:

$$D.q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{0} \qquad \overline{0} \in R^m, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}$$

$$q_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{k} q_j = 1$$

Las medidas de probabilidad neutrales al riesgo están estrechamente relacionadas con la condición de ausencia de oportunidades de arbitraje en un mercado. A continuación se presenta un teorema en que se enuncia una relación que en nuestro desarrollo resulta fundamental.

Teorema 4

En el modelo de mercado uniperiódico con k estados de la naturaleza, se verifica que en el mercado no hay oportunidades de arbitraje si y sólo si puede definirse sobre (Ω,F) una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P.

Demostración[27]:

Demostraremos, en primer lugar, que bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, existe en el mercado definido una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P.

Representaremos por $G(\theta) = V_1(\theta)-V_0(\theta)$, la variable aleatoria que representa las ganancias asociadas a la estrategia θ, y por $\mathit{G}(\theta)= \mathit{V}_1(\theta)-\mathit{V}_0(\theta)$, la variable aleatoria que representa las ganancias descontadas. Estas variables pueden expresarse en función de las matrices de diferencias de precios, en la forma:

$$G(\theta) = \theta'.D \qquad\qquad \mathit{G}(\theta) = \theta'.\mathit{D}$$

Para demostrar el Teorema utilizaremos el siguiente resultado.

Lema II.1

Existen oportunidades de arbitraje si y sólo si existe alguna estrategia θ tal que las ganancias descontadas sean no negativas en todos los estados de la naturaleza y estrictamente positivas en alguno de ellos.

[27] *La demostración que se presenta a continuación está basada en el artículo de Taqqu y Willinger (1987).*

Demostración del Lema II.1

En primer lugar, supongamos que existe una oportunidad de arbitraje. Esto significa que existe θ, tal que, $V_0(\theta) = 0$, $V_1(\theta) \geq 0$, para todo ω_j, y existe ω_j tal que $V_1(\theta) > 0$, para $j = 1,\ldots,k$.

Para esta estrategia se podrá realizar la afirmación análoga respecto del "valor descontado", esto es, verifica que $\mathit{V}_0(\theta) = V_0(\theta) = 0$, $\mathit{V}_1(\theta) = \frac{V_1(\theta)}{(1+r)} \geq 0$, para todo ω_j, y existe ω_j tal que $\mathit{V}_1(\theta) = \frac{V_1(\theta)}{(1+r)} > 0$, para $j = 1,\ldots,k$.

Teniendo en cuenta que $G(\theta) = \mathit{V}_1(\theta) - \mathit{V}_0(\theta)$, queda demostrado que si existe una oportunidad de arbitraje, existe una estrategia θ tal que las ganancias descontadas son no negativas en todos los estados de la naturaleza y estrictamente positivas en alguno de ellos.

Para demostrar la implicación inversa, supongamos que existe una estrategia θ tal que las ganancias descontadas asociadas verifican que $G(\theta) \geq 0$, para todo ω_j, y existe ω_j tal que $G(\theta) > 0$, para $j = 1,\ldots,k$.

Construimos entonces una nueva estrategia, φ del siguiente modo:

$\varphi^i = \theta^i$ para $i=1,\ldots,m-1$,

$$\varphi^0 = -\sum_{i=1}^{m-1} \theta^i . S_0^i = -\sum_{i=1}^{m-1} \theta^i . \mathit{S}_0^i .$$

Es evidente que $V_0(\varphi) = \mathit{V}_0(\varphi) = 0$. Tenemos así que:

$\mathit{V}_1(\varphi) = \mathit{V}_0(\varphi) + G(\varphi) = G(\varphi)$.

Por otro lado, $G(\varphi) = G(\theta)$, puesto que $S_1^0 = S_0^0$.

Así, aseguramos que existe una estrategia φ con $V_0(\varphi) = V_0(\varphi) = 0$, que verifica $V_1(\varphi) \geq 0$, para todo ω_j, $V_1(\varphi) > 0$ para algún ω_j, $j = 1,\ldots,k$; y por tanto verifica $V_1(\varphi) \geq 0$, para todo ω_j, $V_1(\varphi) > 0$ para algún ω_j, $j = 1,\ldots,k$ y constituye una oportunidad de arbitraje. Con ello, queda demostrado el lema.

Por el Lema II.1, se sabe que hay oportunidades de arbitraje si y sólo si:

$$\exists\, \theta \in R^m \,/\, \theta'.D \geq \overline{0} \;\; \text{y} \;\; \theta'.D.e > 0, \text{ para } e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^k$$

o, equivalentemente:

$$\exists\, \theta \in R^m \,/\, \theta'.D \geq \overline{0} \;\; \text{y} \;\; \theta'.(D.(-e)) < 0.$$

Esto es, hay oportunidades de arbitraje si y sólo si $\theta'.(D.(-e)) \geq 0$ no es desigualdad derivada del sistema $\theta'.D \geq \overline{0}$. Consecuentemente, hay ausencia de oportunidades de arbitraje si y sólo si $\theta'.(D.(-e)) \geq 0$ es desigualdad derivada del sistema $\theta'.D \geq \overline{0}$.

De la aplicación del lema de Farkas, se sigue que hay ausencia de oportunidades de arbitraje si y sólo si:

$$\exists\, \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_k \end{pmatrix} \in R^k \text{ tal que } \;\; \pi_j \geq 0, \text{ para } j = 1,\ldots,k \;\; \text{y} \;\; D.\pi = (D.(-e))$$

Por lo tanto, bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje será posible construir una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a la medida P, esto es, que asigne una probabilidad estrictamente positiva a todos los estados de la naturaleza, del siguiente modo:

$$Q(\omega_j) = q_j = \frac{1+\pi_j}{k+\sum_{j=1}^{k}\pi_j}, \text{ para } j = 1,\ldots,k$$

Efectivamente, Q define una medida de probabilidad equivalente a P, puesto que verifica:

$$Q(\omega_j) > \frac{\pi_j}{k+\sum_{j=1}^{k}\pi_j} \geq 0, \text{ puesto que } \pi_j \geq 0, \text{ para todo } j = 1,\ldots, k$$

$$\sum_{j=1}^{k} Q(\omega_j) = 1$$

Esta medida de probabilidad es además neutral al riesgo. Para demostrarlo, basta observar la relación entre los vectores q y π:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} = (\pi + e).\ \frac{1}{k+\sum_{j=1}^{k}\pi_j}$$

Aplicando la condición del Lema de Farkas, $D.\pi = (D.(-e))$, se comprueba inmediatamente que verifica el sistema de ecuaciones:

$$D.q = \overline{0}$$

Queda así demostrada la primera implicación del Teorema 4. La demostración de la implicación inversa es inmediata.

Efectivamente, si existe una medida de probabilidad, Q, equivalente a P y neutral al riesgo, para cualquier estrategia, θ, se verifica que:

$$V_0(\theta) = \sum_{i=0}^{m-1} \theta^i S_0^i = \sum_{i=0}^{m-1} \theta^i \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{1+r} S_1^i(\omega_j) Q(\omega_j) =$$

$$= \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{k} Q(\omega_j) \sum_{i=0}^{m-1} \theta^i S_1^i(\omega_j)$$

Con $Q(\omega_j) > 0$, para todo $j = 1,\ldots,k$

El valor inicial se obtiene como combinación lineal, con coeficientes estrictamente positivos, de los valores finales para los distintos estados de la naturaleza. Por lo tanto, dada una estrategia con valor inicial nulo y valor final no negativo, esto es una estrategia θ que verifica:

$$V_0(\theta) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \theta^i S_1^i(\omega_j) \geq 0, \text{ para todo } j = 1,\ldots,k$$

necesariamente debe tener valor final nulo:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \theta^i S_1^i(\omega_j) = 0, \text{ para todo } j = 1,\ldots,k$$

por lo que no es posible construir una estrategia de arbitraje, y queda demostrado el Teorema.

Los teoremas que, como este, relacionan la ausencia de oportunidades de arbitraje con la existencia de medidas de probabilidad neutrales al riesgo se conocen en la literatura financiera como "teoremas fundamentales".

2.4.2. Valoración en un mercado completo

Se analizará ahora la valoración de inversiones, cuando el único mercado financiero, M, es un mercado completo, definido para un solo periodo, con k estados de la naturaleza, sin oportunidades de arbitraje. Esto implica que se negocian en él k activos con precios linealmente independientes. En esta situación el problema de valoración se resuelve sin dificultad, a partir del resultado que se presenta a continuación.

Proposición II.4

En un modelo uniperiódico, sobre mercado completo con k estados de la naturaleza, libre de arbitraje, existe una y sólo una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Demostración:

Por las características del mercado, la matriz de pagos es cuadrada y no singular:

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_1^0 \\ S_1^1 \\ S_1^2 \\ \vdots \\ S_1^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+r) & (1+r) & \cdots & (1+r) \\ S_1^1(\omega_1) & S_1^1(\omega_2) & \cdots & S_1^1(\omega_k) \\ S_1^2(\omega_1) & S_1^2(\omega_2) & \cdots & S_1^2(\omega_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^{k-1}(\omega_1) & S_1^{k-1}(\omega_2) & \cdots & S_1^{k-1}(\omega_k) \end{pmatrix}$$

y el sistema de ecuaciones que define las medidas de probabilidad neutrales al riesgo:

$$S_1.q = S_0\,.\,(1+r)$$

tiene una única solución que, por el Teorema 4, sabemos debe representar una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P.

En este modelo, un proyecto de inversión vendrá dado por los flujos de caja $(f_0, 0)$ y $(f_1, 1)$, donde f_0 será un valor real y f_1 una variable aleatoria definida sobre Ω. Sea el mercado M*, definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al cobro en el momento final de f_1.

Proposición II.5

En el mercado M* hay ausencia de oportunidades de arbitraje si y sólo si el precio inicial del activo ficticio, S_0^f, es el siguiente:

$$S_0^f = \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$$

donde Q es la única medida de probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

Demostración:

Se demostrará en primer lugar que, si el precio no es éste, en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje.

Por ser el modelo completo, siempre será posible encontrar una estrategia, con los activos de M, que replique el pago f_1. Sea θ una estrategia en M, cuyo valor en el momento final, coincida con f_1 para todos los estados de la naturaleza:

$$f_1 = V_1(\theta) = \theta'.S_1$$

Puesto que Q es la única medida de probabilidad neutral al riesgo de M, para todo $i = 0, 1, \ldots, m-1$, se verifica:

$$S_0^i = \frac{1}{1+r}.E_Q[S_1^i]$$

de donde,

$$V_0(\theta) = \frac{1}{1+r}.E_Q[V_1(\theta)]$$

Pero, como se ha visto, el valor final de θ coincide con el flujo f_1, por lo que el valor inicial de la estrategia θ será el siguiente:

$$V_0(\theta) = \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$$

Para concluir esta parte de la demostración, basta observar que si la estrategia θ y el activo ficticio no tienen el mismo valor inicial, en M* existen oportunidades de arbitraje. Obsérvese que el razonamiento que se presenta a continuación coincide con el análogo para dos estados de la naturaleza.

Supongamos que $S_0^f > V_0(\theta)$. La estrategia $\varphi = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ de M*, consistente en seguir la estrategia θ, y vender en descubierto una unidad del activo ficticio, *constituye una oportunidad de arbitraje de tipo II*. Su valor inicial, $V_0(\theta)$ - S_0^f es negativo, y da lugar a un pago nulo en el momento final. Si $S_0^f < V_0(\theta)$, se consigue una oportunidad de arbitraje de tipo II con la estrategia $\varphi = \begin{pmatrix} -\theta^0 \\ -\theta^1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Por el Teorema 1, sabemos que, entonces, existen oportunidades de arbitraje tipo I.

La implicación inversa es inmediata: veremos, a continuación, que si el precio inicial del activo ficticio es el indicado, $S_0^f = \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$, la medida Q es una probabilidad neutral al riesgo equivalente a P para el mercado M*.

Se sabe que Q es una medida de probabilidad equivalente a P, y que es neutral al riesgo en el mercado M; por lo tanto, para todo i = 0, 1, ..., m-1, se verifica:

$$S_0^i = \frac{E_Q\left[S_1^i\right]}{(1+r)},$$

Para que, además, sea neutral al riesgo en el mercado M*, basta que también verifique tal propiedad el precio del activo ficticio. Puesto que $S_1^f = f_1$, y $S_0^f = \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$, podemos escribir:

$$S_0^f = \frac{E_Q\left[S_1^f\right]}{(1+r)}.$$

Observamos así que todos los activos, incluido el ficticio, verifican esta relación entre precio inicial y final. La medida Q es una probabilidad neutral al riesgo equivalente a P para el mercado M*. Por el Teorema 4, podemos concluir que, entonces, el mercado M* no contiene oportunidades de arbitraje. Queda así, completamente demostrada la proposición.

La primera implicación demostrada es la generalización de los resultados presentados en la sección 2.3.1, sobre valoración de inversión en un modelo con dos estados de la naturaleza y mercado completo. Los resultados obtenidos para el caso particular de dos estados de la naturaleza, se mantienen y, se completan con la implicación en sentido contrario.

El procedimiento de valoración de un flujo coincide con el utilizado en ambiente de certeza, sustituyendo el valor cierto del flujo futuro por su valor esperado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Así mismo, se verifica que el valor obtenido no depende de las preferencias ni de las expectativas de los inversores y es el único valor coherente con el Teorema de Separación de Fisher. Teniendo en cuenta este resultado, y el Teorema 2, el valor de mercado del intercambio entre los flujos $(f_0,0)$ y $(f_1,1)$ será el siguiente:

$$VI_0(f_0, f_1) = f_0 + \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$$

y el valor de la oportunidad de invertir en dicho intercambio será:

$$Vop_0(f_0, f_1) = \left(f_0 + \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}\right)^+$$

2.4.3. Valoración en un mercado incompleto

Dentro de la valoración en un modelo de un periodo se trata por último el caso de que el mercado financiero, M, sea incompleto. El número de activos negociado en el mercado, m, es menor que el número de estados de la naturaleza, k. Como consecuencia de ello, existen pagos que no pueden ser replicados por una estrategia en M. Puesto que suponemos ausencia de oportunidades de arbitraje en M, está garantizada la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo, pero no su unicidad, como en el caso de mercados completos, porque la matriz de pagos del mercado M tiene un número de filas linealmente independientes, m, inferior al número de columnas:

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_1^0 \\ S_1^1 \\ S_1^2 \\ \vdots \\ S_1^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+r) & (1+r) & \cdots & (1+r) \\ S_1^1(\omega_1) & S_1^1(\omega_2) & \cdots & S_1^1(\omega_k) \\ S_1^2(\omega_1) & S_1^2(\omega_2) & \cdots & S_1^2(\omega_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^{m-1}(\omega_1) & S_1^{m-1}(\omega_2) & \cdots & S_1^{m-1}(\omega_k) \end{pmatrix}$$

De hecho puede demostrarse que el sistema de ecuaciones e inecuaciones que define las medidas de probabilidad neutrales al riesgo:

$$S_1.q = S_0.(1+r) \quad \text{con} \quad q \geq \overline{0}$$

tiene infinitas soluciones, de las que, al menos una, será equivalente a P.

En un mercado incompleto pueden definirse pagos en el momento final que no pueden replicarse y otros en los que es posible la replicación. Se observará cómo, en el caso de que exista replicación, el problema de valoración se resuelve igual que en el caso de mercado completo, pero no ocurrirá así cuando no exista ninguna estrategia que replique el flujo futuro.

Supongamos que se trata de analizar un proyecto definido por los flujos $(f_0,0)$ y $(f_1,1)$, donde f_1 es replicable en el único mercado financiero M, aunque este es incompleto. Sea M* el mercado definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al flujo f_1.

Proposición II.6

En el mercado M* hay ausencia de oportunidades de arbitraje si y sólo si el precio inicial del activo ficticio, S_0^f, es el siguiente:

$$S_0^f = \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$$

donde Q es cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo de M.

Demostración:

Demostraremos en primer lugar que, si el precio es otro, en M* existirán oportunidades de arbitraje.

Obsérvese que para cualquier estrategia θ, de M, y para cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo de M, se verifica que el valor inicial de la estrategia es la esperanza en Q del valor final de la misma:

$$V_0(\theta) = \sum_{i=0}^{m-1} \theta^i . S_0^i = \sum_{i=0}^{m-1} \theta^i . \sum_{j=1}^{k} \frac{S_1^i(\omega_j) Q(\omega_j)}{1+r} =$$

$$= \frac{1}{1+r} . \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{k} \theta^i . S_1^i(\omega_j) Q(\omega_j) = \frac{E_Q[V_1(\theta)]}{1+r}$$

Si θ replica el pago f_1, $f_1 = V_1(\theta)$, y por tanto, para toda medida de probabilidad neutral al riesgo de M, Q, se verifica:

$$V_0(\theta) = \frac{E_Q[f_1]}{1+r}$$

Basta entonces razonar, igual que en la demostración de la proposición II.5, que si el activo ficticio y θ no tienen el mismo valor inicial, en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje.

La demostración de la implicación inversa consiste en observar, de nuevo como en la demostración de la proposición II.5, que, si $S_0^f = \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$, donde Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo de M, resulta serlo también de M*. Puesto que en M existe una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P, Q, si $S_0^f = \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$, existirá en M* también. Con ello, queda probado que, entonces, en M* no existen oportunidades de arbitraje y queda demostrada la proposición.

El valor de mercado del intercambio de los flujos $(f_0, 0)$ y $(f_1, 1)$, donde f_1 es replicable, será:

$$VI_0(f_0, f_1) = f_0 + \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$$

para cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo, Q.

Definido un proyecto por los flujos de caja $(f_0, 0)$ y $(f_1, 1)$, donde f_1 es replicable, el valor de la oportunidad de invertir en el mismo será:

$$Vop_0(f_0, f_1) = \left(f_0 + \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}\right)^+_-$$

para cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo, Q.

El problema de calcular el "valor de la oportunidad de invertir" en un modelo de un periodo queda resuelto en el caso en que el flujo futuro es replicable en un mercado financiero sin oportunidades de arbitraje, tanto si es completo como si es incompleto.

Mayor problema se encuentra si se trabaja con un pago f_1 que no sea replicable. En este caso no es posible trabajar del mismo modo, sino que se buscará la acotación más precisa posible del valor de un intercambio financiero, que mantenga la independencia de las expectativas y de las preferencias del inversor. Para ello, definimos el mercado M* por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al flujo f_1, no alcanzable o replicable en M. En este caso se obtiene el resultado que se presenta a continuación.

Proposición II.7

En el mercado M* hay ausencia de oportunidades de arbitraje si y sólo si S_0^f, precio en el momento inicial del activo ficticio, pertenece al siguiente intervalo:

$$S_0^f \in (f_1^-, f_1^+) = \left(\min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)} \right),$$

donde Q es una probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

Demostración:

Se demostrará en primer lugar que si el precio del activo ficticio no pertenece al intervalo indicado, en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje.

Con esta finalidad, razonamos del siguiente modo: dado el pago f_1, no alcanzable en M, siempre existe una cartera θ de M tal que $V_1(\theta) \geq f_1$ para todos los estados de la naturaleza. Este resultado es obvio; basta proponer la siguiente cartera:

$$\theta^0 = \frac{\max\limits_{1\leq j\leq k} f_1(\omega_j)}{(1+r)}$$

$\theta^i = 0$, para todo $i=1,2,\ldots,m-1$

Obsérvese además que si f_1 no es alcanzable, para cualquier cartera en que $V_1(\theta) \geq f_1$ para todos los estados de la naturaleza, se verificará que $V_1(\theta) > f_1$ para algún estado de la naturaleza.

Para que no existan oportunidades de arbitraje en M* es necesario que el precio en el momento inicial, S_0^f, del activo ficticio que da lugar al pago f_1 en el momento final, sea estrictamente menor que el valor inicial de una cartera θ de M que verifique:

$V_1(\theta) \geq f_1$ para todos los estados de la naturaleza y

$V_1(\theta) > f_1$ para algún estado de la naturaleza.

Si no fuera así siempre sería posible construir una cartera de arbitraje en M^*, adquiriendo la cartera θ y vendiendo $\frac{V_0(\theta)}{S_0^f}$ unidades del activo ficticio.

La cota superior mínima que se puede conseguir por este razonamiento para el precio de un activo que da derecho en el momento $t = 1$ al pago f_1, no alcanzable, es el valor óptimo del siguiente programa lineal (P_1):

$$\begin{aligned}&\text{Mínimo } \theta'.\, S_0\\ &\text{Sujeto a } \theta'.\, S_1(\omega_j) \geq f_1(\omega_j)\\ &\text{para todo } j = 1,\ldots,k.\end{aligned}$$

donde θ' representa el vector traspuesto de θ, estrategia de M.

Obsérvese que, por el hecho de trabajar con f_1 no alcanzable, está garantizado que $S_1(\omega_j) > f_1(\omega_j)$ para algún $j = 1,\ldots,k$. Aplicando el razonamiento de arbitraje planteado, observamos que la cota superior determinada no puede ser igualada por el precio del activo.

Por un razonamiento análogo podemos identificar un conjunto de cotas inferiores que no pueden ser alcanzadas por el precio de dicho activo. La mayor de estas cotas que puede determinarse por un razonamiento de arbitraje es el valor óptimo del siguiente programa lineal (P_2):

$$\begin{aligned}&\text{Máximo } \theta'.\, S_0\\ &\text{Sujeto a } \theta'.\, S_1(\omega_j) \leq f_1(\omega_j)\\ &\text{para todo } j = 1,\ldots,k.\end{aligned}$$

Se puede asegurar, además, que el óptimo de los programas planteados existe, ya que los conjuntos factibles son no vacíos y convenientemente acotados. Si denominamos θ^{**} a la estrategia óptima del primer programa planteado y θ^{*} a la estrategia óptima del segundo, se verifica que si el precio del activo ficticio, S_0^f, no pertenece al intervalo abierto ($\theta^{*\prime}.S_0$, $\theta^{**\prime}.S_0$), en M* existen oportunidades de arbitraje. Veremos a continuación que $\theta^{*\prime}.S_0 = f_1^-$, y $\theta^{**\prime}.S_0 = f_1^+$, con lo que quedará probada la proposición en este sentido.

Puesto que estos programas tienen solución, también la tendrán sus programas duales, y los valores óptimos de éstos coincidirán con los del primal correspondiente. Por lo tanto, podemos afirmar que $\theta^{**\prime}.S_0$ es el valor óptimo del siguiente programa, donde $u \in R^k$:

$$\begin{aligned} &\text{Máximo } f_1'.u \\ &\text{Sujeto a } S_1.u = S_0 \\ &\qquad\qquad u \geq 0 \end{aligned}$$

y $\theta^{*\prime}.S_0$ es el valor óptimo del programa:

$$\begin{aligned} &\text{Mínimo } f_1'.u \\ &\text{Sujeto a } S_1.u = S_0 \\ &\qquad\qquad u \geq 0 \end{aligned}$$

La interpretación de los programas anteriores resulta más sencilla realizando un cambio de variable. Así, si hacemos q = u. (1+r), el planteamiento anterior quedaría escrito del siguiente modo:

$\theta^{**\prime}.S_0$ es el valor óptimo del programa (D_1):

$$\text{Máximo } \frac{1}{1+r}.f_1'.q$$
$$\text{Sujeto a } S_1.q = S_0.(1+r)$$
$$q \geq 0$$

$\theta^{*\prime}.S_0$ es el valor óptimo del programa (D_2):

$$\text{Mínimo } \frac{1}{1+r}.f_1'.q$$
$$\text{Sujeto a } S_1.q = S_0.(1+r)$$
$$q \geq 0$$

El conjunto factible de los programas D_1 y D_2 es el mismo, y está formado por el conjunto de vectores $q \in R^k$ que representan medidas de probabilidad neutrales al riesgo del mercado M. Obsérvese que estas medidas no son necesariamente equivalentes a P, puesto que pueden asignar probabilidad nula a algún estado de la naturaleza.

El Teorema 4 señala la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P como condición necesaria y suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje. Por la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje de M, el conjunto de medidas de probabilidad neutrales al riesgo de M no es vacío, y no lo es el conjunto de soluciones factibles de los programas D_1 y D_2. Podemos llegar a esta misma conclusión por la relación entre los programas primal y dual.

Además de tener el mismo conjunto de soluciones factibles, los programas duales planteados tienen la misma función objetivo. Dicha función representa el valor esperado del flujo f_1 descontado un periodo, bajo distintas medidas de probabilidad neutrales al riesgo, esto es:

$$\frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, \text{ donde Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo.}$$

En el óptimo, los valores de la función objetivo de los programas duales coinciden con $\theta^{**\prime}.S_0$, $\theta^{*\prime}.S_0$ y dicho valor tendrá la forma:

$$\theta^{**\prime}.S_0 = \frac{E_{Q^{**}}[f_1]}{(1+r)}$$

$$\theta^{*\prime}.S_0 = \frac{E_{Q^*}[f_1]}{(1+r)}$$

donde Q**, Q* representan las medidas de probabilidad neutrales al riesgo para las que se alcanza el óptimo en los programas planteados.

Sustituyendo $\frac{E_{Q^*}[f_1]}{(1+r)}$ por su significado, $\min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$, Q neutral al riesgo, observamos que se trata del valor f_1^-. Análogamente, $\frac{E_{Q^*}[f_1]}{(1+r)}$, o bien $\max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}$, Q neutral al riesgo, es el valor f_1^+. Queda demostrado, como se pretendía que:

$$\theta^{*\prime}.S_0 = f_1^-$$

$$\theta^{**\prime}.S_0 = f_1^+,$$

con lo que queda demostrado que, si el precio del activo ficticio no pertenece al intervalo (f_1^-, f_1^+), en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje.

A continuación se demuestra la implicación inversa, por reducción al absurdo. Supongamos que $S_0^f \in (f_1^-, f_1^+)$ y en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje.

Una estrategia de M* tendrá la forma $\begin{pmatrix} \theta \\ \theta^f \end{pmatrix}$, con $\theta \in R^m$, $\theta^f \in R$. Obsérvese que, puesto que en M no existen oportunidades de arbitraje, en cualquier estrategia que constituya una oportunidad de arbitraje de M*, deberá estar incluido el activo ficticio, esto es, $\theta^f \neq 0$.

Entonces, si en M* existen oportunidades de arbitraje, existirán $\theta \in R^m$, $\theta^f \in R$, $\theta^f \neq 0$, tales que:

$$\theta'.\, S_0 + \theta^f.\, S_0^f = 0$$

$$\theta'.S_1(\omega_j) + \theta^f.f_1(\omega_j) \geq 0,\ \ \forall j = 1, 2, \ldots k.$$

No es necesario exigir la desigualdad estricta el algún estado de la naturaleza, puesto que f_1 no es alcanzable.

De aquí se sigue que la existencia de oportunidades de arbitraje en M*, implica que existe $\varphi = -\frac{1}{\theta^f}\theta \in R^m$ que verifica:

$$\varphi'.\, S_0 - S_0^f = 0$$

o equivalentemente:

$$V_0(\varphi) = S_0^f$$

y además:

$$\varphi'.S_1(\omega_j) - f_1(\omega_j) \geq 0,\ \ \forall j = 1, 2, \ldots k, \text{ si } \theta^f < 0.$$

$$\varphi'.S_1(\omega_j) - f_1(\omega_j) \leq 0,\ \ \forall j = 1, 2, \ldots k, \text{ si } \theta^f > 0.$$

Entonces, si $\theta^f < 0$, la estrategia φ pertenece al conjunto factible del programa primal de minimización (P_1), por lo que se verificará que $V_0(\varphi) \geq f_1^+$. Pero $V_0(\varphi) = S_0^f$, por lo que contradice nuestra hipótesis inicial de que $S_0^f < f_1^+$.

Análogamente, si $\theta^f > 0$, la estrategia φ pertenece al conjunto factible del programa primal de maximización (P_2), por lo que se verificará que $V_0(\varphi) \leq f_1^-$. Pero $V_0(\varphi) = S_0^f$, por lo que se contradice nuestra hipótesis inicial de que $S_0^f > f_1^-$, y queda demostrada la Proposición.

Sea M un mercado de un periodo con k estados de la naturaleza, incompleto, sin oportunidades de arbitraje; y M* un mercado definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al flujo f_1. Se han obtenido los precios que puede tomar el activo ficticio para que en M* no existan oportunidades de arbitraje, dependiendo de que el flujo f_1 fuese o no replicable en M. Se presentan aquí estos resultados, para comentarlos conjuntamente.

Si f_1 no es replicable, es condición necesaria y suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje en M* que el precio del activo ficticio, S_0^f, pertenezca al intervalo abierto:

$$(f_1^-, f_1^+) = \left(\min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)} \right),$$

donde Q representa las probabilidades neutrales al riesgo de M.

Si f_1 es replicable, es condición necesaria y suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje en M* que el precio del activo ficticio, S_0^f, tome el valor:

$$\frac{E_Q[f_1]}{(1+r)},$$

donde Q representa las probabilidades neutrales al riesgo de M.

Para comparar la condición del caso de que no sea replicable y del caso en que sí lo sea, escribimos esta última en forma de intervalo: Si f_1 es replicable es condición necesaria y suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje en M* que el precio del activo ficticio, S_0^f, pertenezca al intervalo cerrado:

$$[f_1^-, f_1^+] = \left[\min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}\right],$$

donde Q representa las probabilidades neutrales al riesgo de M. Obsérvese que, puesto que f_1 es replicable, $f_1^- = f_1^+$, y este intervalo es en realidad un solo valor. El intervalo abierto correspondiente sería el conjunto vacío.

No es posible, entonces, enunciar una condición suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje en M*, común a los casos de flujos replicables y no replicables. Sí podría enunciarse una condición necesaria común a los dos casos que se presentan en mercados incompletos: para que haya ausencia de oportunidades de arbitraje en M* es necesario que el precio del activo ficticio, S_0^f, pertenezca al intervalo cerrado:

$$[f_1^-, f_1^+] = \left[\min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}\right],$$

donde Q representa las probabilidades neutrales al riesgo de M.

Esta condición es necesaria para ambos casos, y así se presenta, por ejemplo, en Pliska (1997). Es más, esta condición es también necesaria en el caso de mercado completo. De hecho, la condición planteada es necesaria y suficiente para el caso en que exista replicación, bien sea el mercado completo o incompleto[28]; mientras que en el caso de que no exista posibilidad de replicación es solamente necesaria y, como se ha visto, es posible enunciar una condición necesaria más restrictiva que, además es suficiente.[29]

La conclusión a la que llegamos es que, en el modelo trabajado, la diferencia fundamental para la valoración está en el hecho de que los flujos sean replicables o no. Diferenciando estos dos casos, siempre es posible enunciar condiciones necesarias y suficientes de ausencia de oportunidades de arbitraje en M*.

La diferencia entre ambos consiste en que, cuando hay replicación, el precio debe estar en un intervalo cerrado, que en realidad es un solo valor, mientras que cuando no hay replicación, el precio debe estar en el abierto correspondiente, que será un intervalo no vacío. Otra forma de ver la diferencia entre los dos casos es la siguiente: cuando existe replicación, el precio de los activos puede calcularse como la esperanza matemática del precio final descontado, bajo cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo. Además, siempre se obtendrá el mismo valor. Cuando no existe replicación, en cambio, si se sigue el mismo procedimiento, se obtiene que algunas medidas neutrales al riesgo dan lugar a precios que provocan oportunidades de arbitraje. Este resultado es coherente con el Teorema 4, que se refería únicamente a las medidas de probabilidad neutrales al riesgo equivalentes a P.

---

[28] En ambos casos, el intervalo cerrado es, de hecho, un solo valor.

[29] No conozco ninguna fuente, anterior a esta Tesis, en que se enuncie tal condición.

Concluimos, así, que la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo no garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje, si no es equivalente a P. Obviamente, las medidas Q* y Q** no serán equivalentes a P; se observa tanto por la afirmación anterior, como directamente por los programas lineales de que son solución. A continuación se presenta una proposición que establece la relación que existe entre la existencia de oportunidades de arbitraje y de medidas de probabilidad neutrales al riesgo, no necesariamente equivalentes a P.

Proposición II.8

En un modelo uniperiódico con k estados de la naturaleza, se verifica que en el mercado no hay oportunidades de arbitraje tipo II, si y sólo si puede definirse sobre (Ω,F) una medida de probabilidad neutral al riesgo.[30]

Demostración:

La demostración es una aplicación inmediata del lema de Farkas. La ausencia de oportunidades de arbitraje tipo II, planteada a partir de los precios descontados significa que:

$$\forall\ \theta \in R^k,\ \theta'.S_1 \geq 0\ \Rightarrow\ \theta'.S_0 \geq 0$$

Pero, de acuerdo con el lema de Farkas, podemos enunciar la siguiente condición necesaria y suficiente de que $\theta'.S_0 \geq 0$ sea desigualdad derivada de $\theta'.S_1 \geq 0$:

$$\exists\ q \in R^k,\ q \geq 0 \text{ tal que } q'.S_1 = S_0$$

Y podemos observar que el vector q define una medida de probabilidad neutral al riesgo. Queda, así, demostrada la proposición.

[30] Recuérdese el Teorema 1 (sección 2.3.3 del Capítulo I) en cuanto que la existencia de oportunidades de arbitraje tipo II implica la existencia de oportunidades de arbitraje tipo I, pero el recíproco no es cierto.

Se sigue de forma directa que, si se trabaja exigiendo únicamente la ausencia de oportunidades de arbitraje de tipo II, sí es posible enunciar una condición necesaria y suficiente única para todos los casos planteados. Sea M un mercado de un periodo con k estados de la naturaleza, sin oportunidades de arbitraje, y sea M* el mercado definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho a un pago f_1 en el momento final; entonces en M* hay ausencia de oportunidades de arbitraje de tipo II si y sólo si el precio inicial del activo ficticio, S_0^f, pertenece al intervalo cerrado:

$$[f_1^-, f_1^+] = \left[\min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}\right],$$

donde Q representa las probabilidades neutrales al riesgo de M. Hay que resaltar que si se puede replicar el flujo f_1 el intervalo será, de hecho, un único valor. En cualquier caso, el procedimiento utilizado en la Tesis para valorar es garantizar la ausencia de todas oportunidades de arbitraje (tipo I y tipo II), por lo que la proposición II.8 y sus consecuencias constituyen una aclaración.

Un proyecto de inversión queda definido por unos flujos de caja $(f_0,0)$ y $(f_1,1)$, donde f_0 es un valor real y f_1 una variable aleatoria definida sobre Ω. Si f_1 es replicado por una estrategia θ, el valor de la oportunidad de invertir queda completamente determinado. Se encuentra una aplicación de esta consideración conjunta de mercados completos e incompletos, si hay replicación, en la valoración de inversión cierta. Así, es ahora inmediato demostrar la implicación inversa de la proposición II.2.

Partimos del mercado M, sin oportunidades arbitraje, en que existe un activo sin riesgo, con proceso de precios $S_0^0=1$, $S_1^0=1+r$. Entonces, un flujo cierto $(f_1,1)$ siempre será replicado, en el mercado M, por la estrategia $\theta^0 = \frac{f_1}{1+r}$, $\theta^i = 0$, para todo i =1,..., m-1. Sea M* el mercado definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al flujo f_1. Se sigue de lo anterior, que existe, para el activo ficticio, un precio, y sólo uno, que garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje en M*. Ese precio es:

$$S_0^f = \frac{f_1}{1+r}$$

Se ha llegado a la conclusión de que si el flujo futuro es replicable el problema de valoración de una inversión, queda completamente resuelto; no se puede afirmar lo mismo si el flujo no es replicable. Para el valor de un flujo no replicable, f_1, es posible determinar un conjunto de valores, con independencia de preferencias y expectativas y todos coherentes con el Teorema de Separación de Fisher. El conjunto de valores está definido por el intervalo:

$$(f_1^-, f_1^+) = \left(\min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)} \right)$$

Puesto que no es posible encontrar un valor concreto para el flujo, no se puede aplicar directamente el Teorema 2 para agregar el precio de los dos flujos. En este caso, sin embargo, no se plantea ningún problema puesto que el flujo f_0 está definido en el momento inicial y puede considerarse parte del precio inicial del activo ficticio que da derecho al flujo f_1. El valor del intercambio será el exceso de precio sobre f_0, que es necesario pagar por el activo ficticio, en el momento inicial, para que en M* no existan oportunidades de arbitraje.

Es inmediato que el exceso de precio debe pertenecer al intervalo:[31]

$$(f_0 + f_1^-, f_0 + f_1^+) = \left(f_0 + \min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, f_0 + \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)} \right)$$

La regla de decisión quedaría definida del siguiente modo: si todos los valores del intervalo son positivos la inversión es recomendable, el valor de la oportunidad de invertir tomaría los mismos valores que el valor de mercado del intercambio:

$$\mathrm{Vop}_0(f_0, f_1) \in \left(f_0 + \min_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)}, f_0 + \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)} \right)$$

Si todos son negativos, la inversión no es aconsejable. El valor de la oportunidad de invertir es cero.

Si el intervalo contiene valores positivos y negativos, el valor de la oportunidad de invertir pertenecería al intervalo:

$$\mathrm{Vop}_0(f_0, f_1) \in \left[0, f_0 + \max_Q \frac{E_Q[f_1]}{(1+r)} \right)$$

En el caso de una inversión que dependa de un flujo no replicable, que de lugar a un intervalo de precios que contiene precios negativos y positivos, no se puede tomar una decisión única con el criterio definido. Sería necesario utilizar otros criterios que necesariamente dependerán bien de las preferencias, a través de la medida de probabilidad P que corresponda al inversor; bien de las expectativas de los inversores, a través de su función de utilidad.

[31] Recuérdese que f_0 tiene necesariamente signo negativo.

Capítulo III

Valoración en un modelo de múltiples periodos

1. VALORACIÓN DE INVERSIÓN CIERTA

1.1. Modelización de un proyecto de inversión

Una inversión cierta, esto es, con activos ciertos e inversor pasivo, quedaría modelizada por la entrega de un conjunto de capitales, a cambio de los cuales se recibiría otro conjunto de capitales. Tomando con signo negativo los capitales entregados, la inversión puede representarse por un conjunto de flujos de caja netos con vencimiento en los sucesivos momentos de tiempo considerados.

$$\{(f_0, 0), (f_1, 1), ..., (f_T, T)\}$$

Puesto que los recursos son ciertos, $f_t \in R$, para todo $t = 0, 1, ..., T$. Puesto que el inversor es pasivo, la inversión no recoge opciones reales, salvo la inicial de invertir o no invertir.

1.2. Oportunidades de inversión financiera

Supondremos un mercado financiero, M, en que se negocian m activos, con procesos de precios $S^i = \{S_t^i\}_{t=0,1,\ldots,T}$, para i = 0, 1, ..., m-1. Las estrategias, como han sido definidas en el capítulo I, representarán cantidades mantenidas de los activos. Serán procesos en R^m, $\theta = \{\theta_t\}_{t=1,\ldots,T}$, siendo $\theta_t = \begin{pmatrix} \theta_t^0 \\ \theta_t^1 \\ \vdots \\ \theta_t^{m-1} \end{pmatrix}$. Supondremos que en este mercado no existen oportunidades de arbitraje.

Se supondrá que el precio futuro del activo sin riesgo, $S^0 = \{S_t^0\}_{t=0,1,\ldots,T}$ no depende del estado de la naturaleza en que se concrete el entorno, esto es, su proceso de precios es cierto. Esta restricción lleva a que la "actividad" del inversor al intercambiar recursos ciertos no tenga ningún valor, por lo que se identificará inversión con recursos ciertos e inversión cierta (recursos ciertos con inversor pasivo). En el capítulo IV se presentará, como generalización, el estudio de mercados con tipos de interés estocásticos, que darán lugar a intercambio de recursos ciertos con inversor activo.

Como ya se observó en modelos de un periodo, para valorar inversiones ciertas no es necesario considerar todas las oportunidades de inversión financiera; basta conocer los intercambios de recursos ciertos que se producen en el mercado. El fundamento se encuentra en el siguiente Teorema, que puede contemplarse como una generalización de la proposición II.1.

Teorema 5

En un mercado M sin oportunidades de arbitraje, cualquier activo, o cartera de activos negociados con proceso de precios cierto, tendrá un proceso de precios igual o proporcional al del activo sin riesgo, S^0.

Demostración: [32]

Se demostrará el Teorema por reducción al absurdo. Supongamos que existe un activo sin riesgo en el mercado con un proceso de precios no proporcional a S^0; entonces, existe $1 \leq b \leq m-1$, con S^b tal que, para un valor real, A, y para algún valor de t, h = 1,...,T, verifica:

$$S_0^b = A.\,S_0^0$$

$$S_h^b \neq A.\,S_h^0$$

Si $S_h^b < A.\,S_h^0$, es posible construir una oportunidad de arbitraje: en el momento inicial se compran A unidades del activo con índice 0 y se vende al descubierto 1 unidad del activo con índice b. Obsérvese que el coste de la cartera es cero. Estos activos se mantendrían hasta el momento h, en que la situación neta es favorable al inversor. Esta cantidad estrictamente positiva se coloca en el activo sin riesgo hasta el momento final T. Formalmente, la cartera se define por:

$$\theta_t^0 = A,\ \theta_t^b = -1,\ \theta_t^i = 0,\ \forall\, i = 1,2,\ldots,m-1;\ i \neq b\ ,\ \forall\, t \leq h$$

$$\theta_t^0 = \frac{A.S_h^0 - S_h^b}{S_h^0},\ \ \theta_t^i = 0,\ \forall\, i = 1,2,\ldots,m-1,\ \forall\, t > h$$

Efectivamente, es autofinanciada, su valor es nulo en el momento inicial:

$$V_0(\theta) = A.\,S_0^0 - S_0^b = 0$$

y tiene valor positivo en T:

$$V_T(\theta) = \frac{A.S_h^0 - S_h^b}{S_h^0}\,.\,S_T^0 > 0$$

[32] La demostración es análoga a la de la proposición II.1.

Si $S_h^b > A.S_h^0$, el razonamiento sería análogo. La oportunidad de arbitraje sería entonces la cartera de signo contrario.

Tal y como se vio en el modelo de un periodo, en este tipo de mercados podemos suponer, sin pérdida de generalidad que existe un único activo sin riesgo. Se seguirá suponiendo, además que su precio inicial es unitario, esto es, $S_0^0 = 1$.

1.3. Valor de la oportunidad de invertir

Se pretende valorar una inversión real, definida por el conjunto de flujos ciertos representados por los capitales $(f_0, 0)$, $(f_1, 1)$ ... (f_T, T). Para ello, definimos el mercado M*, por la incorporación al mercado M de un activo que da derecho a recibir estos capitales. El valor del intercambio de tales flujos, es el precio que debería tener dicho activo para que en M* no existan oportunidades de arbitraje. En esta sección encontraremos un valor tal, que si el precio del activo no es ese, en M* existen oportunidades de arbitraje.[33]

Proposición III.1

La ausencia de oportunidades en M* implica que el precio inicial del activo ficticio debe ser $S_0^f = f_0 + \frac{f_1}{S_1^0} + \ldots + \frac{f_T}{S_T^0}$.

[33] Se verá, posteriormente que el resultado inverso también es cierto. Se sigue el mismo orden que en el capítulo II para el modelo de un periodo y, por las mismas razones.

Demostración:

Efectivamente, el precio en t, de un activo que da derecho a recibir el capital (f_t, t) debe ser f_t. Basta entonces aplicar el Teorema 5 y se llega a la siguiente conclusión: si en el mercado financiero M*, no hay oportunidades de arbitraje, el *precio en el momento* 0, *de un activo que da derecho a recibir el capital* (f_t, *t*) *debe* ser $\frac{f_t}{S_t^0} . S_0^0 = \frac{f_t}{S_t^0}$.

Obtenido el precio inicial que correspondería a cada pago, basta tener en cuenta la linealidad de las funciones de valoración (Teorema 2). Si el mercado M* no contiene oportunidades de arbitraje, el precio del activo ficticio será:

$$S_0^f = f_0 + \frac{f_1}{S_1^0} + \ldots + \frac{f_T}{S_T^0}$$

Queda así demostrada la proposición.

Este resultado es coherente con el "Teorema de separación de Fisher", o "principio de comparación" (con el mercado).

El valor de la oportunidad de invertir en t = 0, en un proyecto que de derecho a los capitales: (f_0, 0), (f_1, 1) ... (f_T, T), si existe[34], será[35]:

$$\text{Vop}_0(f_0, f_1, \ldots f_T) = \left(f_0 + \frac{f_1}{S_1^0} + \ldots + \frac{f_T}{S_T^0} \right)^+$$

[34] Se confirmará que existe cuando se demuestre el inverso de la proposición III.1.

[35] Introducimos en la notación, como subíndice, el momento de la oportunidad y de su valoración, aquí coincidentes; y, entre paréntesis los derechos que proporciona la oportunidad.

La expresión final del valor de la oportunidad de invertir dependerá de la dinámica concreta de los precios del activo sin riesgo. La dinámica que se plantea más frecuentemente, es la dada por la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$\Delta S_t^0 = S_{t-1}^0 . r_t \text{ para } t = 1, 2, \ldots, T$$

donde, el parámetro r_t, conocido, recibe generalmente el nombre de tipo de interés sin riesgo para el periodo t; en lo sucesivo se denominará tipo de interés del periodo t del mercado M.[36]

Con esta dinámica, se obtienen las siguientes expresiones del precio S_t en función del precio inicial y final:

$$S_t^0 = S_0^0 . \prod_{h=1}^{t} (1 + r_h) = S_T^0 . \prod_{h=t+1}^{T} (1 + r_h)^{-1}$$

Puesto que se supone que $S_0^0 = 1$, la expresión del valor del intercambio obtenido quedará:

$$S_0^f = f_0 + \frac{f_1}{1 + r_1} + \frac{f_2}{(1 + r_1)(1 + r_2)} + \ldots + \frac{f_T}{\prod_{t=1}^{T} (1 + r_t)}$$

Obsérvese que esta expresión coincide con la del tradicional valor actual neto de una inversión con flujos de caja ciertos. El valor de la oportunidad de llevar a cabo este intercambio, o valor de la oportunidad de invertir en el proyecto correspondiente, será:

$$\text{Vop}_0(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_T) = \left(f_0 + \frac{f_1}{(1 + r_1)} + \frac{f_2}{(1 + r_1)(1 + r_2)} + \ldots + \frac{f_T}{\prod_{t=1}^{T} (1 + r_t)} \right)^+$$

[36] Obsérvese que no se indicará que la tasa de interés corresponde a un activo libre de riesgo. La razón es que en nuestro análisis no se considerarán distintos tipos de interés en función del riesgo del activo.

2. VALORACIÓN DE INVERSIÓN ALEATORIA CON ESPACIO DE ESTADOS FINITO

2.1. Modelización de un proyecto de inversión

Sea $\Omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)$ el espacio de estados de la naturaleza, F el conjunto de las partes de Ω y P una medida de probabilidad definida sobre (Ω, F), tal que $P(\omega_j) > 0$, $\forall j = 1,...,k$. Se consideran los momentos del tiempo t = 0, 1,..., T, y la filtración $\Im = \{F_t\}_{t=0, 1,...,T}$, que representa la información de los inversores en cada momento del tiempo. Se supone que en el comienzo no hay información alguna, esto es, $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, y en el momento final se dispone de toda la información $F_T = F$. La incertidumbre del inversor queda representada por el espacio de probabilidad (Ω,F,P) con la filtración $\Im$ asociada.

Puesto que se considera inversión aleatoria en un modelo de múltiples periodos, la oportunidad de invertir en un proyecto, será la oportunidad de un intercambio entre flujos, si el inversor es pasivo; pero, si el inversor es activo, de un intercambio de flujos y oportunidades futuras.

Los flujos de caja a que da derecho una inversión objeto de análisis quedan representados por capitales (f_t, t), donde se exige que f_t sea medible respecto de F_t, para t = 0, 1, …, T. Esta exigencia nos lleva a la siguiente modelización:

$f_0 \in R$, representa el cobro (si es positivo) o pago (si negativo) a que daría lugar la inversión en el momento inicial

$f_T = \left(f_T(\omega_1) \;\; f_T(\omega_2) \;\; \ldots \;\; f_T(\omega_k)\right)$, donde $f_T(\omega_j) \in R$ representa el cobro (si es positivo) o pago (si negativo) a que daría lugar la inversión si se presenta el estado de la naturaleza ω_j, para $j = 1, 2, \ldots, k$.

Para $t = 1, 2, \ldots, T\text{-}1$, $f_t = \left(f_t(\omega_1) \;\; f_t(\omega_2) \;\; \ldots \;\; f_t(\omega_k)\right)$, donde $f_t(\omega_j) \in R$ representa el cobro (si es positivo) o pago (si negativo) a que daría lugar la inversión si se presenta el estado de la naturaleza ω_j, para $j = 1, 2, \ldots, k$. Debe tenerse en cuenta que si ω_j, $\omega_{j'}$ son indistinguibles bajo F_t, debe verificarse que $f_t(\omega_j) = f_t(\omega_{j'})$. Para $t < T$ existirán, en general, sucesos indistinguibles, por lo que sería posible utilizar vectores de una dimensión menor que k para representar un flujo de caja.

Una *oportunidad en el momento t, de intercambio de un conjunto de flujos* $(f_t, t), (f_{t+1}, t+1), \ldots, (f_T, T)$ se representará como:

$$op_t(f_t, f_{t+1}, \ldots, f_T)$$

Una oportunidad en el momento t, de intercambio de un conjunto de flujos, $\left(f_{t_1}, t_1\right), \ldots, \left(f_{t_h}, t_h\right)$; *y un conjunto de oportunidades,* $\left(op_{t_{h+1}}, t_{h+1}\right), \ldots, \left(op_{t_{h+g}}, t_{h+g}\right)$; se representará como:

$$op_t(f_{t_1}, \ldots, f_{t_h}, op_{t_{h+1}}, \ldots, op_{t_{h+g}})$$

las sucesivas oportunidades darán la posibilidad de conseguir nuevos intercambios de flujos, o nuevas oportunidades, pero, en último término las variables siempre serán flujos.

Es necesario, además, especificar las relaciones que puedan existir entre las distintas oportunidades. Si son complementarias, en el peor de los casos será necesario valorarlas de forma conjunta. Si son excluyentes, será necesario seleccionar aquella que tenga un mayor valor.

El primer ejemplo de oportunidades excluyentes es el de las oportunidades de invertir y de no invertir en el momento inicial. Cuando se trabaja con un modelo de un solo periodo, si no se invierte en el momento inicial, se pierde toda oportunidad. En un modelo de varios periodos, en ocasiones, existe la oportunidad de invertir en otro momento posterior, cuando se dispone de más información. En ese caso, de acuerdo con la regla de decisión fijada, el valor de la oportunidad de invertir será:

$$Vop_0\,(\text{invertir}) = \text{máximo}\{\, Vop_0\,(\text{invertir en } t=0)\,,\ Vop_0\,(\text{no invertir en } t=0)\}$$

donde:

1° El valor de la oportunidad de invertir ahora, Vop_0 (invertir en t=0), será el máximo entre cero y el valor de mercado en el momento inicial de todos los flujos y oportunidades que se recibirían.

2° El valor de la oportunidad de no invertir, Vop_0 (no invertir en t=0), será el máximo entre cero, y los valores de mercado de cada una de las oportunidades excluyentes, que, normalmente serán las de invertir en distintos momentos del tiempo.

2.2. Oportunidades de inversión financiera.

2.2.1. Elementos del mercado

Dado el espacio de probabilidad definido en la sección 2.1, (Ω, F, P), con la filtración asociada $\Im$, se supone un único mercado financiero, M, sin oportunidades de arbitraje, en que se negocian m activos, con procesos de precio adaptados a dicha filtración:

$$S^i = \{S_t^i\}_{t=0,1,\ldots,T}\,, \text{ para } i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m\text{-}1.$$

El índice cero corresponde a un activo sin riesgo que sigue un proceso de precios que no depende de los estados de la naturaleza; el precio de este activo en los sucesivos momentos, S_t^0, toma un valor real para t = 0, 1, 2, ..., T. El tipo de interés puede ser distinto en los sucesivos periodos, por los que el precio para los sucesivos momentos de tiempo puede expresarse como $S_t^0 = S_0^0 \prod_{h=1}^{t}(1+r_h)$. Si además se supone que $S_0^0=1$, queda $S_t^0 = \prod_{h=1}^{t}(1+r_h)$. Cuando sea más cómodo, por coherencia con los demás activos, se expresará el precio en un momento por un vector con componentes iguales.

En dicho mercado se negocian, además, m-1 activos con riesgo, esto es que dan derecho a pagos diferentes en los distintos estados de la naturaleza.

El vector de precios iniciales tendrá la misma representación que en el modelo de un periodo:

$$S_0 = \begin{pmatrix} S_0^0 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^{m-1} \end{pmatrix}$$

La matriz de precios finales se define en el momento T:

$$S_T = \begin{pmatrix} S_T^0 \\ S_T^1 \\ S_T^2 \\ \vdots \\ S_T^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod_{h=1}^{T}(1+r_h) & \prod_{h=1}^{T}(1+r_h) & \cdots & \prod_{h=1}^{T}(1+r_h) \\ S_T^1(\omega_1) & S_T^1(\omega_2) & \cdots & S_T^1(\omega_k) \\ S_T^2(\omega_1) & S_T^2(\omega_2) & \cdots & S_T^2(\omega_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_T^{m-1}(\omega_1) & S_T^{m-1}(\omega_2) & \cdots & S_T^{m-1}(\omega_k) \end{pmatrix}$$

Para momentos del tiempo, t, entre el origen y el final, $0 < t < T$, el precio debe ser el mismo para sucesos indistinguibles en F_t. Para un suceso $A \in F_t$, representaremos por $S_t^i(A)$, el precio en el momento t del activo i, cuando se presenta cualquiera de los estados de la naturaleza incluidos en A.

2.2.2. Modelos de un periodo derivados del general

La descomposición de un modelo de múltiples periodos en varios modelos de un periodo permitirá aplicar aquí los resultados obtenidos en el capítulo anterior. Para construir cada modelo uniperiódico, nos situaremos en cada una de las distintas concreciones del entorno que podemos encontrar en cada momento del tiempo anterior al final. Situados en un suceso, contemplaremos únicamente las posibles concreciones del periodo siguiente a partir de dicho suceso. La formalización se apoya en la idea de filtración y en las siguientes definiciones.

Definición (partición asociada a un álgebra)

Dada un álgebra, llamamos partición asociada a ella al conjunto de todos los elementos de la misma, distintos del vacío, que no pueden obtenerse como unión de otros.

Definición (sucesión de particiones de la filtración del inversor)

Se denomina sucesión de particiones de la filtración $\mathcal{J} = \{F_t\}_{t\in\Lambda}$, a aquella cuyos términos, P_t, son las particiones asociadas a las sucesivas álgebras F_t.

Representaremos el número de elementos de P_t como $\langle P_t \rangle$. Que un conjunto A pertenezca a P_t, significa que en el momento t el inversor sabe si A se ha presentado o no.

Definición (predecesor en un momento dado de un suceso)

Dado A, medible respecto F_τ, para $\tau = 0, 1, 2, \ldots, T$, llamamos predecesor del suceso A en $t \leq \tau$, $t = 0, 1, \ldots, T$, y representamos por $A_t(A)$, al único elemento de P_t en que está incluido A.

Se destacan, como caso particular, los predecesores, en un momento cualquiera de los distintos estados de la naturaleza, $A_t(\omega_j)$, para todo $t = 0, 1, \ldots, T$, para todo $j = 1, 2, \ldots, k$.

Definición (sucesores inmediatos de un suceso)

Dado un suceso $A \in P_t$, para $t = 0, 1, \ldots, T-1$, se llama sucesores inmediatos de A y se representan por $A^1, A^2, \ldots, A^{v(A)}$ a los elementos de P_{t+1} cuya unión da lugar al suceso A.

Cada suceso $A \in P_t$ da lugar a un modelo de un periodo[37], derivado del modelo general, que denominaremos modelo uniperiódico generado por A. En cada momento $t = 0, 1, \ldots, T-1$, se definirá un número de modelos de un periodo igual al número de elementos de P_t. El modelo uniperiódico generado por $A \in P_t$, para $t = 0, \ldots, T-1$, se define a partir de los elementos que se presentan a continuación.

[37] Facilita la intuición de la descomposición y los resultados que se siguen representar la evolución de la información en un árbol, en que los nudos son los sucesos, de que parten tantas ramas como sucesores inmediatos tengan.

El conjunto de estados de la naturaleza es $\Omega(A) = \{A^1, A^2, \ldots, A^{\nu(A)}\}$. El álgebra es la definida por el conjunto de las partes de $\Omega(A)$, que representaremos por $F_A \subseteq F_{t+1}$. La medida de probabilidad P_A, definida del siguiente modo: $P_A(A^g) = P(A^g / A)$ para $g = 1, 2, \ldots, \nu(A)$. El espacio de probabilidad el modelo uniperiódico generado por A será, $(\Omega(A), F_A, P_A)$.

La relación entre los resultados obtenidos en el capítulo II y los que se obtendrán aquí, se basa fundamentalmente en el hecho de que el número de estados de la naturaleza del modelo uniperiódico generado por A es el número de sucesores inmediatos de A, $\nu(A)$.

2.2.3. Ausencia de oportunidades de arbitraje

Proposición III.2

En un mercado de varios periodos hay ausencia de oportunidades de arbitraje si y sólo si hay ausencia de oportunidades de arbitraje en todos los mercados uniperiódicos derivados del mismo.

Demostración:

En primer lugar, supondremos que existe una oportunidad de arbitraje, θ, en el modelo uniperiódico generado por $A \in P_h$: (Ω_A, F_A, P_A). Se demostrará que, entonces, es posible construir una oportunidad de arbitraje para el mercado global.

La existencia de oportunidades de arbitraje en el mercado generado por A significa que existe una cartera θ, tal que, cuando se da el suceso A en $t = h$, verifica $V_h(\theta) = 0$, $V_{h+1}(\theta) \geq 0$ para todo suceso A^g, $g = 1, 2, \ldots \nu(A)$, $V_{h+1}(\theta) > 0$ para algún valor $g = 1, 2 \ldots \nu(A)$.

La estrategia que define una oportunidad de arbitraje para el mercado global consiste en no comprar ni vender activos hasta el momento h; en ese momento se observa si se presenta el suceso A. Si no se presenta, el inversor no efectuará negociación alguna, con lo que su resultado final será cero. Si se presenta el suceso A, el inversor seguirá la estrategia θ. Puesto que esta estrategia constituye una oportunidad de arbitraje para este modelo de un periodo, el inversor alcanzará el momento h + 1 con un valor no negativo en todos los estados de la naturaleza y estrictamente positivo para alguno de ellos; si alcanza alguno de estos últimos, en el momento h +1, venderá todos sus activos y, a cambio, adquirirá activo sin riesgo, que debe mantener hasta el momento final, T.

Formalmente, esta estrategia, φ, se define del siguiente modo:

Para todo $t \leq h$, $\varphi_t = (0, 0, \ldots, 0) \in R^m$

Si en $t = h$ no se da el suceso A, $\varphi_t = (0, 0, \ldots, 0) \in R^m$, $\forall t > h$.

Si ~~en h se presenta A,~~ $\cancel{\varphi_{h+1} = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^{m-1}), \varphi_t =} \left(\frac{V_{h+1}(\theta)}{S^0_{h+1}}, 0, \ldots, 0 \right) \in R^m, \forall t > h+1.$

Se comprueba, de forma inmediata, que la cartera φ constituye una oportunidad de arbitraje para el mercado global. Efectivamente, se trata de una cartera autofinanciada con valor inicial nulo y con valor en el momento final $t = T$ no negativo para todos los estados de la naturaleza y estrictamente positivo para alguno de ellos.

Supongamos ahora que existe una oportunidad de arbitraje en el mercado global, esto es existe θ tal que $V_0(\theta) = 0$ y $V_T(\theta) \geq 0$ para todos los estados de la naturaleza, siendo $V_T(\theta) > 0$ para algún estado ω_j. Demostraremos que, entonces existe alguna oportunidad de arbitraje en algún modelo uniperiódico.

Dada esta estrategia, θ, observaremos su valor en el momento T-1. Supongamos que, para alguno de los sucesos de P_{T-1}, este valor fuese negativo. En el modelo uniperiódico generado por tal suceso, hay definida una estrategia con valor inicial negativo y valor final no negativo, por lo que está definida una oportunidad de arbitraje de tipo II, que implica la existencia de oportunidades de arbitraje de tipo I. Supongamos que $V_{T-1}(\theta) \geq 0$, para todos los sucesos de P_{T-1}; demostraremos que también es posible encontrar una oportunidad de arbitraje en algún modelo uniperiódico.

Para ello, observamos el valor de la estrategia en el predecesor inmediato de ω_j, $A_{T-1}(\omega_j)$, siendo ω_j un estado para el cual $V_T(\theta) > 0$. Si el $V_{T-1}(\theta) = 0$ en $A_{T-1}(\omega_j)$, está definida una oportunidad de arbitraje en el modelo uniperiódico generado por $A_{T-1}(\omega_j)$. En otro caso, necesariamente, $V_{T-1}(\theta) > 0$ en $A_{T-1}(\omega_j)$, y podemos repetir el análisis anterior para el periodo que comienza en T-2. Así, para que no existan oportunidades de arbitraje, $V_{T-2}(\theta) \geq 0$, para todos los sucesos de P_{T-2}, y $V_{T-2}(\theta) > 0$ en $A_{T-2}(\omega_j)$.

Retrocediendo en el tiempo, llegamos a que, para que no existan oportunidades de arbitraje en los periodos definidos entre $t = 1$ y $t = T$, necesariamente ha de verificarse $V_1(\theta) \geq 0$, para todos los sucesos de P_1, y $V_1(\theta) > 0$

en $A_1(\omega_j)$. Pero, puesto que $V_0(\theta) = 0$, en este caso estaría definida una oportunidad de arbitraje en el primer periodo.

Queda demostrado así que la ausencia de oportunidades de arbitraje en los modelos derivados implica la ausencia de oportunidades de arbitraje en el modelo global; y, con ello, queda demostrada la proposición en las dos direcciones.

Utilizando esta proposición, llegamos a una restricción que impone la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje sobre las oportunidades de inversión financiera. Efectivamente, si esta hipótesis implica la ausencia de oportunidades de arbitraje en cada modelo uniperiódico, en cada uno de ellos el número máximo de activos con procesos de precios linealmente independientes $v(A)$.

Denominaremos modelo de dos periodos derivado del modelo general, generado por un suceso $A \in P_t$, a la consideración conjunta del modelo uniperiódico generado por el suceso A, y los modelos uniperiódicos generados por los sucesores inmediatos de A. Análogamente pueden definirse modelos derivados del modelo general de tres periodos generados por un suceso $A \in P_t$, y en general modelos generados por $A \in P_t$, siempre que el número de periodos del modelo sea menor o igual que la diferencia entre el final del modelo general, T, y el momento que se considera origen del modelo derivado, t. De la Proposición III.2 se sigue, de forma inmediata, la siguiente conclusión: en un mercado de varios periodos, la ausencia de oportunidades de arbitraje es condición necesaria y suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje en todos los mercados derivados del mismo.

2.3. Medidas de probabilidad neutrales al riesgo

La definición de medida de probabilidad neutral al riesgo en un modelo de varios periodos recoge la misma idea que en modelos uniperiódicos: bajo dicha medida, todos los activos tienen, en media, el mismo rendimiento que el activo sin riesgo. Para formalizar esta idea es necesario incluir una definición previa.

Definición (martingala):

Dado un espacio de probabilidad (Ω, F,P) con una filtración $\Im$, y un proceso estocástico $x=\{x_t\}_{t\in\Lambda}$ adaptado a $\Im$, se dice que dicho proceso es una martingala con respecto a $\Im$, si verifica:

i) $E[|x_t|] < \infty$, $\forall t\in\Lambda$

ii) $E[\, x_t \mid F_s\,] = x_s$, $\forall\ s \leq t$

Utilizando las propiedades de la esperanza condicionada (ley de las esperanzas iteradas), es inmediato demostrar que, si se está trabajando en tiempo discreto, como es el caso, es condición necesaria y suficiente para que un proceso $x=\{x_t\}_{t=0,1,\ldots,T}$ adaptado a $\Im$, sea una martingala con respecto a $\Im$, que verifique:

i) $E[|x_t|] < \infty$, $\forall t = 0, 1, \ldots, T$

ii) $E[\, x_{t+1} \mid F_t\,] = x_t$, $\forall t = 0, 1, \ldots, T-1$

Si un proceso es una martingala, con la información que se tiene en un momento del tiempo, t, el valor que se espera tome el proceso en un momento del tiempo posterior, es el valor que toma en el momento t. Obsérvese que, en el modelo de un periodo esta es la propiedad que verifican los precios descontados de los activos, con las medidas de probabilidad neutrales al riesgo. La generalización viene dada, pues, del siguiente modo.

Definición (probabilidad neutral al riesgo de un modelo de varios periodos)

Se denomina medida de probabilidad neutral al riesgo de un modelo de T periodos, con espacio de estados discreto, y se denota por Q, a una función de probabilidad definida sobre el conjunto de estados de la naturaleza, tal que todo proceso de precios descontados de un activo negociado en el mercado, bajo dicha probabilidad, constituye una martingala.

La relación entre la ausencia de oportunidades de arbitraje y las medidas de probabilidad neutrales al riesgo en un modelo de varios periodos resulta ser la misma que en los modelos uniperiódicos. A continuación se enuncia y se demuestra un Teorema que presenta dicha relación.

Teorema 6

En un mercado con T periodos y k estados de la naturaleza, hay ausencia de oportunidades de arbitraje si y sólo si puede definirse sobre (Ω, F) una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P.

Demostración:

Demostraremos, en primer lugar, que si puede definirse dicha medida de probabilidad neutral al riesgo, equivalente a P, no hay oportunidades de arbitraje, siguiendo el razonamiento ya utilizado para demostrar la afirmación análoga en el modelo de un periodo. Efectivamente, si existe una medida de probabilidad, Q, equivalente a P y neutral al riesgo, el valor descontado de una estrategia autofinanciada es una martingala bajo Q. Dada una estrategia autofinanciada, θ, su valor descontado, en el momento t = 0, 1, ..., T-1 será:

$$V_t(\theta) = \sum_{i=0}^{m-1} \theta_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^{m-1} \theta_t^i . E_Q\left[S_{t+1}^i \middle| F_t\right] = E_Q\left[\sum_{i=1}^{m-1} \theta_t^i . S_{t+1}^i \middle| F_t\right]$$

Pero la condición de autofinanciación indica que:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \theta_t^i . S_{t+1}^i = \sum_{i=1}^{m-1} \theta_{t+1}^i . S_{t+1}^i = V_{t+1}(\theta)$$

de donde se sigue que:

$$V_t(\theta) = E_Q\,[V_{t+1}(\theta) | F_t]$$

El valor descontado de cualquier estrategia autofinanciada es una martingala bajo Q y, por tanto, su valor en el momento inicial puede obtenerse como la esperanza de su valor descontado en el momento final:

$$V_0(\theta) = \mathrm{V}_0(\theta) = E_Q[V_T(\theta) \mid F_0] = E_Q[V_T(\theta)]$$

Una oportunidad de arbitraje debe tener valor inicial nulo y valor final (descontado o no) no negativo, pero si una variable no negativa tiene esperanza nula, no puede ser estrictamente positiva para ningún estado de la naturaleza. Queda entonces demostrado que, si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo, no es posible construir una estrategia de arbitraje, y queda demostrada la primera implicación del Teorema.

La demostración de que la ausencia de oportunidades de arbitraje implica la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo se basará en la Proposición III.2. Esta proposición indica que la ausencia de oportunidades de arbitraje en el modelo de T periodos implica la ausencia de oportunidades de arbitraje en cada modelo de un periodo derivado del modelo global, generado por el suceso A. El Teorema 4 nos asegura que, entonces, es posible construir una medida de probabilidad neutral al riesgo sobre cada $(\Omega(A), F_A)$, equivalente a P_A. A continuación, se demiuestra que si existe una medida de probabilidad de este tipo para cada modelo uniperiódico derivado, es posible definir sobre (Ω, F) una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P. Con ello, quedará demostrado el Teorema.

Se representará por $Q_{A_t(\omega_j)}$ una medida de probabilidad neutral al riesgo, definida sobre ($\Omega(A_t(\omega_j))$, $F_{A_t(\omega_j)}$) equivalente a $P_{A_t(\omega_j)}$. Si en el modelo global hay ausencia de oportunidades de arbitraje, la existencia de esta medida de probabilidad está garantizada por la Proposición III.2 y el Teorema 4. Entonces, se demuestra que la siguiente función de Ω:[38]

$$Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right]$$

define una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P.

Vemos, en primer lugar que se trata de una medida de probabilidad equivalente a P. Es evidente que esta función asigna un valor estrictamente positivo a todos los estados de la naturaleza, puesto que es producto de valores estrictamente positivos. Demostremos que, además, la suma de estos valores es la unidad.

Para demostrarlo suponemos, sin pérdida de generalidad, que los estados de la naturaleza están ordenados, de manera que los k^1 primeros tienen el mismo predecesor en T-1, que denominamos B_1, los k^2-k^1 siguientes tienen el suceso B^2 como predecesor común en T-1, y así sucesivamente:

$$B_1 = A_{T-1}(\omega_1) = A_{T-1}(\omega_2) = \ldots = A_{T-1}(\omega_{k^1})$$

$$B_2 = A_{T-1}(\omega_{k^1+1}) = A_{T-1}(\omega_{k^1+2}) = \ldots = A_{T-1}(\omega_{k^2})$$

$$\ldots$$

$$B_{\langle P_{T-1}\rangle} = A_{T-1}(\omega_{k^{\langle P_{T-1}\rangle-1}+1}) = A_{T-1}(\omega_{k^{\langle P_{T-1}\rangle-1}+2}) = \ldots = A_{T-1}(\omega_{k^{\langle P_{T-1}\rangle}})$$

Analicemos la suma de los valores asignados por Q a los estados ω_j, para j = 1,...,k^1:

$$\sum_{j=1}^{k^1} Q(\omega_j) = \sum_{j=1}^{k^1} \prod_{t=0}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right]$$

---

[38] Obsérvese que $A_{t+1}(\omega_j)$ es siempre un sucesor inmediato de $A_t(\omega_j)$.

Puesto que los estados $\omega_1,\ldots,\omega_{k^1}$ tienen los mismos predecesores, todos los sumandos tienen T-1 factores iguales. El factor diferente es $Q_{A_{T-1}(\omega_j)}[A_T(\omega_j)] = = Q_{B_1}(\omega_j)$, esto es la probabilidad del modelo de un periodo generado por B_1. En la suma anterior, podemos factorizar, por tanto, del siguiente modo:

$$\sum_{j=1}^{k^1} Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-2} Q_{A_t(B_1)}[A_{t+1}(B_1)] \sum_{j=1}^{k^1} Q_{B_1}(\omega_j)$$

Pero, puesto que $Q_{B_1}(\omega_j)$, para j = 1,..., k^1, define una medida de probabilidad, sabemos que su suma es la unidad y se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{k^1} Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-2} Q_{A_t(B_1)}[A_{t+1}(B_1)]$$

Análogamente, podemos trabajar con los restantes modelos uniperiódicos descritos entre T-1 y T, y obtendríamos:

$$\sum_{j=k^1+1}^{k^2} Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-2} Q_{A_t(B_2)}[A_{t+1}(B_2)]$$

$$\ldots$$

$$\sum_{j=k^{\langle P_{T-1}\rangle-1}+1}^{k} Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-2} Q_{A_t\left(B_{\langle P_{t-1}\rangle}\right)}\left[A_{t+1}\left(B_{\langle P_{t-1}\rangle}\right)\right]$$

La suma de los valores asignados por Q a todos los estados de la naturaleza será, entonces:

$$\sum_{j=1}^{k} Q(\omega_j) = \sum_{\beta=1}^{\langle P_{T-1}\rangle} \prod_{t=0}^{T-2} Q_{A_t(B_\beta)}[A_{t+1}(B_\beta)]$$

A continuación, pueden formarse los subconjuntos de $\{B_1,\ldots, B_{\langle P_{T-1}\rangle}\}$, que tienen el mismo predecesor en T-2, y trabajar con los modelos uniperiódicos que se definen entre T-2 y T-1 de igual modo.

Continuando el proceso hasta llegar al modelo uniperiódico que se define entre t = 0 y t =1, generado por Ω, con sucesores inmediatos $\Omega^1, \Omega^2, \ldots, \Omega^{\nu(\Omega)}$, donde $\nu(\Omega) = \langle P_1 \rangle$. Se llega así al resultado deseado:

$$\sum_{j=1}^{k} Q(\omega_j) = Q_\Omega(\Omega^1) + Q_\Omega(\Omega^2) + \ldots + Q_\Omega(\Omega^{\nu(\Omega)}) = 1$$

Queda demostrado que $Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right]$ define una medida de probabilidad equivalente a P. Para que el Teorema quede completamente demostrado, solo es preciso comprobar que se trata de una medida de probabilidad neutral al riesgo. Para ello, nos basaremos en un resultado previo, que interpreta cada medida de probabilidad neutral al riesgo de los mercados uniperiódicos derivados del modelo general, Q_A, como una probabilidad condicionada.

Lema III.1

Sea Q la medida de probabilidad equivalente a P, definida sobre (Ω, F) como $Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right]$, para j=1,...,k. La probabilidad Q_A definida sobre ($\Omega(A)$, F_A), admite la siguiente interpretación:

$$Q_A(A^g) = Q\left(A^g \middle| A\right), \text{ para } g = 1, 2, \ldots, \nu(A).$$

Demostración del lema III.1:

Sea $A \in P_t$, por lo que $A^g \in P_{t+1}$. Desarrollamos la probabilidad condicionada que aparece en el Lema del siguiente modo:

$$Q\left(A^g \middle| A\right) = \frac{Q\left(A^g \cap A\right)}{Q(A)} = \frac{Q\left(A^g\right)}{Q(A)} = \frac{\sum_{\forall j/\omega_j \in A^g} \prod_{s=0}^{T-1} Q_{A_s(\omega_j)}\left[A_{s+1}(\omega_j)\right]}{\sum_{\forall j/\omega_j \in A} \prod_{s=0}^{T-1} Q_{A_s(\omega_j)}\left[A_{s+1}(\omega_j)\right]}$$

Seguimos ahora el mismo razonamiento utilizado en la primera parte de la demostración del Teorema, y expresamos la probabilidad en la siguiente forma:

$$Q\left(A^g \middle| A\right) = \frac{\prod_{s=0}^{t} Q_{A_s(A^g)}\left[A_{s+1}\left(A^g\right)\right]}{\prod_{s=0}^{t-1} Q_{A_s(A)}\left[A_{s+1}(A)\right]}$$

Observando que el predecesor de A^g en el momento t+1, $A_{t+1}(A^g)$ es el propio A^g, y que para todo $s \leq t$, $A_s(A^g) = A_s(A)$, podemos escribir:

$$Q\left(A^g \middle| A\right) = \frac{Q_{A_t(A^g)}\left(A^g\right) \prod_{s=0}^{t-1} Q_{A_s(A)}\left[A_{s+1}(A)\right]}{\prod_{s=0}^{t-1} Q_{A_s(A)}\left[A_{s+1}(A)\right]} = Q_{A_t}\left(A^g\right)$$

Pero $A_t(A^g) = A$, por lo que queda demostrado el lema.

Continuando con la demostración del Teorema, observamos que la función de probabilidad Q será una medida de probabilidad neutral al riesgo, si verifica la siguiente igualdad:

$$E_Q\left[S_t^i \middle| F_s\right] = S_s^i \text{ para } s \leq t, \text{ para todo } i = 0,1,\ldots, m-1$$

Como se indicó en la definición de martingala, aplicando la propiedad de las esperanzas iteradas, es inmediato demostrar que esta igualdad se verificará si y sólo si se verifica la siguiente igualdad:

$$E_Q\left[S_{t+1}^i \middle| F_t\right] = S_t^i \text{ para } t = 0, 1,\ldots, T-1, \text{ para todo } i = 0,1,\ldots, m-1$$

A su vez, esto será cierto siempre que para todo $A \in P_t$ se de la siguiente igualdad:

$$E_Q\left[S^i_{t+1} \middle| A\right] = S^i_t(A) \text{ para } t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1, \text{ para todo } i = 0, 1, \ldots, m\text{-}1$$

Pero, desarrollando esta esperanza matemática tenemos:

$$E_Q\left[S^i_{t+1} \middle| A\right] = S^i_{t+1}(A^1) \,.\, Q\left(A^1 \middle| A\right) + S^i_{t+1}(A^2) \,.\, Q\left(A^2 \middle| A\right) + \ldots + S^i_{t+1}(A^{v(A)}) \,.\, Q\left(A^{v(A)} \middle| A\right)$$

Utilizando el lema III.1, esta expresión se puede escribir del siguiente modo:

$$E_Q\left[S^i_{t+1} \middle| A\right] = S^i_{t+1}(A^1) \,.\, Q_A(A^1) + S^i_{t+1}(A^2) \,.\, Q_A(A^2) + \ldots + S^i_{t+1}(A^{v(A)}) \,.\, Q_A(A^{v(A)})$$

La expresión obtenida es la esperanza matemática de S^i_{t+1}, bajo la medida de probabilidad Q_A. Pero puesto que Q_A es, por definición, la medida de probabilidad neutral al riesgo del modelo uniperiódico derivado de A, se sigue el resultado esperado:

$$E_Q\left[S^i_{t+1} \middle| A\right] = E_{Q_A}\left[S^i_{t+1}\right] = S^i_t(A)$$

para t = 0, 1,..., T-1, para todo i = 0,1,..., m-1.

Con este resultado queda demostrado que $Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right]$ define una medida de probabilidad neutral al riesgo sobre (Ω, F), equivalente a P.

Con ello se demuestra que la ausencia de oportunidades de arbitraje implica la existencia de tal medida de probabilidad. Puesto que la implicación inversa se había demostrado anteriormente, queda completamente demostrado el Teorema.

2.4. Mercados completos

2.4.1. Caracterización de un mercado completo

Se dice que una estrategia θ replica un flujo f_t, medible respecto de F_t, para cierto valor de t = 1, ..., T, si verifica que $V_t(\theta) = f_t$ para todos los estados de la naturaleza.

Definición (mercado completo)

Se dice que un mercado es completo si, para todo valor de t = 1, ..., T, es posible construir una estrategia de activos negociados en dicho mercado que replique cualquier flujo f_t, medible respecto de F_t.

La descripción del proceso de replicación, se basa en la descomposición del modelo en modelos uniperiódicos. Así, para replicar un flujo definido en el momento t = 1, f_1, medible respecto de F_1, basta resolver el problema de replicación para el único modelo uniperiódico definido en el primer periodo, generado por Ω, con sucesores inmediatos $\Omega^1, \Omega^2, \ldots, \Omega^{\langle P_1 \rangle}$. El problema puede resolverse para un flujo cualquiera si y sólo si este modelo de mercado de un periodo es completo.

Para replicar un flujo definido en el momento t = 2, f_2, medible respecto de F_2, son necesarios dos pasos. En primer lugar, se trabaja con los mercados uniperiódicos que se definen en el segundo periodo. El flujo f_2 podrá representarse como un vector con $\langle P_2 \rangle$ componentes, y cada una indicará el valor del flujo f_2 si se presenta el correspondiente suceso de F_2. Este vector f_2 se descompondrá en $\langle P_1 \rangle$

vectores, que recogerán las componentes asociadas a sucesos con un mismo predecesor.

El primero de estos vectores será el vector de flujos a replicar por el mercado generado por Ω^1. Se podrá encontrar una cartera replicante en este mercado de un periodo para un flujo cualquiera si es completo. Si se puede encontrar una cartera replicante, se determinará su valor en Ω^1.

Análogamente obtendríamos el valor de las restantes carteras replicantes de los mercados generados por $\Omega^2, \ldots, \Omega^{\langle P_1 \rangle}$. Este conjunto de valores representa el flujo de caja que debe tenerse en el momento t=1, para poder obtener el flujo f_2 en el momento $t = 2$. El problema se reduce a la replicación de un flujo definido en $t = 1$.

El proceso sería análogo para flujos definidos en los momentos sucesivos, hasta los definidos en el momento final T y sería posible replicar cualquier flujo del mercado de varios periodos si y sólo si los mercados uniperiódicos derivados del general son completos.

Podemos enunciar una condición para que un mercado de varios periodos sea completo, que se deriva directamente de la condición enunciada para modelos de un periodo. Así, un mercado sin oportunidades de arbitraje será completo si todos los mercados uniperiódicos derivados del mismo son completos. De ahí, un mercado de varios periodos es completo si se negocia en él un número de activos con vectores de pagos linealmente independientes igual al máximo valor de $\nu(A)$, y será incompleto si existen menos activos con vectores de precios linealmente independientes.

El planteamiento de un modelo con varios periodos puede interpretarse como la incorporación de la posibilidad de negociación entre el momento inicial y final. Obsérvese cómo la posibilidad de replicación aumenta al incluir esta posibilidad de negociación intermedia. Si no existiera, para tener un mercado completo, sería necesario un número de activos con precios linealmente independientes igual al número de estados de la naturaleza; mientras que si existe, basta con un número de activos igual al máximo valor de v(A).

Proposición III.3

En un modelo de varios periodos, sobre mercado completo con k estados de la naturaleza, libre de arbitraje, existe una y sólo una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Demostración:

El Teorema 6 afirma que la ausencia de oportunidades de arbitraje garantiza la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo. Esta medida de probabilidad puede obtenerse a partir de las probabilidades neutrales al riesgo de los modelos uniperiódicos derivados del mercado global, del siguiente modo:

$$Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right]$$

Por lo tanto, sólo es necesario demostrar la unicidad de dicha medida. Para ello, nos basaremos en el lema que se plantea a continuación.

Lema III.2

Sea Q una medida de probabilidad neutral al riesgo cualquiera, definida sobre (Ω, F). La probabilidad $Q\left(A^g \middle| A\right)$, para g = 1, 2, ..., v(A), $A \in F_t$, $A^g \in F_{t+1}$, t = 0, 1, ..., T-1, define una medida de probabilidad neutral al riesgo en el mercado uniperiódico derivado del general, engendrado por A.

Demostración del lema III.2:

En primer lugar es inmediato observar que, por el concepto de probabilidad condicionada, $Q\left(A^g \middle| A\right)$, para g = 1, 2, ..., ν(A), $A \in F_t$, $A^g \in F_{t+1}$, define una medida de probabilidad P'_A sobre (Ω(A), F_A).

La demostración de que dicha medida de probabilidad es neutral al riesgo es también trivial. De acuerdo con la definición de la medida P'_A, se verifica:

$$E_{P'_A}\left[S^i_{t+1}\left(A^g\right)\right] = E_Q\left[S^i_{t+1}\left(\omega_j\right)\middle| A\right], \text{ para } \omega_j \in A^g, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, m-1$$

Puesto que bajo la medida de probabilidad Q, los precios de los activos descontados son martingalas, esta esperanza es $S^i_t\left(\omega_j\right)$, para $\omega_j \in A$, esto es el precio inicial descontado del activo i en el mercado uniperiódico engendrado por A. La medida de probabilidad P'_A es neutral al riesgo y el lema queda demostrado.

La demostración de la proposición III.3 se puede completar por reducción al absurdo. Supongamos que en un mercado de varios periodos completo existieran dos medidas de probabilidad neutrales al riesgo, $Q^{(1)}$ y $Q^{(2)}$. Entonces, necesariamente, existe $A \in F_t$, para algún valor de t = 0, 1, ..., T-1, para el cual se verifique:

$$Q^{(1)}\left(A^g \middle| A\right) \neq Q^{(2)}\left(A^g \middle| A\right) \text{ , para } g = 1, 2, \ldots, \nu(A),\ A \in F_t,\ A^g \in F_{t+1}$$

Pero, por el lema III.2., esta diferencia implica la existencia de dos medidas de probabilidad neutrales al riesgo en el mercado uniperiódico engendrado por A; implica, por tanto, que dicho mercado no es completo y consecuentemente no lo es el mercado de varios periodos definido. Se contradice así nuestra hipótesis inicial y queda demostrada la proposición.

2.4.2. Valoración en un mercado completo con inversor pasivo

Sea el mercado M*, definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al flujo f_t, para un valor de t = 1, 2, ..., T. El objetivo es encontrar el valor de mercado para dicho activo. Se resolverá primero el problema para el caso particular t = T y, posteriormente para valores de t anteriores al final. Antes de plantear las proposiciones que corresponden a estos casos, es necesario introducir una matización al concepto de valor de mercado de un intercambio, que surge al trabajar con modelos de varios periodos.

En un modelo de varios periodos, la ausencia de oportunidades de arbitraje quedará garantizada cuando lo esté en cada modelo uniperiódico derivado. Por esta razón, para garantizar que la negociación de un nuevo activo no incorpora oportunidades de arbitraje a un mercado, no basta fijar su precio en el momento inicial; sería necesario fijar su precio al comienzo de cada modelo uniperiódico, esto es, la trayectoria de su precio desde el momento inicial hasta el momento t = T-1 para cada estado de la naturaleza. Para cada momento t, este precio será una variable aleatoria medible respecto de la filtración del inversor.

Si el mercado es completo, cada modelo uniperiódico es completo, y se obtendrá un único proceso de precios que garantice la ausencia de oportunidades de arbitraje. El valor de mercado del flujo en t = 0, no es el precio inicial que garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje, sino el valor inicial de la trayectoria que sí ofrece esta garantía, o el único precio con el que es posible que no existan oportunidades de arbitraje. La interpretación es análoga para el valor de mercado, en un momento t > 0, de un flujo que se obtiene en un momento posterior a t.

El valor de mercado en el momento inicial del flujo f_T, es el precio inicial de un activo ficticio, S_0^f, tal que existe un proceso de precios $S^f = \{ S_t^f \}_{t=0,1,\dots,T}$, con valor inicial S_0^f, valor final $S_T^f = f_T$ y tal que el mercado M* no contiene oportunidades de arbitraje.

Puesto que el mercado M es completo, existe en él una única medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P, que representamos por Q.

Proposición III.4

Es posible encontrar un proceso de precios para el activo ficticio, $\{S_t^f\}_{t=0,1,\dots T}$ con $S_T^f = f_T$ y S_0^f dados, tal que M* no contenga oportunidades de arbitraje si y sólo si

$$S_0^f = \frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}$$

donde Q es la única medida de probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

Demostración:

Supongamos, en primer lugar, que $S_0^f \neq \frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}$, y demostraremos que en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje. Puesto que el mercado M es completo, el flujo f_T es alcanzable; lo que quiere decir que existirá en M una estrategia, θ, cuyo valor final coincida con f_T. Puesto que Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo del mercado M, el valor descontado de la estrategia θ será una martingala bajo dicha medida de probabilidad. Esto es,

$$V_0(\theta) = \frac{E_Q[V_T(\theta)]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}$$

Pero, puesto que $V_T(\theta) = f_T$, el valor inicial de la estrategia debe ser $\frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}$. Por tanto, el supuesto inicial significa que el activo ficticio y la cartera replicante tienen distinto valor actual, esto es, $S_0^f \neq V_0(\theta)$.

Si $S_0^f > V_0(\theta)$, puede construirse una oportunidad de arbitraje tipo II, adquiriendo la cartera θ y tomando una posición corta en el activo ficticio. Efectivamente se tiene un coste inicial negativo y un pago final nulo; y la existencia de oportunidades de arbitraje tipo II implica la existencia de oportunidades de arbitraje tipo I. Si $S_0^f < V_0(\theta)$, el razonamiento sería análogo adquiriendo una unidad del activo ficticio y la estrategia $-\theta$. Queda así demostrado que la ausencia de oportunidades de arbitraje en M* implica que $S_0^f = \frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}$.

Demostremos ahora la otra implicación. Supongamos que $S_0^f = \frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}$.

Puede definirse entonces un proceso de precios para el activo que da lugar al pago f_T, que verifica todas las exigencias de la proposición III.4:

$$S_t^f = \frac{E_Q[f_T / F_t]}{\prod_{s=t+1}^{T}(1+r_s)} \quad \text{para } t = 0, 1, \ldots, T$$

Es inmediato que el valor inicial y el final son los predeterminados. Comprobaremos que, además, si el activo ficticio sigue este proceso de precio, Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P, para el mercado M*.

Por construcción, sabemos que Q es una medida de probabilidad equivalente a P, y neutral al riesgo para el mercado M, luego bajo dicha probabilidad los precios descontados de los activos con índice i = 0, 1, ..., m-1, son martingalas. Faltaría únicamente probar que el proceso de precios propuesto para el activo ficticio, descontado, es también una martingala bajo Q.

Aplicando la propiedad de las esperanzas iteradas, alcanzamos este resultado:

$$E_Q\left[S^f_{t+1} / F_t\right] = \frac{E_Q\left[S^f_{t+1} / F_t\right]}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+r_s)} = \frac{E_Q\left[E_Q\left[f_T / F_{t+1}\right] / F_t\right]}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+r_s).\prod_{s=t+2}^{T}(1+r_s)} = \frac{E_Q\left[f_T / F_t\right]}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+r_s).\prod_{s=t+2}^{T}(1+r_s)} =$$

$$= \frac{S^f_t.\prod_{s=t+1}^{T}(1+r_s)}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+r_s).\prod_{s=t+2}^{T}(1+r_s)} = \frac{S^f_t}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)} = S^f_t$$

Queda así demostrado que, si el activo ficticio sigue este proceso de precio, Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P, para el mercado M*. Por el teorema 6, sabemos que entonces M* no contiene oportunidades de arbitraje y queda completamente demostrada la Proposición.

A continuación se plantea el resultado análogo para el precio de un activo que de derecho a un flujo f_h, en el momento $h \leq T$.

Teorema 7

Es posible encontrar un proceso de precios para el activo ficticio, $\{S_t^f\}_{t=0,1,\ldots h}$, con $S_h^f = f_h$ y S_0^f dados, h = 1, 2, ..., T; tal que M* no contenga oportunidades de arbitraje si y sólo si

$$S_0^f = \frac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)},$$

donde Q es la única medida de probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

La demostración del teorema es análoga a la de la proposición anterior.

Por la linealidad en la valoración que se deriva de la ausencia de oportunidades de arbitraje (Teorema 2), el valor del intercambio de un proyecto de inversión definido por el intercambio de los flujos de caja (f_t , t), para t =0, 1,..., T, donde f_t es una variable aleatoria medible respecto de F_t, se obtendrá sumando a f_0 el precio de un activo que diese derecho al capital (f_1,1) y así sucesivamente hasta el precio de un activo que diese derecho al capital (f_T,T):

$$VI_0(f_0, f_1, \ldots, f_T) = f_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{E_Q[f_t]}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)}$$

donde Q es la única medida de probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

Igual que en el modelo uniperiódico, el problema de calcular el "valor de la oportunidad de invertir" con inversor pasivo en un mercado completo está resuelto. Dado un proyecto definido por el intercambio de los flujos (f_t , t), para t =0, 1,..., T, con f_t medible respecto de F_t, el valor de la oportunidad de invertir en él será:

$$Vop_0(f_0, f_1, \ldots, f_T) = \left(f_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{E_Q[f_t]}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)} \right)^+$$

2.4.3. Valoración en un mercado completo con inversor activo

El planteamiento de un modelo con varios periodos puede interpretarse como la incorporación de la posibilidad de negociación entre el momento inicial y final, y ya se ha observado una primera consecuencia en la condición de mercado completo. Una segunda consecuencia es la consideración de la evolución de la información entre el origen y el final. Contemplar la evolución de la información permite dos extensiones en el análisis de los procesos de inversión. En primer lugar la incorporación de la "actividad del inversor" o, dicho de otra manera, la aparición de opciones reales. En segundo lugar, permite el estudio de la evolución del valor de los flujos, y del valor de las opciones reales para cada concreción del entorno.

Respecto del valor de los flujos en distintos momentos del tiempo podemos plantear un resultado, análogo al de la proposición III.4 y el teorema 7. Este resultado, que se presenta a continuación, se refiere al precio que debe tener, en un momento del tiempo τ, un activo que de derecho a recibir un flujo f_h en algún momento $h > \tau$. Sea M* el mercado definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al pago f_h en el momento $t = h$.

Proposición III.5

Es posible encontrar un proceso de precios para el activo ficticio, $\{S_t^f\}_{t=0,1,\dots h}$, con $S_h^f = f_h$ y S_τ^f dados, h = 1, 2, ..., T; tal que M* no contenga oportunidades de arbitraje si y sólo si

$$S_\tau^f = \frac{E_Q[f_h / F_\tau]}{\prod_{s=\tau+1}^{h}(1+r_s)}$$

donde Q es la única medida de probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

Demostración:

Se demostrará, en primer lugar, que si el precio no es el indicado, en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje. Para ello, basta observar que, puesto que el mercado M es completo, el flujo f_h será replicado por alguna cartera θ.

Sea S_t^f el precio en M*, en el momento t, del activo ficticio que da lugar al pago f_h en el momento h; y sea θ una estrategia de M que lo replica. Se utiliza de nuevo el resultado que indica que, por ser los precios descontados una martingala bajo Q, el valor descontado de la estrategia es también una martingala. Verificará entonces:

$$\frac{V_\tau(\theta)}{\prod_{s=1}^{\tau}(1+r_s)} = \frac{E_Q[V_h(\theta)/F_\tau]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)} = \frac{E_Q[f_h/F_\tau]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)}$$

de donde,

$$V_\tau(\theta) = \frac{E_Q[f_h/F_\tau]}{\prod_{s=\tau+1}^{h}(1+r_s)}$$

El valor en τ obtenido es el precio propuesto para el activo ficticio en la proposición. Obsérvese que este precio es una variable aleatoria medible respecto de F_τ, y podrá representarse como un vector con $\langle P_\tau \rangle$ componentes.

Ya se ha observado en varias ocasiones que, si el valor inicial de la cartera replicante no coincide con el precio del activo ficticio, en el mercado M aparecen oportunidades de arbitraje. Veremos ahora que esta afirmación se puede realizar también si la falta de coincidencia se produce en otro momento. Probamos a continuación que, si en el momento τ el precio del activo ficticio, S^f_τ, no coincide con el de la cartera replicante, $V_\tau(\theta)$, en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje.

Supongamos que para algún suceso $A \in F_\tau$, $V_\tau(\theta) < S^f_\tau$. Entonces debe construirse la siguiente estrategia en M*. Desde el momento inicial hasta el momento τ no se realiza operación alguna. Si el suceso A no se presenta, se mantendrá la estrategia consistente en no hacer nada. Si se presenta el suceso A, en el momento τ se cambiará la composición de la estrategia de modo autofinanciado, del modo siguiente: se compran las unidades de cada activo indicadas por θ, se vende al descubierto una unidad del activo ficticio, y se adquieren las unidades necesarias de activo sin riesgo para conseguir coste nulo: $\dfrac{S^f_\tau - V_0(\theta)}{S^\theta_\tau}$.

En el momento final, sólo se recibirá el pago que corresponde al activo sin riesgo, puesto que la combinación de θ y la venta al descubierto de una unidad del activo ficticio da lugar a un pago nulo.

Con un coste nulo se ha obtenido una cartera que da lugar a pagos no negativos en todos los estados de la naturaleza, y estrictamente positivos en alguno de ellos, por lo que constituye una oportunidad de arbitraje de tipo I. Podría conseguirse también si para algún suceso $A \in F_\tau$, $V_\tau(\theta) > S^f_\tau$, con la estrategia de signo contrario.

La implicación inversa de la proposición se demuestra igual que la de la proposición III.4. Si $S_\tau^f = \dfrac{E_Q[f_h / F_\tau]}{\prod_{s=\tau+1}^{h}(1+r_s)}$ es posible definir un proceso de precio para el activo ficticio, tal que M* no contiene oportunidades de arbitraje. Dicho proceso se define del siguiente modo:

$$S_t^f = \frac{E_Q[f_T / F_t]}{\prod_{s=t+1}^{T}(1+r_s)} \text{ para } t = 0, 1, \ldots, T$$

Es inmediato observar que el precio toma los valores fijados en los momentos t = h, y t = τ. Además, se comprueba, aplicando la propiedad de las esperanzas iteradas[39], que si el activo ficticio sigue este proceso de precios, Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P, para el mercado M*. Por el teorema 6, se concluye que M* no contiene oportunidades de arbitraje y queda completamente demostrada la Proposición.

Obtenido el valor que debe tener un flujo en τ, es inmediata la obtención del valor en τ de un intercambio de flujos. Este será una variable aleatoria, medible respecto de F_τ. Para obtenerlo, basta aplicar el Teorema 2 a cada suceso de P_τ. Podemos escribir:

$$VI_\tau(f_h, f_{h+1}, \ldots, f_T) = \frac{E_Q[f_h / F_\tau]}{\prod_{s=\tau+1}^{h}(1+r_s)} + \frac{E_Q[f_{h+1} / F_\tau]}{\prod_{s=\tau+1}^{h+1}(1+r_s)} + \ldots + \frac{E_Q[f_T / F_\tau]}{\prod_{s=\tau+1}^{T}(1+r_s)}$$

[39] No se desarrolla esta parte de la demostración, porque ya se ha hecho en la proposición anterior.

Puesto que los tipos de interés son ciertos, y teniendo en cuenta las propiedades de la esperanza condicionada, el valor del intercambio sería la siguiente variable aleatoria:

$$VI_\tau(f_h, f_{h+1}, \ldots, f_T) = E_Q\left[\frac{f_h}{\prod_{s=\tau+1}^{h}(1+r_s)} + \frac{f_{h+1}}{\prod_{s=\tau+1}^{h+1}(1+r_s)} + \ldots + \frac{f_T}{\prod_{s=\tau+1}^{T}(1+r_s)} \,\middle|\, F_\tau \right]$$

Nótese que si el valor del intercambio se está observando en el momento τ o en algún momento posterior, se pierde el carácter de variable aleatoria. El valor es el que la variable asigna al suceso que, de hecho, se ha presentado.

Vista la valoración de flujos en distintos momentos del tiempo, se plantea el problema de valorar opciones reales. Se tratarán en primer lugar las opciones de intercambio de flujos, esto es, de posibles actuaciones del inversor que le conducen a la obtención de un conjunto de flujos. Se comenzará por calcular el valor de la opción en el momento en que puede ser ejercitada. Este tipo de valoración ya se ha venido realizando cada vez que se ha calculado el valor de la oportunidad de invertir.

Si una opción puede ser ejercitada en el momento h, se tomará la decisión con la información que contiene F_h. La decisión se toma en un suceso concreto de F_h que, de hecho, se ha presentado. Siguiendo el criterio de decisión marcado en el capítulo I, deberá ejercitarse la opción si el valor del intercambio a que da derecho es mayor que cero. El valor de la opción, para cada suceso de P_h, se calcula como el máximo entre cero y el valor del intercambio en ese suceso, siempre que no existan oportunidades excluyentes.

Utilizando una notación análoga a la usada hasta ahora, se representará por $Vop_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T)$, el valor en unidades monetarias, en t = h, de la oportunidad, en t = h, de desarrollar una actuación que conduce a obtener los flujos $f_h, f_{h+1}, ..., f_T$. Se representará por $\mathit{Vop}_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T)$, si está descontado, es decir, medido en unidades de activo sin riesgo. Tal valor será la variable aleatoria que, para cada suceso de P_h, toma el valor:

$$Vop_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T) = \max \{ VI_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T) , 0\} = (VI_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T))^+$$

siempre que no existan oportunidades excluyentes, puesto que si fuera así, el valor sería el máximo entre cero, y el mayor valor de intercambio de las distintas opciones.

De acuerdo con su definición, este valor debe ser una variable aleatoria medible respecto de F_h, y podrá representarse por un vector con $\langle P_h \rangle$ componentes. Sin embargo, si el valor Vop_h se considera en el momento h o en algún momento posterior, habrá perdido su carácter aleatorio y tomará un valor real (el que corresponda al suceso de P_h que, de hecho, se haya presentado). Obsérvese cómo este planteamiento incluye como caso particular el valor de la oportunidad de invertir definido hasta el momento, como $Vop_{h=0}$; y no se ha considerado su carácter aleatorio porque en el momento inicial se ha supuesto $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Con los resultados obtenidos para modelos de mercados completos de varios periodos, siempre es posible calcular el valor en t = h de una oportunidad cualquiera que pueda ejercitarse en h, puesto que siempre es posible calcular el valor del intercambio correspondiente.

El resultado obtenido es equivalente al cálculo del valor de la oportunidad de invertir en el origen. Para observarlo, se consideran $\langle P_h \rangle$ mercados derivados del mercado completo. Cada uno de estos mercados es un mercado de T-h periodos, generado por cada uno de los elementos de P_h. Nos referiremos a ellos como conjunto de mercados derivados definidos entre los momentos h y T. Se sabe que la ausencia de oportunidades de arbitraje en el modelo general implica la ausencia de oportunidades de arbitraje en cualquier modelo derivado. Por lo tanto el valor de una oportunidad disponible en el momento h, para cada suceso $A \in P_h$, coincide con el valor de la oportunidad de invertir inicial del modelo derivado generado por el suceso A y definido entre los momentos h y T.

A cada uno de estos modelos podemos aplicarle los resultados obtenidos para mercados completos de varios periodos sin oportunidades de arbitraje y, de forma directa podemos definir en ellos una única medida de probabilidad neutral al riesgo. La medida de probabilidad neutral al riesgo correspondiente al modelo derivado generado por el suceso $A \in P_h$, y definido entre los momentos h y T, sería precisamente:

$$Q(\omega_j / A), \text{ para todo } \omega_j, j=1,..,k, \text{ tal que } A_h(\omega_j) = A$$

La demostración de que esta medida constituye una medida de probabilidad neutral al riesgo sobre el mercado, y existe si y sólo si en el mercado no hay oportunidades de arbitraje, sigue los mismos pasos que la demostración del Teorema 6. La demostración de que, si el mercado considerado es completo, la medida de probabilidad planteada es única seguiría el mismo procedimiento que la demostración de la Proposición III.3.

El cálculo del valor de una oportunidad en el momento h, que proporciona al inversor los flujos f_t, f_t medible respecto de F_t, para t = h, h+1, ..., T, queda reducido al cálculo, para los mercados generados por cada suceso $A \in P_h$, del valor de la oportunidad de invertir en el origen del mercado correspondiente.

Resuelto el problema de calcular el valor de una oportunidad de intercambio en el momento en que puede ser ejercitada, es necesario calcular su valor en otro momento. Sea el mercado M*, definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho a la oportunidad $op_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T)$. El precio que tendría tal activo en el momento h, para que en M* no existieran oportunidades de arbitraje, sería:

$$S_h^f = Vop_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T).$$

y su precio descontado:

$$\mathit{S}_h^f = \mathit{Vop}_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T).$$

Se pretende ahora encontrar el precio que debería tener tal activo ficticio en un momento del tiempo $\tau \leq h$. Los fundamentos teóricos para la valoración ya están expuestos. Podemos resumir, indicando que se sigue de todo lo anterior que el precio descontado de tal activo ficticio debe ser una martingala bajo la única medida de probabilidad neutral al riesgo del mercado M. El valor descontado de la opción será:

$$\mathit{V}_\tau(\, op_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T)\,) = E_Q\,[\mathit{Vop}_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T) \,/\, F_\tau]$$

y su valor en unidades monetarias:

$$V_\tau(\, op_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T)\,) = E_Q\,[\mathit{Vop}_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T) \,/\, F_\tau].\prod_{s=1}^{\tau}(1 + r_s) =$$

$$= \frac{E_Q\left[Vop_h(f_h, f_{h+1}, ..., f_T) / F_\tau\right]}{\prod_{s=\tau+1}^{h}(1 + r_s)}$$

El valor de la flexibilidad aportado por la opción es la diferencia entre el valor de dicha opción y el valor del intercambio entre los flujos a que da derecho en caso de ejercitarla:

$$V_\tau(\, op_h(f_h, f_{h+1}, \ldots, f_T)\,) - VI_\tau(f_h, f_{h+1}, \ldots, f_T)$$

El valor de flexibilidad aparece porque los flujos que finalmente se obtienen en caso de poseer la opción no son $f_h, f_{h+1}, \ldots, f_T$; coinciden con estos flujos para aquellos estados que dan lugar a un valor de la opción positivo en el momento de su ejercicio, y serán cero en otro caso. Esta diferencia será siempre positiva, o nula en el caso de que en cualquier suceso de P_h fuese conveniente ejercitar la opción.

Para valorar una oportunidad de una actuación que da derecho a un intercambio entre flujos y nuevas oportunidades de intercambio, trabajamos de modo análogo. Calcularemos primero su valor en el momento de ejercicio, $t = h$. El valor del intercambio se obtendrá (Teorema 2) sumando los valores de mercado en h, de los flujos y de las oportunidades de intercambio. Estos valores se obtienen tal y como se ha realizado hasta ahora. El valor del intercambio es una variable aleatoria medible respecto de F_h. El valor en $t = h$ de la oportunidad se obtiene calculando el máximo, para cada suceso de P_h, entre cero y el valor de intercambio en ese suceso, siempre que no existan oportunidades excluyentes. Recuérdese que, puesto que la oportunidad de ejercicio está en el momento h, la decisión de ejercitar se tomará conociendo qué suceso se ha presentado.

El valor de la oportunidad en un momento $t = \tau$, distinto al momento de ejercicio, $t = h$, se calculará a partir de su valor en h, tal y como se ha desarrollado para las opciones de intercambio.

Con estos resultados, por un procedimiento de recurrencia es posible valorar cualquier oportunidad que de derecho a intercambios de flujos y nuevas oportunidades en cualquier momento del tiempo, siempre que no existan oportunidades excluyentes. Son ejemplos de oportunidades u opciones reales la posibilidad de ampliar instalaciones o la posibilidad de reducir capacidad.[40]

Si el inversor dispone de oportunidades excluyentes que se ejercitarían en el mismo momento del tiempo $t = h$, el problema no es mayor. La decisión se tomaría con la información de F_h, cuando se sabe qué suceso de P_h se ha presentado. Conocido el suceso, debería seleccionar aquella oportunidad que tenga mayor valor, siempre que este sea positivo. Si ninguna tuviese valor positivo, no seguiría ninguna.

El valor en $t = h$ del conjunto de las oportunidades será una variable aleatoria, medible respecto de F_h cuyo valor, en cada suceso de P_h, es el de la oportunidad con máximo valor positivo, o cero, si ninguna tuviera valor positivo.

El valor de una oportunidad, en presencia de todas las demás, será la diferencia entre el valor del conjunto de todas las oportunidades, y el valor del conjunto del resto de las oportunidades. Una forma alternativa de calcularlo es tomar, para los sucesos en que el máximo se alcanza para esa oportunidad, tal valor, y cero en el resto. El valor de un subconjunto del total de las oportunidades podría calcularse de forma análoga.

[40] Puede encontrarse una breve y excelente explicación de las opciones reales más frecuentes en Trigeorgis (1996), pags. 2- 3. A cada opción acompañan referencias bibliográficas sobre su valoración.

Calculado el valor de una opción en el momento del posible ejercicio, $t = h$, para calcular el valor en un momento anterior, $t = \tau$, se utiliza el procedimiento ya visto para el resto de las opciones. Recuérdese que se está trabajando con un mercado de referencia, M, completo, por lo que en él existe una única medida de probabilidad neutral al riesgo, Q. En el mercado ampliado, M*, no existirán oportunidades de arbitraje, si los procesos de precios descontados de los activos son martingalas bajo la probabilidad Q.

Si existen oportunidades excluyentes con distintas fechas de ejercicio, resolviendo los conflictos entre opciones con la misma fecha de ejercicio, el problema siempre puede reducirse a la selección del mejor momento de ejercicio para una opción dada.[41] El problema añadido es el de la evolución de la información entre las distintas decisiones. El ejemplo más claro, ya citado, es el de la selección del momento de invertir. En cada periodo habría que tomar la decisión de ejercer la opción (por ejemplo, invertir), con lo que desaparecería la opción alternativa (no invertir, que permite tomar la decisión de invertir después); o de no ejercer la opción (no invertir) con lo que se pierde la opción de invertir en ese momento. Otro ejemplo sería el de interrumpir un proyecto o no interrumpirlo.

Aún en este caso, el proceso se puede reducir a la elección entre alternativas en el mismo momento si se incluye en una de las alternativas el valor de las oportunidades futuras. Si una opción se puede ejercer por primera vez en τ, pero fuera posible esperar a $\tau+1,\ldots, h$; el valor de la opción en ese momento sería:

$$Vop_{\tau}\text{ (opción)} = \max \{ Vop_{\tau}(\text{ejercer en } \tau), Vop_{\tau}(\text{no ejercer en } \tau) \}$$

[41] En la terminología de valoración de opciones financieras, es el problema de valoración de una opción americana.

Donde,

Vop_τ(ejercer en τ) = max { 0, VI_τ(flujos y oportunidades si ejerce en τ) }

Vop_τ(no ejercer en τ)= max{$V_\tau[op_{\tau+1}$(ejercer en $\tau+1$)] , $V_\tau[op_{\tau+1}$(no ejercer en $\tau+1$)]}

El cálculo de los valores se realiza en el modo ya analizado:

VI_τ(flujos y oportunidades si ejerce en τ) =

= E_Q[flujos y oportunidades si se ejerce en τ, descontados / F_τ]

$V_\tau[op_{\tau+1}$(ejercer en $\tau+1$)] = E_Q [$Vop_{\tau+1}$(ejercer en $\tau+1$) / F_τ] =

= E_Q [flujos y oportunidades si se ejerce en $\tau+1$, descontados / F_τ]]

$V_\tau[op_{\tau+1}$(no ejercer en $\tau+1$)] = E_Q [$Vop_{\tau+1}$(no ejercer en $\tau+1$) / F_τ] =

=E_Q [max{ $V_{\tau+1}[op_{\tau+2}$(ejercer en $\tau+2$)], $V_{\tau+1}[op_{\tau+2}$(no ejercer en $\tau+2$)]}/F_τ]

Obsérvese que las variables entre las que se elige el máximo:

$V_{\tau+1}[op_{\tau+2}$(ejercer en $\tau+2$)] = E_Q [$Vop_{\tau+2}$(ejercer en $\tau+2$) /$F_{\tau+1}$]

$V_{\tau+1}[op_{\tau+2}$(ejercer en $\tau+2$)] = E_Q [$Vop_{\tau+2}$(no ejercer en $\tau+2$) /$F_{\tau+1}$]

son variables aleatorias medibles respecto de $F_{\tau+1}$. Puesto que la decisión entre ellas, se tomará en $\tau+1$, debe elegirse el máximo para cada suceso de $P_{\tau+1}$ y, a continuación tomar la esperanza indicada de los máximos.

Se seguiría el mismo proceso hasta llegar al último momento en que puede ejercerse la opción, t = h.

En el momento t = h-1, se tiene:

$V_\tau[op_{h-1}(\text{ejercer en h-1})] = E_Q\,[Vop_{h-1}(\text{ejercer en h-1}) \,/\, F_\tau] =$

$= E_Q\,[\text{flujos y oportunidades de ejercer en h-1, descontados} \,/\, F_\tau]$

$V_\tau[op_{h-1}(\text{no ejercer en h-1})] = E_Q\,[Vop_{h-1}(\text{no ejercer en h-1}) \,/\, F_\tau] =$

$= E_Q\,[V_{h-1}[op_h(\text{ejercer en h}) \,/\, F_\tau] =$

$= E_Q\,[E_Q\,[Vop_h(\text{ejercer en h})/F_{h-1}] \,/\, F_\tau] = E_Q\,[Vop_h(\text{ejercer en h}) \,/\, F_\tau] =$

$= E_Q\,[\text{flujos y oportunidades de ejercer en h, descontados} \,/\, F_\tau]$

Determinados el valor de la opción de ejercer y de no ejercer en el último periodo, es posible determinarlos anteriores. El cálculo en forma recursiva, para obtener el máximo entre todas las opciones excluyentes es una aplicación del principio de programación dinámica de Bellman.

2.5. Mercados incompletos

2.5.1. Caracterización de un mercado incompleto

Definición (mercado incompleto)

Se dice que un mercado es incompleto si, para t = 1, ..., T, existe algún flujo f_t, medible respecto de F_t, que no es posible replicar con una estrategia de activos negociados en dicho mercado.

La caracterización de los mercados incompletos se deriva de la de mercados completos. Así, un mercado de T periodos es incompleto si y sólo si alguno de los mercados de un periodo derivados del general es incompleto. Por tanto, un mercado será incompleto si existe un suceso $A \in P_t$, para algún valor de $t = 0, 1, ..., T-1$, con un número de sucesores inmediatos, $\nu(A)$, superior al número de activos negociados en el mercado con procesos de precios linealmente independientes.

Se parte del único mercado financiero definido, M, libre de arbitraje, suponiendo ahora que es incompleto. Para el problema de valoración de un flujo distinguiremos, como en los mercados de un periodo, los casos de que el flujo sea replicable o no lo sea. Es necesario tener en cuenta, aquí también, la matización introducida en la valoración en mercados completos de varios periodos: un precio para un activo en un momento dado no puede garantizar la ausencia de oportunidades de arbitraje en un mercado; en cualquier caso, sería necesario fijar un proceso de precios completo.

2.5.2. Valoración de un flujo replicable

Sea el mercado M* definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho a un pago f_h en el momento h. Suponemos que existe una estrategia, θ, de M, cuyo valor en h coincide con f_h, $V_h(\theta) = f_h$.

Teorema 8

Es posible encontrar un proceso de precios para el activo ficticio, $\{S_t^f\}_{t=0,1,\dots h}$, con $S_h^f = f_h$ y S_0^f dados, $h = 1, 2, ..., T$; tal que M* no contenga oportunidades de arbitraje si y sólo si

$$S_0^f = \frac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)},$$

donde Q es cualquier medida probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

Demostración:

Comenzaremos demostrando que si el precio inicial del activo ficticio, S_0^f, no es $\frac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)}$, en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje. La demostración sigue los dos pasos ya habituales.

En primer lugar se observa que, dada una estrategia, θ, en M que replica al activo ficticio, su valor en el momento inicial será:

$$V_0(\theta) = \frac{E_Q[V_h(\theta)]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)} = \frac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)},$$

donde Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo cualquiera. La primera igualdad se debe a que el valor descontado de la estrategia es una martingala bajo Q por ser dicha probabilidad neutral al riesgo en M. La segunda igualdad se debe al concepto de replicación.

En segundo lugar se demuestra que si la estrategia replicante y el activo ficticio no tienen el mismo valor inicial, existirán oportunidades de arbitraje en el mercado M*. Si $V_0(\theta) < S_0^f$, bastaría seguir θ y vender al descubierto una unidad del activo ficticio para tener una oportunidad de arbitraje de tipo II, que implica la existencia de oportunidades de arbitraje de tipo I. Si $V_0(\theta) > S_0^f$, se seguiría la estrategia de signo contrario.

Para demostrar la implicación inversa, se supone que $S_0^f = \frac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)}$, y $S_h^f = f_h$. Entonces se propone un proceso de precios para el activo ficticio, que verifica estas condiciones y garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje en M*. El proceso de precios es el siguiente:

$$S_t^f = \frac{E_Q[f_h / F_t]}{\prod_{s=t+1}^{h}(1+r_s)},$$

donde Q es una probabilidad neutral al riesgo cualquiera de M. Dado el teorema 6, se sabe que entre estas probabilidades existe alguna equivalente a P, puesto que en M hay ausencia de oportunidades de arbitraje, por hipótesis.

Pero si el proceso de precios es este, cualquier medida Q, neutral al riesgo de M, es una probabilidad neutral al riesgo del mercado M*. Puesto que existe alguna equivalente a P y por el teorema 6, se sabe que en el mercado M* hay ausencia de oportunidades de arbitraje. Queda, así, demostrado el teorema.

Si el mercado es incompleto pero existe posibilidad de replicación de un pago, existirá un valor único para dicho pago en el origen. Es el valor inicial de la trayectoria de precios que garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje, puesto que, en este caso tal trayectoria es también única.

Supongamos un proyecto definido por los flujos de caja (f_t , t), para t =0, 1,..., T, donde f_t es una variable aleatoria medible respecto de F_t. Si es posible encontrar una estrategia que replique cada pago f_t; esto es, una estrategia $\theta^{(t)}$, cuyo valor en el momento t, $V_t(\theta^{(t)})$ coincida con f_t para todos los estados de la naturaleza, el valor del intercambio, en t = 0, de acuerdo con los teoremas 2, y 8, será:

$$VI_0(f_0, f_1,...,f_T) = f_0 + \sum_{t=1}^{T} V_0\left(\theta^{(t)}\right) = f_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{E_Q\left[V_t\left(\theta^{(t)}\right)\right]}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)} = f_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{E_Q[f_t]}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)}$$

para cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo, Q.

El valor de la oportunidad de invertir en ese proyecto será:

$$\mathrm{Vop}_0(f_0, f_1,\ldots,f_T) = \left(f_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{E_Q[f_t]}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)} \right)^+$$

para cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo, Q.

Si el proyecto contiene además de flujos, oportunidades de intercambio, será necesario estudiar si dichas oportunidades son o no replicables. Es necesario replicar el valor de la opción en el momento de su ejercicio, esto es, $\mathrm{Vop}_h(f_h, f_{h+1}, \ldots, f_T)$. Si este valor puede ser replicado por una estrategia del mercado M, su valor descontado en un momento $t = \tau$ será:

$$V_\tau[\mathrm{op}_h(f_h, f_{h+1}, \ldots, f_T)] = \frac{1}{\prod_{s=\tau+1}^{h}(1+r_s)} E_Q[\mathrm{Vop}_h(f_h, f_{h+1}, \ldots, f_T) \,/\, F_\tau\,]$$

para cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo, Q.

Es necesario resaltar que el hecho de que los flujos a que da derecho una oportunidad sean replicables, no implica que lo sea la oportunidad en sí. En algunos casos particulares sí ocurre así. Es por estos casos, por lo que se afirma que la valoración de opciones reales por argumentos de arbitraje está especialmente indicada cuando los proyectos se definen sobre activos que se negocian en mercados financieros.

Si el proyecto incorporase oportunidades que diesen derecho a otras oportunidades y flujos, oportunidades complementarias o excluyentes, el tratamiento sería el mismo al dado en mercado completo, siempre que fueran replicables.

El cálculo del valor de la oportunidad de invertir sería posible siempre que incluyese flujos y oportunidades replicables, del mismo modo que se calculó con mercado completo. Obsérvese que la única diferencia está en que en mercado completo existe una única probabilidad neutral al riesgo, con la que se calculan las esperanzas, mientras que con mercado incompleto existen múltiples, pero puede utilizarse cualquiera de ellas.

Resulta ahora inmediata la demostración de la implicación inversa a la proposición III.1, puesto que si, como se ha supuesto, en el mercado M existe un activo sin riesgo, todos los flujos ciertos son replicables.

2.5.3. Valoración de un flujo no replicable

El único caso en que no es posible asignar un único valor a la oportunidad de invertir en un proyecto, sin incorporar nuevas hipótesis, lo encontraremos cuando éste se defina en función de flujos no replicables. En un análisis paralelo al seguido para los modelos de un periodo, buscaremos la acotación más precisa posible, que mantenga la independencia de las expectativas y de las preferencias del inversor, y garantice la ausencia de oportunidades de arbitraje. Tal y como se ha comentado en los casos anteriores, con modelos de varios periodos, no podemos encontrar valores iniciales que garanticen la ausencia de oportunidades de arbitraje, porque esta garantía exige que se fije la trayectoria completa de los precios.

Sea M* el mercado definido por la incorporación a M de un activo (activo ficticio) que da derecho a un pago final f_T, no replicable, con proceso de precios $\{S_t^f\}_{t=0,1,\ldots T}$, medible respecto de la filtración del inversor.

Teorema 9

Es posible encontrar un proceso de precios para el activo ficticio, $\{S_t^f\}_{t=0,1,\ldots T}$, con $S_T^f = f_T$ y S_0^f dados, tal que M* no contenga oportunidades de arbitraje si y sólo si

$$S_0^f \in (f_T^-, f_T^+) = \left(\min_Q \frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}, \max_Q \frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)} \right),$$

donde Q es una probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

Demostración:

Para la demostración, representaremos por Q* y Q** las medidas de probabilidad en que se alcanzan respectivamente el mínimo y el máximo planteados. Así:

$$f_T^- = \min_Q \frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)} = \frac{E_{Q^*}[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)} = E_{Q^*}[f_T]$$

$$f_T^+ = \max_Q \frac{E_Q[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)} = \frac{E_{Q^{**}}[f_T]}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)} = E_{Q^{**}}[f_T]$$

A continuación se introduce una notación análoga para las probabilidades neutrales al riesgo que consiguen mínimos y máximos en los modelos de un periodo derivados del modelo general.

Comenzamos en el penúltimo periodo. Para todo $A \in P_{T-1}$, llamaremos Q_A a las medidas de probabilidad neutrales al riesgo, definidas en el modelo uniperiódico generado por A. Estas probabilidades están definidas sobre el espacio (Ω_A, F_A), y asignarán probabilidades a los sucesores inmediatos de A.

Sea $Q_A{**}$ la medida de probabilidad para la que se alcanza el valor máximo para la esperanza del flujo f_T, si se presenta el estado A en el momento T-1. Formalmente, $Q_A{**}$ verifica:

$$\sum_{g=1}^{v(A)} f_T(A^g) Q_A{**}(A^g) = \max_{Q_A} \sum_{g=1}^{v(A)} f_T(A^g) Q_A(A^g)$$

Escrito de otro modo, si representamos por:

f_T(sucesores de A),

la variable aleatoria f_T definida solamente para los sucesores inmediatos de A, $Q_A{**}$ se define del siguiente modo:

$$E_{Q_A^{**}}[f_T(\text{sucesores de A})] = \max_{Q_A} E_{Q_A}[f_T(\text{sucesores de A})]$$

Se define la variable aleatoria $E_{Q_{T-1}^{**}}[f_T]$, medible respecto de F_{T-1}, como aquella que toma, para cada $A \in P_{T-1}$, el valor máximo para la esperanza bajo alguna medida de probabilidad neutral al riesgo, del flujo f_T, si se presenta el estado A en el de F_{T-1}:

$$E_{Q_{T-1}^{**}}[f_T](A) = \sum_{g=1}^{v(A)} f_T(A^g) Q_A{**}(A^g) = E_{Q_A^{**}}[f_T(\text{sucesores de A})]$$

Para todo $B \in P_{T-2}$, se llamará $Q_B{**}$ a la medida de probabilidad para la que se alcanza el siguiente máximo:

$$\sum_{g=1}^{v(B)} E_{Q^{**}_{T-1}}[f_T](B^g).\, Q_B{**}(B^g) = \max_{Q_B} \sum_{g=1}^{v(B)} E_{Q^{*}_{T-1}}[f_T](B^g).\, Q_B(B^g)$$

donde Q_B representa una medida de probabilidad neutral al riesgo del modelo de un periodo generado por B.

Podemos escribirlo también:

$$E_{Q^{**}_B}\left[E_{Q^{**}_{T-1}}[f_T](\text{sucesores de B})\right] = \max_{Q_B} E_{Q_B}\left[E_{Q^{**}_{T-1}}[f_T](\text{sucesores de B})\right]$$

Se utilizaría la misma notación, retrocediendo en el tiempo hasta el momento inicial. Obsérvese que los máximos se alcanzarían en el mismo punto si se trabaja con el flujo f_T descontado.

Por aplicación directa del Principio de Optimalidad de Bellman[42], se obtiene:

$$Q^{**}(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-1} Q^{**}_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right], \text{ para todo } j = 1, \ldots, k.$$

Con un planteamiento análogo para el caso de mínimo, se llegaría a:

$$Q^{*}(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-1} Q^{*}_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right], \text{ para todo } j = 1, \ldots, k.$$

[42] Se puede utilizar este principio puesto que la composición de funciones a que se aplica, verifica las condiciones suficientes de Mitten. Ver Prawda (1976), pag. 661.

Resulta cómodo trabajar con una notación que permita relacionar las probabilidades de los modelos de un periodo con las probabilidades del modelo general. Para ello, introducimos la siguiente definición.

Definición (sistema de probabilidades neutrales al riesgo de un mercado)

Dado un modelo de mercado de varios periodos, se denomina sistema de probabilidades neutrales al riesgo del mismo al conjunto formado por una medida de probabilidad neutral al riesgo de cada modelo de un periodo derivado del modelo general.

Un sistema de probabilidades neutrales al riesgo puede representarse por un vector, $\overline{Q} \in R^{\langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle + \ldots + \langle P_T \rangle}$. Cada componente del vector representa la probabilidad que le asigna a un suceso, $A \in P_t$, la probabilidad del modelo uniperiódico generado por el predecesor de A en el momento inmediatamente anterior, $A_{t-1}(A)$.

Escrito en otro modo, $A \in P_t$ es el predecesor en el momento t de ω_j, para un conjunto de valores de j:

$$j \text{ tal que } A = A_t(\omega_j)$$

Cada medida de probabilidad neutral al riesgo del modelo generado por A, se representará por $Q_A = Q_{A_t(\omega_j)}$. Esta medida asignará probabilidades a los sucesores inmediatos de A, esto es, a los predecesores en el momento t +1 de ω_j, para todos los valores j tales que $A = A_t(\omega_j)$.

Un conjunto de v(A) valores, $Q_A[\ A_{t+1}(\omega_j)\ ]$, $\forall j/\ A = A_t(\omega_j)$, constituye una medida de probabilidad neutral al riesgo del modelo de un periodo generado por $A \in P_t$, si verifica:

$$\sum_{\forall j/A=A_t(\omega_j)} S^i_{t+1}\left(A_{t+1}(\omega_j)\right) Q_A\left[A_{t+1}(\omega_j)\right] = S^i_t(A)$$

$$Q_A\left[A_{t+1}(\omega_j)\right] \geq 0$$

$$\forall i = 0,\ 1, \ldots, \ m\text{-}1; \ \ \forall t = 1, \ldots, \ T\text{-}1.$$

Estas restricciones definen el conjunto de todos los vectores, $\overline{Q} \in R^{\langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle + \ldots + \langle P_T \rangle}$, que representan sistemas de probabilidades neutrales al riesgo del mercado M. Este conjunto será representado por $N \subset R^{\langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle + \ldots + \langle P_T \rangle}$.

Obsérvese que, por construcción, el conjunto N no es vacío puesto que el mercado M es libre de arbitraje y, por tanto, son libres de arbitraje todos los modelos uniperiódicos derivados de él. El conjunto N está formado por un único punto si y sólo si el mercado es completo. Si el mercado es incompleto el conjunto N es el *resultado de someter una variedad afín a condiciones de no negatividad para todas las* componentes. En este caso, el interior relativo[43] de este conjunto estará formado por los sistemas con componentes estrictamente positivas. Por el Teorema 4, se sabe que puesto que los mercados de un periodo derivados del general son libres de arbitraje, el interior relativo de N no es vacío.

Puede definirse una aplicación del conjunto N sobre el conjunto de medidas de probabilidad neutrales al riesgo del mercado correspondiente de varios periodos, que a cada vector $\overline{Q} \in N$ le hace corresponder una probabilidad neutral al riesgo del modelo general, $Q = L(\overline{Q})$, del modo siguiente:

$$Q(\omega_j) = \prod_{t=0}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}\left[A_{t+1}(\omega_j)\right]$$

[43] Para una definición de interior relativo, ver Rockafellar (1970), pag. 44.

Obsérvese que la aplicación definida no es inyectiva.

Es inmediato observar que la medida de probabilidad Q será equivalente a P si y solamente si el vector $\overline{Q}$ que la genera tiene componentes estrictamente positivas. En un mercado incompleto, la medida de probabilidad Q será equivalente a P si y solamente si el vector $\overline{Q}$ pertenece al interior relativo de N.

A continuación, definimos un funcional sobre el conjunto N:

$$J(\overline{Q}) = \sum_{j=1}^{k} f_T(\omega_j) \prod_{t=0}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}[A_{t+1}(\omega_j)] = \sum_{j=1}^{k} f_T(\omega_j).\, L(\overline{Q}) = E_{L(\overline{Q})}[f_T]$$

El máximo de este funcional sobre el conjunto N será:

$$\max_{\overline{Q}} J(\overline{Q}) = \max_{\overline{Q}} E_{L(\overline{Q})}[f_T] = \max_{Q} E_Q[f_T] = f_T^{+} = E_{Q^{**}}[f_T]$$

y el mínimo:

$$\min_{\overline{Q}} J(\overline{Q}) = \min_{\overline{Q}} E_{L(\overline{Q})}[f_T] = \min_{\overline{Q}} E_Q[f_T] = f_T^{-} = E_{Q^{*}}[f_T]$$

Representando por $\overline{Q}^{**}$ el vector de componentes Q_A^{**}, y por $\overline{Q}^{*}$ el vector de componentes Q_A^{*}, el resultado de aplicar el principio de optimalidad de Bellman puede escribirse del modo siguiente:

$$Q^{**} = L(\overline{Q}^{**})$$

$$Q^{*} = L(\overline{Q}^{*})$$

Para cada suceso $A \in P_h$, h = 1,..., T-1, puede definirse sobre N un funcional análogo a $J(\overline{Q})$:

$$J_{A\in P_h}(\overline{Q}) = \sum_{\forall j / A_h(\omega_j) = A} f_T(\omega_j) \prod_{t=h}^{T-1} Q_{A_t(\omega_j)}[A_{t+1}(\omega_j)]$$

Se puede observar (lema III.1), que si $L(\overline{Q})(A) \neq 0$, el significado de $J_{A\in P_h}(\overline{Q})$ es el siguiente:

$$J_{A\in P_h}(\overline{Q}) = E_{L(\overline{Q})}[f_T / A]$$

Se llamará $J_h(\overline{Q})$ a la variable aleatoria, medible respecto de F_h, que para cada suceso $A \in P_h$, toma el valor:

$$J_h(\overline{Q})(A) = J_{A\in P_h}(\overline{Q})$$

Demostraremos, en primer lugar, que $S_0^f \notin (f_T^-, f_T^+) \Rightarrow$ existen oportunidades de arbitraje en M*.

Aplicando el Principio de Optimalidad de Bellman tal y como se ha planteado, observamos lo siguiente:

$$E_{Q^{**}}[f_T] = J(\overline{Q}^{**}) = \max_{Q_\Omega} E_{Q_\Omega}\left[J_1(\overline{Q}^{**})\right]$$

donde Q_Ω es una medida de probabilidad neutral al riesgo del modelo derivado, definido entre los momentos t = 0 y t = 1.

Puede plantearse el problema dual, del mismo modo que se hizo en la demostración del resultado análogo para modelos de un periodo (proposición II.7). Sabemos que el problema primal tiene solución, por lo que también tendrá solución el dual, y el valor de la función objetivo en el óptimo de ambos programas coincidirá. Se tiene, por tanto:

$$E_{Q^{**}}[f_T] = \min_{Y_1} Y_1'.S_0$$

sujeto a:

$$Y_1'.S_1 \geq J_1(\overline{Q}^{**})$$

donde, los vectores Y_1 representan estrategias del primer periodo. Representaremos por Y_1^{**} la estrategia en que se alcanza el mínimo. Así, se verifica:

$$E_{Q^{**}}[f_T] = Y_1^{**}{}'.S_0$$

Razonamos del mismo modo para los modelos de un periodo definidos entre t =1 y t = 2. Para cada $A \in P_1$, se verifica:

$$J_1(\overline{Q}^{**})(A) = \max_{Q_A} E_{Q_A}\left[J_2(\overline{Q}^{**})(\text{sucesores de A})\right]$$

Por dualidad:

$$J_1(\overline{Q}^{**})(A) = \min_{Y_2(A)} Y_2(A)'.S_1(A)$$

sujeto a:

$$Y_2(A)'.S_2(\text{sucesores de A}) \geq J_2(\overline{Q}^{**})(\text{sucesores de A})$$

Los vectores $Y_2(A)$ representan las carteras del segundo periodo si se presenta el suceso A.

S_2(sucesores de A) es la matriz de precios descontados en el momento t =2, restringido a los sucesores del suceso A.

$J_2(\overline{Q}^{**})$(sucesores de A) es un vector que tiene como componentes las posibles concreciones de la variable aleatoria $J_2(\overline{Q}^{**})$ para los sucesores de A. Representaremos por $Y_2(A)^{**}$ la cartera en que se alcanza el mínimo. Así, se verifica:

$$J_1(\overline{Q}^{**})\,(A) = Y_2(A)^{**\prime}.S_1(A)$$

Podría seguirse el mismo razonamiento para los sucesivos periodos hasta T.

Supongamos que $S_0^f = E_{Q^{**}}[f_T]$. Es entonces posible construir una oportunidad de arbitraje del siguiente modo. Durante los T periodos se mantendrá una posición corta en una unidad del activo f. En el primer periodo se mantendrá la cartera Y_1^{**}, con lo que el coste total es nulo. Se tiene que el valor final descontado de esta cartera verifica:

$$V_1(Y_1^{**}) = Y_1^{**\prime}.S_1 \geq J_1(\overline{Q}^{**}) = Y_2^{**\prime}.S_1$$

Si la desigualdad es, de hecho, una igualdad, se podrá cambiar, de forma autofinanciada la cartera Y_1^{**} del primer periodo por la cartera Y_2^{**} para el segundo.

Obsérvese que el cambio dependerá del suceso que se presente en t = 1. Si, se presenta un suceso A para el que la desigualdad es estricta, se realizará este cambio, y además se invertirá la cantidad

$$Y_1^{**\prime}.S_1(A) - J_1(\overline{Q}^{**})(A) > 0,$$

en activo sin riesgo.

La cantidad invertida en activo sin riesgo, se mantendrá siempre hasta el final, y la cantidad invertida en la estrategia Y_2^{**} se cambiará de un modo autofinanciado por Y_3^{**}, destinando el exceso, si existe, a activo sin riesgo. De este modo, se alcanza el último periodo con la obligación de entregar f_T, con una cartera Y_T^{**}, cuyo valor final verifica: $V_T(Y_T^{**}) \geq f_T$, y por tanto, $V_T(Y_T^{**}) \geq f_T$ para todos los estados de la naturaleza, y con activo sin riesgo que se incorpora cada vez que aparece una desigualdad estricta en las restricciones del programa lineal (con variables de cartera) en un modelo uniperiódico.

Que todas estas restricciones se verificasen en igualdad implicaría que el pago f_T es alcanzable. Puesto que, por hipótesis, dicho pago no es alcanzable, necesariamente habrá desigualdades estrictas. Entonces, siempre existirá algún estado tal que, si se alcanza, se tendría activo sin riesgo en el momento final. La estrategia seguida conduce, pues, a un valor final no negativo para todos los estados de la naturaleza y estrictamente positivo para alguno de ellos. Puesto que, además, tiene coste nulo, constituye una oportunidad de arbitraje.

Si se tuviera $S_0^f > E_{Q^{**}}[f_T]$, la demostración sería análoga adquiriendo activo sin riesgo para conseguir precio nulo. Se siguen los mismos pasos si $S_0^f \leq E_{Q^*}[f_T]$, con lo que queda demostrada la primera implicación del Teorema.

Para demostrar la segunda implicación del teorema, observamos el siguiente resultado: el funcional $J(\overline{Q})$ toma el mismo valor para todos los elementos de N si y sólo si el pago f_T es alcanzable. En el caso en que nos situamos, de f_T no alcanzable, se verifica:

$$E_{Q^*}[f_T] = J(\overline{Q}^*) < J(\overline{Q}^{**}) = E_{Q^{**}}[f_T]$$

Se probará que si $E_{Q^*}[f_T] = J(\overline{Q}^*) < S_0^f < J(\overline{Q}^{**}) = E_{Q^{**}}[f_T]$, es posible construir un proceso de precios para el activo ficticio tal que en el mercado M* no existan oportunidades de arbitraje. Basta, para ello, probar que en el mercado M* existirá una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P. Se obtendrá dicha medida como combinación lineal convexa de otras dos medidas de probabilidad equivalentes a P. Estas dos medidas, se obtendrán, a su vez, a través de la aplicación $L(\overline{Q})$, partiendo de dos elementos del interior N, que representaremos por $\overline{Q}^{\bullet}$, $\overline{Q}^{\bullet\bullet}$ cuya existencia se demuestra a continuación.

Si $E_{Q^*}[f_T] = J(\overline{Q}^*) < J(\overline{Q}^{**}) = E_{Q^{**}}[f_T]$, para todo $S_0^f \in R$ que verifique:

$$E_{Q^*}[f_T] < S_0^f < E_{Q^{**}}[f_T],$$

se demostrará que existen $\overline{Q}^{\bullet}$, $\overline{Q}^{\bullet\bullet}$ pertenecientes al interior relativo de N, que verifican:

$$E_{Q^*}[f_T] = J(\overline{Q}^*) \leq J(\overline{Q}^{\bullet}) < S_0^f < J(\overline{Q}^{\bullet\bullet}) \leq J(\overline{Q}^{**}) = E_{Q^{**}}[f_T],$$

La demostración de la existencia de estas probabilidades se basará en la continuidad del funcional $J(\overline{Q})$.

Tomo $\varepsilon_0 \in R$, $0 < \varepsilon_0 < S_0^f - J(\overline{Q}^*)$

Entonces, $\exists \delta_0$ tal que $\forall \overline{Q} \in B(\overline{Q}^*, \delta_0)$, se verifica $\left|J(\overline{Q}) - J(\overline{Q}^*)\right| \leq \varepsilon_0 < S_0^f - J(\overline{Q}^*)$

Sea $H = B(\overline{Q}^*, \delta_0) \cap$ interior relativo (N).

Puesto que $J(\overline{Q})$ alcanza su mínimo sobre N en $\overline{Q}*$, $\forall \overline{Q} \in H$, $\left|J(\overline{Q}) - J(\overline{Q}*)\right| = J(\overline{Q}) - J(\overline{Q}*)$ y, por tanto:

$$\forall\ \overline{Q} \in H,\ 0 \le J(\overline{Q}) - J(\overline{Q}*) \le \varepsilon_0 < S_0^f - J(\overline{Q}*)$$

$$\forall\ \overline{Q} \in H,\ J(\overline{Q}*) \le J(\overline{Q}) < S_0^f$$

$\overline{Q}^{\bullet}$ es un elemento cualquiera del conjunto H. Puesto que $H \neq \emptyset$, queda probada la existencia de $\overline{Q}^{\bullet}$. La demostración es análoga para $\overline{Q}^{\bullet\bullet}$.

Sean las medidas de probabilidad neutrales al riesgo de M, equivalentes a P[44], definidas por:

$$Q^{\bullet} = L\,(\overline{Q}^{\bullet})$$

$$Q^{\bullet\bullet} = L\,(\overline{Q}^{\bullet\bullet})$$

para j = 1,…,k.

Obsérvese que $E_{Q^{\bullet}}[f_T] = J(\overline{Q}^{\bullet})$, y $E_{Q^{\bullet\bullet}}[f_T] = J(\overline{Q}^{\bullet\bullet})$

La medida de probabilidad buscada se obtendrá como combinación lineal convexa de $Q^{\bullet}$ y $Q^{\bullet\bullet}$. A continuación se comprueba que una combinación lineal convexa de estas dos medidas de probabilidad:

$$Q(\omega_j) = \alpha.\ Q^{\bullet}(\omega_j) + (1-\alpha).\ Q^{\bullet\bullet}(\omega_j),\ \alpha \in (0,1),$$

es una medida de probabilidad neutral al riesgo de M, equivalente a P.[45]

[44] Son equivalentes a P porque son imagen de elementos del interior relativo de N. Las imágenes de $\overline{Q}*$ y $\overline{Q}**$ no tienen por qué ser, y de hecho no son, equivalentes a P.

[45] Se puede demostrar, de forma más general, que el conjunto de medidas de probabilidad neutrales al riesgo del mercado M, equivalentes a P, es un conjunto convexo.

La comprobación de que es una medida de probabilidad equivalente a P es directa. Comprobamos que es neutral al riesgo. Para todo $A \in P_t$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$, todo $i = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$E_{\alpha.Q^{*}+(1-\alpha)Q^{**}}\left[S^{i}_{t+1}/A\right] = \sum_{g=1}^{v(A)}\left(\alpha.Q^{*}+(1-\alpha).Q^{**}\right)\left(A^{g}/A\right).S^{i}_{t+1}\left(A^{g}\right) =$$

$$= \sum_{g=1}^{v(A)}\frac{\alpha.Q^{*}\left(A^{g}\right)+(1-\alpha).Q^{**}\left(A^{g}\right)}{\alpha.Q^{*}(A)+(1-\alpha).Q^{**}(A)}.S^{i}_{t+1}\left(A^{g}\right) =$$

$$= \frac{\alpha.\sum_{g=1}^{v(A)}\left[Q^{*}\left(A^{g}\right).S^{i}_{t+1}\left(A^{g}\right)\right]+(1-\alpha).\sum_{g=1}^{v(A)}\left[Q^{**}\left(A^{g}\right).S^{i}_{t+1}\left(A^{g}\right)\right]}{\alpha.Q^{*}(A)+(1-\alpha).Q^{**}(A)} =$$

$$= \frac{\alpha.Q^{*}(A).E_{Q^{*}}\left[S^{i}_{t+1}/A\right]+(1-\alpha).Q^{**}(A).E_{Q^{**}}\left[S^{i}_{t+1}/A\right]}{\alpha.Q^{*}(A)+(1-\alpha).Q^{**}(A)} =$$

$$= \frac{\alpha.Q^{*}(A).S^{i}_{t}(A)+(1-\alpha).Q^{**}(A).S^{i}_{t}(A)}{\alpha.Q^{*}(A)+(1-\alpha).Q^{**}(A)} = S^{i}_{t}(A)$$

Del conjunto de medidas de probabilidad neutrales al riesgo equivalentes a P obtenidas como combinación lineal convexa de Q^{*} y Q^{**} elegimos una concreta. Se representará por Q^{f}, y se define del siguiente modo:

$$Q^{f}(\omega_j) = \alpha^{f}.\ Q^{*}(\omega_j) + (1-\alpha^{f}).\ Q^{**}(\omega_j),\ \ \forall j = 1, 2, \ldots, k.$$

con

$$\alpha^{f} = \frac{E_{Q^{**}}\left[f_T\right]-S^{f}_{0}}{E_{Q^{**}}\left[f_T\right]-E_{Q^{*}}\left[f_T\right]};$$

$\alpha^{f} \in (0,1)$, puesto que $E_{Q^{*}}\left[f_T\right] < S^{f}_{0} < E_{Q^{**}}\left[f_T\right]$.

Puede definirse entonces un proceso de precio para el activo que da lugar al pago f_T, que verifica todas las exigencias del teorema:

$$S_t^f = \begin{cases} f_T & \text{para } t = T \\ \dfrac{E_{Q^f}\left[f_T / F_t\right]}{\prod\limits_{s=t+1}^{T}(1+r_s)} & \text{para } t = 0, 1, \dots, T-1 \end{cases}$$

El precio final es el pago f_T, y se comprueba inmediatamente que el valor inicial de este proceso es S_0^f:

$$\frac{E_{Q^f}\left[f_T / F_0\right]}{\prod\limits_{s=1}^{T}(1+r_s)} = E_{Q^f}\left[f_T\right] = \sum_{j=1}^{k} f_T(\omega_j) Q^f(\omega_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} f_T(\omega_j)\left[\alpha^f . Q^{*}(\omega_j) + (1-\alpha^f) Q^{**}(\omega_j)\right] =$$

$$= \alpha^f . E_{Q^*}\left[f_T\right] + (1-\alpha^f) . E_{Q^{**}}\left[f_T\right] =$$

$$= \frac{E_{Q^{**}}\left[f_T\right] - S_0^f}{E_{Q^{**}}\left[f_T\right] - E_{Q^*}\left[f_T\right]} . E_{Q^*}\left[f_T\right] + \frac{S_0^f - E_{Q^*}\left[f_T\right]}{E_{Q^{**}}\left[f_T\right] - E_{Q^*}\left[f_T\right]} E_{Q^{**}}\left[f_T\right] = S_0^f$$

Por último, vemos que si el activo ficticio sigue este proceso de precio, Q^f es una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P, para el mercado M*.

Por construcción, sabemos que Q^f es equivalente a P, y neutral al riesgo para el mercado M, luego bajo dicha probabilidad los precios descontados de los activos con índice i = 0, 1, ..., m-1, son martingalas. Faltaría únicamente comprobar que el proceso de precio propuesto para el activo ficticio, descontado, es también una martingala bajo Q^f, comprobación que resulta inmediata:

$$E_{Q^f}\left[S^f_{t+1}/F_t\right] = \frac{E_{Q^f}\left[S^f_{t+1}/F_t\right]}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+r_s)} = \frac{E_{Q^f}\left[E_{Q^f}\left[f_T/F_{t+1}\right]/F_t\right]}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+r_s)\prod_{s=t+2}^{T}(1+r_s)} =$$

$$= \frac{E_{Q^f}\left[f_T/F_t\right]}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+r_s)\prod_{s=t+2}^{T}(1+r_s)} = \frac{S^f_t\cdot\prod_{s=t+1}^{T}(1+r_s)}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+r_s)\prod_{s=t+2}^{T}(1+r_s)} =$$

$$= \frac{S^f_t}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)} = S^f_t$$

Queda así demostrado que, si el activo ficticio sigue este proceso de precios, Q^f es una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P, para el mercado M*, por lo que dicho mercado no contiene oportunidades de arbitraje y queda completamente demostrado el Teorema.

Analizada la valoración de un flujo no replicable, disponible en el momento final, se plantea el problema de la valoración de flujos no replicables, disponibles en otros momentos del tiempo, f_h, para $h < T$.

Obsérvese que, aun siendo el mercado general incompleto, podría ser completo el mercado definido entre el origen y el momento h; en este caso el flujo sería replicable y se resolvería el problema con el Teorema 7. Si el mercado es incompleto, pero el flujo es replicable, el problema se resolvería como en la sección 2.5.2. Nos centramos ahora en el caso en que el mercado es incompleto entre el origen y el momento h, y se trata de valorar un flujo f_h, disponible en el momento h.

Sea el mercado M* definido por la incorporación a M de la negociación de un activo (activo ficticio) que da derecho al flujo f_h, no replicable, disponible en el momento $t = h$, con proceso de precios $\{S_t^f\}_{t=0,1,\dots T}$, medible respecto de la filtración del inversor.

Proposición III. 6

Es posible encontrar un proceso de precios para el activo ficticio, $\{S_t^f\}_{t=0,1,\dots T}$, con $S_h^f = f_h$ y S_0^f dados, tal que M* no contenga oportunidades de arbitraje si y sólo si

$$S_0^f \in (f_h^-, f_h^+) = \left(\min_Q \frac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)}, \max_Q \frac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)} \right),$$

donde Q es una probabilidad neutral al riesgo del mercado M.

Demostración:

No se desarrolla la demostración porque resulta análoga a la del Teorema 9. Para demostrar la primera implicación se construye una oportunidad de arbitraje debida a que el precio no pertenece al intervalo. Se conseguirá, con coste cero, una estrategia no negativa, y estrictamente positiva en algunos sucesos de t = h; basta entonces mantener la estrategia hasta el final del periodo (hasta T), ya que si existe valor positivo, estará todo colocado en activo sin riesgo.

En la demostración de la segunda implicación, se localiza una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P, Q^f, del mercado M, que verifique:

$$E_{Q^f}[f_h] = S_0^f$$

Se define entonces el siguiente proceso de precios para el activo ficticio:

$$S_t^f = \begin{cases} \dfrac{E_{Q^f}[f_h / F_t]}{\prod\limits_{s=t+1}^{h}(1+r_s)} & \text{para } t = 0, 1, \ldots, h \\ f_h \cdot \prod\limits_{s=h+1}^{t}(1+r_s) & \text{para } t = h+1, \ldots, T \end{cases}$$

Para concluir el problema de valoración de flujos no replicables en el momento inicial, faltaría únicamente estudiar la valoración de un conjunto de flujos. En los casos estudiados con anterioridad, este problema se ha resuelto utilizando el Teorema 2, que aseguraba que el valor del conjunto era la suma de valores de los distintos flujos. En este caso no puede aplicarse porque no se ha obtenido un valor para los flujos, y no es posible encontrar una valoración de los flujos a partir de los intervalos de valor de los flujos. Sí puede plantearse el resultado que se presenta a continuación.

Sea el mercado M* definido por la incorporación a M de la negociación de un activo (activo ficticio) que da derecho a los flujos f_h y f_τ, no replicables, disponibles respectivamente en los momentos t = h y t = τ, con proceso de precios $\left\{S_t^f\right\}_{t=0,1,\ldots T}$, medible respecto de la filtración del inversor.

Proposición III. 7

Si $S_0^f \notin (f_h^- + f_\tau^-, f_h^+ + f_\tau^+)$

donde $f_h^- = \min\limits_Q \dfrac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)}$ $\qquad f_\tau^- = \min\limits_Q \dfrac{E_Q[f_\tau]}{\prod_{s=1}^{\tau}(1+r_s)}$

$$f_h^+ = \max_Q \frac{E_Q[f_h]}{\prod_{s=1}^{h}(1+r_s)} \qquad f_\tau^+ = \max_Q \frac{E_Q[f_\tau]}{\prod_{s=1}^{\tau}(1+r_s)}$$

siendo Q una probabilidad neutral al riesgo del mercado M, en M* existen oportunidades de arbitraje.

Demostración:

Supongamos que $S_0^f = f_h^+ + f_\tau^+$. Para tener una oportunidad de arbitraje, basta tomar la estrategia:

$$\theta = \varphi + \varphi',$$

donde φ sería la estrategia de arbitraje que se obtendría si se negociara en M* un activo que diese lugar al flujo f_h, con precio inicial f_h^+; y φ′ es la análoga para f_τ.

Se seguiría el mismo razonamiento si $S_0^f = f_h^- + f_\tau^-$. Si el precio fuese mayor que $f_h^+ + f_\tau^+$ o menor que $f_h^- + f_\tau^-$, se ajustaría la estrategia con activo sin riesgo para conseguir coste nulo.

La implicación inversa a la proposición III.7 no es cierta. Se tiene un contraejemplo sencillo partiendo de un mercado M en que se negocia únicamente un activo sin riesgo, por lo que solo se replican flujos ciertos. Basta descomponer un flujo cierto como suma de dos flujos no ciertos. El valor de la suma sería un valor concreto, mientras que no lo sería la suma de los valores.

Por último, se trata la valoración de un flujo no replicable en un momento posterior al origen. Se define el mercado M* por la incorporación a M de un activo que da derecho a un flujo f_T, no replicable, disponible en el momento t=T. Se busca asignar un valor a este activo en el momento t=h > 0, que permita la ausencia de oportunidades de arbitraje en M*. El valor en h será una variable aleatoria medible respecto de F_h, por lo que será un valor real para cada suceso $A \in P_h$.

Partiendo de que el flujo f_T no es replicable en el mercado M, es posible que lo sea a partir del momento h, si se presenta algún suceso de P_h. Al calcular el valor que se le asigna para un suceso $A \in P_h$, es necesario entonces distinguir que pueda o no ser replicado. Si el flujo f_T puede replicarse con alguna estrategia en M entre h y T, al presentarse el suceso A, se verifica la siguiente proposición:

Proposición III.8

Es posible encontrar un proceso de precios para el activo ficticio, $\{S_t^f\}_{t=0,\dots T}$, con $S_T^f = f_T$ y $S_h^f(A)$ dados, h = 1, 2, ..., T; tal que M* no contenga oportunidades de arbitraje si y sólo si

$$S_h^f(A) = \frac{E_Q[f_T / F_h](A)}{\prod_{s=h+1}^{T}(1+r_s)},$$

donde Q es cualquier medida probabilidad neutral al riesgo equivalente a P del mercado M.

Demostración:

Comenzamos probando que si el precio del activo ficticio en el momento h, si se presenta el suceso A, $S_h^f(A)$, no es $\frac{E_Q[f_T / F_h](A)}{\prod_{s=h+1}^{T}(1+r_s)}$, en el mercado M* existen oportunidades de arbitraje.

En primer lugar, se observa que dada una estrategia θ en M que replica al activo ficticio entre el momento h y el momento T, si se presenta el suceso A, su valor en el momento h, si se presenta el suceso A, $S_h^f(A)$, será:

$$V_h(\theta)(A) = \frac{E_Q[V_T(\theta)/ F_h](A)}{\prod_{s=h+1}^{T}(1+r_s)} = \frac{E_Q[f_T / F_h](A)}{\prod_{s=h+1}^{T}(1+r_s)},$$

donde Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo cualquiera. La primera igualdad se debe a que el valor de la estrategia es una martingala bajo Q por ser dicha probabilidad neutral al riesgo en M. La segunda igualdad se debe al concepto de replicación.

En segundo lugar se demuestra que si la estrategia replicante y el activo ficticio no tienen el mismo valor en el momento h, si se presenta el suceso A, existirán oportunidades de arbitraje en el mercado M*.

Supongamos que $V_h(\theta)(A) < S_h^f(A)$. Puede conseguirse una oportunidad de arbitraje del modo siguiente: hasta el momento h no se realizará ninguna operación.

Si en momento h no se presenta A se seguirá manteniendo una estrategia nula. Si en el momento h se presenta A, se debe seguir θ, vender al descubierto una unidad del activo ficticio y adquirir $\frac{S_h^f(A)-V_h(\theta)(A)}{S_h^0}$ unidades del activo sin riesgo. De este modo, no se realiza ningún desembolso, y el valor final es no negativo, y estrictamente positivo para los estados de la naturaleza que suceden a A. Si $V_h(\theta)(A) > S_h^f(A)$, se seguiría la estrategia de signo contrario.

Para demostrar la implicación inversa, hacemos $S_h^f(A) = \frac{E_Q[f_T / F_h](A)}{\prod_{s=h+1}^{T}(1+r_s)}$, y $S_T^f = f_T$. Entonces se propone un proceso de precios para el activo ficticio, que verifica estas condiciones y garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje en M*. El proceso de precios es el siguiente:

$$S_t^f = \frac{E_Q[f_h / F_t]}{\prod_{s=t+1}^{T}(1+r_s)},$$

donde Q es una probabilidad neutral al riesgo equivalente a P de M.[46] Dado el teorema 6, se sabe que existe una probabilidad de este tipo, puesto que en M hay ausencia de oportunidades de arbitraje, por hipótesis.

Pero si el proceso de precios es este, cualquier medida Q, neutral al riesgo de M, es una probabilidad neutral al riesgo del mercado M*. Por el teorema 6, se sabe que hay ausencia de oportunidades de arbitraje en M*. Queda así demostrada la proposición.

[46] Obsérvese que, puesto que el flujo no es replicable desde el momento inicial, este proceso de precios no tiene porqué ser único. Al menos en el momento inicial será posible definir un intervalo abierto de valores.

Se verá, para finalizar, que el caso en que no hay replicación desde el momento de la valoración resulta análogo al Teorema 9. Sea M* el mercado definido por la incorporación a M de la negociación de un activo ficticio que da derecho al cobro de f_T. El flujo f_T no puede replicarse con ninguna estrategia en M entre h y T, al presentarse el suceso $A \in P_h$.

Se utilizará la notación presentada en la demostración del Teorema 9. Sea $\overline{Q}^*$ el sistema de probabilidades que *minimiza* el funcional $J_{A \in P_h}(\overline{Q})$ y $\overline{Q}^{**}$ el sistema que lo maximiza. Entonces se presenta el siguiente resultado.

Proposición III.9

Es posible encontrar un proceso de precios para el activo ficticio, $\{S_t^f\}_{t=0,\dots T}$, con $S_T^f = f_T$ y $S_h^f(A)$ dados, h = 1, 2, ..., T; tal que M* no contenga oportunidades de arbitraje si y sólo si

$$S_h^f(A) \in \left(J_{A \in P_h}(\overline{Q}^*), J_{A \in P_h}(\overline{Q}^{**})\right)$$

Demostración:

Demostraremos en primer lugar que $S_h^f(A) \notin \left(J_{A \in P_h}(\overline{Q}^*), J_{A \in P_h}(\overline{Q}^{**})\right) \Rightarrow$ existen oportunidades de arbitraje en M*.

Por aplicación del Principio de Optimalidad de Bellman:

$$J_{A \in P_h}(\overline{Q}^{**}) = \max_{Q_A} E_{Q_A}\left[J_{h+1}(\overline{Q}^{**})\right]$$

donde Q_A es medida de probabilidad neutral al riesgo del modelo derivado, definido entre los momentos t = h y t = h + 1.

Sabemos que este problema tiene solución, por lo que también tendrá solución el programa dual, y el valor de la función objetivo en el óptimo de ambos programas coincidirá. Se tiene, por tanto:

$$J_{A\in P_h}\left(\overline{Q}^{**}\right)=\min_{Y_{h+1}(A)} Y_{h+1}(A)'.S_h(A)$$

sujeto a:

$$Y_{h+1}(A)'.S_{h+1}(\text{sucesores de A}) \geq J_{h+1}\left(\overline{Q}^{**}\right)$$

donde, los vectores $Y_{h+1}(A)$ representan estrategias del primer periodo considerado.

Representaremos por $Y_{h+1}(A)$ ** la estrategia en que se alcanza el mínimo. Así, se verifica:

$$E_{Q^{**}}[f_T] = Y_{h+1}(A)^{**\prime}.S_h(A)$$

Razonamos del mismo modo para los modelos de un periodo definidos entre $t = h + 1$ y $t = h + 2$. Para cada $B\in P_{h+1}$, sucesor inmediato de A, se verifica:

$$J_{B\in P_{h+1}}\left(\overline{Q}^{**}\right)=\max_{Q_B} E_{Q_B}\left[J_{h+2}\left(\overline{Q}^{**}\right)(\text{sucesores de B})\right]$$

Y, por dualidad:

$$J_{B\in P_{h+1}}\left(\overline{Q}^{**}\right)=\min_{Y_{h+2}(B)} Y_{h+2}(B)'.S_{h+1}(B)$$

sujeto a:

$$Y_{h+2}(B)'.S_{h+2}(\text{sucesores de B}) \geq J_{h+2}\left(\overline{Q}^{**}\right)(\text{sucesores de B})$$

Los vectores $Y_{h+2}(B)$ representan las carteras del segundo periodo considerado si se presenta el suceso B.

S_{h+2}(sucesores de B) es la matriz de precios descontados en el momento t = h+2, restringido a los sucesores del suceso B.

$J_{h+2}(\overline{Q}**)$(sucesores de B) es un vector que tiene como componentes las posibles concreciones de la variable aleatoria $J_{h+2}(\overline{Q}**)$ para los sucesores de B.

Representaremos por $Y_{h+2}(B)^{**}$ la cartera en que se alcanza el mínimo. Así, se verifica:

$$J_{B\in P_{h+1}}(\overline{Q}**) = Y_{h+2}(B)^{**\prime}.S_{h+1}(B)$$

Podría seguirse el mismo razonamiento para los sucesivos periodos hasta T.

Supongamos que $S_h^f(A) = J_{A\in P_h}(\overline{Q}**)$. Es entonces posible construir una oportunidad de arbitraje del siguiente modo. Durante los T-h periodos se mantendrá *una posición corta en una unidad del activo f. En el primer periodo se mantendrá la* cartera $Y_{h+1}(A)^{**}$, con lo que el coste total es nulo.

Se tiene que el valor final descontado de esta cartera verifica:

$V_{h+1}(Y_{h+1}(A)^{**}) = Y_{h+1}(A)^{**\prime}.S_{h+1}$(sucesores de A) $\geq$

$\geq J_{h+1}(\overline{Q}**)$(sucesores de A) = Y_{h+2}(sucesores de A)$^{**\prime}.S_{h+1}$(sucesores de A)

Si la desigualdad es, de hecho, una igualdad, se podrá cambiar, de forma autofinanciada la cartera $Y_{h+1}(A)^{**}$ del primer periodo por la cartera Y_{h+2}(sucesores de A)** para el segundo. El cambio de estrategia dependerá del suceso que se presente en $t = h+1$. Si, se presenta un suceso B para el que la desigualdad es estricta, se realizará este cambio, y además se invertirá en activo sin riesgo la cantidad:

$$Y_{h+1}(A)^{**\,\prime}.S_l(B) - J_{h+1}\left(\overline{Q}^{**}\right)(B) > 0,$$

La cantidad invertida en activo sin riesgo se mantendrá siempre hasta el final, y la cantidad invertida en Y_{h+2}(sucesores de A)** se cambiará de un modo autofinanciado por Y_{h+3}^{**}, destinando el exceso, si existe, a activo sin riesgo. De este modo se alcanza el último periodo con la obligación de entregar f_T, con una cartera $Y^{**}(T)$, cuyo valor final verifica: $V_T(h^{**}(T)) \geq f_T$ para todos los estados de la naturaleza, y con activo sin riesgo que se incorpora cada vez que aparece una desigualdad estricta en las restricciones del programa lineal (con variables de cartera) en un modelo uniperiódico.

Que todas estas restricciones se verifiquen en igualdad implica que el pago f_T es alcanzable. Puesto que, por hipótesis, dicho pago es no alcanzable, necesariamente habrá desigualdades estrictas. Entonces, siempre existirá algún estado que se alcance con activo sin riesgo en el momento final. La estrategia seguida conduce, pues, a un valor final no negativo para todos los estados de la naturaleza y estrictamente positivo para alguno de ellos. Puesto que además tiene coste nulo, constituye una oportunidad de arbitraje.

Si se tuviera $S_h^f(A) > J_{A\in P_h}\left(\overline{Q}^{**}\right)$, la demostración sería análoga adquiriendo activo sin riesgo para conseguir precio nulo. Se siguen los mismos pasos si $S_h^f(A) \leq J_{A\in P_h}\left(\overline{Q}^{**}\right)$, con lo que queda demostrada la primera implicación de la Proposición.

Para probar la segunda implicación, se razona igual que en la demostración del Teorema 9. Se demostrará que, si el precio pertenece al intervalo planteado, puede construirse un proceso de precios para el activo ficticio compatible con una medida de probabilidad neutral al riesgo, Q^f, equivalente a P, para el mercado M*. Esta medida de probabilidad se obtendrá como combinación lineal convexa de otras dos medidas de probabilidad neutrales al riesgo del mercado M. Se comienza por la localización de estas últimas.

Puesto que el funcional $J_{A\in P_h}(\overline{Q})$ es continuo, puede garantizarse la existencia de $\overline{Q}^{\bullet}$ y $\overline{Q}^{\bullet\bullet}$, pertenecientes al interior relativo de N, que verifican:

$$J_{A\in P_h}(\overline{Q}^*) \leq J_{A\in P_h}(\overline{Q}^{\bullet}) = E_{L(\overline{Q}^{\bullet})}[f_T / A] < S_h^f(A) <$$

$$< E_{L(\overline{Q}^{\bullet\bullet})}[f_T / A] = J_{A\in P_h}(\overline{Q}^{\bullet\bullet}) \leq J_{A\in P_h}(\overline{Q}^{**})$$

Sean las medidas de probabilidad neutrales al riesgo, equivalentes a P, del mercado M, $Q^{\bullet} = L(\overline{Q}^{\bullet})$ y $Q^{\bullet\bullet} = L(\overline{Q}^{\bullet\bullet})$. Se define entonces la medida de probabilidad neutral al riesgo de M, equivalente a P, que representamos por Q^f, como:

$$Q^f(\omega_j) = \alpha^f.\ Q^{\bullet}(\omega_j) + (1-\alpha^f).\ Q^{\bullet\bullet}(\omega_j),\ \ \forall j = 1, 2, \ldots, k.$$

con

$$\alpha^f = \frac{E_{Q^{\bullet\bullet}}[f_T / A] - S_h^f(A)}{E_{Q^{\bullet\bullet}}[f_T / A] - E_{Q^{\bullet}}[f_T / A]};$$

$\alpha^f \in (0,1)$, puesto que $E_{Q^{\bullet}}[f_T / A] < S_h^f(A) < E_{Q^{\bullet\bullet}}[f_T / A]$.

Puede definirse entonces un proceso de precios para el activo que da lugar al pago f_T que toma valor f_T en el momento final y, en el momento t = h si se presenta el suceso A, toma el valor $S_h^f(A)$:

$$S_t^f = \begin{cases} f_T & \text{para } t = T \\ \dfrac{E_{Q^f}[f_T / F_t]}{\prod_{s=t+1}^{T}(1+r_s)} & \text{para } t = 0, 1, \ldots, T-1 \end{cases}$$

Finalmente se observa que, si el activo ficticio sigue este proceso de precios, Q^f es una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P para el mercado M*. Como se razonó en la demostración del Teorema 9, bajo dicha probabilidad los precios descontados de los activos con índice i = 0, 1, ..., m-1, son martingalas, por construcción. Se comprueba que el proceso de precios propuesto para el activo ficticio, descontado, es también una martingala bajo Q^f. Quedaría así probado que, si el activo ficticio sigue este proceso de precios, Q^f es una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a P para el mercado M*. El mercado M* no contiene oportunidades de arbitraje, con lo que quedaría completa la demostración de la proposición.

Capítulo IV

Extensiones posibles y alcance del modelo

1. EXTENSIONES POSIBLES DEL MODELO

1.1. Espacio de estados infinito

Todos los desarrollos del modelo se han realizado suponiendo que el conjunto de estados de la naturaleza es finito. Cuando se representa el tiempo como variable discreta esta limitación es frecuente y, para las aplicaciones, suele resultar natural. Por otro lado, esta limitación permite trabajar con una matemática sencilla.

Existen en la literatura desarrollos, con tiempo discreto, que no incorporan esta limitación. El modelo matemático que describe los mercados y los agentes no se ve afectado sustancialmente por esta generalización. Obsérvese únicamente que no es posible suponer que la medida de probabilidad de partida, P, asigne valores positivos a todos los estados de la naturaleza; como tampoco lo harán las probabilidades equivalentes a P. Este problema se salva trabajando "en probabilidad casi segura", esto es, realizando afirmaciones válidas para todos los sucesos con probabilidad positiva.

Las demostraciones utilizadas con espacio de estados finito no pueden generalizarse de forma inmediata al caso de espacio de estados infinito, aun cuando se mantenga el tiempo como variable discreta y se trabaje "en probabilidad casi segura". Sin embargo, sí se demuestra que, en este caso más general, sigue existiendo una relación importante entre la condición de ausencia de oportunidades de arbitraje en los mercados financieros y la existencia de medidas de probabilidad neutrales al riesgo. El resultado análogo al teorema 6 con espacio de estados infinito se demuestra en el artículo de Dalang, Morton, y Willinger (1990). En este artículo se revisan trabajos anteriores que presentan casos particulares de su Teorema Fundamental, como el de Taqqu y Willinger (1987)[47]. En Schachermayer (1992) se presenta una demostración alternativa a la de Dalang, Morton y Willinger.

No he encontrado ningún trabajo sobre condiciones de ausencia de oportunidades de arbitraje en mercados incompletos con tiempo discreto y espacio de estados infinito. Podría resultar interesante estudiar si el teorema 9 y el resto de resultados sobre mercados incompletos, obtenidos restringiendo el número de estados de la naturaleza, se verifican al eliminar esta restricción.

[47] Como se indicó, en este artículo se basa la demostración del teorema 4 y, consecuentemente, del teorema 6.

1.2. Representación del tiempo como variable continua

En la sección 2.1 del capítulo primero se planteaba la posibilidad de desarrollar modelos en tiempo discreto o continuo y se optó por el primer tipo. Se pretende ahora indicar los cambios más importantes que aparecen en el modelo y los resultados alcanzados hasta el momento cuando la variable tiempo se define de forma continua.

La representación de la evolución de la información a lo largo del tiempo queda recogida por la idea de filtración, igual que en los modelos en tiempo discreto. Cuando se trabaja en tiempo continuo, para evitar problemas técnicos, es habitual suponer que la filtración verifica ciertos requisitos, conocidos con el nombre de "condiciones usuales".[48] Si la filtración de la que se parte no las verifica, se suele "aumentar", de modo que sea continua por la derecha, e incluya, en cada momento, los sucesos de probabilidad nula. Este "aumento" no tiene gran transcendencia en cuanto al significado económico. La filtración que se obtiene al aumentar la engendrada por un proceso se suele denominar "filtración natural de dicho proceso".

Los recursos financieros quedarán representados por capitales financieros, como en los modelos en tiempo discreto, o bien por rentas financieras continuas.

En la modelización de los mercados surgen las diferencias más importantes. Las estrategias y los precios de los recursos negociados quedan representados por procesos estocásticos en tiempo continuo.

[48] Ver Karatzas y Shreve (1991), pag. 10, 89 y siguientes; y Duffie (1988), pag. 135.

Como en el modelo en tiempo discreto, las estrategias serán procesos predecibles[49]. En un modelo en tiempo continuo esta exigencia significa que los procesos de estrategia deben ser medibles respecto de una filtración generada por procesos continuos por la izquierda[50]. Así el valor en un momento t del proceso predecible es conocido si se conoce el valor en t de un conjunto de procesos continuos por la izquierda; pero el valor en t de estos procesos coincidirá con su límite por la izquierda y, por tanto, será conocido antes de t.

El tipo de procesos que pueden utilizarse para representar los precios de los activos negociados en los mercados financieros queda limitado por la necesidad de representar las ganancias obtenidas con la negociación de dichos activos. Siguiendo a Duffie (1988), pag. 138, "los economistas han utilizado muchos modelos para el proceso estocástico que describe ganancias financieras acumuladas de la negociación con activos financieros, tomando como dato los procesos estocásticos que definen los valores de mercado y dividendos de los activos financieros, así como los procesos que describen el número de unidades de cada activo mantenidas en cada momento. Todos estos modelos son equivalentes a integración estocástica".

En el modelo en tiempo discreto, un proceso de ganancias se definió como una integral estocástica de un proceso de estrategia respecto de un proceso de precios. En los modelos en tiempo continuo también será así, pero la generalización de la integral estocástica a procesos continuos no es inmediata. La necesidad de definir el proceso de ganancias hace imprescindible utilizar procesos de estrategia y de precios que garanticen la existencia de dichas integrales. Esta situación obliga a definir las clases de procesos que será posible utilizar.

[49] Mantendremos esta exigencia, aunque bajo ciertas condiciones es posible relajarla.

[50] Se enunciarán para los procesos propiedades análogas a las de las funciones de variable real. Estas propiedades deben interpretarse "en probabilidad casi segura". Diremos que un proceso verifica una propiedad (en probabilidad casi segura) cuando las realizaciones de un proceso verifican tal propiedad con probabilidad uno (la probabilidad de que no la verifiquen es cero). Así deben interpretarse propiedades como la acotación, continuidad, existencia de límites, etc.

No parece adecuado desarrollar una construcción completa de la integral estocástica en tiempo continuo, por lo que únicamente se presentarán los resultados fundamentales, con referencias a las demostraciones y, por último, quedarán delimitadas las clases de procesos que podrán ser utilizadas para modelizar estrategias y precios de activos.[51]

En el capítulo I (pag. 32) se dio la definición de integral estocástica en tiempo discreto. La generalización a tiempo continuo del concepto de integral estocástica es inmediata en dos casos particulares. El primero es el consistente en tomar como integrandos procesos simples predecibles.

Definición (proceso simple predecible)

Se dice que α es un proceso simple predecible si, para todo $t \in \Lambda$, se puede obtener en la forma $\alpha_t = \sum_{s=1}^{p} \alpha_s(\omega) . 1_{(\tau_{s-1}, \tau_s]}$, donde $\tau_{s-1} \leq \tau_s$ son tiempos de parada y $\alpha_s(\omega)$ es medible respecto de $F_{\tau_{s-1}}$.

[51] Un desarrollo excelente de estos conceptos, con objetivos similares a los aquí planteados se puede encontrar en Harrisson y Pliska (1981). El planteamiento de Duffie (1988) es algo más amplio, aunque menos general. Dothan (1990) incluye demostraciones muy claras, no de todos los resultados, pero sí de los fundamentales, lo que permite intuir el significado del prolijo proceso de construcción de la integral estocástica. Las fuentes básicas originales en que se basan los autores citados son los trabajos de la llamada "Escuela de Estrasburgo", entre los que destaca Meyer (1976). Un trabajo posterior en esta línea, muy claro y más general, es el de Elliot (1982). Se pueden encontrar construcciones diferentes de la integral estocástica, que llevan a las mismas conclusiones en Liptser y Shiryayev (1986) y en Protter (1990). En Karatzas y Shreve (1991) se encuentra una construcción muy detallada, pero debe observarse que no plantea el caso más general.

Definición (integral estocástica con integrandos simples predecibles)

Sea $\Lambda = [0,T]$. La integral estocástica de un integrando simple predecible α, respecto de un proceso x, continuo por la derecha[52] se define como:

$$\int_0^t \alpha_s dx_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \left(x_{\tau_s} - x_{\tau_{s-1}}\right) + \alpha_{n+1}\left(x_t - x_{\tau_n}\right) & \text{si } 1 \leq t \leq T \end{cases}$$

donde n es el único entero para el cual $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$.

Imponer como criterio de admisibilidad para las estrategias el que sean procesos simples, implica suponer que el inversor mantiene un número de activos constante durante sucesivos intervalos aleatorios (si son deterministas se dice que el proceso es elemental). En una estrategia modelizada por un proceso simple, la combinación de activos cambia cuando se presentan las señales que representan los tiempos de parada. La restricción de las estrategias a procesos simples no sólo tiene la primera y gran ventaja de la definición inmediata del proceso de ganancias, sin apenas limitar la clase de procesos que modeliza los precios de mercado; sino, además se demuestra que esta restricción elimina otros problemas de tipo económico.

Estas razones han llevado, repetidamente, a la construcción de modelos basados en estrategias de este tipo. Así se encuentra, de hecho, en el artículo de Harrison y Kreps (1979) aceptado generalmente como punto de partida del enfoque moderno de los modelos de arbitraje, y en Harrison y Pliska (1981). En la actualidad la mayoría de los autores encuentran que este criterio es demasiado restrictivo[53]; pero, aunque menos frecuentes, otros autores consideran que es preferible utilizar integrandos simples para conseguir la mayor generalidad en los procesos que pueden modelizar los precios[54].

[52] El requisito de continuidad por la derecha se puede evitar si, en lugar de trabajar con integrandos simples se utilizan integrandos elementales, esto es los intervalos en que permanece constante el proceso son deterministas.

[53] Se puede ver una discusión sobre la necesidad de integrandos más generales en Delbaen y Schachermayer (1994).

[54] Ver Frittelli (1997).

El segundo caso particular en que es inmediata la extensión al tiempo continuo de la integral estocástica, encuentra su punto de partida en el cálculo infinitesimal determinista: consiste en construir una integral de Stieltjes para cada momento t y para cada estado de la naturaleza, de forma que si estas integrales existen, definen una variable aleatoria en cada instante, a la que otorgamos el nombre de "integral de Stieltjes aleatoria".

Este procedimiento permite trabajar con una clase de integrandos mucho más amplia que la de integrandos simples. Veamos las condiciones para que el proceso α, definido en (Ω,F,P) pueda utilizarse como integrando en una "integral de Stieltjes aleatoria". Es condición necesaria que las funciones $\alpha(\omega, t)$ definidas en $\Omega \times [0,T]$ por la igualdad $\alpha(\omega, t) = \alpha_t(\omega)$ sean medibles respecto de $F\times B([0,T])$, donde $B([0,T])$ es el σ-álgebra de Borel en $[0,T]$. Es condición suficiente que además de cumplir este requisito sean acotadas. Veremos que esta condición suficiente puede relajarse.

El problema que se encuentra aquí es que la existencia de la "integral de Stieltjes aleatoria" se puede garantizar integrando respecto de una clase de procesos demasiado reducida, la de los procesos de variación finita. A continuación se presenta la definición de esta clase de procesos y de la integral aleatoria de Stieltjes.

Definición (proceso con variación finita)

Dado un espacio de probabilidad (Ω,F,P) con una filtración $\Im=\{F_t\}_{t\in\Lambda}$, y un proceso estocástico $x=\{x_t\}_{t\in\Lambda}$, adaptado a $\Im$, se dice que dicho proceso tiene variación finita si es continuo por la derecha con límite por la izquierda[55] y sus trayectorias son funciones con variación acotada sobre todo intervalo compacto de su dominio, con probabilidad uno.

[55] Esta propiedad debe entenderse en sentido casi seguro. Se suele conocer por las iniciales francesas: *cadlag*.

Definición (variación total de un proceso con variación finita)

Dado un proceso estocástico $x = \{x_t\}_{t\in\Lambda}$, con variación finita en un espacio de probabilidad (Ω,F,P), se denomina variación total del mismo en el intervalo (0,t] y se representa por $Var(x)_t = \int_0^t |dx_s|$, a la variable aleatoria definida como el límite respecto de las particiones dioicas del intervalo (0,t], dadas por $t_{m,j} = j.2^{-m}$, donde j, m son enteros no negativos con $t_j \leqq t$, cuando m tiende a infinito, de las sumas:

$$\sum_{j\geq 1} \left| f(t_{m,j}) - f(t_{m,j-1}) \right|$$

Definición (integral de Stieltjes aleatoria de un proceso acotado respecto de un proceso de variación finita)

Dado un proceso estocástico x con variación finita y un proceso medible acotado α, en un espacio de probabilidad (Ω,F,P), se denomina integral de Stieltjes de α con respecto a x, en el momento t, y se representa[56] por $(\alpha \bullet x)_t$ a la variable aleatoria definida del siguiente modo:

$$(\alpha \bullet x)_t(\omega) = \int_0^t \alpha_s(\omega)\, dx_s(\omega)$$

Los procesos que parecen más adecuados para la modelización de precios de activos con riesgo son, fundamentalmente, de variación infinita. Esto nos obliga a utilizar un proceso de construcción de la integral estocástica más general que permita integrar según procesos con variación infinita, sin limitación a integrandos simples. Para plantear el problema de la construcción de la integral estocástica según clases de procesos más amplia, nos basaremos en la definición de martingala, dada en el capítulo III (pag. 117).[57] Partiendo de ella definimos las clases de procesos estocásticos conocidas como martingalas locales y semimartingalas.

[56] Se utilizará la representación introducida para tiempo discreto en la página 32.

[57] La definición dada es válida tanto para un modelo en tiempo discreto como para un modelo en tiempo continuo

Para la definición de martingala local, partimos de la definición de localización de un conjunto de procesos estocásticos.

Definición (localización o localización en sentido habitual)

Sea N una clase de procesos aleatorios definidos en el espacio de probabilidad (Ω,F,P) con una filtración $\Im=\{F_t\}_{t\in[0,T]}$. Se dice que un proceso $x=\{x_t\}$ pertenece a la clase N_{loc}, si y solo si existe una secuencia $\{\tau_m\}$ de tiempos de parada, tal que:

$$P(\tau_m = T\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

y para cada $m \geq 1$, el proceso $x_{t\wedge\tau_m}$ [58] pertenece a N.[59] N_{loc} se llama localización de N.

Por el hecho de estar trabajando con procesos definidos en un intervalo de tiempo [0, T], podemos plantear una definición inmediata de martingala local.

Definición (martingala local)

Dado un espacio de probabilidad (Ω,F,P) con una filtración $\Im=\{F_t\}_{t\geq 0}$, sea M el conjunto de martingalas respecto de $\Im$, continuas por la derecha con límite por la izquierda (cadlag). Se denomina martingala local a cualquier elemento del conjunto M_{loc}.[60]

Se demuestra que toda martingala es una martingala local.[61]

---

[58] Con $\wedge$ se representa la operación consistente en tomar el mínimo. El proceso $x_{t\wedge\tau_m}$ tomará valor x_t para $t< \tau_m$ y valor constante x_{τ_m} para $t>\tau_m$. Este proceso recibe el nombre de proceso x_t parado en τ_m.

[59] Este concepto se diferencia del concepto de localización para integrandos, en que el proceso parado, $x_{t\wedge\tau_m}$, se sustituye por el proceso $x_t \cdot 1_{\{t\leq\tau_m\}}$. Este concepto de localización para integrandos permite ampliar la clase de integrandos para los que está definida la integral de Stieltjes aleatoria, respecto de procesos con variación finita, a procesos predecibles localmente acotados.

[60] Si los procesos están definidos en el intervalo de tiempo $[0, \infty)$, es necesario exigir una condición más a los procesos del conjunto M: la de ser uniformemente integrables o, equivalentemente que el conjunto de sus trayectorias sea uniformemente integrable; ver Elliot (1982), pag. 6, o Dothan (1990), pag. 237.

[61] Elliot (1982) pag. 85

Definición (semimartingala):

Dado un espacio de probabilidad (Ω,F,P) con una filtración $\Im=\{F_t\}_{t\geq 0}$, y un proceso estocástico $x=\{x_t\}$ adaptado a $\Im$, con trayectorias continuas por la derecha y con límite por la izquierda (cadlag), se dice que x es una semimartingala si dicho proceso se puede descomponer (en general, no de un modo único) en la forma

$$x_t = x_0 + m_t + a_t,$$

en donde:

m_t representa una martingala local que verifica $m_0 = 0$

a_t representa un proceso estocástico cuyas trayectorias tienen, con probabilidad uno, variación finita sobre intervalos $[t_1,t_2]$.

La clase más general de procesos respecto de los cuales está definida la integral estocástica es la clase de las semimartingalas.[62] Si una semimartingala no tiene variación finita, no es posible construir una integral de Stieltjes aleatoria, porque dependería del punto de los subintervalos en que se tomase el valor del integrando. Existen diversas construcciones alternativas de integrales en función del punto seleccionado[63].

La integral estocástica es la construcción que verifica, bajo determinadas condiciones, o en sentido local, una importante propiedad que se presenta a continuación. Esta propiedad se verifica para los dos casos de integral estocástica planteados y se conoce con el nombre de "conservación de martingalas".

---

[62] Es obvio que un proceso de variación finita es una semimartingala, así como lo es una martingala local y, por tanto una martingala.

[63] La construcción más conocida, aparte de la que se presenta aquí es la Integral de Stratanovich, que conserva las reglas del cálculo infinitesimal.

Proposición IV.I

Si el proceso $\{\alpha_t\}$ es predecible, el proceso $\{x_t\}$ es una martingala y la integral $\int_0^t \alpha_s dx_s$ está definida con integrandos simples o como integral de Stieltjes aleatoria, entonces dicha integral es una martingala.

Obsérvese que la exigencia de que el integrando sea predecible se verificará siempre que la integral represente un proceso de ganancias, puesto que dicho integrando será el proceso de estrategia. La demostración de esta proposición, para los distintos casos, puede encontrarse en diferentes textos de cálculo estocástico. Para el caso discreto es muy clara la demostración de Dothan (1990), pag. 99. En tiempo continuo, para el caso de procesos simples integrados según una martingala, se puede encontrar en Karatzas y Shreve (1991), pag 138; y para el caso de la integral aleatoria de Stieltjes respecto de una martingala (incluso sólo local) con variación finita, se puede encontrar en Liptser y Shiryayev (1986), pag. 91.

La construcción de la integral estocástica respecto de una semimartingala, a partir de su descomposición en la forma $x_t = x_0 + m_t + a_t$, lleva a la obtención de la clase más general de procesos que pueden utilizarse como integrandos. Si bien no se desarrollará dicha construcción, se indicarán los pasos que nos permiten definir dicha clase de procesos. Resulta natural plantear la integral estocástica de un proceso α, con respecto a x del siguiente modo:

$$\alpha \bullet x = \alpha \bullet m + \alpha \bullet a$$

ya que se puede demostrar la independencia de la descomposición concreta de la semimartingala.

El segundo sumando es una integral de un proceso respecto de un proceso con variación finita, por lo que está definido como integral de Stieltjes aleatoria, si el proceso α es predecible y localmente acotado (ver nota 59). El primer sumando se presenta como una integral respecto de una martingala local. Se hace necesario definir esta integral así como la clase de integrandos para los cuales existe.

La razón por la que la integral de Stieltjes aleatoria no está bien definida es que el proceso respecto del que integramos puede tener variación infinita. La construcción de la integral estocástica requiere entonces la definición de otra medida de variación. Surge así la definición de variación cuadrática de un proceso. Para definir la variación cuadrática es necesaria una definición previa.

Definición (convergencia uniforme en probabilidad en compactos)[64]

Una secuencia de procesos $(x_m)_{m\geq 1}$, con $x_m=\{x_{m,t}\}_{t\in[0,T]}$ converge a un proceso $x = \{x_t\}_{t\in[0,T]}$ uniformemente en compactos en probabilidad si, para cada t>0, $\sup_{0\leq s\leq t}|x_{m,s} - x_s|$ converge a cero en probabilidad.

Definición (variación cuadrática de una semimartingala)[65]

Sea x una semimartingala. Dada una partición dioica del intervalo [0,T], de elementos $t_{m,j}$, entonces, en la topología de convergencia uniforme en compactos en probabilidad, para cada $t\geq 0$,

$$\lim_{m\to\infty}\left[x_0^{\,2} + \sum_{j\geq 1}\left(x_{t\wedge t_{m,j}} - x_{t\wedge t_{m,j-1}}\right)^2\right]$$

se denomina variación cuadrática de x en el intervalo [0,t], y se representa por $[x,x]_t$.

---

[64] Para resultados respecto de esta convergencia, ver Protter (1990), pag 49.

[65] Es frecuente que lo que aquí aparece como definición aparezca en los distintos textos como caracterización de la variación cuadrática. Ver, por ejemplo, Protter, pag. 61; Dothan, pag. 265.

Proposición IV.2

El proceso de variación cuadrática de una semimartingala x: $[x,x]=\{[x,x]_t\}_{t\in[0,T]}$ es una semimartingala con variación finita.

La demostración puede encontrarse en Protter, pag. 60.

En adelante, dado (Ω,F,P), y un número $1\leq k<\infty$, se representará por $L^k(\Omega,F,P)$, al espacio vectorial de variables aleatorias de (Ω,F,P) tales que $E[|x|^k]<\infty$.

La clase más general de integrandos para los que está definida la integral estocástica respecto de una martingala local x, es la localización (para integrandos, en el sentido de nota 59) del conjunto $E(x)$ de procesos α tales que la variable aleatoria:

$$\left(\alpha^2 \bullet [x,x]\right)_t^{1/2}$$

pertenezca a $L^1(\Omega, F, P)$, para todo $t\in[0,T]$. Este conjunto se representará por $E_{loc}(x)$.

Esto nos permite definir la clase más general de procesos que pueden utilizarse como integrandos respecto de una semimartingala x, que representaremos por I(x).

Definición (I(x))

Dada una semimartingala x, con una descomposición $x = x_0 + m + a$, donde a es un proceso con variación finita y m es una martingala local, con $m_0 = 0$, I(x) es el conjunto de procesos α predecibles, tales que:

i) $\alpha \in E_{loc}(m)$

ii) la integral de Stieltjes aleatoria $(\alpha \bullet a)$ tiene variación finita.

Para este caso general, daremos como definición lo que para muchos autores es sólo una caracterización de la integral estocástica. Esta caracterización permite intuir su significado como integral, pero no permite intuir la necesidad y la posibilidad de utilizar las clases de integrandos para los que está definida.

Definición (Integral estocástica. Caso general)

Sea x una semimartingala , α un proceso del conjunto I(x), y la secuencia de particiones $\Pi_m = \{\tau_{m,0}, \tau_{m,1}, \ldots\}$. Entonces, en la topología de convergencia uniforme en compactos en probabilidad, para cada $t \geq 0$, la integral de α con respecto a x es el siguiente límite:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j\geq 1} \alpha_{\tau_{m,j-1}} \left(x_{t\wedge\tau_{m,j}} - x_{t\wedge\tau_{m,j-1}} \right)$$

y se representa por $\int_0^t \alpha_s dx_s = (\alpha \bullet x)_t$.

Esta definición de la integral estocástica recoge como casos particulares todos los citados anteriormente.[66]

Obsérvese que al comparar esta definición con la de una integral de Stieltjes aleatoria, la diferencia fundamental (aparte del tipo de convergencia utilizado) es la especificación del punto del subintervalo en que se toma el valor del proceso integrando en cada sumando. Esta especificación, como ya se ha indicado, es necesaria siempre que se integra respecto de un proceso con variación infinita; en este caso, se ha tomado el extremo inferior del subintervalo.

[66] Las integrales obtenidas por los distintos procedimientos, dan lugar a procesos indistinguibles. La definición de procesos indistinguibles puede encontrarse en Elliot (1982), pag 13.

Por tanto, la necesidad de definir el proceso de ganancias en el modelo exige que, si se trabaja en tiempo continuo, los procesos elegidos para modelizar la evolución de los precios sean semimartingalas, y las estrategias pertenezcan a la clase I(x). La definición del proceso de ganancias es, entonces, inmediata.

Definición (proceso de ganancias de una estrategia en tiempo continuo):

Dado un mercado financiero, con procesos de precios de los activos representados por semimartingalas $S_i = \{S^i_t\}_{t\in[0,T]}$, con i = 0, 1,..., m-1, se denomina proceso de ganancias de una estrategia de componentes $\theta^i = \{\theta^i_t\}_{t\in[0,T]} \in I(S^i)$ al proceso estocástico $G(\theta) = \{G_t(\theta)\}_{t\in[0,T]}$ definido del modo siguiente:

$$G_t(\theta) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\theta^i \bullet S^i\right)_t = \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^t \theta^i_s dS^i_s$$

Como en el planteamiento en tiempo discreto, el valor de una estrategia en un momento t, será el producto:

$$V_t(\theta) = (\theta^0\ \theta^1 \ldots \theta^m) \cdot \begin{pmatrix} S^0 \\ S^1 \\ \vdots \\ S^m \end{pmatrix}.$$

Y se dirá que una estrategia es autofinanciada cuando las variaciones en el valor de una estrategia se deban únicamente a las ganancias acumuladas. Así, θ es autofinanciada si, para todo $t \in [0,T]$, se verifica:

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + G_t(\theta)$$

Es posible utilizar la definición de oportunidad de arbitraje (tipo I) dada en el capítulo I (página 34), y este es el planteamiento más frecuente.

También podría usarse la definición de medida de probabilidad neutral al riesgo, o medida de martingala, dada en el capítulo III (página 118); aunque es frecuente relajarla, exigiendo únicamente que los precios descontados de los activos sean martingalas locales.

Sin embargo, a partir de aquí, los resultados no son tan claros ni tan directos como en los *modelos con tiempo discreto*. Con estas definiciones, la ausencia de oportunidades de arbitraje no es condición necesaria y suficiente de existencia de alguna medida de probabilidad neutral al riesgo. Aun así, se acepta generalmente que existe relación entre estos dos conceptos y los esfuerzos se concentran en encontrar condiciones adicionales que permitan formalizar tal relación. Estas condiciones suelen imponerse al conjunto de estrategias admisibles, de modo que la definición de oportunidad de arbitraje resulta más débil.

El trabajo de Harrison y Pliska (1981) es el primero en que se plantea el problema en estos términos. Finalmente toman como admisibles aquellas estrategias simples autofinanciadas, cuyo proceso de valor es no negativo y sigue una martingala (*no sólo martingala local*) bajo las medidas de probabilidad neutrales al riesgo. Demuestran que, entonces, suponiendo que el conjunto de medidas de probabilidad neutrales al riesgo no es vacío, se puede asignar a los derechos contingentes alcanzables un único valor por razonamientos de arbitraje. Este valor se determinaría en la forma usada con el planteamiento discreto: como el valor esperado, bajo una probabilidad neutral al riesgo, del pago que proporciona el derecho, descontado.

El resultado aceptado como más satisfactorio hasta el momento es el de Delbaen y Schachermayer (1994)[67], basado en una generalización de la condición de ausencia de oportunidades de arbitraje que denominan "ausencia de rendimientos gratuitos con riesgo despreciable"[68]. Se demuestra que esta condición es necesaria y suficiente de existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente, entendida como aquella bajo la cual los precios descontados de los activos son martingalas locales, y define los mismos conjuntos de probabilidad cero que la original.

---

[67] Este planteamiento es también más general en cuanto que define el problema en el intervalo temporal $[0, \infty)$. Existen otros trabajos que estudian este tipo de generalización, tanto en tiempo discreto como continuo.

[68] Originalmente, "no free lunch with vanishing risk".

1.3. Tipos de interés estocásticos

En los modelos planteados hasta ahora se ha supuesto que existe un activo cuyo precio no depende del estado de la naturaleza que se presente. Desde el comienzo es conocido el precio que tendrá en cada momento y, por tanto el tipo de interés. Un individuo conoce el dinero que tendrá en cualquier momento si negocia con dicho activo y el tipo de interés al que podría invertirlo de nuevo o pedir préstamo. Decimos entonces que tal activo no conlleva riesgo alguno, y se le suele denominar activo sin riesgo.

Parece más próxima a la realidad una situación en la que los tipos de interés futuros sean desconocidos. Estos tipos pueden representarse por un proceso estocástico. Trabajando con tiempo discreto, el activo con índice cero seguiría, al igual que en nuestro modelo, la ecuación en diferencias finitas:

$$S_t^0 = S_{t-1}^0 .(1+r_t)$$

donde, ahora, r_t es una variable aleatoria no negativa medible respecto de F_{t-1}. Esta variable representaría el tipo de interés estocástico al que se puede prestar o pedir prestado en el mercado en el momento t-1. Suele utilizarse, como en el caso de tipos deterministas, la normalización $S_0^0 = 1$. Este activo financiero suele recibir el nombre de cuenta bancaria. Aunque no puede decirse, en sentido estricto, que sea un activo sin riesgo, se diferencia de los demás en que su precio es siempre estrictamente positivo.

Se observa una primera consecuencia de esta generalización del modelo para la valoración de flujos financieros ciertos. Mientras se supone que existe un activo sin riesgo o, lo que es lo mismo, una cuenta bancaria con tipo de interés cierto, cualquier flujo cierto es replicable. Se sigue que el valor en el momento $\tau = 0, 1, \ldots, T-1$, de un flujo cierto en el momento $h = 1, 2, \ldots, T$, $h > \tau$, será siempre un valor real cierto. Con tipos de interés estocásticos no se puede seguir el razonamiento que lleva a este resultado.

Trabajando con tipos de interés estocásticos, pueden definirse precios y valores descontados como aquellos que resultan de utilizar como numerario la cuenta bancaria, y llamar medidas de probabilidad neutrales al riesgo a aquellas bajo las cuales los precios descontados de los activos son martingalas. Se demuestra entonces un resultado análogo al Teorema 6, esto es, la existencia en un mercado de una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a la inicial es condición necesaria y suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje.[69]

Utilizando la cuenta bancaria como numerario, la valoración de flujos replicables sigue los mismos principios utilizados en los capítulos II y III. Se define el mercado M* por la incorporación al mercado M de un activo ficticio que da derecho a un flujo replicable, f_T. Sea S_h^f el precio de este activo en el momento h. El único valor de S_h^f que permite ausencia de oportunidades de arbitraje en M* es el siguiente:

$$S_h^f = S_h^0 . E_Q\left[\frac{f_T}{S_T^0} \middle| F_h \right]$$

donde Q es una probabilidad neutral al riesgo.

Analizando ahora la valoración de un flujo cierto que se recibe en un momento τ, se observa que su valor descontado será una variable aleatoria. Por esta razón el valor de tal flujo en un momento $h > \tau$, aun en el caso en que pueda determinarse, no será cierto, sino una variable aleatoria, medible respecto de F_h. Por esta razón, se dice que los activos que dan derecho al cobro de flujos ciertos, en este entorno no son activos ciertos, sino que están sujetos a "riesgo de interés". Siempre que un cobro o pago de una inversión tenga valor futuro aleatorio, el inversor puede revisar decisiones iniciales, en función de la evolución del entorno. Surge así la posibilidad de inversor activo con pagos ciertos que se planteaba en la clasificación de la sección 1.3.4 del capítulo primero.

[69] Puede encontrarse este planteamiento en Pliska (1997).

Además de la cuenta bancaria, podrían negociarse en el mercado financiero activos cuyo pago final no dependiera del estado de la naturaleza.[70] Volviendo al razonamiento del párrafo anterior, el precio de dichos activos, que llamaremos bonos, en un momento t será una variable aleatoria medible respecto de F_t; y estarán sujetos a riesgo de interés, a pesar de dar derecho a un pago cierto. Podemos suponer que este pago es unitario.

Obsérvese que en el caso de tipos de interés deterministas los bonos y la cuenta bancaria representan el mismo tipo de activo que coincide con el activo sin riesgo que aparecía en ese tipo de modelo. En este sentido, se puede decir que al suponer tipos de interés estocástico hay dos posibles generalizaciones del activo sin riesgo. Inicialmente hemos planteado como generalización la cuenta bancaria, pero se podría trabajarse con un bono cupón cero de vencimiento T.

Si, en lugar de la cuenta bancaria, se utiliza como numerario el bono cupón cero de vencimiento T pueden construirse medidas de probabilidad bajo las cuales los precios, en este numerario, sean martingalas. Denominemos a éstas "medidas de probabilidad ajustadas al riesgo del plazo T"[71]. Se demuestra que entonces se verifica el "teorema fundamental": la existencia de una medida de probabilidad ajustada al riesgo de plazo T es condición necesaria y suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje. Se sigue de manera inmediata que la existencia de una medida de probabilidad ajustada al riesgo de plazo T es condición necesaria y suficiente de la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo (en que el numerario es la cuenta bancaria).

---

[70] En la realidad este tipo de activos se identifica con los títulos emitidos por el Estado; y puesto que hemos supuesto que los activos financieros no pagan dividendos, serían bonos cupón cero. En el mercado financiero español los únicos títulos del Estado que no pagan cupones son las letras del Tesoro, emitidas a corto plazo. Sin embargo, aunque los títulos a largo plazo paguen cupones a lo largo de su vida, la posibilidad de segregarlos para su negociación, recientemente incorporada al mercado, los transforma en un conjunto de bonos cupón cero.

[71] Se ha utilizado este término para traducir lo que se suele conocer como "forward risk adjusted probability measures".

Estas dos medidas de probabilidad están relacionadas.[72] Si representamos por B_t^T el precio en el momento T del bono cupón cero con vencimiento en T, y por $Q_{plazo\ T}$, la nueva medida de probabilidad, se tiene que:

$$Q_{plazo\ T}(\omega) = \frac{Q(\omega)}{B_0^T . S_T^0(\omega)}$$

Los flujos replicables se valorarían en la forma habitual, con el nuevo *numerario* y la *nueva medida* de probabilidad. Se define el mercado M* por la incorporación al mercado M de un activo ficticio que da derecho a un flujo replicable, f_T. Sea S_h^f el precio de este activo en el momento h. El único valor de S_h^f que permite ausencia de oportunidades de arbitraje en M* viene dado por la siguiente variable aleatoria:

$$S_h^f = B_h^T . E_{Q_{plazo\ T}}\left[\frac{f_T}{B_T^T}\middle| F_h\right] = B_h^T . E_{Q_{plazo\ T}}\left[f_T \mid F_h\right]$$

La segunda igualdad se deriva del supuesto $B_T^T=1$. Es precisamente esta simplificación la que lleva a que, con tipos de interés estocásticos, se utilicen frecuentemente bonos como numerario.[73]

Con un modelo en tiempo continuo puede trabajarse de modo análogo. En Musiela y Rutkowski (1997) se encuentra un desarrollo exhaustivo del tema. Un trabajo más breve y muy claro es el de Björk (1996), que trata también, y ofrece bibliografía muy interesante sobre el problema de cambio de numerario, con carácter general.

[72] En Pliska (1997), pag. 222-224, puede encontrarse una demostración muy clara de estos resultados. De hecho, se demuestra que la existencia de una probabilidad neutral al riesgo es condición necesaria y suficiente de existencia de una probabilidad ajustada al riesgo de un plazo dado, y la relación entre ellas. Es inmediato, entonces, el nuevo "teorema fundamental", al utilizar el bono como numerario.

[73] Se ha planteado aquí este cambio de numerario porque es frecuente utilizarlo, pero podría usarse también con tipos de interés deterministas y, en cualquier caso, podrían utilizarse como numerarios distintos activos o, incluso carteras de activos. Girotto y Ortu (1997) y (1998) discuten en un entorno finito como el aquí descrito condiciones para la existencia de numerarios en los mercados financieros; el resultado fundamental es que, en un mercado sin arbitraje, existen numerarios si y sólo si puede construirse una estrategia dinámica que mantenga valor estrictamente positivo a lo largo del tiempo.

1.4. Decisiones de consumo. Modelos de equilibrio

Por las hipótesis de trabajo de la tesis, no se han analizado las decisiones de los consumidores de reparto en el tiempo de consumo e inversión. Puesto que no se establecen supuestos sobre preferencias[74], solamente es posible razonar por argumentos de arbitraje; pero, puesto que a los agentes de consumo sólo se les ha permitido inversión financiera y se ha supuesto ausencia de oportunidades de arbitraje en los mercados financieros, no habría decisiones mejores que otras. Para estudiar las decisiones de los consumidores es necesario incorporar más supuestos sobre las preferencias. Tal y como se ha razonado en la sección 2.4.1 del capítulo primero, estas preferencias suelen representarse por una función de utilidad. Si se acepta que el objetivo final depende del consumo, la función de utilidad para un periodo de tiempo dependerá, en general, del consumo en ese periodo y de la riqueza final para consumo posterior. Las funciones de utilidad pueden depender o no del estado de la naturaleza que se presente.

Especificada la función de utilidad para un consumidor y sus restricciones -técnicas y presupuestarias- se plantea un problema matemático de optimización: el consistente en determinar qué estrategia de consumo e inversión, entre las posibles, se debe seguir en el periodo considerado para hacer máxima la utilidad. El tratamiento que se da en Merton (1971) se considera el comienzo del enfoque con que se analizan actualmente los problemas de selección en el tiempo de consumo e inversión. Aunque, como se ha dicho, este tipo de problemas no ha sido tratado en este trabajo, sí guarda relación con los desarrollos presentados. Quizá la relación más importante está en la hipótesis básica de la tesis: ausencia de oportunidades de arbitraje en los mercados financieros. Si esta hipótesis no se verifica, ningún "problema de reparto de consumo e inversión" en el tiempo tiene solución, bajo el supuesto de que el consumidor prefiere, en igualdad de condiciones, más riqueza a menos.[75]

[74] Únicamente se supone que se prefiere más riqueza a menos.

[75] Puede encontrarse una justificación sencilla de esta afirmación en Kreps (1981), pag. 15.

Si surgiera, en un momento, una oportunidad de arbitraje en el mercado, la presencia de agentes de consumo racionales la haría desaparecer inmediatamente. Por tanto, una primera conclusión es que, aunque los "problemas de consumo" no se tratan en la tesis, suponer que los agentes de consumo son racionales avala la hipótesis básica del trabajo.

La relación planteada puede escribirse del siguiente modo: la ausencia de oportunidades de arbitraje es condición necesaria de existencia de solución a los problemas de consumo. Puesto que la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo equivalente a la probabilidad de partida es condición necesaria y suficiente de ausencia de oportunidades de arbitraje, será también condición necesaria de existencia de solución a los problemas de consumo. La resolución clásica de problemas de optimización comienza por la aplicación de una condición necesaria de primer orden (depende de derivadas primeras). Puede analizarse, entonces, la relación entre estas "condiciones necesarias de primer orden" y la ausencia de oportunidades de arbitraje: la conclusión a la que se llega con este análisis es la equivalencia entre estas condiciones.[76] .

Procede entonces relacionar las "condiciones necesarias de primer orden" y las medidas de probabilidad neutrales al riesgo equivalentes a la medida inicial. Este análisis permite observar proporcionalidad entre las probabilidades neutrales al riesgo asignadas a los estados de la naturaleza y las tasas marginales de sustitución de los agentes, definidas por las derivadas primeras de sus funciones de utilidad. Esta proporción será única en el caso de mercados completos, puesto que existe una sola medida de probabilidad neutral al riesgo. En el caso de mercados incompletos, se dará la proporcionalidad con alguna de las medidas de probabilidad neutrales al riesgo, lo que puede indicar un criterio adicional de valoración en el caso de mercados incompletos para un agente dado, si se conoce la función de utilidad de dicho agente[77].

---

[76] Uno de los planteamientos más generales de esta equivalencia puede encontrarse en Duffie y Skiadas (1994). Además, en este artículo se ofrece una revisión bibliográfica del tema.

[77] Recuérdese que si los mercados son incompletos, no es posible en generar asignar un único valor por razonamientos de arbitraje. Cuando se utilizan las preferencias, a través de una función de utilidad, como criterio adicional se habla de "valoración óptima". Este enfoque se discute en Luenberger (1998), pag. 448 y siguientes.

El hecho de que la existencia de solución implica la existencia de una probabilidad neutral al riesgo permite simplificar la resolución de problemas de consumo, mediante un método específico que sustituye los métodos clásicos, conocido como método de las martingalas. Consiste en descomponer el problema en dos partes: en la primera se determina el proceso de consumo, entre los factibles, para el que se consigue el máximo. La caracterización del conjunto de procesos factibles utiliza el concepto de probabilidad neutral al riesgo. La segunda parte consiste en determinar la estrategia de inversión que debe seguirse para conseguir ese proceso de consumo.[78]

Cuando se supone especificado el comportamiento de todos los agentes de consumo, puede trabajarse con el comportamiento de la economía en conjunto. La representación matemática de una economía que se utiliza habitualmente tiene su origen en los modelos de Arrow y Debreu de los años cincuenta. En cualquier representación de una economía se supone especificado un conjunto de consumidores a través de sus preferencias, pero el tipo de modelo que se utiliza para el resto de las características puede variar mucho. En Duffie (1988) se desarrollan de forma casi exhaustiva los distintos modos de representar una economía, con distintos grados de complejidad[79], y se explican las relaciones entre estos modelos.

La primera consecuencia de suponer representados a todos los agentes es que la cantidad de recursos asignados a cada fin y los precios, en el momento considerado, pasan a ser variables endógenas en el modelo. Se hace necesario, entonces, analizar si la asignación y los precios que provocan las actuaciones de los agentes mantienen un mercado coherente. La mínima condición que se impone es que, tras la actuación de los agentes según sus objetivos, la oferta iguale a la demanda (se suele decir que "los mercados se vacíen"). Cuando esta condición se verifica se dice que el mercado alcanza el equilibrio.

[78] El método de las martingalas se desarrolla en Pliska (1997): en el capítulo segundo para modelos de un periodo y en el capítulo quinto para modelos de varios periodos en tiempo discreto. Para modelos en tiempo continuo se desarrolla en Karatzas (1997): en el capítulo segundo para el caso de mercados completos y en el capítulo quinto para el caso de mercados incompletos.

[79] Los mercados pueden incluir o no producción, pueden especificar o no el proceso de dotaciones o pueden estar o no restringidos a un mercado.

La formalización del concepto de equilibrio se debe a Leon Walras (1834 - 1910), pero el enfoque actual lo plantean fundamentalmente Arrow y Debreu[80]. Los modelos de equilibrio suelen tener dos objetivos: analizar si efectivamente existe tal equilibrio y relacionarlo con condiciones de eficiencia global. La medida de eficiencia más utilizada es la de "óptimo de Pareto"[81]. Las relaciones entre equilibrio y eficiencia se conocen con el nombre de "teoremas del bienestar". Se llama "primer teorema del bienestar" al que asegura que, bajo determinadas condiciones, el equilibrio de una asignación implica que se trata de un óptimo de Pareto. El "segundo teorema del bienestar" se refiere a la implicación inversa. Cuando se trabaja con mercados completos, con las hipótesis habituales, se demuestra la existencia de equilibrio y el primer teorema del bienestar en una economía de intercambio. En la actualidad se están estudiando las condiciones bajo las cuales se siguen estos resultados con mercados incompletos.[82]

El equilibrio puede analizarse para modelos de economía con distintos grados de generalidad, y modelos de economías parciales pueden considerarse parte de un modelo más general. Se dice que un mercado es viable si puede formar parte de un equilibrio general. Los modelos de equilibrio encuentran apoyo en la definición de oportunidad de arbitraje y, por consiguiente, en la de medida de probabilidad neutral al riesgo. Puesto que la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado es condición necesaria de existencia de óptimo para los consumidores es también condición necesaria de existencia de equilibrio y de viabilidad de un mercado. Bajo determinadas condiciones, como espacio de mercancías finito, la ausencia de oportunidades de arbitraje es también condición suficiente de viabilidad de un mercado. El estudio de las relaciones entre

[80] Ver Arrow (1953), Arrow y Debreu (1954) y Debreu (1959).

[81] Se dice que una asignación alcanza un óptimo de Pareto cuando ningún agente puede mejorar su situación sin que al menos otro empeore la suya.

[82] En Magill y Quinzii (1996) se estudian exhaustivamente los modelos de equilibrio con mercados incompletos, con abundante bibliografía y notas históricas. Las referencias clásicas son Radner (1972), para una adaptación del concepto de equilibrio a mercados incompletos y Hart (1975), para una primer estudio sobre la optimalidad del equilibrio. Resultados más recientes pueden encontrarse en el conjunto de artículos recogidos en un número especial del *Journal of Mathematical Economics*, introducido por Duffie (1996).

viabilidad, arbitraje y medidas de probabilidad neutrales al riesgo es el objeto del artículo de Harrison y Kreps (1979) que marca el comienzo de un enfoque general de los modelos de valoración por arbitraje. En el artículo de Kreps (1981) se clarifica la nomenclatura utilizada y se delimita la validez de algunos resultados.

Las consecuencias que se siguen de exigir ausencia de oportunidades de arbitraje en un mercado serán siempre condiciones necesarias de equilibrio. Por esta razón, el planteamiento presentado en la tesis puede entenderse como un paso previo a la construcción de un modelo de equilibrio. La incorporación de las preferencias de los consumidores permitiría la definición de los problemas de consumo, con lo que se podría trabajar con el equilibrio de una economía de intercambio neto, o de intercambio si se definen dotaciones. Resulta más complicado la consideración de las decisiones de producción, ya que para formular los problemas de optimización de las empresas, es necesario fijar su objetivo. Este problema queda resuelto en ambiente de certeza con el ya citado "teorema de separación de Fisher". En Milne (1972) se demuestra que en un modelo de equilibrio de un mercados completo de un periodo, también se sigue del teorema: las decisiones de los productores son objetivas. La regla de decisión que deduce Milne en la sección 3.3 coincide con la planteada en esta tesis para un modelo de un periodo. El modelo se basa en el modelo de equilibrio de Arrow y Debreu, pero ya apunta la idea de interpretar los precios de estado como una medida de probabilidad que denomina "distribución de probabilidad del mercado". En la sección 4.5 de este mismo trabajo Milne plantea el mismo problema para el caso de mercados incompletos y concluye que no es posible definir la función objetivo de la empresa independientemente de las preferencias de los consumidores.[83] De esta imposibilidad se sigue, a su vez, la imposibilidad de definir reglas óptimas para la toma de decisiones de producción. Ante esta imposibilidad, en esta tesis se presenta una regla de decisión definida para mercados incompletos por generalización de la regla de decisión óptima en el caso de mercados completos.

[83] Pueden encontrarse discusiones de este problema, sin resolver, en Duffie (1988), sección 13I, y en Magill y Quinzii (1996), capítulo 6. Incluso especificando las preferencias de los propietarios de la empresa, el problema no queda resuelto (salvo en el caso trivial de propietario único) pues es necesario añadir hipótesis sobre el tipo de votación; se encuentra este enfoque en Kelsey y Milne (1996).

2. ALCANCE DEL MODELO

2.1. Ajuste del riesgo en la valoración de inversión real

Irving Fisher, en su *Teoría del interés* (1930), resuelve el problema de valorar inversión cierta de un modo objetivo, siempre que se disponga de un mercado competitivo en el que todos los agentes pueden prestar y pedir prestado a un tipo de interés conocido. Se dice que la valoración es objetiva en el sentido de que no depende de las preferencias ni de las expectativas de ningún sujeto concreto y permite a los agentes de consumo separar las decisiones de inversión y consumo.[84] Esta separación hace que todos agentes de consumo, aunque tengan preferencias diferentes, tomen las mismas decisiones de inversión: las que maximizan el valor actual neto de los flujos de caja. Por tanto, esta será la regla de decisión que deberán utilizar también las empresas.

El tipo de interés de préstamos sin riesgo puede interpretarse como una medida del "valor del paso del tiempo". El teorema de separación de Fisher admite la siguiente interpretación: si el mercado valora el tiempo, tal valoración prevalece sobre las que pudieran realizar los agentes y las decisiones de inversión, en ambiente de certeza, son independientes de las preferencias.

Sin embargo, para el caso en que interviene el azar, Fisher señala tres diferencias fundamentales con el caso de certeza, que no quedan resueltas. En primer lugar, con incertidumbre, habrá distintos tipos de interés, pero no existe un tratamiento adecuado de las relaciones entre el tipo de interés y el riesgo. En segundo lugar, indica que se debe seleccionar la inversión de máximo valor actual, utilizando principios de probabilidad y prudencia, pero no detalla cómo. Por último, si existe incertidumbre, observa que los consumidores deben hacer máxima su utilidad, pero han de tener en cuenta que desconocen cuál va a ser el desarrollo posterior de los acontecimientos.

[84] Recuérdese que, por esta razón, este resultado se conoce como "Teorema de separación de Fisher".

Estos tres aspectos y las relaciones entre ellos han protagonizado la evolución de la teoría de valoración de inversiones desde Irving Fisher hasta la actualidad. La representación de la evolución de los acontecimientos se resuelve con el concepto de filtración y las técnicas de optimización dinámica permiten tenerlo en cuenta en la maximización de la utilidad. La regla del máximo valor actual se ha seguido respetando en la literatura hasta la actualidad, pero en el caso de que exista incertidumbre no ha habido acuerdo sobre el modo de calcular dicho valor. Por último, en general, se acepta la existencia de distintos tipos de interés[85] y se han desarrollado estudios teóricos que los relacionan con los distintos tipos de riesgo.

La forma más frecuente de calcular el valor actual neto en ambiente de incertidumbre se basa en el trabajo de Modigliani y Miller (1958), con la aceptación de que existe un tipo de interés para cada categoría de riesgo. En Hirshleifer (1961) se enfoca de forma directa el problema[86] y se indica que el procedimiento para calcular el valor actual consiste en descontar, al tipo de interés "adecuado": el establecido por el mercado para los intercambios entre proyectos ciertos y con riesgo, para la clase de riesgo en que cae la inversión. El método resulta ser una generalización del utilizado en caso de certeza, al sustituir los flujos por su esperanza matemática y "ajustar" el tipo de interés al riesgo de la inversión. La esperanza se calcula con la medida de probabilidad usual, esto es, con la que el decisor asigne. El primer problema que se plantea es cómo identificar la "clase de riesgo" y cómo obtener, por tanto, este "tipo de interés ajustado al riesgo". La diferencia entre el tipo ajustado al riesgo y el tipo de interés para préstamos sin riesgo suele denominarse "prima de riesgo".

[85] Esta afirmación necesita una matización, ya que actualmente se tiende a rechazar el nombre de "interés" para el rendimiento de activos que incorporen riesgo. El rendimiento de los activos es la variación de valor, más dividendos si hubiera, por unidad de valor inicial, El término interés quedaría reservado para medidas del coste de los préstamos y, por tanto, para activos sin riesgo. Se puede encontrar una discusión de la diferencia entre interés y rendimiento en Rodríguez (1997), pag. 133. El los párrafos siguientes seguiremos hablando de distintos tipos de interés en función del riesgo porque esta es la terminología habitual en los modelos que se presentan a continuación.

[86] Ver el segundo párrafo de la página 118 para una explicación de la regla de cálculo del valor actual, y desde el segundo párrafo de la página 119 hasta el final del artículo para la relación de este planteamiento con el trabajo de Modigliani y Miller (1958).

Como ya se indicaba en el capítulo primero, entiendo que la maximización del valor actual neto no es un criterio de decisión si no se indica cómo se calcula tal valor. Del mismo modo, no es una solución para el cálculo de tal valor en ambiente de riesgo indicar que se descontará el valor esperado de los flujos a la tasa de descuento ajustada al riesgo, si no se indica cómo se realizará el ajuste.

El enfoque que ha tenido más influencia para la determinación de tipos de interés ajustados al riesgo ha sido el del modelo de equilibrio desarrollado en Sharpe (1964) y Lintner (1965) que conoce habitualmente como CAPM[87]. Se trata de un modelo de equilibrio de un periodo, basado en el supuesto de que los inversores toman sus decisiones a partir de la media y la varianza del rendimiento de los activos. Para justificar este comportamiento es necesario aceptar que los rendimientos siguen una distribución de probabilidad normal o que las funciones de utilidad de los individuos son cuadráticas. Para establecer el equilibrio el modelo exige expectativas homogéneas en los individuos. Gran parte de las críticas al CAPM argumentan que parte de supuestos demasiado restrictivos bien sobre preferencias de los individuos, sobre expectativas o ambas. La otra crítica frecuente es la dificultad de generalizarlo para su aplicación a modelos de varios periodos. La conclusión fundamental de este modelo es que un activo podrá formar parte de una cartera "eficiente" sólo si tiene una rentabilidad media dada.[88] La prima de riesgo será la diferencia entre esa rentabilidad y la del activo sin riesgo. Bajo los supuestos del CAPM, la prima de riesgo de cualquier activo es proporcional a la prima de riesgo de la cartera formada por el conjunto de todos los activos del mercado (cartera de mercado). La constante de proporcionalidad se denomina "beta" del activo y se define como la covarianza entre la rentabilidad del activo y la cartera del mercado, dividida entre la varianza de la rentabilidad de la cartera del mercado.

---

[87] CAPM son las siglas de "capital asset pricing model"o, en castellano: "modelo de valoración de activos financieros". Este nombre ha dado problemas porque es demasiado genérico para referirse a un modelo concreto, ya que podría parecer que el único modelo de valoración de activos financieros es el desarrollado por Sharpe y Lintner. Nosotros evitaremos el problema abusando del cambio de idioma: hablaremos de CAPM para referirnos al modelo concreto desarrollado en los años 60 por Sharpe y Lintner y reservaremos el sentido genérico de los modelos de valoración de activos.

[88] En Luenberger (1998) puede encontrarse un desarrollo muy claro del CAPM desde el punto de vista de la Teoría Financiera actual.

El CAPM es un caso particular de los llamados "modelos beta".[89] Partiendo del "teorema de representación de Riesz" se demuestra que, bajo ciertas condiciones no muy restrictivas, existe en el mercado un único activo o cartera, π, tal que el precio cualquier activo del mercado, x, es la esperanza matemática: $E[x.\pi]$. Se dice entonces que π es el activo o cartera de valoración. De este resultado se sigue que, si el activo π tiene esperanza y varianza no nulas, la prima de riesgo de cualquier activo del mercado es proporcional a la prima de riesgo del activo de valoración, π. La constante de proporcionalidad es el cociente entre la covarianza de los rendimientos de los dos activos (x y π) y la varianza del activo π. Esta constante recibe el nombre de beta del activo x con respecto al activo o cartera π. Bajo las condiciones del CAPM se tiene, que la cartera de valoración es la llamada "cartera de mercado".

El resultado que se sigue de los modelos beta puede entenderse, a su vez, como un caso particular de los modelos factoriales en que el único factor es el activo o cartera de valoración, cuando se exigen las condiciones mínimas de viabilidad descritas en el trabajo de Ross (1976).[90] Obsérvese que es el resultado el que se contempla como caso particular y no la metodología, ya que los supuestos de unos modelos y otros son difíciles de comparar porque tienen carácter muy diferente. Los modelos factoriales establecen básicamente supuestos respecto de la estructura de la incertidumbre de la rentabilidad de los activos: suponen que esta rentabilidad depende linealmente de un conjunto de fuentes básicas de aleatoriedad que reciben el nombre de factores de riesgo.

Contemplar los resultados del CAPM como caso particular de otros modelos es útil para facilitar la comparación con otros casos particulares como, de hecho, resultará ser el presentado en esta Tesis.

---

[89] Se seguirá, para presentar estos modelos, el planteamiento de Duffie (1988), sección 11B. A veces surge cierta confusión en la literatura porque algunos autores denominan CAPM a todos los modelos beta.

[90] Esta relación puede encontrarse desarrollada en Luenberger (1998) pags. 205, 206 y 209, para el modelo beta que describe el CAPM. La extensión a otros modelos beta es inmediata.

El nombre de modelo de valoración de activos financieros del CAPM se debe a la posibilidad de tomar como incógnita el precio que da al activo la rentabilidad exigida. Tal precio será la esperanza matemática de los cobros a que dará derecho el activo, descontada a un tipo de interés igual a la rentabilidad exigida por el CAPM.

La aplicación de este modelo a la valoración de inversión real, que se desarrolla en Hamada (1969), consiste en tratar los activos reales que produce la inversión como si pudieran negociarse en los mercados financieros, y calcular la rentabilidad que deberían tener para poder formar parte de una cartera eficiente. El valor de la inversión será el precio del activo (o suma de los precios de los activos) a que da derecho la inversión, para que su rentabilidad sea la exigida por el modelo. Razonando de este modo, se concluye que el valor de la inversión se calcula descontando los flujos de caja esperados al tipo de interés "ajustado al riesgo de acuerdo con el CAPM".

Otro enfoque para ajustar al riesgo el tipo de descuento de los flujos, que se plantea como alternativa al CAPM, consiste en tomar el coste del capital de la empresa, calculado como media ponderada del coste de las distintas fuentes de financiación de la empresa. El argumento en que se basa este método es que resultan adecuados aquellos proyectos que proporcionan una rentabilidad superior al coste de la empresa de conseguir recursos. Este método es inadecuado para nuestras hipótesis de trabajo, porque resulta incoherente con el "teorema de separación de Fisher".[91]

[91] Este tipo de planteamientos puede tener su origen el trabajos de Modigliani y Miller (1958) donde, como se indica en Hirshleifer (1961), se está pensando en inversiones marginales que tienen el mismo riesgo que las adoptadas previamente.

La razón por la que el valor esperado de los flujos no puede descontarse a un tipo de interés sin riesgo, por una generalización directa del teorema de separación de Fisher, es que los individuos no son "neutrales al riesgo". Se dice que un individuo es neutral al riesgo cuando le resulta indiferente recibir una cuantía cierta que recibir una variable aleatoria que tenga por esperanza tal cuantía. Se denomina equivalente cierto de una variable aleatoria a la cantidad cierta por la que el agente intercambiaría esa variable[92].

La aplicación del teorema de separación de Fisher indica que el valor actual de una inversión con flujos aleatorios es el valor descontado, a la tasa de interés para préstamos sin riesgo, del equivalente cierto de estos flujos. Este planteamiento puede interpretarse como una alternativa a ajustar al riesgo la tasa de descuento, para calcular el valor actual neto de la inversión, que consiste en ajustar al riesgo el valor de los flujos de caja que se descuenta. Obsérvese que, cuando se trabaja con una tasa de descuento ajustada al riesgo, su valor está recogiendo dos efectos: el primero es el cambio en la valoración de un bien por parte del agente al cambiar el momento en que resulta disponible.[93] El segundo efecto es el del riesgo. Cuando se trabaja con el concepto de equivalente cierto estos dos efectos se separan, y el ajuste del riesgo queda aislado en la relación entre la variable y su equivalente cierto. Naturalmente, el problema no está resuelto mientras no se indique cómo debe calcularse el equivalente cierto. El cálculo del equivalente cierto de cualquier variable sería inmediato si se conocieran las preferencias del agente que toma la decisión. La especificación de las preferencias nunca es fácil y, si el decisor no es un agente individual, es imposible.

[92] Este concepto permite definir un agente neutral al riesgo como aquél para el que el equivalente cierto de las variables es la esperanza matemática de las mismas.

[93] Recuérdese que el teorema de separación de Fisher afirma que el mercado valora este efecto en la tasa de interés de los préstamos sin riesgo, por lo que – si se supone que tal tasa existe – no es necesario especificar las preferencias del agente para la valoración de inversión cierta.

Si en el mercado se intercambiaran los flujos aleatorios por sus equivalentes ciertos, se tendría una valoración de mercado del riesgo, igual que se tiene una valoración de mercado del paso del tiempo cuando en el mercado se intercambian flujos ciertos de distintos periodos. En esta tesis se trata de estudiar si el mercado realiza una valoración del riesgo que permita el cálculo de equivalentes ciertos, y así una valoración de inversión aleatoria, independiente de las preferencias de los agentes. Este tipo de solución ya se apuntaba en Hirshleifer (1961). Hirshleifer proponía obtener, a partir de dichos intercambios en el mercado, la información sobre el tipo de descuento ajustado al riesgo. La propuesta en esta Tesis es sustituir directamente, en la fórmula de valoración, la esperanza del flujo con riesgo por el valor del flujo cierto por el que se intercambiaría en el mercado. No obstante, existen más diferencias con el enfoque de Hirshleifer, debidas fundamentalmente a la evolución en la modelización de los mercados financieros y, concretamente, a la formalización del concepto de oportunidad de arbitraje.

Se ha planteado el enfoque de equivalentes ciertos como una alternativa al ajuste de la tasa de descuento al riesgo. De forma más exacta podría decirse que se trata de una generalización, puesto que la valoración con tasas ajustadas puede plantearse como un ajuste de flujos, mientras que la afirmación inversa no siempre es cierta. Si llamamos $\tilde{c}$ a la cuantía aleatoria de un flujo de vencimiento al final de un periodo y r al tipo de interés de los préstamos sin riesgo para ese periodo, afirmar que k es el tipo de interés ajustado al riesgo equivale a afirmar que el equivalente cierto de ese flujo es:

$$\hat{c} = E[\tilde{c}]\left(\frac{1+r}{1+k}\right)$$

La obtención de la expresión concreta que se obtiene para el equivalente cierto en el caso particular de que el ajuste al riesgo se haya realizado con el CAPM puede encontrarse en Luenberger (1998), pag. 188 - 190. Luenberger utiliza, además, este desarrollo para demostrar que la función de valoración del CAPM en su forma original es lineal respecto de los capitales a que dan derecho los activos.

Se puede encontrar un planteamiento general de la metodología de valoración con ajuste del riesgo a través del cálculo de equivalentes ciertos en Constantinides (1978). Aunque, traduciendo literalmente, Constantinides indica que el "enfoque de equivalente cierto" es un caso especial de su regla de valoración, entiendo que, en realidad, se está refiriendo al "enfoque de equivalente cierto del CAPM" del párrafo anterior. Es necesario resaltar que en el artículo no se indica, ni se pretende indicar, cómo debe calcularse el equivalente cierto[94], por lo que no está proponiendo un criterio de valoración, sino más bien una metodología de trabajo. La gran ventaja de esta metodología es que permite expresar con una terminología común multitud de criterios de valoración, por lo que facilita la comparación de tales criterios.

Otro caso particular de la sustitución de flujos por sus equivalentes ciertos es el planteado en esta tesis al calcular el valor de mercado de un flujo como la esperanza matemática, bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo, descontada a la tasa sin riesgo. Con este criterio, el equivalente cierto de $\tilde{c}$ será:

$$\hat{c} = E_Q[\tilde{c}]$$

donde E_Q representa la esperanza matemática bajo la medida de probabilidad Q. Esta expresión es la razón de que la medida de probabilidad Q se califique de "neutral al riesgo", de acuerdo con la definición de la nota 91.

Una vez se ha observado que tanto el enfoque tradicional como el ofrecido en esta Tesis pueden expresarse con la metodología de "equivalentes ciertos", veremos que la valoración basada en el cálculo de probabilidades neutrales al riesgo puede plantearse también como una valoración con ajuste de los tipos de interés (o, mejor, de los tipos de rendimiento).

[94] Entendiendo equivalente cierto en el sentido genérico que aquí se ha dado.

Obsérvese que para calcular rendimientos medios de los activos es necesario trabajar con la medida de probabilidad real de cada inversor, que hasta el momento no se había usado en la valoración por razonamientos de arbitraje más que para determinar los conjuntos de probabilidad no nula. Puesto que se ha supuesto que, en general, la probabilidad será distinta para cada inversor, también lo serán los rendimientos medios esperados de cada inversor y debe serlo el ajuste al riesgo. Por esta razón, encuentro más adecuado el enfoque del equivalente cierto, que llegará al valor sin necesidad de especificar la medida de probabilidad del inversor y, por tanto, poniendo de manifiesto que no influye sobre el valor.

Contemplemos, en primer lugar, el modelo para un periodo, para compararlo con el CAPM. El ajuste al riesgo en un modelo en que se toma como valor de los activos la esperanza de sus pagos, bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo, como se ha presentado en esta Tesis, permite identificar un único factor de riesgo: la variable definida, para cada estado de la naturaleza, como el cociente entre la probabilidad neutral al riesgo y la probabilidad realmente asignada por un inversor. Esta variable que representamos por $z = \frac{Q}{P}$ se define como: $z(\omega_j) = \frac{Q(\omega_j)}{P(\omega_j)}$ para $j = 1,\dots,k$, y se denominará "razón de verosimilitud". Concretamente, se demuestra que la prima de riesgo de los activos es proporcional a la covarianza entre su rendimiento y la razón de verosimilitud:

$$E_P[\text{rendimiento}] - r = - \text{covarianza}_P[\text{rendimiento}\ ,\ z]$$

El desarrollo puede encontrarse en distintas fuentes: por ejemplo, es muy claro Pliska (1997), pág. 28.[95]

[95] Es interesante el planteamiento de Dothan (1990), pag. 32, que resulta menos sencillo aun siendo equivalente, pero permite la generalización al modelo de varios periodos. Dothan denomina al rendimiento medio parte previsible del rendimiento; y a la diferencia hasta el rendimiento total, parte de innovación: x = rendimiento – E_P[rendimiento]. La diferencia con el planteamiento de Pliska consiste en observar que, la covarianza puede tomarse entre la razón de verosimilitud y la parte de innovación del rendimiento, de donde queda: $E_P[\text{rendimiento}] - r = - \text{covarianza}_P\ [x\ ,\ z]$.

Si, además, la razón de verosimilitud es alcanzable, el modelo puede expresarse como un modelo beta, en que la cartera de valoración (π) es cualquiera que replicase la razón de verosimilitud o una transformación lineal suya. La ecuación que refleja esta relación sería:

$$E_P[\text{rendimiento}]-r=\frac{\text{covarianza}_P(\text{rendimiento},\text{rendimiento de }\pi)}{\text{varianza}_P(\text{rendimiento de }\pi)}.E_P[\text{rendimiento de }\pi]-r$$

El CAPM resultaría un caso particular cuando la cartera del mercado fuese una transformación lineal de la razón de verosimilitud. Obsérvese que este modelo consigue salvar algunos de los grandes inconvenientes de CAPM: no es necesario hacer ninguna hipótesis sobre la distribución de probabilidad de los rendimientos, sobre la forma de las funciones de utilidad, ni suponer que las expectativas son homogéneas[96]. Por esta razón decimos que, si el activo es replicable[97], puede obtenerse un valor "objetivo" para el activo, en el sentido de que es independiente de las expectativas y las preferencias de los inversores. Este valor es, además, el único compatible con el teorema de separación de Fisher y con los modelos de equilibrio.

En el caso en que el activo no sea replicable, no es posible asignar un único valor "objetivo" al activo. Sin embargo sí es posible encontrar el único intervalo de valores que pueden resultar coherentes con el teorema de separación de Fisher y los modelos de equilibrio. Este conjunto de valores puede interpretarse como un primer resultado que, en algunas ocasiones será suficiente para tomar decisiones. Sin embargo, para conseguir un valor concreto, será preciso incorporar supuestos sobre expectativas o preferencias. Por ejemplo, en el caso de que parezcan adecuadas las hipótesis del CAPM, podría utilizarse este modelo. Otra forma de conseguir un valor concreto consiste en especificar la función de utilidad del individuo que toma la decisión, lo que

[96] Sí es necesario aceptar que los inversores tienen las mismas previsiones en cuanto a los precios que tendrán los activos para los distintos estados de la naturaleza, pero no es preciso suponer que les asignan la misma probabilidad.

[97] Recuérdese que esta es la condición para que se le pueda asignar un valor al activo con esta metodología.

permite elegir la medida de probabilidad neutral al riesgo que debe utilizarse para la valoración de acuerdo con los resultados presentados en la sección 1.5 de este capítulo.[98] Otros criterios surgen de la especificación de la medida de probabilidad que el inversor asigna a los estados de la naturaleza. Este es el caso de todos los "métodos de cobertura media varianza.[99] Aún así, la búsqueda de criterios que consigan asignar un valor a los activos no replicables, sin supuestos demasiados restrictivos, es un tema pendiente para la investigación futura.

En los modelos de valoración por argumentos de arbitraje de varios periodos, Dothan(1990) identifica como único factor de riesgo lo que él denomina "proceso de razón de verosimilitud". [100] Para modelos en tiempo discreto, queda definido del modo siguiente:

$$z_t = E_P\left[\frac{Q}{P}\middle| F_t\right]$$

Para modelos en tiempo continuo, el proceso de razón de verosimilitud sería:

$$z_t = E_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle| F_t\right]$$

donde $\frac{dQ}{dP}$ representa la derivada de Radon-Nikodym.[101] Estos resultados sobre el ajuste del riesgo son válidos tanto para mercados completos como incompletos, por lo que el proceso de razón de verosimilitud no es necesariamente único, puesto que no lo es la medida de probabilidad Q.

---

[98] Ver nota número 45.

[99] Dada la imposibilidad de replicar o "cubrir" de forma exacta un flujo, estos métodos pretenden encontrar la estrategia que "más se aproxima". Las medidas de proximidad que se utilizan se basan en medias y varianzas, lo que da nombre a estos métodos. Puesto que estos momentos se calculan con la medida de probabilidad real, para calcularlos es necesario especificarla. Puede encontrarse una revisión de estos métodos, con abundante bibliografía, en Musiela y Rutkowski (1997)

[100] El desarrollo puede encontrarse en Dothan (1990): en el capítulo 6 para tiempo discreto y en el capítulo 12 para tiempo continuo.

[101] Se denomina derivada de Radon – Nikodym de Q respecto de P a la única variable aleatoria ρ que verifica que $Q(A) = \int_A \rho dP$. Esta variable relaciona la esperanza matemática bajo las dos medidas de probabilidad. Dada una variable aleatoria ξ del espacio correspondiente, se verifica que $E_Q[\xi] = E_P[\rho.\xi]$.

En los modelos de varios periodos se encuentra la mayor ventaja de la valoración por argumentos de arbitraje frente a los métodos tradicionales, y concretamente frente al CAPM: a las ventajas comentadas para modelos de un periodo se añade la de permitir más tipos de incertidumbre. En Fama (1977) se estudia la posibilidad de utilizar el CAPM para la valoración en modelos de varios periodos. La primera conclusión que se sigue del análisis realizado en este artículo es que el modelo permite, en algunos aspectos, más flexibilidad que la que, de hecho, se ha utilizado. Estos aspectos son la variabilidad del tipo de interés ajustado al riesgo entre distintos periodos y entre distintos flujos. Fama señala que el uso de una tasa de descuento única solamente tiene sentido en el caso de un proyecto de inversión de un tipo determinado o para una empresa con actividades que espera no cambien a lo largo del tiempo.

Sin embargo, la segunda conclusión del artículo de Fama (1977) es que la aplicación del CAPM a la valoración en un modelo de múltiples periodos tiene una clara limitación al no permitir incertidumbre sobre el tipo de interés ni sobre el ajuste al riesgo de periodos futuros. Los tipos de interés ajustados al riesgo no pueden ser estocásticos. El modelo presentado en esta tesis supera esta limitación. Con nuestro planteamiento el tipo de interés ajustado del modelo uniperiódico generado por A es el valor de i que consigue la igualdad:

$$\frac{E_P\left[\text{flujo en los sucesores de A}\,|\,A\right]}{1+i} = \frac{E_Q\left[\text{flujo en los sucesores de A}\,|\,A\right]}{1+r}$$

donde P es la medida de probabilidad que asigna el inversor, Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo, y r es la tasa de interés sin riesgo. Suponer, con este planteamiento que los tipos de interés no son estocásticos significa exigir que el tipo i coincida en todos los modelos uniperiódicos definidos en un mismo periodo de tiempo. Evidentemente, nuestro planteamiento no implica tal exigencia. De hecho, el factor de riesgo - que, como se ha indicado, se identifica en Dothan (1990) - es predecible, pero no cierto. En cuanto al tipo de interés sin riesgo, aunque se ha supuesto cierto, ya se ha observado en las extensiones la posibilidad de tratarlo como estocástico.

Es precisamente esta limitación en cuanto al tipo de incertidumbre admisible la que impide al CAPM valorar inversiones con inversor activo o, dicho de otro modo, proyectos que incorporen opciones reales. El valor, en el momento actual, de una opción futura de intercambio de un conjunto de flujos es mayor que el valor de la obligación de intercambiarlos, por la flexibilidad de tomar la decisión en el momento de ejercicio de la opción, en lugar de tomarla en el momento actual. El valor de esa flexibilidad será:

$$E_Q\,[\text{ máximo } E_Q[\textit{flujos} \,/\, F_\tau] - \text{máximo } E_Q\,[\textit{flujos}\,]$$

donde τ es el momento en que se dispone de la opción, F_τ es el álgebra que representa la información de que se dispone en F_τ y Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo. Para que un modelo permita considerar esta flexibilidad y, por tanto, valorar opciones reales, debe permitir que en el momento actual el inversor desconozca qué suceso de P_τ se va a presentar. Entonces, las oportunidades que el inversor encuentra y el riesgo asociado a las mismas varían con el suceso que se presente en el momento τ. Este es el tipo de incertidumbre que no permite la extensión a varios periodos del CAPM.

Los primeros planteamientos que permiten este tipo de incertidumbre se plantean para la toma de decisiones de consumo e inversión: destacan los trabajos de Merton (1971) y Merton (1973). Sin embargo el problema que provoca un desarrollo imparable de estos modelos a partir de los años setenta es la valoración de opciones financieras. Para valorar este tipo de contratos, como para las opciones reales, es necesario permitir la aleatoriedad de las oportunidades futuras, por lo que el CAPM se revela insuficiente. En la siguiente sección se revisa brevemente la evolución de estos modelos, que son los que provocan la aparición de los modelos de valoración de opciones reales. En este entorno, se resaltarán las aportaciones fundamentales de esta Tesis.

2.2. Enfoque general para la valoración de derechos contingentes

2.2.1. Valoración de activos financieros derivados

Con el artículo de Black y Scholes (1973) se plantea un nuevo enfoque para la valoración de activos financieros derivados: sin seguir un razonamiento basado en el equilibrio consiguen una expresión analítica para la valoración de una opción europea sobre una acción. Merton generaliza el modelo de Black y Scholes en sus artículos de (1973b) y (1977). El artículo de Merton (1977) plantea, además, la aplicación de esta metodología para la valoración de los pasivos de una empresa. Estos primeros modelos se plantean en tiempo continuo y están condicionados al supuesto de una dinámica concreta para el activo subyacente de la opción. En el modelo de Black y Scholes, concretamente, se supone que la acción subyacente sigue un movimiento browniano geométrico y que en el mercado se negocia, además, un activo sin riesgo con una tasa de interés determinista y constante. Trabajos posteriores consiguen relajar estas hipótesis.

En el artículo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) se plantea un modelo en tiempo discreto que parece apuntar hacia una forma distinta de trabajar o, cuando menos, permite interpretar mejor el fundamento económico, por utilizar una matemática más sencilla. El trabajo parte de un enfoque presentado en la primera edición de Sharpe (1981). Estos autores también suponen una dinámica concreta para el precio del activo subyacente: un proceso binomial y trabajan con un tipo de interés determinista y constante. Obsérvese que cada modelo uniperiódico derivado tiene la estructura del modelo de dos estados de la naturaleza planteado en esta Tesis en la sección 2.3 del capítulo segundo. Como en dicha sección, Cox, Ross y Rubinstein obtienen el valor de la opción como una combinación lineal convexa de los pagos a que dará derecho en los distintos estados de la naturaleza, descontada a la tasa sin riesgo. Se observa, entonces, que los coeficientes de la combinación pueden interpretarse como una medida de probabilidad y que el valor se ha obtenido como la esperanza del valor futuro descontado, en un mundo neutral al riesgo. Estos autores demuestran, además, que la fórmula de valoración de Black y Scholes puede obtenerse como límite de su modelo.

El artículo de Harrison y Kreps (1979) cambia el planteamiento de estos problemas y presenta un modelo del que todos los anteriores resultan casos particulares. El fundamento está en relacionar la ausencia de oportunidades de arbitraje y, por tanto, la viabilidad del mercado con la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo, también llamada medida de martingala. Puesto que estos autores trabajan con estrategias simples la relación es la de ser condición necesaria y suficiente: se trata de la primera formulación del "teorema fundamental". Basándose en los resultados de este trabajo, Harrison y Pliska (1981) desarrollan un modelo de mercado sin fricciones en que resulta posible valorar todos los activos que puedan "replicarse" con una estrategia adecuada. El valor de los activos se obtendrá como la esperanza, bajo la medida de martingala, de los pagos futuros descontados. El planteamiento de Harrison y Pliska, e incluso su notación, se han utilizado hasta la actualidad en multitud de trabajos que intentan construir un modelo más general o encontrar nuevas aplicaciones. Estos dos artículos son el origen del modelo presentado en esta Tesis.

Observar el trabajo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) como caso particular es inmediato, puesto que ellos obtienen la medida de martingala directamente a partir la expresión del valor. La obtención de la "fórmula de valoración" de Black y Scholes como una esperanza bajo una medida de martingala se basa en la relación entre dos procesos que siguen un movimiento browniano con distintas medidas de probabilidad. Esta relación, reflejada en el Teorema de Girsanov, permite obtener la rectificación adecuada de la medida de probabilidad, a través de la derivada de Radon –Nikodym, que transforma los procesos en martingalas. Puesto que el modelo de Black y Scholes parte de un único activo con riesgo que sigue un movimiento browniano geométrico, para obtener la medida de probabilidad que puede utilizarse para valorar como si el "mundo" fuese neutral ante el riesgo, basta encontrar la rectificación que anula el impulso de este proceso de precios descontado. Este resultado se obtiene en Harrison y Kreps (1979). El desarrollo detallado puede encontrarse en Duffie (1988) o en Ariño y Fernández (1992).

2.2.2. Valoración de opciones reales

Tras la aplicación de Merton (1977) del planteamiento de Black y Scholes para la valoración de los pasivos de una empresa, surge la pregunta de si la metodología planteada puede ser válida para otros tipos de valoración. Quizá la aplicación que más se ha estudiado es la de la valoración de inversiones reales, especialmente para aquellas que dan al inversor la posibilidad de tomar decisiones durante el desarrollo de la inversión. Estas posibilidades se conocen con el nombre de "opciones reales", por su analogía con las opciones financieras. El nombre de "opciones reales" se utiliza por primera vez en Myers (1977), concretamente para las opciones de crecimiento de una empresa, al analizar su influencia sobre el endeudamiento.

La oportunidad de llevar a cabo una inversión puede contemplarse como la primera opción que se le presenta al inversor. La idea de que debe valorarse la oportunidad de invertir, en lugar de la inversión en sí, y su analogía con el concepto de opción aparece ya en la *Teoría del interés* de Irving Fisher, cuando afirma[102]:

> "Prefiero utilizar el término «oportunidad de inversión» que tiene todas las ventajas e inconvenientes de todo término que es nuevo. Como es poco corriente necesitamos dar una definición precisa. El concepto de oportunidad de inversión descansa en el de opción. Una opción es toda posible corriente de renta que la persona puede asegurarse mediante la utilización de sus recursos, capital, trabajo, tierra o dinero. Y una oportunidad de inversión no es otra cosa que la oportunidad que se abre de pasar de una a otra opción o corriente opcional de renta. Esto incluye todas las oportunidades posibles de invertir, tanto aquellas susceptibles de producir solo pérdidas, respecto de lo invertido, como las susceptibles de producir grandes beneficios sobre la cantidad invertida o coste."

[102] Cita de la edición en castellano 1999: AOSTA. Al cuidado de José Antonio de Aguirre. Pag. 161.

La adaptación de la teoría de valoración de opciones financieras a la teoría de inversión real se basa en tomar los flujos resultantes de la inversión como un activo derivado de otro subyacente: el producto que resulta de la inversión. La evolución de la teoría de valoración de inversión real aplicando la metodología de la valoración de opciones financieras ha estado condicionada a la evolución de la teoría misma de valoración de opciones financieras. Inicialmente se plantean modelos que suponen una dinámica concreta para el activo subyacente, siguiendo la metodología de Black, Scholes y Merton. Los trabajos pioneros son Myers y Majd (1983) sobre la valoración de la opción de abandono de un proyecto y Kester (1984) sobre el valor de las opciones de crecimiento.

La defensa de la valoración de las opciones reales con la metodología de valoración de opciones financieras se basa fundamentalmente en razonamientos que giran alrededor de la necesidad de una representación de la evolución de la información y de un proceso de ajuste del riesgo adecuados. Es preciso que esta estructura permita valorar la diferencia entre tener la opción a un intercambio de flujos o tener la obligación de realizarlo. La discusión sobre tal necesidad se ha desarrollado en la sección 2.2.1 de este capítulo. Trabajos dedicados exclusivamente a plantear en términos sencillos la conveniencia de este tipo de aplicación son Mason y Merton (1985), Trigeorgis y Mason (1987), Kulatilaka y Marcus (1992).

Uno de los trabajos más importantes con esta metodología es el desarrollado en Dixit y Pindyck (1994)[103]. En el libro Dixit y Pindyck plantean que el enfoque tradicional de cálculo del valor actual neto de una inversión real es inadecuado, fundamentalmente porque ignora la irreversibilidad de las inversiones y la posibilidad

[103] Muchos resultados presentados aquí se desarrollaron previamente en un conjunto de artículos de estos autores, como Dixit (1989), Dixit (1991), Dixit (1992), Pindyck (1988) o Pindyck (1991).

de aplazar su ejecución.[104] Estos autores sugieren dos caminos para resolver el problema: la aplicación directa de la teoría de valoración de opciones financieras y la programación dinámica. Los dos enfoques coincidirían en el caso en que la inversión diese lugar a un producto negociado en los mercados financieros, de forma que tal producto desempeñaría el papel de activo subyacente del derecho contingente que representa la oportunidad de invertir. Si el producto no se negocia en los mercados financieros, afirman que no es posible utilizar la metodología de valoración de opciones y debe utilizarse la programación dinámica, con el inconveniente de que no queda determinado el tipo de interés al que deberían descontarse los flujos de caja.

En la actualidad, se está evolucionando en la adaptación al planteamiento general que surge como consecuencia de los resultados de Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981). En este sentido, se desarrolla un trabajo importante en Trigeorgis (1996) que continúa el enfoque de Kester (1984).

La primera aportación de esta Tesis es un planteamiento de un modelo general para la valoración de inversión real, coherente con el Teorema de Separación de Fisher y con los modelos de equilibrio, que permite la consideración de opciones reales,[105] sin suponer una dinámica concreta para el precio del activo subyacente, en el caso de tiempo discreto con espacio de estados finito. Este planteamiento se basa en los resultados de Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981) y por tanto recoge, como casos particulares, todos los casos desarrollados bajo un supuesto concreto sobre la evolución del precio del activo subyacente planteados en tiempo discreto con espacio de estados finito. Los trabajos de valoración de opciones reales basados en la metodología desarrollada por Black, Scholes y Merton pueden verse como un caso particular de la extensión del modelo a tiempo continuo presentada en este capítulo.

[104] Ver sección 1.3.2 del capítulo I para el concepto de irreversibilidad y de liquidez de los activos; y para un comentario sobre la selección del momento de invertir, las páginas 45 y 144.

[105] Una aportación de esta tesis respecto del trabajo de Trigeorgis es el planteamiento de un modelo completo de valoración de inversión real que respeta la valoración de opciones reales, frente al análisis aislado de la valoración de estas opciones.

Este enfoque general se caracteriza por un modo determinado de ajustar el riesgo, basado en argumentos de arbitraje. Esta caracterización aclara resultados como la aparente doble metodología de Dixit y Pindyck (1994). Resulta evidente la equivalencia entre los métodos de valoración de opciones y la programación dinámica, siempre que al aplicar esta última se ajuste el riesgo de forma adecuada. También queda claro el caso en que no existe replicación: puede aplicarse, por supuesto, la programación dinámica, pero no hay información suficiente sobre el ajuste del riesgo. Por eso, precisamente, no pueden aplicarse las técnicas de valoración de opciones.

En este caso problemático se sitúa la segunda aportación de la Tesis: la obtención, cuando no hay replicación, de las cotas del valor de una oportunidad asociada a un proceso de inversión, utilizando exclusivamente argumentos de arbitraje. Aunque la obtención de estas cotas se obtiene para las inversiones reales, serían válidas para cualquier tipo de activo que se valorase por argumentos de arbitraje y, concretamente para las opciones financieras.

Bibliografía

Abel, Andrew B.; Dixit, Avinash.; Eberly, Janice C.; Pindyck, Robert S. (1996) "Options, the Value of Capital, and Investment", *Quarterly Journal of Economics*, 111, nº5, 753-777.

Abel, Andrew B.; Eberly, Janice C. (1997) "An Exact Solution for the Investment and Value of a Firm Facing Uncertinty, Adjustment Costs, and Irreversibility" *Journal of Economic Dynamics & Control*, 21, 831-852.

Ariño, Miguel A.; Fernández, Pablo (1992) "Valoración de Activos Financieros por el Método de las Martingalas" *Investigaciones Económicas*, 16, nº 1, 89 – 97.

Arrow, Kenneth J. (1952) "Le Rôle des Valeurs Boursières pour la Repartition la Meillure des Risques" traducido al inglés en *Review of Economic Studies* 31, 91-96.

Arrow, Kenneth J.; Debreu, Gerard (1954) "Existence of Equilibrium for a Competitive Economy" *Econometrica* 22, nº 3, 265-290.

Artzner, Philippe (1995) "Aproximate Completeness with Multiple Martingale Measures" *Mathematical Finance* 5, 1 – 11.

Artzner, Philippe (1997) "On the Numeraire Portfolio" *Mathematics of Derivative Securities*, 53-58. Editores: Michael A. H. Dempster y Stanley R. Pliska. Cambridge University Press, Cambridge UK.

Babbs, Simon H.; Selby Michael J.P. "Pricing by Arbitrage in Incomplete Markets". Financial Options Research Centre Preprint 96/69, University of Warwick, Coventry.

Back, Kerry; Pliska, Stanley (1991) "On the Fundamental Theorem of Asset Pricing with an Infinite State Space" *Journal of Mathematical Economics* 20, 1-18.

Balbás, Alejandro; Longarela, Iñaki R.; Pardo, Ángel. (1997) "Integration and Arbitrage in the Spanish Financial Markets: an Empirical Approach" Working Paper 97 –92. Business Economic Series 20. Universidad Carlos III de Madrid.

Baumol, William (2000) "What Marshall didn't Know: on the Twentieth Century's Contributions to Economics" *The Quarterly Journal of Economics* 115, nº1, 1 – 44.

Bensoussan, Alain (1984) "On the Theory of Option Pricing" *Acta Applicandae Mathematicae*, 2, 139-158.

Berger, Philip G.; Ofek, Eli; Swary, Itzhak (1996) "Investor Valuation of the Abandonment Option" *Journal of Financial Economics*, 42, 257 – 287.

Bernanke, Ben S. (1983) "Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment", *Quarterly Journal of Economics* 98, 85 – 106.

Björk, Tomas (1997) "Interest Rate Theory" *Financial Mathematics. Proceedings CIME conference 1996*, 53-122. Editor: Wolfgang J. Runggaldier. Lecture Notes in Mathematics 1656. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Black, Fisher; Scholes, Myron (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* 3, 637-654.

Bohn, Henning (1995) "Towards a Theory of Incomplete Financial Markets. A review essay", *Journal of Monetary Economics* 36, 433 – 449.

Brealey, Richard; Myers, Stewart (1988) *Fundamentos de Financiación Empresarial* 4ªed. en castellano, McGraw-Hill, Madrid.

Brennan, Michael J. (1979) "The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models" *The Journal of Finance* 24, nº1, 53-68.

Brennan, Michael J.; Schwartz, Eduardo S. (1985) "Evaluating Natural Resource Investments", *Journal of Business* 58, 135-157.

Castagnoli, Erio; LiCalzi, Marco; Maccheroni, Fabio (1999) "Dual Pairs in Financial Modelling" *Proceedings of the first spanish-italian meeting on financial mathematics*, 43-63. Editores: Salvador Cruz Rambaud, Aldo G. S. Ventre. Servicio de publicaciones de la Universidad de Almería, Almería.

Chirinko, Robert S. (1996) "Investment under Uncertainty: a review essay" *Journal of Economic Dynamics & Control* 20, 1801 – 1808.

Constantinides, George M. (1978) "Market Risk Adjustment in Project Valuation" *The Journal of Finance* 33 nº 2, 603-616.

Chow, Gregory C. (1993) "Optimal control without Solving the Bellman Equation" *Journal of Economic Dynamics & Control* 17, nº4 251-

Chow, Gregory C. (1996) "The Lagrange Method of Optimization with Applications to Portfolio and Investment Decisions" *Journal of Economic Dynamics & Control* 20, nº1-3, 1-18.

Christopeit Norbert; Musiela, Marek (1991) "On the Existence of Arbitrage-free Measures in Contingent Claim Valuation". Discussion Paper B-206, University of Bonn.

Christopeit Norbert; Musiela, Marek (1992) "On the Existence and Characterization of Arbitrage-free Measures in Contingent Claim Valuation". Discussion Paper B-214, University of Bonn.

Constantinides, George M. (1978) "Market Risk Adjustment in Project Valuation" *The Journal of Finance* 33, nº2, 603-616.

Cox, John C.; Ingersoll, Jonathan E.; Ross, Stephen A. (1985) "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices" *Econometrica* 53, nº2, 363-384.

Cox, John C.; Ross, Stephen A.; Rubinstein, Mark E. (1979) "Option Pricing: A Simplified Approach" *Journal of Financial Economics* 7, 229-263.

Cox, David R.; Miller, Hilton D. (1965) *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, Londres.

Cuoco, Domenico (1997) "Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portolio Constraints and Stochastic Income" *Journal of Economic Theory* 72, nº2.

Cvitanic, Jaksa (1997) "Optimal Trading Under Constraints" *Financial Mathematics. Proceedings CIME conference 1996*, 123-190. Editor: Wolfgang J. Runggaldier. Lecture Notes in Mathematics 1656. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Cvitanic, Jaksa (1997b) "Nonlinear Financial Markets: Hedging and Portfolio Optimization" *Mathematics of Derivative Securities*, 227-254. Editores: Michael A. H. Dempster y Stanley R. Pliska. Cambridge University Press, Cambridge UK.

Dalang, Robert C.; Morton, Andrew; Willinger, Walter (1990) "Equivalent Martingale Measures and No-Arbitrage in Stochastic Securities Market Models" *Stochastics and Stochastic Reports*, 29, 185-202.

Davis, Mark H. A. (1997) "Option Pricing in Incomplete Markets" *Mathematics of Derivative Securities*, 216-226. Editores: Michael A. H. Dempster y Stanley R. Pliska. Cambridge University Press, Cambridge UK.

Debreu, Gerard (1959) *Theory of Value.* Cowles Foundation. Yale University Press, New Haven.

Debreu, Gerard (1970) "Economies with a Finite Set of Equilibria" *Econometrica* 38, n°3, 387-392.

Delbaen, Freddy (1992) "Representing Martingale Measures when Asset Prices are Continuous and Bounded" *Mathematical Finance* 2, 107-130.

Delbaen, Freddy; Monat, Pascale; Schachermayer, Walter; Schweizer, Martin; Sticker, Christophe (1997) "Weighted Norm Inequalities and Hedging in Incomplete Markets" *Finance and Stochastics* 1, 181-227.

Delbaen, Freddy; Schachermayer, Walter (1994) "A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing", *Mathematische Annalen*, 300, 463-520.

Demange, Gabrielle; Rochet, Jean-Charles (1997), *Methodes Mathematiques de la Finance*, 2ªed., Economica, París.

Dempster, Michael; Pliska Stanley R. (1997) *Mathematics of Derivative Securities.* Cambridge University Press, Cambridge UK.

Dixit, Avinash (1980) "The Role of Investment in Entry Deterrence" *Economic Journal* 90, 95-106.

Dixit, Avinash (1989) "Entry and Exit Decisions under Uncertainty" *Journal of Political Economy* 97, 620-637.

Dixit, Avinash (1989b) "Hysteresis, Import Penetration, and Exchange Rate Passthrough" *Quarterly Journal of Economics* 104, 205-228.

Dixit, Avinash (1991) "Irreversible Investment with Price Ceilings" *Journal of Political Economy* 99, 541-557.

Dixit, Avinash (1992) "Investment and Hysteresis" *Journal of Economic Perspectives* 6, 107-132.

Dixit, Avinash (1995) "Irreversible Investment with Uncertainty and Scale Economies" *Journal of Economic Dynamics & Control* 19, nº1/2, 327-350.

Dixit, Avinash; Pindyck, Robert S. (1994) *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press, Princeton.

Dothan, Michael U. (1990) *Prices in Financial Markets*. Oxford University Press, Nueva York.

Duffie, Darrell (1987) "Stochastic Equilibria with Incomplete Financial Markets" *Journal of Economic Theory* 41, 405-416.

Duffie, Darrell (1988) *Security markets. Stochastic Models*. Academic Press, Londres.

Duffie, Darrell (1992) *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton.

Duffie, Darrell (1996) "Incomplete Security Markets with Infinitely Many States: An Introduction" *Journal of Mathematical Economics* 26, 1-8.

Duffie, Darrell; Fleming, Endell; Soner, Mete H.; Zariphopoulou, Thaleia. (1997) "Hedging in Incomplete Markets with HARA Utility" *Journal of Economic Dynamics & Control* 21, 753-782.

Duffie, Darrell; Geoffard, Pierre-Yves; Skiadas, Costis. (1994) "Efficient and Equilibrium Allocations with Stochastic Differential Utility" *Journal of Mathematical Economics* 23, 133-146.

Duffie, Darrell; Jackson, Matthew O. (1990) "Optimal Hedging and Equilibrium in a Dynamic Futures Market" *Journal of Economic Dynamics & Control* 14, 21-33.

Duffie, Darrell; Skiadas, Costis. (1994) "Continuous-time Security Pricing. A Utility Gradient Approach" *Journal of Mathematical Economics* 23, 107-131.

Duffie, Darrell; Zame, William (1989) "The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model" *Econometrica* 57, nº6, 1279-1297.

Dumas, Bernard; Allaz, Blaise (1995) *Les Titres Financiers. Équilibre du Marché et Méthodes d'évaluation.* Press Universitaires de France, Paris.

Dybvig, Philip H.; Ingersoll, Jonathan E. (1982) "Mean-Variance Theory in Complete Markets" *Journal of Business* 55, 233-251.

Elliot, Robert J. (1982) *Stochastic Calculus and Applications.* Springer, Nueva York.

Elliot, Robert J.; Kopp, P. Ekkehard (1999) *Mathematics of Financial Markets.* Springer, Nueva York.

Epstein, Larry G.; Wang, Tan (1995) "Uncertainty, Risk-Neutral Measures and Security Price Booms and Crashes" *Journal of Economic Theory* 67, 40-82.

Ericsson, Jan; Reneby, Joel (1999) "A Note on Contingent Claims Pricing with Non-Traded Assets" Workin Paper Series in Economics and Finance nº 314, Stockholm School of Economics.

Fama, Eugene F. (1970) "Multiperiod Consumption-Investment Decisions" *The American Economic Review* 60, 163-174.

Fama, Eugene F. (1977) "Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting under Uncertainty" *Journal of Financial Economics* 5, nº1, 3-24.

Fernández, Pablo (1991) *Opciones y Valoración de Instrumentos Financieros.* Deusto, Bilbao.

Fisher, Irving (1930) *The Theory of Interest.* The Macmillan Company, Nueva York. Traducción al castellano: al cuidado de José Antonio de Aguirre (1999). Ediciones Aosta, Madrid.

Fontanals Albiol, Hortensia (1994) "Análisis del Riesgo en la Selección de Inversiones Estocásticas" Documento de trabajo nº 52, Universidad de la Laguna.

Frittelli, Marco (1997) "Semimartingales and Asset Pricing under Constraints" *Mathematics of Derivative Securities*. Editores: Dempster, Michael; Pliska Stanley R. Cambridge University Press, Cambridge.

Gil García, M. Elena (1991) *Valoración de Opciones Estratégicas: el enfoque de la «Option Pricing Theory».*Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

Girotto, Bruno; Ortu, Fulvio (1997) "Numeraires, Equivalent Martingale Measures and Completeness in Finite Dimensional Securities Markets" *Journal of Mathematical Economics* 27, 283-294.

Girotto, Bruno; Ortu, Fulvio (1999) "Some Genericity Results on Existence of Numeraires" *Proceedings of the first spanish-italian meeting on financial mathematics*, 313-331. Editores: Salvador Cruz Rambaud, Aldo G. S. Ventre. Servicio de publicaciones de la Universidad de Almeria, Almería.

Girsanov, I.V. (1960) "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures" *Theory of Probability and its Applications* 5, nº3, 285-301.

Hamada, Robert S. (1969) "Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporation Finance" *The Journal of Finance* 24, nº1, 13-31.

Harrison, J. Michael; Kreps, David M. (1979) "Martingales and Arbitrage Multiperiod Securities Markets" *Journal of Economic Theory* 20, 381-408.

Harrison, J. Michael; Pliska, Stanley R. (1981) "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading" *Stochastic Processes and their Applications* 11, 215-260.

Harrison, J. Michael; Pliska, Stanley R. (1983) "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets" *Stochastic Processes and their Applications* 15, 313-316.

Hart, O. (1975) "The Optimality of Equilibrium when Markets are Incomplete" *Journal of Economic Theory* 11, 418-443.

He, Hua; Pearson, Neil D. (1991) "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints: The Infinite Dimensional Case" *Journal of Economic Theory* 54, 259-304.

He, Hua; Pearson, Neil D. (1991) "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets: The Finite Dimensional Case" *Mathematical Finance* 1, 1-10.

He, Hua; Pindyck, Robert S. (1992) "Investments in Flexible Production Capacity" *Journal of Economic Dynamics & Control* 16, nº3/4, 575-599.

Hertz, David B. (1964) "Risk Analysis in Capital Investment" *Harvard Business Review* 42, 95-106.

Hirshleifer, Jack (1958) "On the Theory of Optimal Investment" *Journal of Political Economy* 66, 329-352.

Hirshleifer, Jack (1961) "Risk, the Discount Rate, and Investment Decisions" *The American Economic Review* 51, nº2, 112-120.

Huang, Chi-fu; Litzenberger, Robert H. (1988) *Foundations for Financial Economics*. Prentice-Hall, New Jersey.

Huang, Peter H.; Wu, Ho-Mou (1994) "Competitive Equilibrium of Incomplete Markets for Securities with Smooth Payoffs" *Journal of Mathematical Economics* 23, 219-234.

Karatzas, Ioannis (1997) *Lectures on the Mathematics of Finance* CRM Monograph Series, Vol. 8. The American Mathematical Society, Providence R.I.

Karatzas, Ioannis; Kou, S.G. (1996) "On the Pricing of Contingent Claims under Constraints" *The Annals of Applied Probability* 6, nº2, 321 – 369.

Karatzas, Ioannis; Lehoczky, John P.; Shreve, Steven E.; Xu, Gan-Lin (1991) "Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market" *SIAM Journal of Control and Optimization* 29, nº3, 702 – 730.

Karoui, Nicole El; Quenez, Marie-Claire (1995) "Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market" *SIAM Journal of Control and Optimization* 33, nº1, 29 – 66.

Kelsey, David; Milne, Frank (1996) "The Existence of Equilibrium in Incomplete Markets and the Objective Function of the Firm" *Journal of Mathematical Economics* 25, 229-245.

Kester, W. Carl (1984) "Today's Options for Tomorrow's Growth" *Harvard Business Review* 62, 153 – 160.

Knudsen, Thomas S; Meister, Bernhard; Zervos, Mihail (1999) "On the Relationship of the Dynamic Programming Approach and the Contingent Claim Approach to Asset Valuation", *Finance and Stochastics* 3, nº 4, 433-449.

Kolmogorov, Andrei N.; Fomin, Sergei V. (1972) *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, 3ªed. Editorial Mir, Moscú, 1978.

Koroliuk, V. S. (1978) *Manual de la Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática*. 1ªed. en castellano. Mir, Moscú.

Kramkov, D.O. (1994) "Optional Descomposition of Supermartingales and Hedging Contingent Claims in Incomplete Security Markets" Discussion Paper, 28. University of Bonn.

Kreps, David M. (1981) "Arbitrage and Equilibrium in Economies with Infinitely Many Commodities" *Journal of Mathematical Economics* 8, 15-35.

Krouse, Clement G. (1986) *Capital Markets and Prices.* Elsevier Science, Amsterdam.

Kulatilaka, Nalin; Marcus, Alan J. (1988) "General Formulation of Corporate Real Options" *Research in Finance* 7, 183- 199.

Kulatilaka, Nalin; Marcus, Alan J. (1992) "Project Valuation under Uncertainty: when does DCF fail" *Journal of Applied Corporate Finance* 5, nº3, 92- 100.

Kunita, Hiroshi; Watanabe, Shinzo. (1967) "On Square Integrable Martingales" *Nagoya Mathematics Journal* 30, 209-245.

Lamberton, Damien; Lapeyre, Bernard. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. 1ª ed. en inglés. Chapman and Hall, Londres.

Le Roy, S. (1973) "Risk Aversion and the Martingale Property of Asset Prices" *International Economic Review* 14, 436-446.

Leisen, Dietmar; Reimer, Matthias (1995) "Binomial Models for Options Valuation-Examining and Improving Convergence". Discussion Paper. University of Bonn.

Lintner, John (1965) "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets" *Review of Economics and Statistics* 47, 13-37.

Liptser, Robert Shevilevich; Shiryayev, Albert Nikolaevich (1989) *Theory of Martingales.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Lucas, Robert E. (1978) "Asset Prices in an Exchange Economy" *Econometrica* 46, 1429-1445.

Luenberger, David G. (1998) *Investment Science.* Oxford University Press, Nueva York.

Magill, Michael; Quinzii, Martine (1996) *Theory of Incomplete Markets.* The MIT Press, Cambridge, MA.

Malliaris, Anastasios G.; Brock, William A. (1982) *Stochastic Methods in Economics and Finance.* North-Holland, New York.

Margrabe, William (1978) "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another" *The Journal of Finance* 33, n°1, 177-186.

Mason, Scott M.; Merton, Robert C. (1985) "The Role of Contingent Analysis in Corporate Finance" *Recent Advances Corporate Finance*, 7 – 54.

Mauer, David C.; Ott, Steven H. (1995) "Investment under Uncertainty: The Case of Replacement Investment Decisions" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 30, n°4 581 – 605.

Melenberg, Bertrand; Werker, Bas J.M. (1996) "On the Pricing of Options in Incomplete Markets" Discussion Paper n°20. Tilburg University, Center for Economic Research.

Merton, Robert C. (1971) “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model”. *Journal of Economic Theory* 3, 373 – 413.

Merton, Robert C. (1973) "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model". *Econometrica* 41, nº 5, 867 –888.

Merton, Robert C. (1973b) "The Theory of Rational Option Pricing Theory". *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141 –183.

Merton, Robert C. (1977) "On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani – Miller Theorem" *Journal of Financial Economics* 5, 241-250.

Meyer, Paul André (1976) "Une Cours sur les Integrales Stochstiques" *Séminaire de Probabilités X*, 245 – 400. Lecture Notes in Mathematics 511. Springer, Nueva York.

Milne, Frank (1972) "Corporate Investment and Finance Theory in Competitive Equilibrium" *Economic Record*, 511 – 533.

Modigliani, Franco; Miller Merton H. (1958) "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment" *The American Economic Review* 48, nº3, 262 – 297.

Monteiro, Paulo Klinger (1996) "A New Proof of the Existence of Equilibrium in Incomplete Market Economies" *Journal of Mathematical Economics* 26, 85-101.

Musiela, Marek (1995) "General Framework for Pricing Derivative Securities" *Stochastic Processes and their Applications* 55, 227-251.

Musiela, Marek; Rutkowski, Marek (1997) *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer-Velarg, Nueva York.

Myers, Stewart C. (1977) "Determinants of Corporate Borrowing" *Journal of Financial Economics* 5, nº2, 147-175.

Myers, Stewart C.; Majd, Saman (1983) "Calculating Abandonment Value Using Option Pricing Theory" Working Paper, Alfred P. Sloan School of Management , MIT. Traducción al castellano: *Cuadernos Económicos del ICE* 1986, nº 32/1, 153 -170.

Pan, Wan-hsiang (1995) "A Second Welfare Theorem for Constrained Efficient Allocations in Incomplete Markets" *Journal of Mathematical Economics* 24, 577-599.

Papoulis, Athanasios (1965) *Probabilidad, Variables Aleatorias y Procesos Estocásticos.* EUNIBAR, Barcelona.

Pindyck, Robert S. (1988) "Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm" *American Economic Review* 78, 969-985.

Pindyck, Robert S. (1991) "Ireversibility, Uncertainty and Investment" *Journal of Economic Literature* 29, 1110-1148.

Pindyck, Robert S.; Majd, Saman (1987) "Time to Build, Option Value, and Investment Decisions" *Journal of Financial Economics* 18, 7-27.

Pliska, Stanley R. (1997) *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models.* Blackwell, Oxford.

Prawda, Juan (1976) *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones.* Vol. I Modelos Determinísticos. LIMUSA, Méjico.

Protter, Philip (1990) *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer, Berlin Heidelberg Nueva York.

Radner, Roy (1972) "Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Secuence of Markets" *Econometrica* 40, nº2, 289-303.

Rady, Sven (1995) "State Prices Implicit in Valuation Formulae for Derivative Securities" Discussion Paper, London School of Economics. Financial Markets Group.

Rockafellar, R.Tyrrel (1970) *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, N.J.

Roger, Patrick (1991) *Les Outlis de la Modélisation Financière.* Press Universitaires de France, Paris.

Roger, Patrick (1991b) "Options et complétude des marchés" *Revue Economique* 42, 787-800.

Ross, Stephen A. (1976) "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing" *Journal of Economic Theory* 13, 341 – 360.

Rubinstein, Mark E. (1976) "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options" *Bell Journal of Economics* 7, 407-425.

Schachermayer, Walter (1992) "A Hilbert Space Proof of the Fundamental Theorem of Asset Pricing in Finite Discrete Time" *Insurance: Mathematics and Economics* 11, 249-257.

Schachermayer, Walter (1993) "Martingale Measures for Discrete Time Processes with Infinite Horizon" *Mathematical Finance* 4, 25-56.

Schweizer, Martin (1992) "Mean-Variance Hedging for General Claims" *The Annals of Applied Probability* 2, 171-179.

Schweizer, Martin (1994) "Approximating Ramdom Variables by Stochastic Integrals" *The Annals of Probability* 22, n°3, 1536-575.

Schweizer, Martin (1994b) "On the Minimal Martingale Measure and the Fölmer-Schweizer Descomposition" Discussion Paper. University of Bonn.

Schweizer, Martin (1996) "Approximation Pricing and the Variance-Optimal Martingale Measure" *The Annals of Probability* 24, n°1, 206 – 236.

Schweizer, Martin; Runggaldier, Wolfgang J. (1995) "Convergence of Option Values under Incompleteness" Discussion Paper B-333. University of Bonn.

Sharpe, William F. (1964) "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk" *The Journal of Finance* 19, n° 3, 425-442.

Sharpe, William F. (1981) *Investments*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Small, Christopher G.; McLeish, D.L. (1994) *Hilbert Space Methods in Probability and Statistical Inference*. John Wiley and Sons, Nueva York.

Taqqu, Murad S; Willinger, Walter (1987) "The Analysis of Finite Security Markets Using Martingales" *Advances in Applied Probability* 19, 1-25.

Trigeorgis, Lenos (1996) *Real Options. Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. MIT Press, Cambridge MA.

Trigeorgis, Lenos; Mason, Scott M. (1987) "Valuing Managerial Flexibility" *Midland Journal of Corporate Finance*, 14 – 21.

Werner, Jan (1985) "Equilibrium in Economies with Incomplete Financial Markets" *Journal of Economic Theory* 36, 110-119.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero mostrar mi gratitud hacia el director de esta tesis, por la inversión de tiempo, paciencia y sensatez que ha realizado, sabiendo que no recibiría nada a cambio.

Así mismo, quiero dar las gracias a todos los profesores que me han evitado la ardua tarea de estudiar en soledad. También agradezco a todos mis compañeros de trabajo del ICADE la confianza que han depositado siempre en mí. De forma muy especial, quiero mostrar mi agradecimiento al profesor Juan López de la Manzanara Barbero, por haberme ayudado a hacer realidad mi sueño de dar clase en la Universidad.

Por último, quiero agradecer al profesor José Luis Fernández Pérez sus sugerencias a esta Tesis, que han sido de un valor incalculable para mí.

Madrid, 2000