FÍSICA

IPLACEX
TECNOLÓGICO NACIONAL

UNIDAD I

MECÁNICA VECTORIAL

INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD

La física es una de las ramas más fundamental de las ciencias, es la base que sustenta a la biología y a la química. Es ella la que nos ayuda a comprender el medio tal cual se presenta. Estudia la naturaleza del movimiento, las fuerzas, la energía, la materia, el calor, el sonido, la luz y el interior de los átomos.

Dentro de todas las áreas que comprende, encontramos la mecánica vectorial. Mecánica es aquella que estudia las condiciones de reposo y movimiento de los cuerpos, además de la respuesta de los mismos bajo la acción de algunas fuerzas. Cuando hablamos de mecánica vectorial, nos referimos a la encargada de estudiar el movimiento de las partículas y sólidos en el espacio tridimensional.

Algunos fenómenos cotidianos donde necesitamos de ciertas magnitudes físicas escalares o vectoriales para comprender a cabalidad un suceso son: el tiempo necesario para realizar un recorrido, la masa de una persona, la densidad de un cuerpo, la aceleración adquirida por un vehículo, la fuerza ejercida para levantar una caja, el desplazamiento de un cuerpo, entre otros. Del estudio de todos éstos hechos se encarga la mecánica vectorial.

IDEAS FUERZA

- La mecánica vectorial es una formulación específica de la mecánica clásica que estudia el movimiento de partículas y sólidos en un espacio euclidiano tridimensional.

- Las magnitudes escalares son aquellas que sólo necesitan su modulo y unidad de medida para determinarlos

- Magnitudes vectoriales son aquellas que necesitan modulo, unidad de medida, dirección y sentido para determinarlas correctamente

- Los vectores son segmentos de recta orientados cuyo modulo corresponde a la longitud del segmento que lo comprende.

- La definición de campo corresponderá a una magnitud física cuyo valor depende del punto del plano o del espacio y del instante que se considere. Si la magnitud definida así en un punto del espacio es escalar, el campo es escalar; si es vectorial entonces sería un campo vectorial.

- Campo escalar representa la región del espacio, donde a cada punto de coordenadas (x, y, z) se le puede asociar un escalar V (x, y, z)

- Campo vectorial se relaciona con aquellos campos en los cuales nosotros vivimos cotidianamente, donde estamos inmersos y donde toda la materia interacciona

- Los campos irrotacionales tienen rotacional igual a cero (rot F = 0) en todos los puntos del campo. Ejemplo: campo electrostático.

- Campos selenoidales son aquellos cuya divergencia es cero (div E = 0) en todos los puntos del campo. Además el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo. Son campos potenciales que derivan en un potencial vector. Las líneas de campo son cerradas y no hay manantiales ni sumideros. Ejemplo: campos magnético

1. MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Cotidianamente nos relacionamos con algunas cantidades físicas como tiempo, masa, densidad, volumen, potencia, carga eléctrica y temperatura, las que se pueden describir plenamente con un número (o módulo) y una unidad. Por ejemplo, si quiero comprobar si un niño tiene fiebre, basta con utilizar un termómetro y verificar si tiene más o menos de 37º Celsius. Si quiero saber cuál es el tiempo que transcurre entre un bus y otro, sólo necesito confirmar mi reloj y determinar si han pasado 5, 10 o 15 minutos. No obstante, hay muchas otras entidades importantes en física, que además de un módulo y una unidad, tienen asociada una dirección. Un ejemplo sencillo es el movimiento de un avión: para describirlo plenamente, debemos indicar no sólo su velocidad, sino también en qué dirección se mueve. Si el avión va de Chicago a Nueva York, saber que va a 2000 km/h no es suficiente, sino además debemos saber que debe ir al este y no al sur.

Aquellas magnitudes que quedan totalmente determinadas dando solo su módulo y una unidad de medida, se conocerán cómo Magnitudes Escalares.

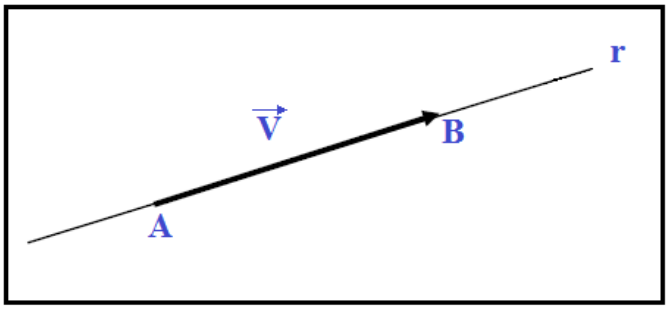
En cambio, se conocerán como magnitudes vectoriales a aquellas que no se pueden determinar completamente mediante su modulo y una unidad de medida. Algunos ejemplos de éstas magnitudes son la velocidad (Como vimos en el ejemplo del avión), las fuerzas ya que sus efectos dependen no sólo de la intensidad sino también de las direcciones y sentidos en que actúan. Otros ejemplos conocidos son la aceleración; el desplazamiento, el momentum o cantidad de movimiento; el momentum angular, entre otros.

2. VECTORES

Se llama vector a todo segmento de recta orientado. El origen del vector se determinará por el primero de los puntos que lo conforman y el segundo punto se conocerá como extremo del vector. La recta que contiene al vector determina la dirección del mismo y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo del vector, determina su sentido.

Los vectores en la mayoría de los textos se representan por una letra minúscula o mayúscula con una flecha arriba, $\vec{\mathbf{V}}$, o simplemente en negrita. Ésta flecha nos servirá como recordatorio de que los vectores posee dirección y sentido además de módulo y unidad de medida.

Figura 1



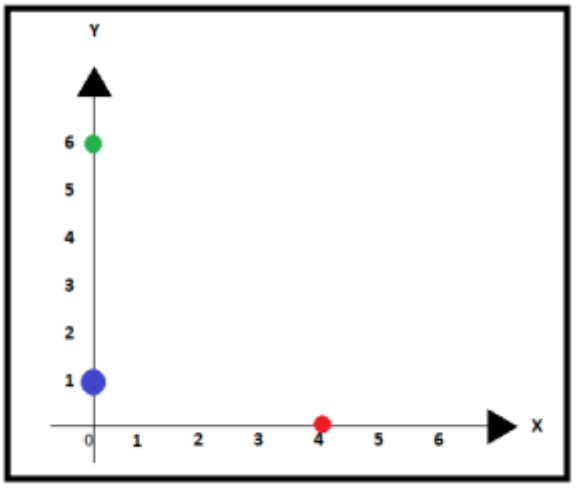
En la Figura 1 se representa el vector $\vec{V}$ sobre el segmento de recta **r**. El origen del vector se representa por la letra **A**, y su extremo, ubicado en la punta de flecha, se representa por la letra **B**.

El Módulo de un vector corresponde a la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo siempre será un número positivo y se representa por el vector encerrado entre dos paralelas: $|\vec{V}|$

2.1 Componentes de un vector

Cuando se desea ubicar un objeto cualquiera en el plano, esta se representa utilizando un punto sobre la recta, para los casos en que éste se encuentre en reposo o realice un movimiento rectilíneo, como se muestra en la Figura 2:

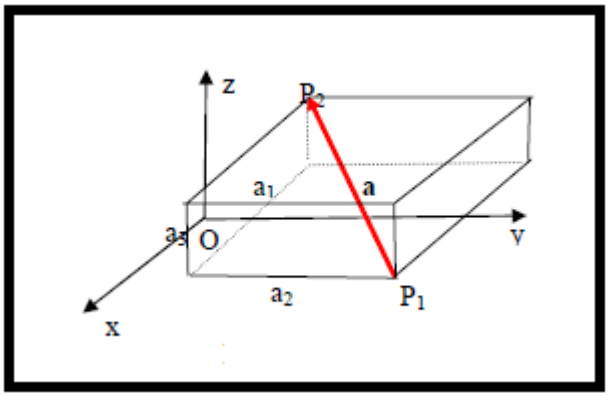
Figura 2



Pensemos que el siguiente eje de coordenadas representa en su eje **X** la dirección hacia el este, y el eje **Y** la dirección hacia el norte de los puntos cardinales. Consensuamos que el número cero o punto de origen, representa la casa donde tú vives. Además la graduación de cada eje representará un metro de distancia. Entonces supongamos que sales de tu casa y caminas un metro hacia el norte, quedando ubicado justo en el punto azul del eje **Y**. Posteriormente caminas 5m más al norte, quedando ubicado sobre el punto verde, a 6m de tú casa. Al mismo tiempo que tu avanzas, tú madre sale de la casa camino al este, avanzando 4 metros y quedando posicionada sobre el punto en rojo en el eje **X**. Éste es un ejemplo simple para representar la posición de un objeto en el plano.

Veamos la siguiente situación. ¿Qué pasa si el móvil no está detenido, y presenta una trayectoria plana? bastará con dar su distancia a dos rectas fijas del plano (perpendiculares entre sí para mayor facilidad en los cálculos) que tomamos como referencia. Así mismo, todo punto del espacio queda determinado únicamente mediante su distancia a tres rectas fijas perpendiculares entre sí. A este sistema de referencia lo denominamos sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de origen O y ejes x, y, z.

Figura 3



En la Figura 3 podemos ver un vector a en el espacio. Su origen es el punto P1 que tiene las coordenadas (x_1, y_1, z_1) y su extremo P2 con coordenadas (x_2, y_2, z_2). Entonces diremos que los Componente de un vector a respecto del sistema (O; x, y, z), corresponderá a las proyecciones de vector **a** sobre los ejes, o sea a los números:

$$\mathbf{a_1 = X_2 - X_1 \; ; \qquad a_2 = Y_2 - Y_1 \; ; \qquad a_3 = Z_2 - Z_1}$$

Escribiremos el vector a como (a_1, a_2, a_3), para así indicar que a_1, a_2 y a_3 son las componentes de éste. Estas componentes podrán ser números positivos o negativos, funciones de una o más variables, pero siempre se deben calcular como diferencia entre las coordenadas del extremo y las del origen del vector. Entonces si tenemos dos vectores opuesto, de igual módulo y dirección, pero de sentidos opuestos. Ambos tienen sus componentes con el mismo valor absoluto, pero de signos contrarios.

De lo anterior podemos extraer como generalización que: Dos vectores iguales tienen las mismas componentes en cualquier sistema de coordenadas.

Como un vector en el espacio corresponde a la diagonal del paralelepípedo que se forma (Figura 3), entonces el módulo de un vector en el espacio se determinará como:

$$\boxed{a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

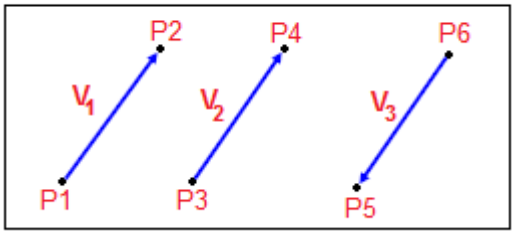
3. PROPIEDADES GENERALES DE LOS VECTORES

Debido a que muchas cantidades físicas son vectoriales y a que ya en un plano de dos dimensiones su manejo empieza a ser un poco diferente de lo que se espera, se hace necesario conocer algunas propiedades de los vectores, con el fin de tener las herramientas matemáticas para poderlos manipular.

3.1 Igualdad de dos vectores

Dos vectores serán equipolentes o iguales, cuando tengan el mismo módulo, dirección y sentido. Algunos textos definen que si dos vectores son paralelos, sea cual sea su posición en el espacio, serán iguales.

Figura 4



El vector V_1 (origen P_1, extremo P_2) tiene la misma longitud (módulo), dirección y sentido que el vector V_2 (origen P_3, extremo P_4), por lo que podemos asegurar que $\mathbf{V_1 = V_2}$. La igualdad entre dos vectores no es lo mismo que la igualdad entre dos escalares, ya que dos vectores sólo son iguales si tienen la misma magnitud y sentido.

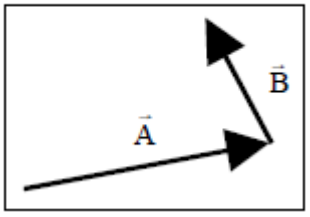
Si ahora observamos el vector V_1 y lo comparamos con el vector V_3, podemos verificar que tienen direcciones opuestas, por lo tanto no son iguales. Definimos entonces a V_3 como un vector negativo, o sea que tiene la misma magnitud que V_1 pero con dirección opuesta. De lo anterior podemos concluir que: $\mathbf{V_1 = -- V_3}$ o $\mathbf{V_3 = -- V_1}$.

Un ejemplo fácil para comprender lo anterior es el siguiente: Si el vector V_1 es 64 m al norte, V_3 será 64 m al sur. Se concluye que si dos vectores tienen direcciones opuestas, sean sus magnitudes iguales o no, entonces son antiparalelos.

3.2 Adición de vectores

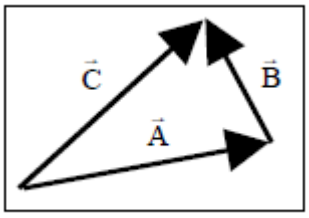
Si por ejemplo una partícula sufre un desplazamiento $\vec{A}$, seguido de otro desplazamiento $\vec{B}$ (Figura 5),

Figura 5



El resultado del desplazamiento sería igual a un solo vector $\vec{C}$, que será llamado vector resultante o suma vectorial (Figura 6).

Figura 6



El Vector resultante se debe trazar desde el origen del vector $\vec{A}$ hasta el extremo del vector $\vec{B}$ (punta de flecha).

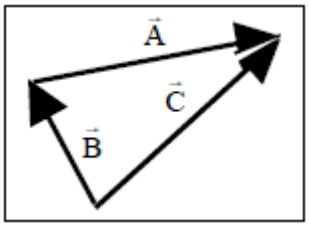
El método antes mencionado se conoce como Método del polígono, éste nos indica que al unir el origen de un vector desplazamiento (**A**), con el extremo de otro vector

desplazamiento (**B**), realizado por el mismo cuerpo, creamos un nuevo vector (**C**), conocido como vector resultante, que se puede representar por la suma de los anteriores:

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}}$$

Qué pasará si el recorrido de los vectores fuese al revés, primero el recorrido del cuerpo fuese el vector $\vec{B}$ y posteriormente $\vec{A}$, cómo se muestra en la figura 7.

Figura 7



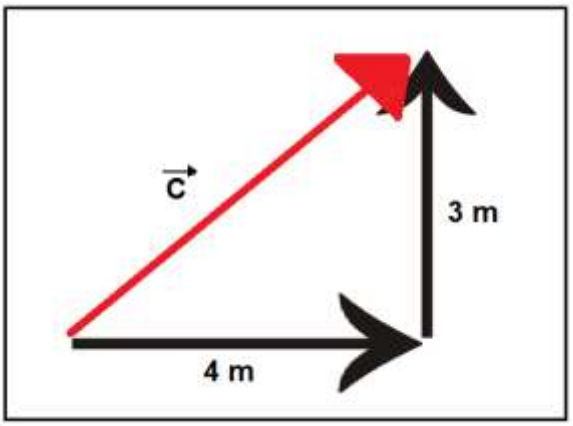
Acá observamos que el vector resultante partirá del origen de **B** con dirección al extremo del vector A, pero eso no genera cambios y como resultado da el mismo vector **C** (obtenido en la Figura 6). Con lo anterior se demuestra que la suma de vectores es una operación conmutativa. Por lo tanto:

B + A = A + B

Al ser conmutativa la suma de vectores no importa el orden en el que se ubiquen los sumandos. Más, si no se respetara la dirección y sentido de los sumandos el resultado sería erróneo, ya que se estaría operando con otro conjunto diferente de vectores.

La mayor ventaja de este método es que permite sumar simultáneamente cualquier número de vectores.

Un ejemplo para comprender mejor la suma de vectores por el método del polígono es el siguiente: Si una persona camina 4 metros al este y luego 3 metros al norte, su vector resultante quedaría de la siguiente manera:



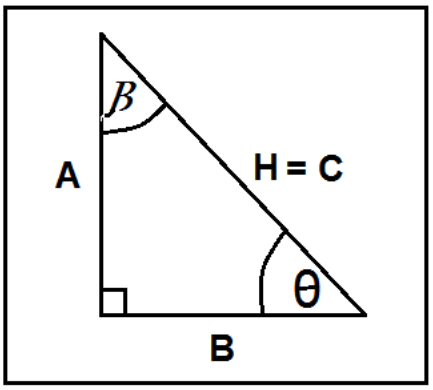
Para calcular el vector resultante **C**, debemos calcular el módulo del vector (recuerda que los vectores poseen más de una componente), y para eso debemos utilizar el teorema de Pitágoras, el cual se explicará brevemente para luego dar solución al ejemplo planteado.

El teorema de Pitágoras postula que**:** "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (*los dos lados menores del triángulo, los que conforman el ángulo recto*)".

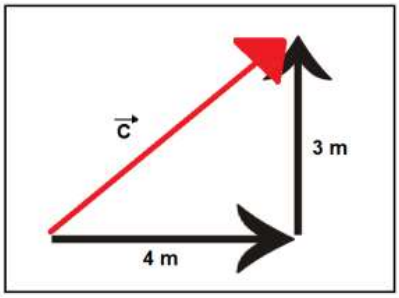
$$\textbf{(Hipotenusa)}^2 = \textbf{(Cateto A)}^2 + \textbf{(Cateto B)}^2$$

La hipotenusa siempre será el cateto o lado opuesto al ángulo recto (90º). A y B son cualquiera de los lados restantes del triángulo rectángulo, cómo veremos a continuación en la Figura 8.

Figura 8



Volvamos al ejemplo anterior y veamos cómo se resuelve:



$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto A})^2 + (\text{Cateto B})^2$$

La hipotenusa será el vector **C**, el cateto A diremos que es 4m y el cateto B será el de 3m. Ahora reemplazamos en la formula anterior y queda:

$$(C)^2 = (4\ m)^2 + (3\ m)^2$$

Desarrollamos los cuadrados de cada término:

$$(C)^2 = 16\ m^2 + 9\ m^2$$

Para eliminar el exponente del cateto **C** tenemos que aplicar la operación inversa, o sea la raíz, lo que daría como resultado:

$$\sqrt{C^2} = \sqrt{16m^2 + 9m^2}$$

Eliminamos la raíz con el cuadrado de la hipotenusa, y desarrollamos la sumatoria al otro lado de la igualdad:

$$\cancel{\sqrt{C^2}} = \sqrt{25\ m^2}$$

Posteriormente, descomponemos el valor dentro de la raíz de tal modo, que la podamos eliminar, como lo hicimos en el paso anterior:

$$C = \sqrt{5m \times 5m}$$

$$C = \sqrt{(5m)^2}$$

$$C = 5m$$

Respuesta: El módulo del vector resultante del ejercicio anterior será de 5m.

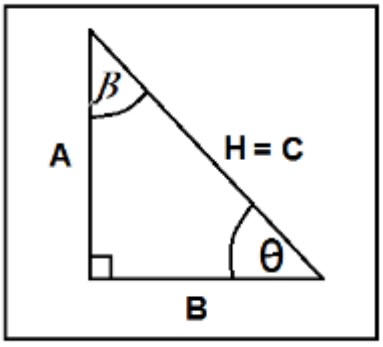
3.2.1 Funciones Trigonométricas:

Cómo información adicional y necesaria para resolver ejercicios de vectores, tenga presentes las siguientes funciones trigonométricas que les serán útiles para solucionar problemas cómo el antes mencionado.

a. Seno de un ángulo $= \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$; $\text{Sen } \Theta = \dfrac{A}{H}$

b. Coseno de un ángulo $= \dfrac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$; $\text{Cos } \Theta = \dfrac{B}{H}$

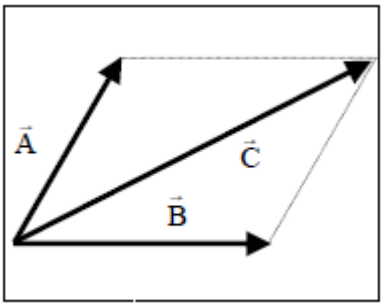
c. Tangente de un ángulo $= \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$; $\text{Tan } \Theta = \dfrac{A}{B}$



Otro método útil para la suma de vectores, es el que recibe el nombre de Regla de Adición del Paralelogramo. Acá los vectores A y B están unidos por sus orígenes y el vector resultante **C** corresponderá a la diagonal del paralelogramo que forman ambos vectores, con dos de sus cuatro lados. Cómo ya vimos anteriormente la adición de vectores es conmutativa, por lo que al sumar dos vectores, el total será independiente del orden de la adición.

En la Figura 9 podemos apreciar que los vectores A y B están unidos en sus orígenes y que el vector resultante **C**, nace desde el origen común, hasta el extremo común de las proyecciones de ambos vectores, donde C = A + B = B + A.

Figura 9



3. 3 Negativo u Opuesto de un vector

Si al vector **A** le sumamos su vector negativo, da como resultado cero en la suma vectorial. Como **A** y **– A** tienen igual magnitud, pero con direcciones opuestas, entonces podemos concluir que:

$$\mathbf{A + (-A) = 0}$$

3. 4 Sustracción de Vectores

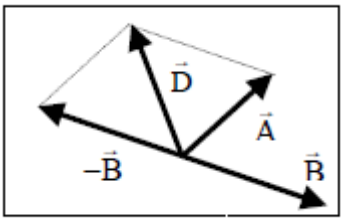
La sustracción de dos vectores es factible debido a la definición de vector negativo antes mencionada. Definiremos que la sustracción entre un vector **A** positivo y un vector **B** negativo (**- B**), nos dará la siguiente expresión:

$$\mathbf{A - B = A + (-B)}$$

El método mencionado corresponde al método del paralelogramo para hallar la diferencia entre dos vectores. El procedimiento consiste en sumarle al vector positivo el vector negativo.

Observamos la sustracción de dos vectores en la Figura 10:

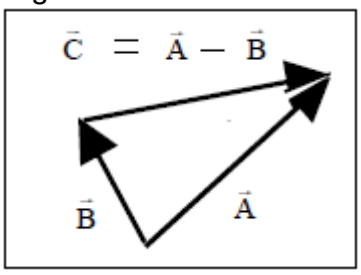
Figura 10



Si utilizamos el método del polígono para la sustracción el procedimiento más sencillo. Correspondería a dibujar los vectores minuendo y sustraendo, concurrentemente. El vector diferencia será el que sumado al sustraendo tenga por resultado el minuendo. Desde el punto de vista gráfico el vector diferencia será el que teniendo origen en el extremo del sustraendo, termine en el extremo del minuendo.

En la Figura 11 se ilustra la diferencia:

Figura 11



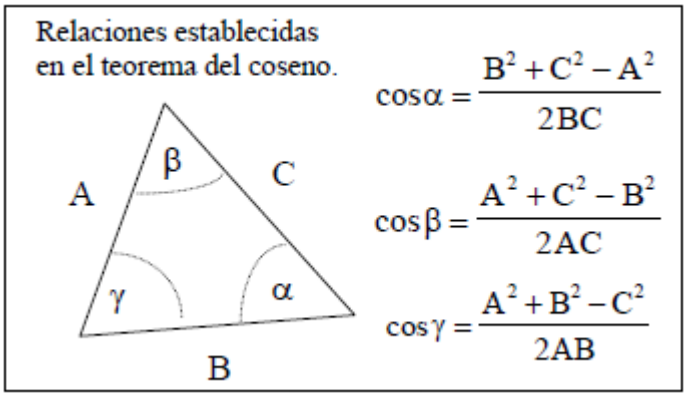
Nota: Todos estos métodos gráficos tienen una limitada utilidad debido a su falta de precisión. Para poder asegurar una exactitud medianamente razonable, debe trabajarse con escalas muy grandes que minimicen los errores relativos en las medidas de los trazados y de los ángulos.

3.5 Métodos analíticos

Al sumar o restar dos vectores usando el método del polígono, se obtiene figuras triangulares, cuyo resultado es uno de los lados. En este caso podemos hallar, módulo y

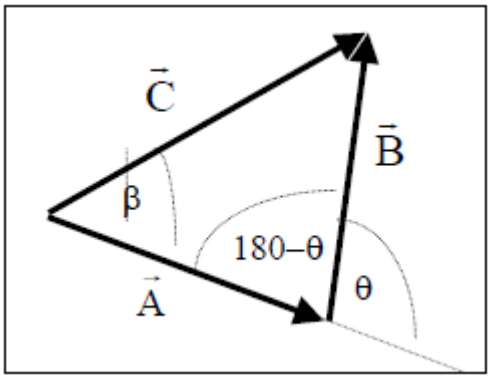
sentido del vector resultado, recurriendo a un teorema llamado Método del coseno generalizado.

Figura 12



Por ejemplo en el caso de la suma de dos vectores concurrentes (Figura 13), debemos conocer el módulo de cada sumando y el ángulo formado entre ellos.

Figura 13



Si la suma es **C = A + B**, el ángulo formado entre **A** y **B** es el ángulo Θ (theta), por lo que el ángulo interno al triángulo, entre los dos vectores que debemos sumar será (180−θ). Al aplicar el teorema del coseno obtendremos que:

$$\cos(180 - \theta) = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB}$$

Como cos (180 – θ) = – cos (θ), lo reemplazamos en la formula anterior y obtenemos:

$$-\cos(\theta) = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB}$$

Posteriormente despejamos algebraicamente el valor del vector resultante que se representa como ya hemos visto por la letra **C**, quedando de la siguiente manera:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

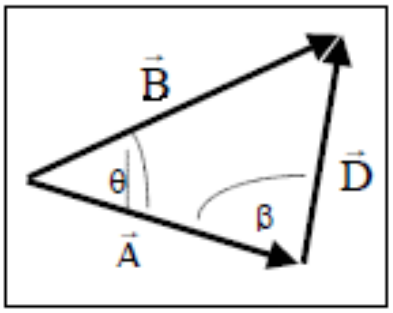
Y cómo lo que necesitamos es conocer el módulo del vector despejamos tal valor con la operatoria inversa al exponente cuadrado que acompaña al vector resultante, que en este caso es la raíz cuadrada. El resultado del vector **C** es:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

Dirección del vector suma o vector resultante: Se determina encontrando el ángulo **C** que se forma con uno de los sumandos (**A** o **B**). En la Figura 13 se aprecia que el ángulo que se forma entre el vector suma y el sumando correspondiente al vector **A**, es ß. Para obtener la dirección del vector resultante es necesario calcular el coseno del ángulo, utilizando nuevamente el teorema del coseno, con el cual se determina su respectivo valor. (Pese a que no se verá en éste texto de apoyo, cabe mencionar que el teorema del seno también es útil para encontrar el valor del ángulo ß)

Para el caso de la diferencia de vectores, el procedimiento para determinar la dirección del vector resultante es similar, solo que el ángulo entre minuendo y sustraendo es interno al triángulo formado entre ellos.

Figura 14



Por lo tanto el coseno del ángulo Θ quedaría:

$$\cos\theta = \frac{A^2 + B^2 - D^2}{2AB}$$

Despejamos el vector diferencia (**D**) y nos quedaría que:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}\ .$$

3.6 Multiplicación de un vector por un escalar:

Al multiplicar un vector **a** por un escalar **n**, el resultado del producto será otro vector con la misma dirección que el vector **a**, pero su módulo será igual al módulo de **a** multiplicado por el valor del escalar. El sentido del nuevo vector será el de a, si el escalar es positivo y opuesto si el escalar es negativo.

3.7 Producto escalar y producto vectorial

Si se desea multiplicar vectores entre sí, podemos hacerlo de dos modos: escalar o vectorialmente.

3.7.1 El producto escalar o interno

El producto escalar de dos vectores **A** y **B,** se obtiene multiplicando los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman. Para identificar el producto escalar, lo indicaremos con un punto entre los vectores, tal como se ve a continuación:

$$\mathbf{a \cdot b = ab \cos \theta}$$

Donde θ es el ángulo formado por los dos vectores. De la definición se puede obtener las siguientes afirmaciones:

i) el producto escalar es conmutativo: **a . b = b . a**

ii) La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares (formen un ángulo de 90° entre sí) es que su producto escalar sea cero o nulo (esto debido a que el cos 90° = 0).

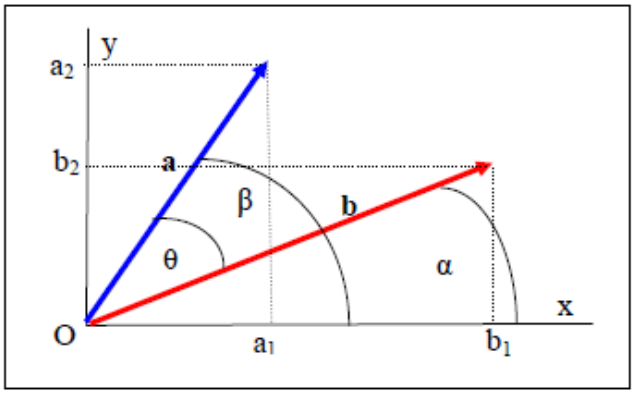
iii) Mediante las componentes de los vectores **a, b**, el producto escalar entre ellos se expresará como:

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

A esta expresión se llega a partir de la definición de producto escalar.

Con la idea de hacer mucho más simple ésta demostración, realizaremos la siguiente explicación. Supongamos que los vectores **a** de componente (a1, a2) y el vector **b** de componente (b1, b2), se encuentren en el plano (x, y) como indica la Figura 15:

Figura 15



Desarrollemos el producto escalar de éstos vectores:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ab\cos\theta = ab\cos(\beta - \alpha) =$$
$$= ab[\cos\beta.\cos\alpha + sen\beta sen\alpha] =$$
$$= a\cos\beta.b\cos\alpha + asen\beta.bsen\alpha$$

Reemplazamos las siguientes igualdades en la formula anterior:

$$a\cos\beta = a_1 \quad b\cos\alpha = b_1$$
$$asen\beta = a_2 \quad bsen\alpha = b_2$$

Obteniendo como resultado que el producto escalar es:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

iv) el producto escalar tiene la propiedad distributiva.

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = a_1.(b_1 + c_1) + a_2.(b_2 + c_2) + a_3.(b_3 + c_3) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$$

v) Al multiplicar un vector por sí mismo, se obtiene: **a . a** = $\mathbf{a}^2$

vi) Los versores fundamentales son **i**, **j**, **k**, todos de módulo uno y perpendiculares entre sí, por lo que al desarrollar el producto escalar con ellos resulta:

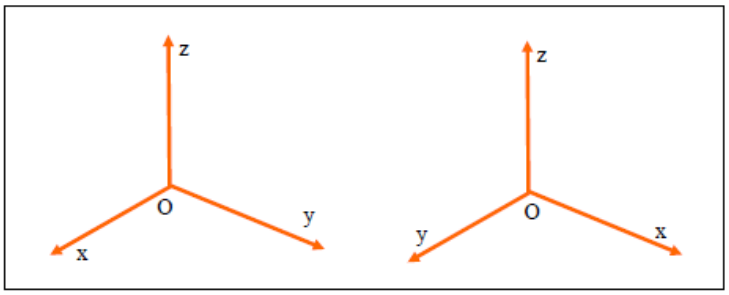
$$\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1 \qquad \mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{i}.\mathbf{k} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = 0$$

3.7.2 Producto Vectorial

Antes de explicar de qué se trata el producto vectorial, es necesario que identifiquemos las orientaciones en el espacio.

En la figura 16 tenemos dos ejes coordenados, donde se observa claramente que es imposible hacer coincidir los ejes del mismo nombre de un triedro[1] con los del otro.

Figura 16



Si hacemos coincidir los orígenes y el eje X de los triedros anteriores, con la idea superponer las partes positivas, con las positivas, podemos observar que el sentido de los ejes Z resultan opuestos, por lo tanto los triedros tienen distinta orientación.

Un triedro con origen (O) y componente (x, y, z) será positivo o directo cuando colocando un tornillo normalmente (perpendicularmente) al plano (x,y) y girando la parte positiva del eje X hacia la positiva del eje Y, el tornillo avanza hacia la parte positiva del eje Z. Por ejemplo en la Figura 16 el triedro de la izquierda es positivo.

Si por el contrario el tornillo avanza hacia la parte negativa del eje Z, entonces en ese caso el triedro será negativo o inverso.

Ésta regla también es conocida como la Regla de la mano derecha en algunos textos de estudio.

Producto Vectorial:

Recibirá el nombre de producto vectorial o externo de dos vectores **a** y **b,** al vector **c** que tenga las siguientes características:

[1] Triedro: ángulo poliedro formado por tres semirectas o aristas.
Poliedro: Región del espacio limitada por tres o más semirrectas con un origen común, llamado vértice

i) El módulo igual al producto de los módulos de a y b por el seno del ángulo que forman;

ii) La dirección perpendicular al plano determinado por las direcciones de los vectores a, b; el sentido tal que el triedro formado por los vectores a, b, c tenga la misma orientación que el espacio.

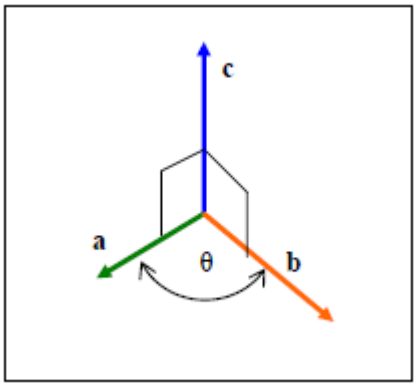
Para reconocer el producto vectorial, lo identificaremos con una cruz (×) o con un ángulo (∧) entre los vectores, o sea:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad \text{ó} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

El módulo del producto cruz será: $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = \mathbf{ab}\ \mathbf{sen}\ \boldsymbol{\theta} = \mathbf{c}$

iii) Indica que el sentido del vector **c** no pueda fijarse sin conocer la orientación del espacio, cuya dirección positiva es la que se representa en la Figura 17.

Figura 17



Algunas de las propiedades del productor vectorial son los siguientes:

i) Si en vez de **a** ∧ **b** = **c**, calculamos el producto vectorial de **b** ∧ **a**. El módulo y dirección del vector producto no cambian; pero el sentido será contrario al anterior o sea que: **a** ∧ **b = - b** ∧ **a.** Entonces al contrario del producto escalar, el producto vectorial es anti-conmutativo.

ii) siendo λ un escalar, podemos verificar que al multiplicar el escalar por el producto vectorial, se cumple la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{\lambda}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\lambda}\mathbf{b}$$

iii) El producto vectorial posee ***propiedad distributiva***, esto quiere decir que:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$$

La demostración de la propiedad anterior es la siguiente: si dividimos a ambos lados por el módulo c del vector **c**, se obtiene:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}_0 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0 + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}_0$$

donde $\mathbf{c}_0$ es el versor de igual dirección y sentido que **c**.

$\mathbf{a}_1$ es el vector proyección del vector **a** sobre el plano π, perpendicular al versor $\mathbf{c}_0$**.** Por lo tanto,

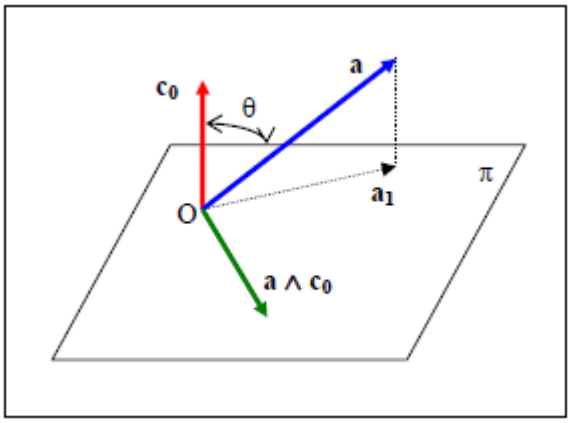
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{c}_0$$

Con lo anterior podemos definir que ambos elementos del producto vectorial, **a** y $\mathbf{a}_1$ coinciden en dirección, sentido y modulo (Figura 18). Esto debido a que el modulo de $\mathbf{a}_1$ es igual al modulo de **a** por el seno del ángulo theta, es decir:

$$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}| \ \text{sen}\ \theta$$

Además el vector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0$ es el resultado del giro de $\mathbf{a}_1$ en 90° sobre el plano normal (perpendicular) a $\mathbf{c}_0$, de modo que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{c}_0$ formen un triedro directo.

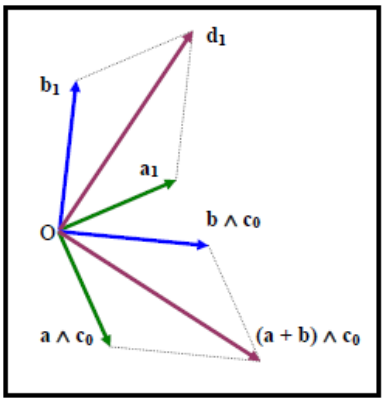
Figura 18



Ahora consideraremos los dos vectores **a, b** y su suma **d = a + b**. Los proyectamos sobre un plano normal (perpendicular) a $\mathbf{c}_0$**,** con lo que obtendremos los vectores $\mathbf{a}_1$**,** $\mathbf{b}_1$**,** $\mathbf{d}_1$ cuya suma será $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$. Miremos la Figura 19, en ella observamos que el plano de la página es π, perpendicular a $\mathbf{c}_0$. Giramos los vectores $\mathbf{a}_1$**,** $\mathbf{b}_1$**,** $\mathbf{d}_1$ alrededor del origen O, con

un ángulo de 90°; con tal cambio se obtiene los vectores $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c_0}$, $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c_0}$, $\mathbf{d} \wedge \mathbf{c_0}$, donde la suma de los vectores es: $\mathbf{d} \wedge \mathbf{c_0} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c_0} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c_0}$

Figura 19



Multiplicando ambos miembros por el módulo de **c** y reemplazando **d** por la suma **a + b** se obtiene la igualdad que queríamos demostrar.

iv) La condición necesaria y suficiente para que dos vectores tengan la misma dirección (con sentidos iguales u opuestos) es que su producto vectorial sea nulo.

3.7.2.1 Componentes del producto vectorial

Si dos vectores se escriben de forma canónica, mediante los versores **i, j, k** (estos últimos son vectores unitarios, que serán explicados en el ítem siguiente) del triedro fundamental, éstos quedarían expresados de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_1}\,\mathbf{i} + \mathbf{a_2}\,\mathbf{j} + \mathbf{a_3}\,\mathbf{k} \qquad ; \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b_1}\,\mathbf{i} + \mathbf{b_2}\,\mathbf{j} + \mathbf{b_3}\,\mathbf{k}$$

Aplicamos la propiedad distributiva del producto vectorial para ambos vectores, expresándolos en forma canónica:

FÍSICA

IPLACEX
TECNOLÓGICO NACIONAL

UNIDAD I

MECÁNICA VECTORIAL

a ∧ b = (a1 i + a2 j + a3 k) ∧ (b1 i + b2 j + b3 k) = (a2b3 – a3b2) i - (a3b1 – a1b3) j + (a1b2 – a2b1) k

El producto vectorial se puede expresar y desarrollar como el determinante de tercer orden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

3.8 Vector Unitario

Cuando hablamos de vectores unitarios, nos referimos a aquellos cuya magnitud es 1. Su única función es la de indicar o describir una dirección. Los vectores unitarios son una notación bastante cómoda para muchas expresiones que incluyen las componentes de los vectores. Se identifican con el símbolo (^).

Con la finalidad de poder trabajar algebraicamente con los vectores expresados por sus componentes, se definen tres vectores convencionales y unitarios:

$$\vec{\mathbf{i}}, \ \vec{\mathbf{j}}, \ \vec{\mathbf{k}}.$$

Estos son vectores de módulo igual a uno y perpendiculares entre sí reciben el nombre de versores fundamentales, se define uno en cada eje coordenado: en el eje **x, j** en **y, k** en **z**.

Las componentes de los versores fundamentales, para un sistema de coordenadas (O; x, y, z) ortogonales será:

$$\hat{i}(1,0,0) \qquad \hat{j}(0,1,0) \qquad \hat{k}(0,0,1)$$

Ventajas de este tipo de notación:

1) Trabajar con componentes ortogonales no nos es extraño, estamos habituados a usarlas ya que las calles de una ciudad se cruzan en ángulos rectos y las coordenadas geográficas, con las que estamos familiarizados, también corresponden a un sistema de coordenadas rectangular.

2) Usando esta notación trabajamos matemáticamente con los vectores sin separar su módulo de su orientación.

3) Al trabajar de este modo estamos expresando los vectores como polinomios, por lo tanto en caso de sumarlos y restarlos, los operaremos como lo hacemos con los polinomios, término a término.

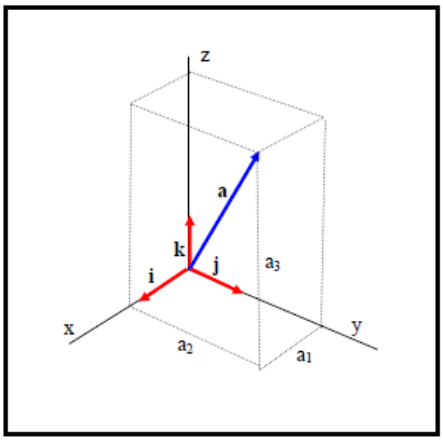
Si tenemos un vector $\mathbf{a_1}$ (a_1, a_2, a_3), lo podemos expresar en función de los versones fundamentales, escribiéndolos de la siguiente manera:

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

Cuando descomponemos un vector en tres, cada uno en la dirección de cada eje coordenado (x, y, z), estamos aplicando Descomposición canónica de un vector.

En la imagen 20 podemos apreciar un vector **a** en el espacio y saliendo desde el vértice, los tres versores fundamentales.

Figura 20



Hay que tener presente que los vectores unitarios son utilizados en el producto vectorial de dos vectores. De la definición de producto vectorial, detallamos todos los posibles productos vectoriales que pueden existir entre los vectores unitarios **i**, **j**, **k**:

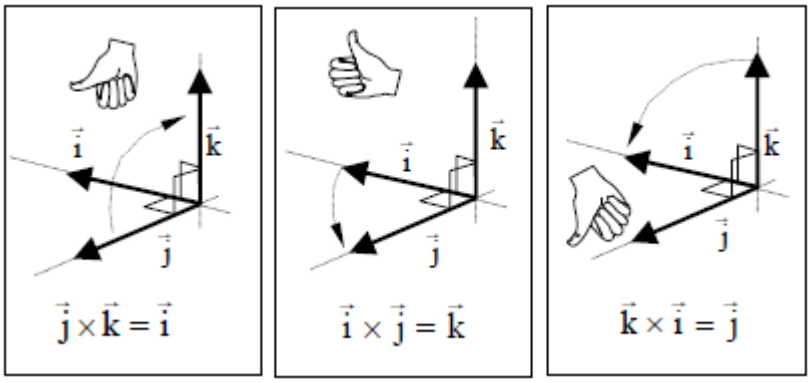
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

La dirección del vector resultante, del producto vectorial de dos versores fundamentales, se guiará por la regla de la mano derecha, o como vimos anteriormente del tornillo:



4. CAMPO ESCALAR Y VECTORIAL

Un campo escalar corresponde a una magnitud física que requiere sólo de un número para su caracterización. Esto puede corresponder, por ejemplo, a la distribución de temperaturas dentro de un cuerpo, a las presiones dentro de un fluido, o a un potencial electrostático. Un campo vectorial en cambio, corresponde a una magnitud física que requiere de varios números para su descripción, como puede ser un campo de fuerzas gravitacionales o eléctricas. A continuación se especifica más en detalle lo que es un campo, ya sea escalar o vectorial.

4.1 Definición de Campo

Campo en general se identificará como toda magnitud física cuyo valor depende del punto del plano o del espacio y del instante que se considere. Si la magnitud definida así en un punto del espacio es escalar, el campo es escalar; si es vectorial entonces sería un campo vectorial. Veamos algunos ejemplos:

Si en invierno tomáramos la temperatura en diferentes puntos de la sala de clases, observaríamos que se obtienen mediciones diferentes dependiendo de su ubicación. Si se mide la temperatura cerca de los radiadores, ésta sería mucho mayor que si la tomamos junto a la puerta o las ventanas. La sala sería entonces un campo escalar de la temperatura.

En un río dejaremos flotando corchos a diferente distancia del borde, observaríamos que la velocidad con que se mueven producto de la corriente, será distinta, pues mientras más al centro del río estén mayor será la velocidad, y mientras más a la orilla esta será inferior. Dichas velocidades variables con la distancia a la orilla, representarán un campo vectorial de las velocidades.

Específicamente un campo estaría constituido por una distribución de magnitudes escalares y vectoriales definidas en función de las coordenadas espaciales y del tiempo. Se debe recordar que una magnitud escalar requiere un único número para su descripción completa, en cambio la vectorial necesita de 3 (el módulo, dirección y sentido).

4.2 Campos escalares y vectoriales

La posibilidad de establecer una correspondencia entre los puntos de un espacio físico y ciertas magnitudes físicas existentes, permiten definir funciones escalares específicas en dichos puntos.

Se llamará Campo escalar o Campo vectorial al conjunto de valores obtenidos de las funciones específicas antes mencionadas.

Aquellos valores que no dependan del tiempo, recibirán el nombre de campos estacionarios.

Si todos los puntos de un campo presentan la misma magnitud escalar o vectorial, recibirá en nombre de campo uniforme.

Existen muchos tipos de campos, algunos ejemplos son: Campo uniforme y no estacionario, Campo uniforme y estacionario y Campo estacionario y no uniforme. Detallaremos uno para que quede más claro a que nos referimos.

Campo estacionario y no uniforme: será aquel campo que no varía su valor en el tiempo y que además no presentará la misma magnitud en los puntos del espacio que la componen. Un ejemplo es la velocidad de las partículas de un fluido.

4.2.1 Características de los campos escalares y vectoriales

a) Univaluados: El valor de cada punto vectorial o escalar es único

b) Acotados: Existe un número tal que la magnitud del campo es menor

c) Continuos: Los valores del campo en un punto es independiente de la dirección por la que nos acerquemos y coincide con el valor del campo en ese punto
d) Lineales: Los vectores que componen un campo de dimensión n, pueden expresarse como una combinación lineal de n vectores.

e) Diferenciables.

4.2.2 Superficies de nivel de un Campo escalar y vectorial

Superficies de nivel de un Campo Escalar: Será aquel lugar geométrico de los puntos a los que les corresponde un mismo valor del escalar, en un instante dado. El campo se representa por a (x,y,z) y la superficie de nivel será a (x, y, z, t) = C. A cada valor C, le corresponderá una superficie de nivel, así que conociendo el valor del campo en un punto, conoceremos el valor del parámetro de la superficie de nivel que pasa por ese punto.

Líneas de campo (Campo Vectorial): se caracterizan porque en cada uno de sus puntos, el campo vectorial es tangente a ellas. Además como ya vimos antes, no pueden cortarse entre sí (Univaluado).

4.2.3 Campo escalar

El campo escalar se definirá como aquella región del espacio, donde a cada punto de coordenadas (x, y, z) se le puede asociar un escalar V (x, y, z). La función V depende del punto, por lo que recibe el nombre de función escalar de punto.

En caso de que un campo escalar no dependa del tiempo, se le llamará campo escalar estacionario.

Definiremos la Superficie equiescalar o isoescalar, como el lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el campo escalar tiene el mismo valor. Todas las superficies equiescalares se determinan por la siguiente expresión:

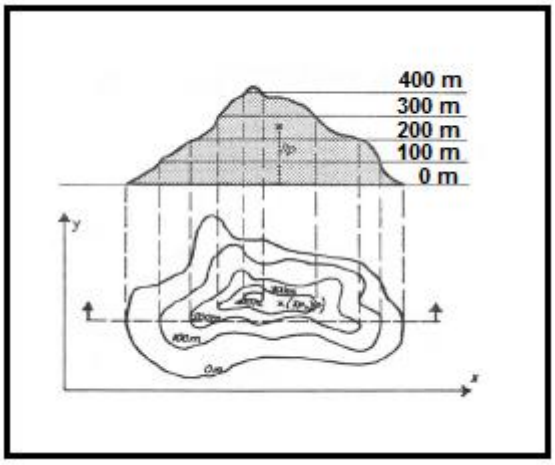
$$V(x, y, z) = k_i \quad ; \quad (k_i \text{ es una constante})$$

Las superficies equiescalares no pueden tener puntos comunes, debido a que la función escalar no puede tener dos valores distintos para un mismo punto.

Cómo mostramos al principio, un ejemplo claro es la temperatura de una sala de clases, pero otro ejemplo fácil de comprender sería el campo de presiones que presenta un gas. Analicemos un ejemplo más detalladamente:

Revisaremos el campo escalar de las alturas en un plano topográfico (Figura 21). Al observar los planos, podemos determinar que existen curvas de nivel o lugares geométricos en los que la altura es la misma. En el plano XY, situado debajo de las curvas de nivel, podemos observar que a cada punto del plano dado, le corresponde una determinada altura, que es una magnitud escalar (recuerda que la altura es una magnitud que se puede determinar con su módulo y la unidad de medida). El grafico realizado corresponderá entonces al campo escalar donde la función es la altura.

Figura 21



La figura 21 presenta las alturas de un plano topográfico que va de 0 a 400 metros, en escalas de cien en cien. El gráfico que está debajo de las curvas representa a las alturas, siendo la curva exterior igual a 0 m y las siguientes representan 100m, 200m, 300m y 400m.

Para el caso en que algunas curvas de nivel o lugares geométricos presenten la misma magnitud, recibirán el nombre de líneas isotímicas, o líneas de potencial en aquellos campos que son conservativos. Las superficies encerradas por las líneas isotímicas, recibirán el nombre de superficies isotímicas.

Cuando la magnitud que se mide es la temperatura, las superficies recibirán el nombre de isotermas, y en el caso que la magnitud sea la presión, recibirán el nombre serían isobaras.

4.2.3.1 Gradiente de un campo escalar. El operador Nabla o Hamiltoniano

Gradiente será la magnitud que mide la máxima variación de una función escalar derivado de la posición. Su sentido es hacia los valores crecientes de la magnitud escalar que sufre la variación. Por ejemplo el caso de un campo escalar de alturas, el gradiente nos indicaría la línea de máxima pendiente. Éste dato sería muy importante porque nos permitiría saber por dónde fluiría el agua de un manantial en una montaña, o para saber donde instalar el tendido de una línea eléctrica si se pretende ahorrar material.

Sea F (x, y, z) una función escalar definida y derivable en cada uno de sus puntos (x, y, z) de una cierta región del espacio, con F que define un campo escalara derivable (presión, altura, temperatura, altura, potencial, densidad electrónica etc.). El gradiente de F se representará por ∇F o **grad F,** representado por un vector que en coordenadas cartesianas sería:

$$\overrightarrow{\text{GRAD}}\ F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\vec{k}$$

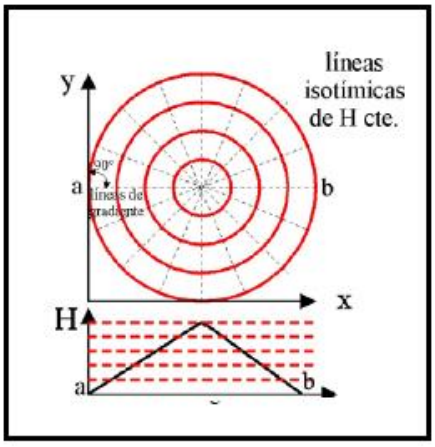
El gradiente representará entonces las derivadas parciales de una función escalar en un espacio vectorial, produciendo una derivada vectorial. El símbolo representativo del gradiente es un símbolo matemático que consiste en un triángulo delta que representa el incremento, pero en éste caso representa invertido y con el vértice hacia abajo: ∇. Éste recibe el nombre de NABLA o ATLED debido a su forma. El primer nombre se extrajo de un instrumento musical de cuerdas, similar a un arpa y que era empleado por sirios y persas. Muy por el contrario, el segundo proviene de la palabra delta, pero invertida. El gradiente por si sólo es:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{k}$$

Cómo ∇F es un vector de versores (**i, j, k**), podemos determinar su módulo, que quedaría expresado como sigue:

$$|\overrightarrow{\text{GRAD}}\ \text{F}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

Figura 22



Su dirección, como ya dijimos, será la máxima variación de la función. Y como sentido de la variación se considerará el creciente.

Veamos un ejemplo: En un campo de alturas, representado en la Figura 22 (mapa topográfico en el eje cartesiano), el gradiente será:

$$\vec{\nabla}\text{H} = \frac{\partial \text{H}}{\partial \text{x}}\vec{\text{i}} + \frac{\partial \text{H}}{\partial \text{y}}\vec{\text{j}} = \frac{\text{dH}}{\text{dr}}\vec{\text{u}}_r$$

El gradiente en éste caso nos permitirá conocer la máxima variación de la altura con la distancia, en cada punto del terreno evaluado.

Multiplicaremos el producto escalar del gradiente por su desplazamiento. (Vector unitario, multiplicado por los componentes **i, j** del desplazamiento):

$$\frac{\text{dH}}{\text{dr}}\vec{\text{u}}_r \cdot \vec{\text{u}}_r = \vec{\nabla}\text{H} \cdot \vec{\text{u}}_r\,; \qquad \text{dH} = \vec{\nabla}\text{H} \cdot \vec{\text{u}}\,\text{dr} = \vec{\nabla}\text{H} \cdot \text{d}\vec{\text{r}}$$

Tener presente que: Si la altura es constante (H = cte), la derivada será cero (dH= 0).

El gradiente de una función a lo largo de una curva de nivel o línea isotímica, (Líneas circunferenciales presentadas en la Figura 22 con altura cte.), deberá ser

perpendicular a su desplazamiento, ya que dH=0, al ser la diferencia de una constante y puesto que se trata de un producto escalar. (Si el ángulo es 90º, el coseno del ángulo que forma la curva de nivel y el gradiente es cero).

Una propiedad del gradiente, es ser perpendicular a cualquier superficie isotímica en todos sus puntos y con sentido hacia los valores crecientes de las superficies isotímicas. La importancia de ésta propiedad es que si se quiere obtener el vector unitario perpendicular a una superficie en un punto de la misma, bastará con calcular el gradiente y después aplicar el concepto de vector unitario.

En resumen podemos decir que:

a) Dirección: En cada punto es perpendicular a la superficie de nivel que pasa por él

b) Sentido: El de crecimiento de la función escalar

c) Módulo: El de la derivada de la función en esa dirección y sentido

Ejemplos:

1. Sea **V = X sen y + y**. Calcula el vector **grad V** y el valor de su módulo.

   Respuesta:

$$\text{Grad V} = \nabla V = \frac{\partial(x\,\text{sen}y+y)}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial(x\,\text{sen}\,y)}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial(x\,\text{sen}y+y)}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\text{Grad V} = \text{sen}y\ \vec{u}_x + (x\cos y + 1)\,\vec{u}_y + 0\,\vec{u}_z$$

$$|\text{Grad V}| = \sqrt{(\text{sen}y)^2 + (x\cos y + 1)^2}$$

2. Hallar el vector unitario, normal a la superficie **x .y + y .z – x .z = 7** en el punto **(1, 2, 3)**

   Respuesta:

   El vector normal a la superficie **– x.y + y.z – x.z = 18**, será el vector

Grad (– x.y + y.z – x.z = 18) =

$$\frac{\partial(x.y+y.z-x.z-18)}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial(x.y+y.z-x.z-18)}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial(x.y+y.z-x.z-18)}{\partial z}\vec{u}_z=$$

$$(y-z)\,\vec{u}_x+\quad(x+z)\vec{u}_y+\quad(y-x)\,\vec{u}_z=\vec{a}$$

Donde el vector **a** es: $\vec{a}\,(1,3,2)=\vec{u}_x+3\vec{u}_y+2\,\vec{u}_z$

Tenemos **a**, pero nos piden calcular el vector unitario. Para obtenerlo debemos dividir cada componente del vector, por el modulo del mismo. Por lo tanto lo pedido será el vector unitario del vector gradiente **a** obtenido:

$$\vec{u}_a=\frac{1}{\sqrt{14}}\,\vec{u}_x+\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{u}_y+\frac{2}{\sqrt{14}}\,\vec{u}_z$$

3. Dada la función escalar $V = 2x^2 + 3y^2 + z^2$. Determine el gradiente en el punto P (1,1,1)

   Respuesta: Tomamos la función escalar y la derivamos respecto a x, y z. lo que nos quedaría:

$$\vec{\nabla}V=2\cdot 2x\vec{i}+2\cdot 3y\vec{j}+2z\vec{k}$$

   Luego, sustituimos el punto P (1,1,1). Esto quiere decir que x = 1, y = 1 y z =1, por lo que reemplazamos los valores en la función derivada anteriormente, lo que no da como resultado:

$$\vec{\nabla}V=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$$

4. Calcule el gradiente del campo escalar U = sen (xy / 2).

   Respuesta: al igual que en el ejercicio anterior, debemos calcular la derivada del campo escalar U. Para ello cabe recordar que al derivar una función, todos los valores distintos a la variable sobre la cual se está derivando se consideran como constantes:

   Primero derivamos U: $\vec{\nabla}\,U=(y/2)\cos(xy/2)\;\vec{i}\;+(x/2)\cos(xy/2)\;\vec{j}$

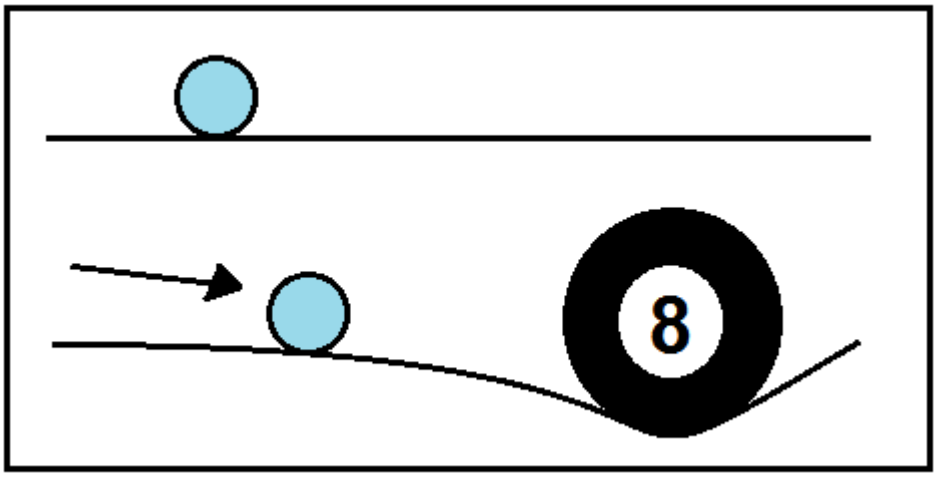
4.2.4 Campo Vectorial

Al hablar de campo vectorial, hablamos de aquellos campos en los cuales nosotros vivimos cotidianamente, donde estamos inmersos y donde toda la materia interactúa. Los campos conocidos en la naturaleza son los campos de fuerzas como el campo gravitatorio (interacción entre masas), campo electromagnético (interacción entre cargas; eléctrico si las cargas están en reposo y magnético si las cargas están en movimiento), también encontramos el campo nuclear (interacciones nucleares) y el campo débil (que regula la interacción entre diferentes tipos de partículas nucleares).

En la antigüedad se cría que los campos de fuerza se originaron a través de la acción de la magnitud creadora del campo, llamada fuente de campo o magnitud activa a través del espacio. Así explicaban por qué una masa, por ejemplo la Tierra, atraía a otra masa, como una piedra. El razonamiento era que la piedra se encontraba dentro de un campo creado por la tierra, lo que permitía que experimentara efectos llamados gravitatorios, palabra derivada del latín gravis, que significa pesado.

Hoy en día, se piensa que la magnitud activa que actúa como fuente u origen del campo, crea una perturbación en el espacio que la rodea, que luego se propaga hasta alcanzar a otras magnitudes de su misma naturaleza. Por ejemplo, si sobre una tela tensada (espacio del campo), ubico una bolita de cristal (canica), ésta permanecerá en reposo y sin deformar el campo debido a que su masa es ínfima. En cambio, si ahora en vez de una bolita, pongo una bola de billar, ésta si deformará la tela y hará que la canica se acerque a ella. Por lo tanto, la bola de villar actuará como fuente de un campo, que perturbará el medio y deformará su espacio, actuando sobre la otra bolita. (Figura 23)

Figura 23



Intensidad de un campo de fuerza **I,** corresponderá a la Fuerza / Unidad de magnitud activa (**I = F / A**). Según esto en los tres campos macroscópicos: ***gravitatorio, eléctrico y magnético***, de alcance infinito, las características generales serían los que se detallan en la siguiente tabla.

CAMPO	MAGNITUD ACTIVA A	INTENSIDAD $\vec{I} = \vec{F}/A$	UNIDADES	INTERACCIÓN $\vec{F} = k\frac{AA'}{\lvert\vec{r}\rvert^3}\vec{r}$	k (u.S.I.)	TIPO (magnitudes semejantes)
Gravitatorio	Masa m	$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$	N/kg o m/s^2	$\vec{F} = -k\frac{mm'}{\lvert\vec{r}\rvert^3}\vec{r}$	$6{,}67.10^{-11}$	ATRACTIVA
Eléctrico	Carga, q	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	N/C o V/m	$\vec{F} = k\frac{qq'}{\lvert\vec{r}\rvert^3}\vec{r}$	9.10^{9}	REPULSIVA O ATRACTIVA
Magnético	Carga en movimiento, $q\vec{v}$	$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q\vec{v}\wedge\vec{u}_r}{\lvert\vec{r}\rvert^2}$	N.s/C.m (Tesla, T)	$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$	10^{-7}	REPULSIVA O ATRACTIVA

a) En el campo eléctrico es $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ (ε = coeficiente dieléctrico o permitividad del medio), y cuyo campo magnético es $\frac{\mu}{4\pi}$ la permeabilidad magnética del medio.

b) En el campo gravitatorio y eléctrico, la intensidad del campo tiene la misma dirección que la fuerza, dado que la magnitud activa es escalar, sin embargo no ocurre lo mismo en el magnético, pues la velocidad v es un vector y la fuerza sobre una carga en un campo B responde a un producto vectorial ***F = qv ^ B***

c) Si los campos vectoriales estuvieran integrados por varias magnitudes activas, sus efectos o intensidades se sumarían vectorialmente, a partir de un principio llamado de superposición de campos, de tal modo que la presencia de cada uno no perturba la acción de los demás de modo individual.

4.2.4.1 Circulación de un Campos Vectorial F = (x, y, z). Campos conservativos

Considere una cierta región del espacio donde existe un campo de vectores F (x, y, z), se define la circulación de F a lo largo de una curva y del campo, entre los puntos A y B como se demuestra a continuación.

4.2.4.2 Caso Particular e importante:

Si **F** = grad U = ∇U, la circulación se escribirá:

$$C = \int_{\gamma} \text{grad } U \,.\, dl = \int_{U_A}^{U_B} dU = U_A - U_B$$

Introduciendo una nueva función escalar V tal que **V (x, y, z) = - U (x, y, z)**, con lo anterior tendremos que:

$$C = \int_{U_A}^{U_B} dU = -\int_{V_A}^{V_B} d\,V = V_A - V_B;$$

Si la curva es cerrada $\mathbf{V_A = V_B}$ (comienza y termina en el mismo punto), entonces $C = \oint \mathbf{dV} = 0$. A **V (x, y, z)** se le llamará potencial escalar del campo de vectores y en este caso, se dirá que el campo de vectores **F**, derivará de un potencial escalar **V (x, y, z).**

Si un campo de vectores deriva de una potencia escalar V, se cumple que:

a) El campo es igual al grad V, pero de signo opuesto

b) La circulación del campo vectorial a lo largo de una curva es independiente del camino, únicamente depende del valor del potencial escalar en los extremos de la curva.

c) La circulación a lo largo de cualquier curva cerrada vale cero. Además **V (x, y, z) = cte.** representa una superficie equipotencial (lugar geométrico de los puntos de un campo escalar en los cuales el "potencial de campo" o valor numérico de la función que representa el campo, es constante).

4.2.4.3 Campos conservativos:

Hablaremos de Campos Conservativos cuando la circulación de un Campo vectorial a lo largo de una curva sea independiente de su recorrido, y que dependa únicamente de los puntos inicial y final.

Para todo campo conservativo podremos encontrar un campo escalar del cual deriva.

A su vez, si un campo vectorial deriva de un campo escalar, éste se llamará conservativo.

4.2.4.4Dirección del campo:

La circulación a través de una superficie equipotencial será:

$$\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = = -\int_{V_A}^{V_B} d\,V = V_A - V_B = 0$$

Será cero porque es una superficie equipotencial $\mathbf{V_A = V_B}$. Esto también generará que el campo sea normal a las superficies equipotenciales.

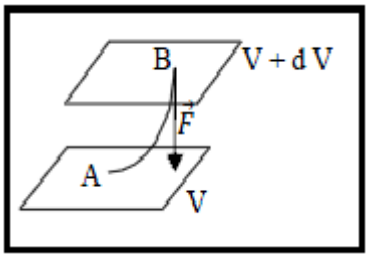
4.2.4.5 Sentido del campo:

Supongamos que tenemos dos superficies equipotenciales muy próximas entre si, con valores **V** y **V + dV.** El campo será normal (perpendicular) **V** y a **V + dV,** por consecuencia, será tangente a AB. (Figura 24)

Como: $\int_A^B \vec{F}.\,\vec{dl} = \int_V^{V+dV} (-dV) = V-(V+dV) = -dV$

Al ser **dl** tangente a la trayectoria y dirigido hacia B, la dirección del campo será hacia potenciales decreciente.

Figura 24

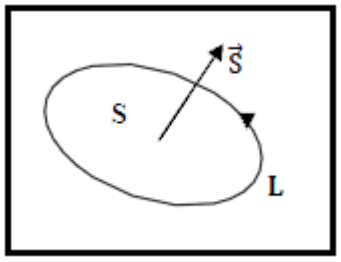


4.2.4.6 Representación vectorial de una superficie:

Cuándo se desarrolle el producto vectorial de dos vectores **a y b**, el módulo del producto vectorial representará el área del paralelogramo que forma los módulos de sus vectores como lados. Lo anterior sugiere que a un vector se le puede asociar un área.

Vamos a considerar que la figura 25, posee una superficie plana S y contorno L está orientada. Convendremos que dicha superficie se puede representar por un vector S de magnitud igual al área de la superficie, donde su dirección será perpendicular al plano que la contiene y de sentido según la regla de la mano derecha (o del tornillo: ítem 3.8).

Figura 25



Componentes de S:

Según los ejes de coordenadas, las componentes de S son iguales a la proyección de la superficie sobre los tres planos de coordenadas y coinciden con la del vector S según los ejes.

Superficie no plana:

Si esto sucede entonces el valor de la superficie total no será coincidente con la magnitud del vector S, que se obtendrá al sumar los vectores correspondientes a la división de la superficie en superficies planas.

Superficie Cerrada:

En ésta situación, el vector representante de la superficie será nulo, esto producto de que dividida la superficie en **N** superficies planas, cada una de éstas puede representarse por un vector que será perpendicular a la misma y de sentido hacia fuera. Si sumamos todos los vectores de las superficies planas, para obtener el vector **S** que representa la superficie

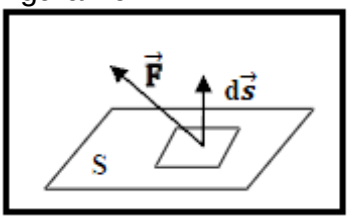
del área total, obtendremos un vector que será nulo, debido a que cada una de las **N** superficies tendrá su correspondiente.

4.2.5 Flujo a través de una superficie. Flujo de un Campo Vectorial

S es una superficie que está situada en un campos vectorial **F** (Figura 26), que recibe el nombre de flujo elemental del campo a través del elemento de una superficie (vector **dS**) a

$d\phi = \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}$ El flujo total a través de la superficie S, será representado por $\Phi = \iint_S \vec{F}.\overrightarrow{ds}$.

Figura 26



$$\text{Si } \vec{F} = (X, Y, Z) \quad \text{y} \quad d\vec{S} = (ds_x, ds_y, ds_z) \text{ entonces } \phi = \iint_S X\,dS_x + Y\,dS_y + Z\,dS_z$$

El flujo que pasa a través de una superficie, se representará de modo cualitativo y grafico, cómo el número de líneas que atraviesan la superficie en cuestión.

Hablaremos de flujo máximo cuando ésta sea normal al campo, o sea, perpendicular a este. En caso de que la superficie sea paralela al campo, el flujo será nulo.

El vector superficie **dS** se considera perpendicular a la superficie, o sea, forma un ángulo de 90º. Su modulo será el valor de la superficie dS y su sentido será positivo cuando atraviesa de dentro hacia fuera.

4.2.5.1 Sentido del Flujo

Lo primero que haremos es suponer que el vector **F** es algo que posee movimiento, por lo tanto, el flujo será la cantidad de “ese algo” que entra o sale de la superficie S. Analicemos un ejemplo: Suponga que **F** representa la velocidad de un fluido, por lo tanto el flujo esta dado por la cantidad de liquido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo.

Indicaremos que el movimiento de un fluido es estacionario cuando la cantidad de líquido que entra (desde fuera hacia dentro), es la misma cantidad que sale de la superficie cerrada. Se habla de flujo conservativo. En el interior de la superficie se dice que:

a) Hay manantiales, si sale más flujo del que entra
b) Hay sumideros, si entra más flujo del que sale

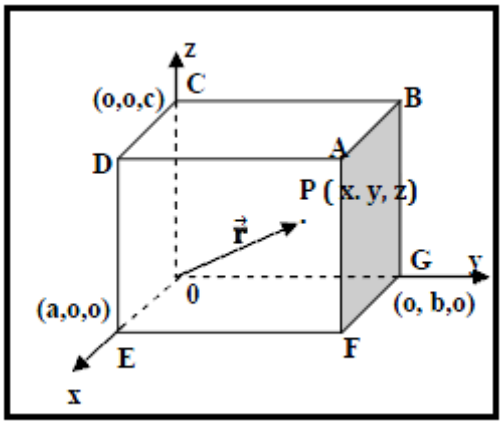
"El flujo a través de una superficie, dependerá sólo del contorno del límite, no del tipo o forma de la superficie que se consideró para calcular el flujo"

Ejemplo: Consideremos un campo vectorial dado por $\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$, que representa el vector de posición de un punto cualquiera en el espacio P (x, y, z), se pide:

1. El flujo del campo vectorial dado, a través del paralelepípedo de aristas a, b y c, que tiene un vértice en el origen de las coordenadas y tres de sus planos coincidentes con los planos Z = 0, X = 0 e Y = 0, cómo indica la figura 27.

2. La circulación del campo vectorial dado a lo largo de los caminos **OCBA, OCDA, OEDA, OEFA, OGBA, OGFA.**

Figura 27



a) $\Phi = \oiint_S \vec{r} \cdot d\vec{s}$; S es la superficie del paralelepípedo. En las caras que están sobre los planos Z = 0, X = 0 e Y = 0, el campo vectorial **r** y el elemento de superficie **dS,** son perpendiculares, por lo que su flujo es nulo. Esto permite concluir que:

$$\Phi_{OGFE} = \Phi_{OGBC} = \Phi_{OCDE} = 0$$

El flujo a través de la cara ABCD será:

$$d\vec{s}_z = dx\ dy\ \vec{u}_z\ ;\ \ \Phi_{ABCD} = \iint_{S_z} \vec{r} \cdot d\vec{s}_z =$$

$$\iint_{S_z} (X\,\vec{U}_X + Y\,\vec{U}_y + Z\,\vec{U}_z) \cdot dx\ dy\ \vec{u}_z = \iint_{S_z} Z\ dx\ dy = \int_0^a c\ dx \int_o^b dy = cab$$

En cambio los flujos de las caras ABGF y AFED, calculados de forma similar, dan como resultado:

$$\Phi_{AFGB} = bac \quad y \quad \Phi_{ADEF} = abc$$

$$\Phi_{total} = \Phi_{OGFE} + \Phi_{OGBC} + \Phi_{OCDE} + \Phi_{ABCD} + \Phi_{AFGB} + \Phi_{ADEF} = 3\ abc = 3\ V$$

El volumen del paralelepípedo será representado por: **abc = V**

b) La circulación será $C = \int_\gamma \vec{r} \cdot d\vec{l}$ donde γ corresponde al camino recorrido. El camino OCBA quedará expresado como sigue:

$$C_{OCBA} = \int_{OCBA} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \int_{OC} \vec{r} \cdot d\vec{l} + \int_{CB} \vec{r} \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \int_0^c z \cdot dz + \int_0^b y \cdot dy + \int_0^a x \cdot dx$$

Al integrar quedará que la circulación es:

$$C_{OCBA} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{2}$$

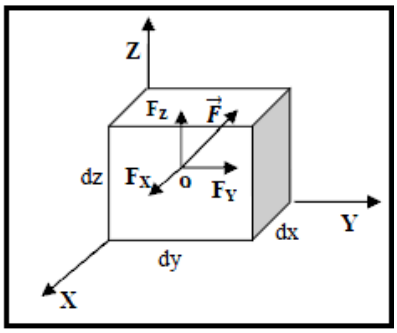
Éste resultado será el mismo para todos los caminos mencionado en el ejemplo, lo que da indicios de que es un campo conservativo.

5. DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL. TEOREMA DE GAUS. CAMPOS SELENOIDALES

Consideremos que el campo vectorial es **F = (F_x, F_y, F_z)** y le calcularemos el flujo a través de una superficie cerrada, por lo que vamos a tomar un paralelepípedo elemental de lados dx, dy, dz.

El flujo elemental total, corresponderá a la suma de los flujos elementales de las seis caras del paralelepípedo (Figura 28).

Figura 28



$$d\Phi_x = (F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{dx}{2})dy\,dz - (F_x - \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{dx}{2})dy\,dz$$

$$d\Phi_y = (F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{dy}{2})dx\,dz - (F_y - \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{dy}{2})dx\,dz$$

$$d\Phi_z = (F_z + \frac{\partial F_z}{\partial z}\frac{dz}{2})dx\,dy - (F_z - \frac{\partial F_z}{\partial z}\frac{dz}{2})dx\,dy$$

El flujo total será: $$d\,\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

El diferencial del volumen es: dV = dx dy dz

Por lo que se puede poner: $$d\,\Phi = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dV$$

Definiendo la Divergencia del campo vectorial F como:

$$\boxed{\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \bullet \vec{\mathbf{F}}}$$

5.1 Campo selenoidal

Si la divergencia de un campo es cero (**div F = 0**), significa que no existen sumideros ni manantiales (definiciones entregadas anteriormente). Las líneas de campo o de fuerza serán cerradas y recibirá el nombre de campo Selenoidal.

La condición necesaria y suficiente para estos campos, es que el flujo de cualquier superficie que se apoye en el mismo contorno, sea el mismo.

Cuando el flujo de un campo selenoidal a través de una superficie cerrada sea cero, será producto que el flujo a través de cierta parte de ella, es igual y contrario al flujo a través del resto.

5.2 Teorema de Gauss

El teorema de Gauss es:

$$\boxed{\iiint \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{F}}\,\mathbf{dv} = \oiint_{S} \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}}}$$

Se extrae del siguiente razonamiento: Cada manantial unitario de una superficie proporciona un volumen unitario, cuyo flujo a través de ***ds*** será: $d\phi = \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}}$, que es igual al flujo que se produce en **dv** que es $\rho\, dv$. Cómo el número de manantiales unitarios de un elemento de volumen **dv**, limitado por una superficie se define como: $\rho dv = \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{F}}\,dv$, Entonces basándonos en los datos recopilados podemos decir que: $\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{F}}\,dv = \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}}$, igualdad que se puede expresar como en el recuadro superior.

Ejemplo:

Verifica que el flujo del campo vectorial $\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$, que representa al vector posición en coordenadas cartesianas de un punto cualquiera del espacio P (x, y, z), a través de cualquier superficie cerrada, es tres veces el volumen encerrado por dicha superficie:

Calculemos el valor de la divergencia:

$$\mathrm{div}\,\vec{r} = \nabla \bullet \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Cómo:

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,dv = \iiint_V 3\,dv = 3\,V$$

Y según el teorema de Gauss:

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,dv = \oiint_S \vec{F} \bullet \vec{ds}$$

Luego :

$$\oiint_S \vec{F} \bullet \vec{ds} = 3V$$

5.3 Rotacional de un campo vectorial. Teorema de Stokes.

Si E (x, y, z) = E_xi + E_y**j** + E_z**k** es un campo vectorial derivable, el rotacional de E, vendrá dado en coordenadas cartesianas, por la expresión:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \equiv \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$\text{rot}\,\mathbf{E} \equiv \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

El rotacional corresponderá a un vector que puede entenderse como el “producto vectorial” del operador nabla (triángulo invertido), por el campo vectorial E.

Cuando $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $(\text{rot}\,\mathbf{E} = 0)$, significa que el campo vectorial E es irrotacional, y esto nos permite decir que E deriva de una función escalar V de la siguiente forma:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\,\mathbf{grad}\ V$$

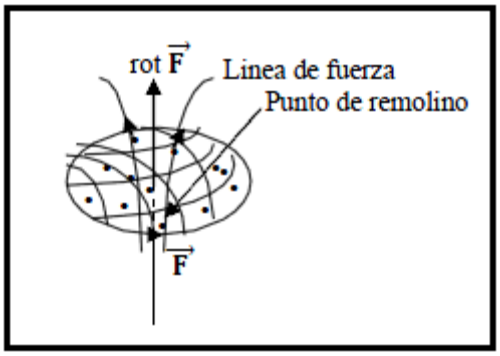
Irrotacional: campo cuyo rotacional es nulo en todos los puntos del espacio. Rotacional o rotor es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

El valor del rotacional de un campo vectorial nos da las “fuentes vectoriales” del campo en cada punto. Si el rotacional es cero para todos los puntos, significa que E no tiene “fuentes vectoriales”

Consideremos un fluido en movimiento de rotación (por ejemplo un remolino de agua o cuando baja esta por la cañería). **F** será aquel vector que cómo dijimos antes, representará la velocidad del fluido. Definiremos la circulación del vector **F** a lo largo de una línea cerrada y contenida en la región donde el campo **F** esté como: $C = \oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{dl}}$.

Las partículas de un fluido se limitan a describir curvas cerradas alrededor de un eje que es normal al plano que contiene la trayectoria de las partículas, pero puede ocurrir que a veces experimenten un movimiento ascendente de traslación (movimiento de remolino), haciendo que aparte del campo **F** existente, se generen otros campos llamados rotacionales y que se representan por **E = rot F.** (Figura 29)

Figura 29



La circulación del campo **F** a lo largo de las líneas cerradas se considerarán positivas al coincidir con la indicada por **rot F.**

Las líneas de fuerza serán las del vector **rot F**, mientras que los puntos de remolino serán la interacción de las líneas de fuerza con la superficie, que será normal a **rot F.**

La circulación total a lo largo del contorno de la superficie **S** corresponderá a la suma de las **n** circulaciones a lo largo del contorno de las **n** superficies elementales en las que dividimos la superficie S, o sea **C = n Ci.**

Al dividir la superficie, se formarán celdillas que serán atravesadas únicamente por una línea de fuerza, por lo que cada celdilla tendrá un solo punto de remolino.

Tomaremos a cada celdilla como una circulación unitaria y de acuerdo a esto definiremos que el rotacional del campo vectorial **F**, **rot F** como: la densidad superficial de puntos de remolino en la superficie S. Cómo existen muchos puntos de remolino, como celdillas y circulaciones elementales, que la suma será: $C = \oint_{\gamma} \vec{F} \bullet \vec{dl}$, la que se puede expresar como: $\text{rot } \vec{F} = \lim_{S \to o} \frac{1}{S} \oint_{\gamma} \vec{F} \bullet \vec{dl}$.

El rotacional del campo vectorial E se puede expresar matemáticamente, en sus componentes cartesianas, quedando expresado de la siguiente manera:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_x & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_Y & F_Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

Teorema de Stokes

La circulación del campo vectorial F a lo largo de una línea cerrada, es igual al número total de puntos de remolinos sobre la superficie que limita dicha línea.

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \bullet \vec{dl} = \iint_{S} \text{rot } \vec{F} \bullet \vec{ds} \quad \text{TEOREMA DE STOKES}$$

El campo rotF es selenoidal, pues cumple que **div rot F = 0** y al aplicar el teorema de Gauss $\oiint_{S} \text{rot } \vec{F} \bullet \vec{ds} = \iiint_{V} \text{div}\left(\text{rot } \vec{F}\right) dv$, obtenemos que $\oiint_{S} \text{rot } \vec{F} \bullet \vec{ds} = 0$, siendo una superficie cerrada.

Conclusiones:

a) El número de puntos de remolino situados sobre dos superficies, que se apoyan en el mismo contorno es igual.
b) El campo rot F, es selenoidal. Sus líneas de campo son cerradas, no es posible la existencia de manantiales o sumideros de campo, de manera separada.
c) Campo irrotacional:

- Es conservativo

- Se puede expresar como el gradiente de un campo escalar, llamado potencial escalar.

- Su rotacional es cero.

- Para demostrar que un campo es conservativo, basta verificar que su rotacional es cero.

Ejemplo: Calcula el rotacional del campo vectorial $\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$, que representa el vector de posición, en el plano cartesiano de un punto cualquiera en el espacio P (x, y, z).

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{r} = \nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_x & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{u}_z = 0}$$

Se trata por lo tanto de un campo irrotacional y en consecuencia el vector r es conservativo.

En resumen:

Los campos vectoriales se clasifican en dos grupos, atendiendo a su rotacional y a su divergencia:

a) Campos irrotacionales: su rotacional es cero (rot F = 0) en todos los puntos del campo. Además la circulación a lo largo de cualquier línea cerrada es nula. Son campos potenciales y las líneas de campo son abiertas. Hay manantiales y sumideros. Ejemplo: campo electrostático.

b) Campos selenoidales: la divergencia es cero (div E = 0) en todos los puntos del campo. Además el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo. Son campos potenciales que derivan en un potencial vector. Las líneas de campo son cerradas y no hay manantiales ni sumideros. Ejemplo: campos magnético.

Cabe mencionar que pese a esta clasificación, hay campos vectoriales que no son ni selenoidales, ni irrotacionales, ya que un pueden tener tanto su divergencia como su rotacional distinta de cero.

6. RELACIÓN CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Los campos vectoriales se comparan con los campos escalares, ya que asocian un número o *escalar* a cada punto en el espacio. Las derivadas de un campo vectorial, que dan como resultado un campo escalar u otro campo vectorial, se llaman divergencia y rotor, como antes sugerimos. Recíprocamente se afirma que:

- Dado un campo vectorial cuyo rotacional se anula en un punto, existe un campo potencial escalar cuyo gradiente coincide con el campo escalar en un entorno de ese punto.
- Dado un campo vectorial solenoidal cuya divergencia se anula en un punto, existe un campo vectorial llamado potencial vector cuyo rotacional coincide con el campo escalar en un entorno de ese punto.

6.1 Potencial escalar

Un campo vectorial E (x, y, z) deriva en un potencial escalar V (x, y, z), campo escalar, cuando en todos sus puntos se cumple la siguiente relación:

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = -\,\mathbf{grad}\ \mathbf{V}}$$

O utilizando el operador nabla:

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\mathbf{V}}$$

A los campos vectoriales que derivan en un campo escalar, se les reconocerá como Campos Potenciales.

La función potencial V no es única, de hecho consideraremos una función V' que se definirá mediante la siguiente expresión:

$$V'(x, y, z) = V(x, y, z) + K \qquad ; \qquad K = cte$$

Entonces:

$$\vec{\mathbf{E}}' = -\vec{\nabla}\mathbf{V}' = -\vec{\nabla}(\mathbf{V}+\mathbf{K}) = -\vec{\nabla}\mathbf{V} - \vec{\nabla}\mathbf{K} = -\vec{\nabla}\mathbf{V} = \vec{\mathbf{E}}$$

Ejemplo: Supongamos que tenemos una curva C y en ella dos puntos A y B. Queremos saber la circulación del campo vectorial E, desde el punto de origen A hasta el punto B.

Como la relación anterior indica que $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\mathbf{V}$, entonces podemos escribir la siguiente integral entre los puntos A y B:

$$\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_A^B (\vec{\nabla}\mathbf{V}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Como $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\mathbf{V}$, entonces reemplazamos el valor de E por el operador nabla en la integral. Luego evaluamos la integral entre A y B, quedando el siguiente resultado:

$$\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_A^B (\vec{\nabla}\mathbf{V}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_A^B d\mathbf{V} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B$$

El resultado $V_A - V_B$ me comprueba que la circulación entre los puntos A y B, no depende del camino recorrido, sino que de los puntos inicial y final. Si por ejemplo yo analizo la circulación de un campo potencial a lo largo de una línea cerrada, el resultado debiera dar cero, pues el punto de inicio y término sería el mismo: $V_A - V_A = 0$, y el resultado de la integral será:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$$

En resumen se puede verificar que si E (x, y, z) es un campo conservativo, entonces:

$$\exists V \;/\; \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V \qquad \text{(campo potencial)}$$

$$\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = V_A - V_B \qquad \text{(independiente del camino)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0 \qquad \text{(campo conservativo)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0 \qquad \text{(campo irrotacional)}$$

6.2 Potencial vectorial

Ya que un campo irrotacional se puede expresar como el gradiente de un campo escalar, entonces un campo selenoidal se puede expresar como el rotacional de un campo vectorial que será nombrado como potencial vector (f). Si **E** es un campo seneoidal, entonces:

$$\vec{\nabla} \vec{\mathbf{E}} = 0$$

Dentro de las posibilidades de un operador nabla, se indica que la divergencia de un rotacional es nula, lo que quedaría:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{f}}) = 0$$

Con ésta igualdad podemos expresar que el campo vectorial selenoidal E será:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{f}}$$

El potencial del vector **f (x, y, z)** no es único, sino que considerará un nuevo potencial **f'** , que se definirá del siguiente modo:

$$\mathbf{f}'(x,y,z) = \mathbf{f}(x,y,z) + \nabla U$$

U (x, y, z) es un campo escalar, donde:

$$\nabla \times \mathbf{f}' = \nabla \times (\mathbf{f} + \nabla U) = \nabla \times \mathbf{f} + \nabla \times (\nabla U) = \nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{E}$$

En resumen podemos decir que E es un campo selenoidal donde se verifica que:

$$\exists \mathbf{f} \;/\; \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{f}$$

$$\Phi = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{(superficie cerrada)}$$

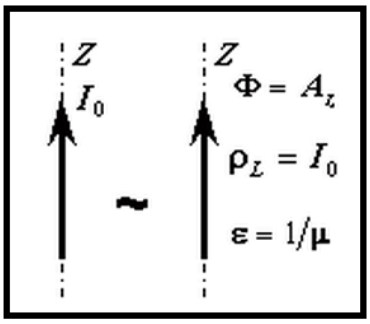
$$\nabla \mathbf{E} = 0 \quad \text{(campo solenoidal)}$$

Las líneas de campo son cerradas sobre sí mismas (no hay manantiales ni sumideros).

Veamos un ejemplo:

Sea una línea de corriente $\mathbf{I_o}$ que circula a lo largo del eje *z* en sentido positivo. Se considera que:

- La corriente sólo tiene sentido de la componente z $\longrightarrow \vec{A} = A_z \hat{z}$
- Éste problema es análogo al de una densidad de carga líneal sobre el eje z.



Solución:

La solución para éste problema electrostático es:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{\rho} + K}$$

Por analogía:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_z\hat{z} = \left(\frac{\mu I_0}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho} + K\right)\hat{z}$$

Por lo que el campo magnético será:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \left(\hat{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)A_z = \frac{\mu Io}{2\pi\rho}\hat{\varphi}}$$

FISICA

IPLACEX
TECNOLÓGICO NACIONAL

UNIDAD II

CINEMÁTICA Y DINÁMICA

INTODUCCION

Al mirar a nuestro alrededor podemos preguntarnos ¿Qué se mueve? un balón de fútbol, una hoja al caer de un árbol, el polvo cuando se levanta viento, las personas al caminar y así un sin fin se situaciones cotidianas, entonces no será mejor reformular la pregunta y consultarnos ¿Existirá algo que no se mueva?

Es imposible desligarse de un concepto cómo el movimiento y no hacerlo parte de nuestro entorno, porque incluso cuando dormimos nuestro cuerpo se mueve, o mirado desde un nivel macro, nuestro "estado de reposo" es relativo, tomando en cuenta que la tierra posee dos movimientos constantes, uno al alrededor del sol y otro sobre sí mismo.

Las mismas situaciones que observamos nosotros hoy en día, fueron observadas hace años atrás por físicos y científicos de la época, los que gracias a sus investigaciones sobre el movimiento, introdujeron los conceptos y teorías que hoy nos rigen y que se recopilan en dos ramas esenciales, la cinemática y la dinámica.

La cinemática es la rama de la física que estudia las leyes del movimiento, cambios de posición de los cuerpos, sin tomar en cuenta las causas que lo producen. Además, se puede consensuar que es la parte de la física donde los conceptos que se introducen resultan más familiares : posición, desplazamiento, velocidad o aceleración

La dinámica en cambio es la parte de la física que describe la evolución en el tiempo de un sistema físico en relación con las causas que provocan los cambios de movimiento. En palabras más simples, la dinámica es la encargada de estudiar las causas de los movimientos y su objetivo es describir los factores capaces de producir alteraciones de un sistema físico, cuantificarlos y plantear ecuaciones de movimiento para dicho sistema de operación.

IDEAS FUERZA

- La Cinemática es la parte de la Física que estudia los movimientos de los cuerpos pero sin atender a las causas que lo producen.

- El movimiento es el cambio de posición de un cuerpo a lo largo del tiempo. El movimiento es algo relativo, dependiendo de donde estemos (punto de referencia) un cuerpo se moverá o no.

- La trayectoria es la línea o camino descrito por el cuerpo en su movimiento, en cambio el desplazamiento corresponde a la distancia más corta y recta que puede existir entre el punto de partida y el de llegada.

- Los movimientos se clasifican en rectilíneos (aquellos en los que la trayectoria es una línea recta), parabólicos (es el movimiento que describe una bala) o circulares (movimiento descrito por un punto de una rueda).

- Un segmento es una porción de recta comprendida entre dos puntos.

- Un vector es un segmento definido por una longitud (módulo), una dirección (misma de la recta que contiene al vector) y un sentido. Se representa por una flecha.

- La velocidad es el espacio recorrido dividido por el tiempo empleado en recorrerlo. Se representa por un vector y su unidad de medida son los m/s o km/h.

- La aceleración es el incremento de la velocidad dividido entre el tiempo empleado. Se representa por un vector y su unidad de medida m/s^2.

- Movimiento rectilíneo uniforme: es aquél cuya trayectoria es una línea recta y cuya velocidad se mantiene constante.

- Un M.R.U.A es aquél cuya trayectoria es una línea recta y cuya aceleración se mantiene constante. Cuando frenamos, bajamos la velocidad y la aceleración es negativa.

- Dinámica es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos y las causas que lo producen, como asimismo los efectos que esos movimientos pueden producir.

1. DEFINICIÓN DE CINEMÁTICA Y DINÁMICA

El área de la física encargada de estudiar el movimiento se denomina Mecánica, y está constituida por dos grandes disciplinas:

a) Cinemática: estudia el movimiento sin atender a las causas que lo producen o modifican, centrándose en las magnitudes posición, velocidad y aceleración.

b) Dinámica: estudia las causas del movimiento y de sus variaciones.

1.1 Cinemática

Se comenzará la tercera unidad introduciéndonos en el área de la cinemática, en la cual se identificará en qué consiste el movimiento y todo lo que el conlleva.

1.1.1 Unidades de medida

En el estudio de las ciencias, es un requisito primordial la medición y el cálculo preciso de ciertos fenómenos. En física es aún más esencial, ya que ha conducido a grandes descubrimientos. Es por ello que se realizará una breve introducción a las unidades de medidas utilizadas en ésta unidad.

En este texto de apoyo se utilizará el Sistema Internacional (SI). Las magnitudes que se estudiarán son: movimiento, velocidad, trayectoria, desplazamiento, aceleración y fuerza; todas ellas se pueden expresar en función de tres unidades básicas, que son: Longitud, tiempo y masa, siendo la unidad patrón de cada una el metro, el segundo y el kilogramo.

1.1.2. Magnitudes físicas

Una magnitud física corresponde a todo aquello que es posible medir. Se pueden distinguir dos tipos dependiendo de sus características, estas son:

a) Magnitudes Escalares: se expresan perfecta y completamente a través de un módulo (número) y su unidad de medida, ésta última es la que indica a que magnitud pertenece, por ejemplo longitud (metro), masa (kilogramo), etcétera. Estas magnitudes se representan mediante escalas numéricas.

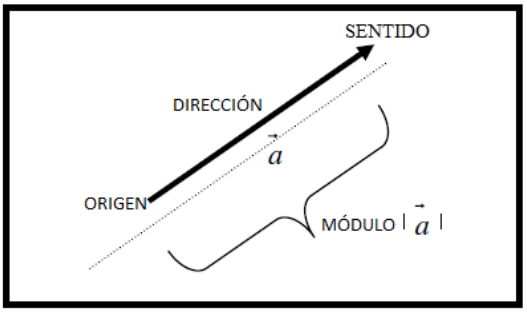
b) Magnitudes Vectoriales: estas necesitan más que una unidad y un módulo para ser expresadas, precisan también de una dirección y un sentido. Algunos ejemplos de éstas son velocidad (metro / segundo), aceleración (metro^2 / segundo) y fuerzas (Newton). Por lo anterior estas magnitudes siempre son representadas mediante vectores.

1.1.3. Vector

Recordemos que un vector se representa gráficamente como un segmento de flecha que une dos puntos en el espacio (Figura 1). Sus principales características son:

a) Módulo : Longitud del vector (valor numérico de la magnitud que se pide)
b) Dirección : Recta a que pertenece
c) Sentido : indicado mediante flecha
d) Origen : Punto desde donde comienza el vector

Figura 1.



1.1.4. Concepto de Movimiento

Cuando se habla de movimiento, se hace referencia al cambio de posición de un cuerpo a través del tiempo. Dicho de otro modo, se podría definir como el cambio de posición de un móvil respecto a un punto de referencia.

El movimiento es relativo, pues dependiendo del punto de referencia que se considere, un cuerpo se encontrará en movimiento o no. Puesto que en todo el universo no existe ningún punto en reposo absoluto, la elección del sistema de referencia es siempre arbitraria.

Se dirá entonces que la descripción del movimiento depende siempre del punto *fijo* que se elija para estudiarlo, por ejemplo: una persona que se mueve dentro de un vehículo se encontrará en reposo para un observador que vaya sentado a su lado, pero para un segundo observado que se encuentre detenido fuera del móvil, se encontrará en movimiento y a una velocidad igual a la que lleva el vehículo.

Analiza la siguiente situación: es de noche y estás durmiendo en tu cama ¿estás en movimiento o no?, si la primera respuesta que vino a tu mente fue "eso depende del punto de referencia", estás en lo correcto. Para un observador que se ubica en el portal de tu pieza te encontrarás en reposo, pero para otro observador ubicado en un satélite que orbita la tierra,

te encontrarás en movimiento. Esto último se debe a que la tierra posee un movimiento de rotación y de traslación en el cual tú estás incluido, similar a la situación del vehículo.

Erróneamente se piensa que la Tierra está en reposo, y nos parece que algo que se desplaza respecto a ella "está en movimiento" y que si no cambia de posición respecto a ella entonces "está en reposo". No hay que olvidar que la Tierra rota sobre sí misma y orbita en torno al Sol, el cual se mueve respecto al centro de la galaxia, y las galaxias se están separando entre sí cada vez más rápido, entonces surge la pregunta: ¿Existe algo que no se mueva? No, no hay nada en reposo absoluto en el universo.

1.1.5. Trayectoria y desplazamiento

Antes de hablar de trayectoria y desplazamiento se deben definir los conceptos de posición y sistema de referencia, además de realizar ciertos convenios.

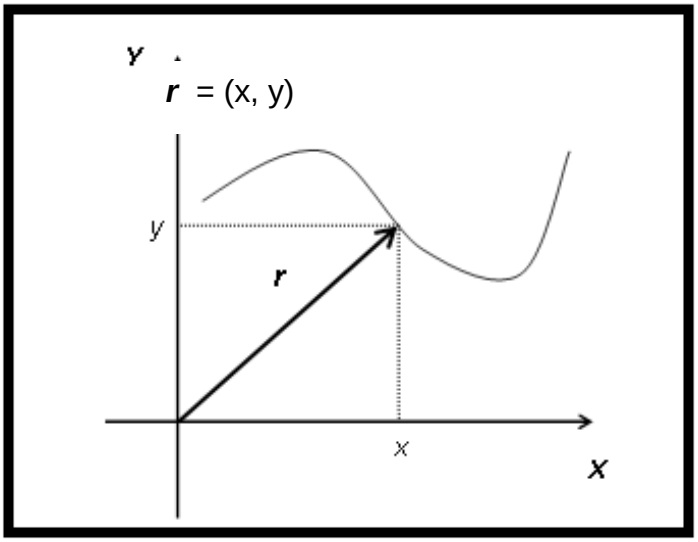
Primero, en el estudio de la cinemática y dinámica de esta unidad, se utilizará la aproximación del punto material, es decir, se considerarán los cuerpos en estudio como puntos (objetos sin dimensiones) dotados de masa. La finalidad es dar la posición de un cuerpo, indicando solamente el punto que ocupa en el espacio.

Cuando se hable de posición nos referiremos a la localización de un punto con respecto a un sistema de referencia u observador. Las posiciones se definen una vez fijado el sistema de referencia a utilizar y se determina mediante un vector *posición* ***r*** (que va desde el origen de coordenadas hasta el punto en el que se encuentra el cuerpo).

Es necesario también determinar qué es un sistema de referencia. Se definirá como un sistema de ejes coordenado que posee un punto de referencia, con respecto al cual se determina la posición de los distintos puntos.

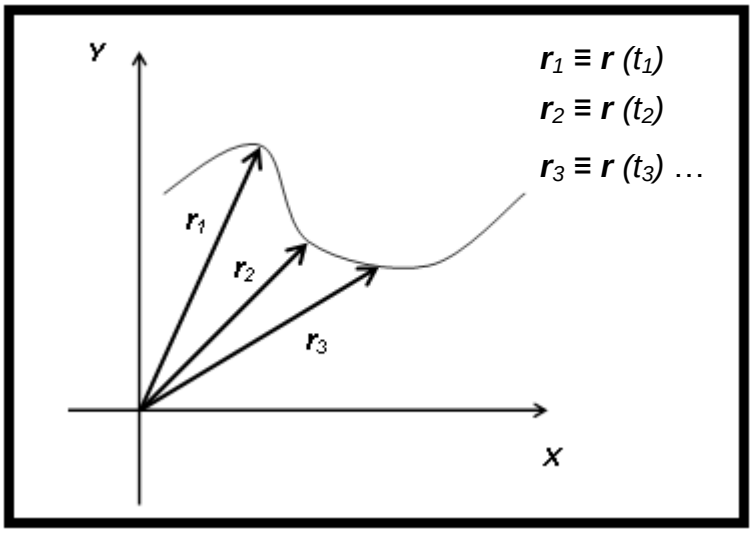
Para estudiar más fácilmente un movimiento, los ejes cartesianos se ubicarán sobre el punto de referencia elegido y orientados según convenga. Se toman tantos ejes cartesianos como dimensiones tenga la trayectoria. Así, para especificar la posición de un punto móvil en un instante *t*, se define el llamado vector de posición, ***r***, con punto de aplicación en el origen del sistema de referencia y extremo en el móvil. (Figura 2)

Figura 2



Si el móvil se desplaza, se dirá que el vector ***r*** va cambiando, por lo que ***r*** es función del tiempo: ***r*** *(t)*. (Figura 3)

Figura 3



Al hablar de espacio recorrido ***(***Δ*s)*,se refiere a la longitud del fragmento de trayectoria comprendido entre la posición inicial s_1 y la posición final s_2 de un móvil:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

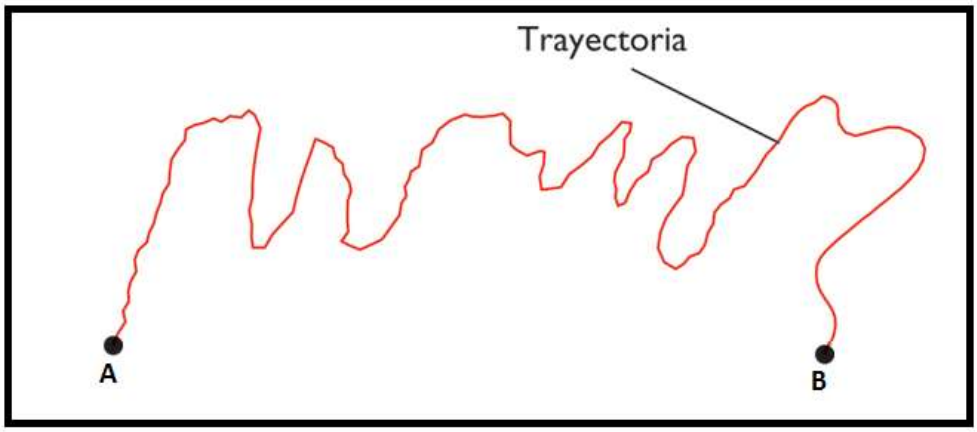
Si el móvil realiza la trayectoria en sentido contrario al elegido para ésta, entonces Δs resultará negativo.

1.1.5.1. Trayectoria

Se denomina trayectoria al camino seguido por el móvil en su movimiento, en otras palabras corresponde a la línea formada por todos los puntos del recorrido. Es una magnitud escalar determinada.

Por ejemplo, supongamos que un móvil sale desde el punto A, en dirección del punto B (Figura 2), la trayectoria corresponderá a todo el recorrido desarrollado.

Figura 2



Las trayectorias pueden clasifican según los movimientos que desarrollan, estos son:

1. Rectilíneos: la trayectoria es una línea recta.

2. Curvilíneos: corresponde a una trayectoria curva. Las más importantes son la trayectoria circular (movimiento de discos, ruedas, etc.), el parabólico (movimiento de los proyectiles) y el elíptico (órbitas de los planetas).

Si la trayectoria posee una dimensión, hablaremos de movimientos rectilíneos, dos dimensiones corresponderá al movimiento en un plano, y tres será un movimiento en el espacio.

1.1.5.2. Desplazamiento

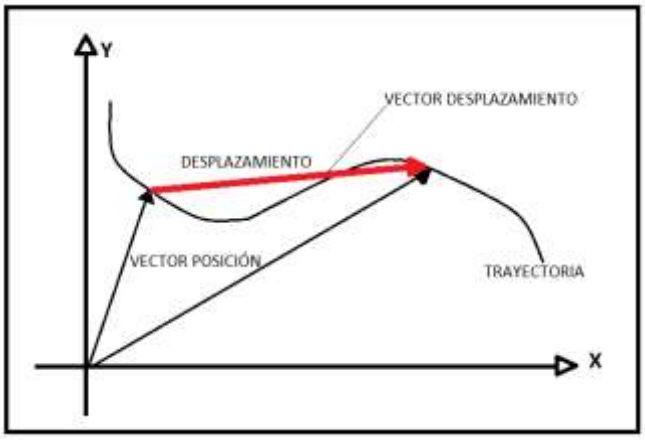
El desplazamiento corresponde a la distancia mínima entre el punto de partida y llegada de un móvil. Es una magnitud vectorial, pues posee dirección y sentido.

El vector desplazamiento (Δr) es aquel que une el punto inicial (**r_1**) y el final (**r_2**) del moviendo de un cuerpo, y se calcula restándole al punto final el punto inicial, como se muestra a continuación:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$$

Este vector representa el desplazamiento e Indica cómo (cuánto y en qué dirección y sentido) ha cambiado la posición del cuerpo, se expresa en metros. (Figura 3).

Figura 3



1.1.6. Rapidez y velocidad

Los conceptos de rapidez y velocidad se utilizan indistintamente en la vida diaria, pero en física existe una clara diferencia entre ambas. La rapidez se relaciona con la trayectoria y la velocidad en cambio lo hace con el desplazamiento.

1.1.6.1. Rapidez

Es una magnitud escalar, pues sólo necesita de un módulo y una unidad para ser establecida. Lo anterior se relaciona directamente con el hecho de que la rapidez se calcula con la trayectoria realizada por un móvil. Cuando miras el velocímetro de un automóvil y éste indica que se está moviendo a 100 km/h, estas determinando la rapidez instantánea a la cual ese móvil de traslada.

La rapidez se representa a través de una letra ***v,*** y su unidad de medida será (Km / h) o (m / seg).

Para calcular la rapidez promedio de una partícula, dividiremos la distancia total recorrida (trayectoria) por el intervalo de tiempo necesario para recorrerla.

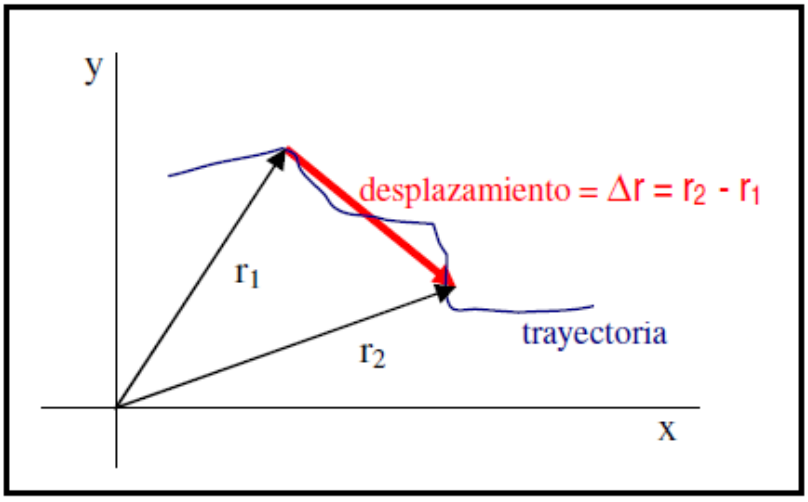
$$\text{Rapidez Promedio} = \frac{\text{Trayectoria o Camino Recorrido}}{\text{Tiempo Total}}$$

1.1.6.2. Velocidad Consecuencia de la Relación Tiempo y Espacio

Se define velocidad como una magnitud física, que estudia la variación de un cuerpo en función del tiempo, respecto a un determinado sistema de referencia. La velocidad es una magnitud vectorial, es decir, necesita modulo, unidad de medida, dirección y sentido para ser expresado correctamente.

Supongamos que una partícula se traslada en un intervalo de tiempo (Δt), desde el punto 1 al 2 que se caracterizarán por los vectores r_1 y r_2. (Figura 4)

Figura 4



La velocidad media de una partícula corresponderá a su cambio de posición, en el intervalo de tiempo estipulado, se calcula dividiendo el desplazamiento realizado por el móvil y el tiempo empleado en dicho intervalo, tal como se muestra en la siguiente fórmula:

$$v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{(t - t_0)}$$

Verifiquemos más concretamente la diferencia entre rapidez y velocidad, para ello utilizaremos el mismo ejemplo entregado anteriormente. Como ya habíamos dicho, al observar el velocímetro de un automóvil, la rapidez se determina indicando simplemente que el vehículo se mueve a 100 km/h. En cambio para explicitar su velocidad, es necesario indicar en qué dirección y sentido se realiza el recorrido, o sea que si se dijera que el vehículo se mueve a 100 km/h en dirección al noreste, estarías indicando su velocidad y no su rapidez.

1.1.7 Velocidad y rapidez instantánea

En ciertas ocasiones será necesario conocer la velocidad de una partícula en un instante específico de tiempo, más que en un intervalo finito. Por ejemplo, puede que sepas claramente la velocidad promedio de un viaje que realizaste hacia Santiago, pero te interesa de sobremanera conocer que velocidad llevabas en el instante en que una patrulla controlaba estacionada a un costado de la carretera. ¿Entonces cómo lo harías?, la respuesta es simple, debes calcular la velocidad instantánea del vehículo.

La velocidad instantánea de una partícula se determina calculando el límite de la velocidad media Dx / Dt, el intervalo de tiempo Dt se aproxima a cero:

$$\boxed{Vx = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

En notación de cálculo, este límite se llama *derivada* de x con respecto a t, escrito *dx/dt:*

$$Vx = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Visto de forma vectorial la velocidad instantánea es la derivada de la posición respecto al tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La velocidad como ya vimos es un vector que tiene módulo, dirección y sentido, Si cambia cualquiera de estos tres elementos se dice que esta ha cambiado.

Se puede demostrar que el vector velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto de la misma y que su sentido es el del movimiento del cuerpo. A la vez se debe considerar que si la velocidad de un cuerpo cambia con el tiempo, significa que tiene aceleración.

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero. SI la pendiente de la gráfica que representa la posición v/s tiempo de una partícula, es positiva, la velocidad instantánea también lo serel automóvil se moverá hacia valores más grandes de x. Luego si la velocidad instantánea es negativa, la pendiente de la curva también lo será, indicando que el auto se mueve hacia valores más pequeños de x, y por último si la pendiente es cero, la velocidad también lo será, lo que indica que el auto esta momentáneamente en reposo.

La rapidez instantánea de una partícula se define como la magnitud de la velocidad instantánea y no tiene dirección asociada, por lo que no lleva un signo algebraico. Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de + 40 m/s a lo largo de un línea dada, y otra tiene una de - 40 m/s a lo largo de la misma línea, ambas tendrán una rapidez instantánea de 40 m/s indistintamente.

Entonces, el módulo de la velocidad instantánea, v, se denomina y se puede demostrar que es igual a la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo, a través de la siguiente igualdad:

$$v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$$

Tanto la velocidad instantánea como la rapidez se miden en m/s (SI).

Analicemos las siguientes situaciones:

A. una pelota lanzada directamente hacia arriba sube al punto más alto y cae de regreso en la mano de su lanzador

B. un auto de carrera arranca desde el reposo y acelera a 100 m/s

C. Una nave espacial viaja al espacio a velocidad constante.

¿Existe en el movimiento de estos objetos algún punto en los que la velocidad instantánea tenga el mismo valor que la velocidad promedio en todo el movimiento?

Para la primera situación: la velocidad promedio de la pelota lanzada es cero, debido a que ésta regresa al punto de partida por lo tanto su desplazamiento es cero. Cuando la

pelota está en lo más alto su velocidad instantánea es cero, por lo tanto la respuesta en éste caso es sí.

Situación B: La velocidad promedio del auto no puede ser evaluada en forma ambigua con la información dada, pero debe ser un valor entre 0 y 100 m/s. Como el auto tendrá una velocidad instantánea entre 0 y 100 m/s en algún tiempo durante el intervalo, entonces debe existir algún instante en el que la velocidad instantánea sea igual a la velocidad promedio.

Situación C: Como la velocidad instantánea de la nave espacial es constante, u velocidad instantánea en cualquier instante y su velocidad promedio en cualquier intervalo son siempre las mismas.

1.1.8. Instantes e intervalos de tiempo

En el estudio del movimiento es esencial medir el tiempo que demora o emplea un móvil o partícula en realizar un cierto recorrido, y para ello lo primero es determinar un instante que sirva de referencia al que se le llamará origen de tiempo o instante inicial y que será determinado a través de las letras $\mathbf{t_o}$ (t = tiempo, o = origen)

El instante $\mathbf{t_o}$ se determinará de modo arbitrario. Por lo general se ocupa ($\mathbf{t_o}$ = 0). Por ejemplo: al arrancar un vehículo o cuando éste pasa por algún cierto punto, se determinara que el tiempo inicial es cero, con el fin de poder especificar cada suceso que acontezca a continuación, como poder estimar cuanto demora en llegar a un cierto punto, o la velocidad que llevaba el móvil.

Al tiempo transcurrido se le denomina Δt, y se representa:

$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1}$$

El intervalo Δt siempre es positivo, pues el tiempo sólo avanza en una dirección y t_2 siempre será posterior, y por tanto mayor, que t_1.

1.1.9. Ecuaciones del movimiento

También conocidas como ecuaciones horarias, estas son la forma matemática de expresar el modo en el que se produce el movimiento. Se presenta como una función donde la variable dependiente es la posición, y la variable independiente el tiempo.

La primera formula es:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v}\,(t - t_0)$$

En esta ecuación hay dos variables (x) y (t), y tres parámetros (x_0), (v) y (t_0).

La variable x representa la distancia recorrida, que en este caso es la dirección del eje x. La otra variable "t" representa el tiempo.

Los parámetros son valores fijos, que en principio no se conocen, y que en cada problema se sustituirán por valores que aparecen en el enunciado de un problema y que dependen de cada movimiento. (x = posición final del móvil ; x_0 = posición inicial del móvil; v= velocidad inicia; t_0 = tiempo inicial ; t = tiempo final).

La ecuación anterior se expresa en forma vectorial, pero también se pueden escribir de manera escalar:

$$x = x_0 + v\,(t - t_0)$$

Por extensión las ecuaciones de la velocidad y la aceleración en función del tiempo también pueden llamarse ecuaciones del movimiento, pero esas las determinaremos más adelante.

1.1.10. Aceleración

Así como es posible cuantificar cambios de posición como función del tiempo, es posible cuantificar los cambios de velocidad de una partícula como función del tiempo. Cuando la velocidad de una partícula cambia en el tiempo, se dice que ha acelerado.

La aceleración posee varias definiciones en física, se dice que es una magnitud vectorial que mide lo "*rápido*" que varía la velocidad de un móvil, para otros la aceleración es una medida de la rapidez con que cambia la velocidad y también se define como el incremento de la velocidad dividido entre el tiempo empleado. Pese a que todas las definiciones están en lo correcto, es más completo definirla como un cambio de velocidad en un intervalo de tiempo.

Al igual que la velocidad, la aceleración es una magnitud vectorial, por lo que se representa por un vector y su unidad de medida es el metro por segundo al cuadrado y se indica: m/s^2.

A modo de facilitar la comprensión del concepto aceleración, se realizará las siguientes afirmaciones:

- Si un móvil tiene una aceleración de 4 m/s^2 significa que aumenta (o disminuye) su velocidad 4 m/s cada segundo.

- La aceleración con que los cuerpos caen libremente hacia la Tierra se conoce como aceleración de la gravedad y posee un valor catalogado como una constante, 9'8 m/s^2, esto significa que todos los cuerpos caen con la misma aceleración, eso quiere decir que si dejásemos caer en un mismo instante en el vacío y a la misma altura, a un elefante y a un balón de fútbol llegarían al suelo al mismo tiempo.

Hay que tener cuidado con dos ideas de la vida cotidiana que pueden conducir al error cuando se trata con la magnitud física aceleración:

1. En Física hay aceleración siempre que un cuerpo cambie de velocidad, sea en módulo, dirección o sentido. Por tanto un coche que toma una curva con una celeridad constante de 80 km/h tiene aceleración, pues está cambiando la dirección en que se mueve aunque no cambie su rapidez.

2. En Física decimos que un cuerpo tiene aceleración no solo cuando aumenta la rapidez de su movimiento sino también cuando la disminuye.

1.1.10.1. Aceleración media o promedio y aceleración instantánea

Tal como en la velocidad, la aceleración se puede descomponer en media e instantánea.

Aceleración Media (am)

Como ya convenimos, diremos que un objeto se puede representar como una partícula que se mueve a lo largo del eje x, a una velocidad inicial $\mathbf{v_o}$ en un tiempo inicial **to,** y a una velocidad final en un tiempo final **t.**

Se define la aceleración media de un cuerpo en un intervalo de tiempo como el cociente entre la variación de velocidad en ese intervalo de tiempo Δ**v** y el intervalo de tiempo Δt. Su fórmula será:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}}$$

Aceleración Instantánea (a)

Intuitivamente se definiría como la aceleración que tiene un cuerpo en un instante dado, matemáticamente se define como el límite de la aceleración media (en un intervalo de tiempo que contiene el instante indicado) cuando el intervalo tiende a cero (y por tanto se convierte en ese instante):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La aceleración instantánea es la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

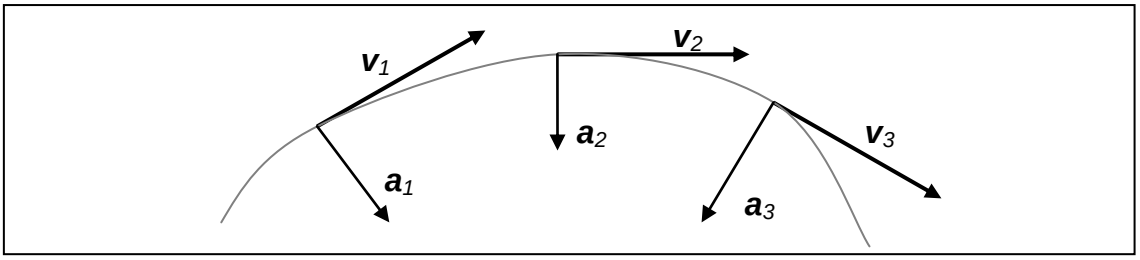
La variación del vector velocidad puede ser en módulo (celeridad), dirección y sentido:

1. Cuando la velocidad sólo varía en módulo, la trayectoria será rectilínea y la aceleración tendrá la misma dirección que la velocidad, igual sentido si la velocidad aumenta y sentido contrario si la velocidad disminuye:

Figura 5

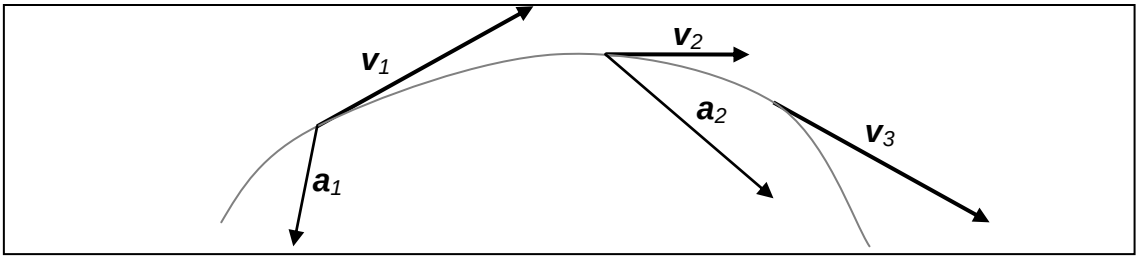
2. Cuando la velocidad sólo varía en dirección la trayectoria será curvilínea y la aceleración tendrá dirección perpendicular a la velocidad:

Figura 6



3. En un caso general, el vector velocidad variará tanto en módulo como en dirección, con lo que el vector aceleración ya no será ni tangente ni perpendicular a la trayectoria:

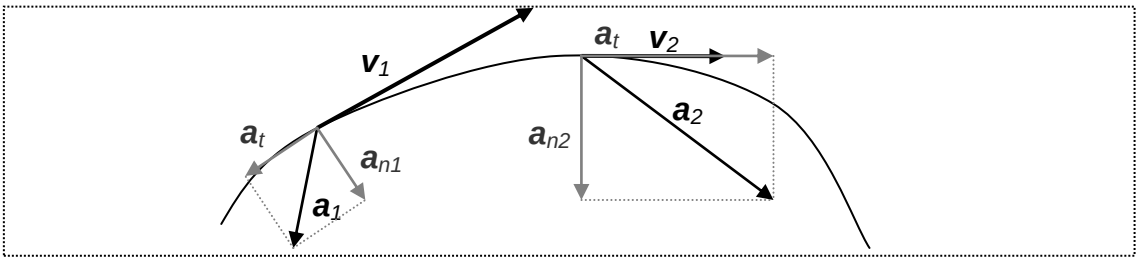
Figura 7



En este caso el vector aceleración siempre puede descomponerse en dos componentes: una tangente a la trayectoria y otra perpendicular a la tangente.

Estas se conocen como componentes intrínsecas de la aceleración, son aquellas componente que tendría la aceleración en un sistema de referencia situado sobre el móvil y que se mueve con él de forma que uno de los ejes tenga la dirección y sentido de la velocidad del móvil, eje tangencial (por ser tangente a la trayectoria) y el otro, eje normal, sea perpendicular a él (y a la trayectoria; suponemos movimiento plano).

Figura 8



Este es un sistema de referencia intrínseco, asociado al mismo móvil y no externo a él.

Aceleración Tangencial (a_t)

La aceleración tangencial, a_t, es la proyección de la aceleración sobre el eje tangencial. Es aquella que mide la rapidez de las variaciones del módulo del vector velocidad, lo que explica que un cuerpo tiene aceleración tangencial si y solo si está cambiando la rapidez con que se mueve.

La aceleración tangencial tiene la misma dirección que la velocidad. Si la rapidez del cuerpo aumenta, la a_t tiene el sentido de la velocidad, y si disminuye, la a_t tendrá sentido contrario.

Se puede demostrar que la aceleración tangencial (componente) es igual a la derivada del módulo del vector velocidad respecto al tiempo:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Aceleración Normal (a_n)

La componente normal de la aceleración, conocida como normal, mide la rapidez de las variaciones de dirección del vector velocidad.

Un cuerpo tiene aceleración (a_n) normal sí y solo sí está cambiando la dirección en que se mueve. Además, no se debe olvidar que la aceleración normal tiene siempre el sentido que va hacia la parte interior (cóncava) de la curva de la trayectoria.

Para un cuerpo que se mueva en círculos, el módulo de la aceleración normal se calcular como:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Donde v es el módulo de la velocidad del cuerpo (partícula) y R el radio de la circunferencia que describe la trayectoria. El vector de la aceleración normal siempre apuntará hacia el centro de la circunferencia en cada instante.

Módulo de la Aceleración (a)

El módulo de la aceleración está relacionado con las componentes de las aceleraciones normal y tangencial de acuerdo con la fórmula:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Para el caso de movimientos rectilíneos, no hay aceleración normal, debido a que la dirección del vector velocidad no varía. Y para el movimiento de una partícula sobre una trayectoria conocida sólo interesará la variación del módulo del vector velocidad (celeridad), por lo que la aceleración media podrá manejarse como una magnitud escalar y calcularse como aceleración promedio:

$$\boxed{a = a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}}$$

1.1.10.2. Medición de Aceleración de gravedad (g)

La aceleración de gravedad es una manifestación de la atracción universal que impulsa los cuerpos hacia el centro de la tierra, es la fuerza que determina el peso de los cuerpos (Reader's Digest. 1981).

Se denota a través de la letra **g** y su definición corresponde al incremento constante de la velocidad por unidad de tiempo percibido por un cuerpo en caída libre. De acuerdo al S.I (Sistema Internacional de unidades), su unidad de medida es el m/s^2 , aunque también puede expresarse por gales (Gales: nombre recibido en honor a Galileo Galilei), donde 1 Gal = 1 cm/ s^2 = 0,01 m/s^2. No obstante esta simbología no pertenece al S.I.

Un cuerpo de masa m es atraído por la Tierra con una fuerza que constituye su peso y vale P = mg. Pero según la ley de gravitación universal esta fuerza también vale: $F= G•mM/r^2$, donde M es la masa de la Tierra y r es la distancia del centro de la Tierra al cuerpo de masa m.

Cómo son fuerzas equivalentes, P es igual a F, por lo tanto reemplazando se tiene que:

$$P = F$$

$$mg = G•(mM/r^2),$$

Eliminamos la masa m del cuerpo a ambos lados de la igualdad, es decir:

$$\boxed{g= G•M/r^2}$$

Por medio de esta fórmula podemos calcular el valor de **g** a cualquier distancia del centro de la Tierra, conociendo la masa M de ella y la distancia r.

Esta fórmula indica que a mayor distancia del centro de la Tierra la aceleración de gravedad es menor y, por lo tanto los cuerpos que caen lo harán con movimiento uniformemente acelerado, ya que el valor de g va aumentando a medida que el cuerpo cae.

Generalicemos, en la naturaleza se producen diversos movimientos (cómo veremos más adelante) y uno de ellos es la caída libre. Estudios de éste tipo de movimiento han comprobado que cuando un objeto cae desde cierta altura su velocidad aumenta, o sea, es

acelerado y constante. Por el contrario, cuando es lanzado hacia arriba, su velocidad va disminuyendo gradualmente hasta anularse en el punto más alto, lo que significa que el movimiento es retardado.

Galileo demostró experimentalmente que todo cuerpo que cae lo hace con una aceleración constante, aunque su magnitud y uniformidad varían con la resistencia del medio. La aceleración del movimiento de caída libre se conoce como aceleración de gravedad; que como ya dijimos se representa con la letra g y tiene un valor igual a 9,8 m / s^2 en el vacío, lo que implica que cuando un cuerpo cae libremente, su velocidad va aumentando 9,8 m/s^2 en cada segundo que transcurre. Al contrario, si es lanzado verticalmente hacia arriba, su velocidad disminuirá en 9,8 m/s^2 cada segundo.

Pero ¿qué significa caída libre? es cuando se mueve libremente, solo bajo la influencia de la gravedad, cualquiera sea su movimiento original. La aceleración que experimente el cuerpo u objeto en caída libre será siempre dirigida hacia abajo.

1.1.10.3. Ecuaciones del movimiento en una dimensión con aceleración constante

Si un cuerpo presentase una aceleración variable en el tiempo, sería difícil de analizar. No obstante, es común que los movimientos unidimensionales presenten aceleración constante, lo que significa que el promedio en cualquier intervalo es igual a la aceleración instantánea en el mismo y la velocidad varía en igual proporción durante el movimiento.

Tomamos la fórmula de aceleración media: $\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0}}$, y establecemos que el tiempo inicial es cero (t_o = 0), y reemplazamos el vector a_m por a_x, lo que nos daría como resultado:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$a_x = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0}$$

$$a_x = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-0}$$

Luego despejamos la velocidad final v:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + a_x t}$$

Obteniendo así la primera fórmula para aceleración constante (a_x). Ésta nos permite determinar la velocidad de un objeto en cualquier tiempo t si se conoce su velocidad inicial v_o y su aceleración.

Si la aceleración es constante, la velocidad varía linealmente en el tiempo. Por ello existe la posibilidad de determinar la aceleración promedio en cualquier intervalo, utilizando la siguiente fórmula:

$$\boxed{\vec{v}_p = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}}$$

Si ahora utilizamos la formula $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}(t - t_0)$, reemplazando la velocidad por su promedio y determinamos que $\Delta t = t - t_f = t - 0 = t$, entonces la fórmula quedaría:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}(t - t_0)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + v(t)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)(t)$$

Quedando como resultado la siguiente fórmula:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)(t)}$$

Estas nos permiten determinar la posición final de la partícula en el tiempo t, en términos de velocidad final e inicial. Además puede obtenerse otra expresión para determinar la posición de la partícula que se mueve con aceleración constante, si en la última fórmula reemplazamos la ecuación $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + a_x t}$. El resultado es:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + (v_0 + a_x t))(t)$$

Multiplicamos los términos del paréntesis por 1/2:

$$x = x_0 + \left(\frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} a_x t \right) (t)$$

Reducimos términos semejantes:

$$x = x_0 + \left(v_0 + \frac{1}{2} a_x t \right) (t)$$

Finalmente multiplicamos los términos del paréntesis por el tiempo t:

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2}$$

Lo que nos da como resultado otra fórmula que permite determina la posición final de una partícula, en un intervalo de tiempo t, en relación con la velocidad y aceleración que posee.

Por último, podemos obtener una expresión para calcular la velocidad final de una partícula, que no contiene al tiempo como variable a sustituir, sino que trabaja con el desplazamiento. Para estimar de dónde proviene, usaremos nuevamente la fórmula $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + a_x t}$, en la cual despejaremos el tiempo:

$$t = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{a_x}$$

Luego reemplazaremos el tiempo despejado en la fórmula: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$, lo que da como resultado:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x \left(\frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{a_x} \right)^2$$

Desarrollamos la potencia y luego despejamos, quedando lo siguiente:

$$x = x_0 + \left(\frac{\vec{v}^{\,2} - \vec{v}_0^{\,2}}{2a_x}\right)$$

Finalmente despejamos la velocidad fina, lo que nos daría la última fórmula en cuestión:

$$x - x_0 = \left(\frac{\vec{v}^{\,2} - \vec{v}_0^{\,2}}{2a_x}\right)$$

$$2a_x \cdot (x - x_0) = \vec{v}^{\,2} - \vec{v}_0^{\,2}$$

$$\vec{v}_0^{\,2} + 2a_x \cdot (x - x_0) = \vec{v}^{\,2}$$

$$\boxed{\vec{v}^{\,2} = \vec{v}_0^{\,2} + 2a_x \cdot (x - x_0)}$$

Como $\Delta x = x - x_0$, la fórmula general sería:

$$\boxed{\vec{v}^{\,2} = \vec{v}_0^{\,2} + 2a_x \cdot \Delta x}$$

No olvide que éstas fórmulas son las mismas que se utilizan para el movimiento de caída libre y lanzamiento vertical, sólo que al ser el movimiento en el eje vertical, se cambia la variable X por la variable Y, y la aceleración se reemplaza por la constante g, correspondiente a la aceleración de gravedad.

FÍSICA

IPLACEX
TECNOLÓGICO NACIONAL

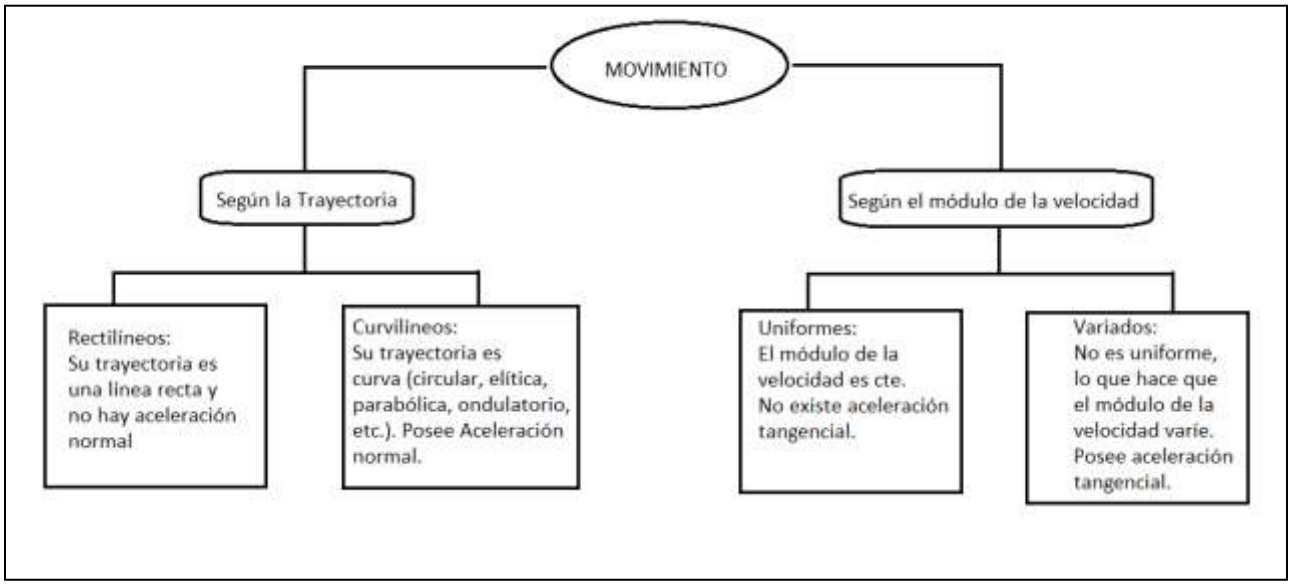
UNIDAD III

CINEMÁTICA Y DINÁMICA

1.1.11. Clasificación de movimientos

Desde el punto de vista de la cinemática, los movimientos pueden clasificarse según diferentes criterios (Figura 9). Algunos de ellos son:

Figura 9



En esta unidad se estudiará los tres movimientos más importantes, ya que aparecen muy frecuentemente en la naturaleza y en la vida cotidiana, pero primero explicaremos que significa ecuación de movimiento, debido que éste concepto se utilizará más adelante.

Se llama ecuación de movimiento a la expresión matemática que nos permite conocer la posición de un móvil en cada instante de tiempo: *r (t)* (o s(t) en el caso de movimientos sobre trayectorias conocidas).

1.1.11.1. Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)

Se habla de movimiento rectilíneo y uniforme cuando la trayectoria del móvil es recta y su velocidad constante, es decir que el valor de su módulo no cambia. Al no existir un cambio de velocidad, no habrá aceleración en éste movimiento.

En física la trayectoria se representa por una letra **S** y el desplazamiento por una **r**. En el movimiento rectilíneo uniforme, como el recorrido es una recta, el desplazamiento y la trayectoria coinciden.

El M.R.U. es el movimiento más sencillo que pueda imaginarse. Sobre la Tierra y en la atmósfera pocos movimientos son perfectamente rectilíneos y uniformes, pues el rozamiento

con el suelo y con el aire hace que los móviles que no lleven motor acaben parando. Sin embargo, en el espacio exterior, fuera de la atmósfera, no hay rozamiento y un cuerpo lanzado describe un perfecto M.R.U. sin necesidad de motor.

Para estudiar el desplazamiento de un móvil con M.R.U. se toma un eje cartesiano (X ó Y) en la dirección del movimiento, con lo que la posición del cuerpo vendrá determinada por su coordenada correspondiente.

Así, tomando el eje *X* en la dirección del movimiento, la ecuación *x(t) del* M.R.U. será:

$$v = cte \Rightarrow v = cte \Rightarrow v = v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \mathbf{\Delta x = v \cdot \Delta t}$$

Como la variación de posición Δx se puede descomponer en $\Delta x = x - x_o$ la formula quedaría:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

$$x - x_o = v \cdot \Delta t$$

Despejamos x, queda:

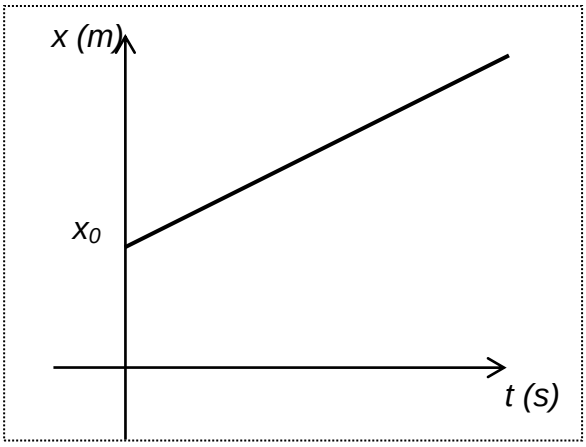
$$\boxed{x = x_0 + v\,\Delta t}$$

Donde x_0 representa la posición inicial en el instante t_0 . Cómo dijimos en el ítem intervalos de tiempo, en muchas ocasiones podrá tomarse $t_0 \equiv 0$, con lo cual la variación de tiempos nos dará como resultado solo t:

$$\Delta t = t - t_o = t - 0 = t$$

Si representamos gráficamente unos ejes coordenados para la función x(t) del Movimiento Rectilíneo Uniforme, ésta será una recta cuya inclinación dependerá de la celeridad (rapidez).

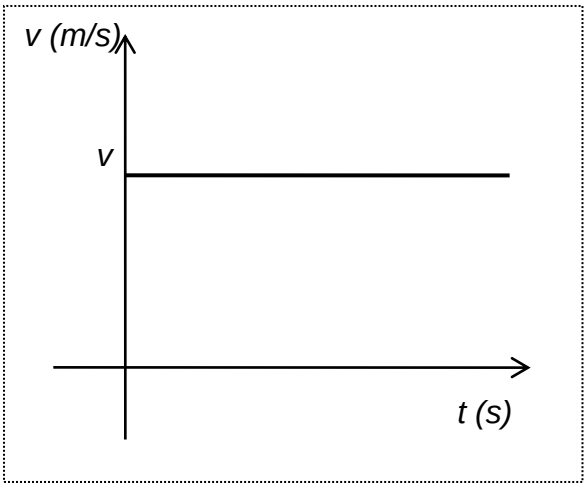
Figura 10



La pendiente de la recta se corresponde con la velocidad del móvil, la cual es constante.

Mientras que la grafica de la función *v(t)* para el M.R.U será una recta horizontal, como se presenta a continuación:

Figura 11



Es posible determinar la ecuación del movimiento a partir del área bajo la gráfica velocidad - tiempo:

$$\text{ÁREA} = V \cdot t$$

1.1.11.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.)

Un movimiento es rectilíneo y uniformemente acelerado cuando la trayectoria es recta y la aceleración es constante.

Al ser un movimiento rectilíneo no posee aceleración normal, pero la velocidad va cambiando en módulo de modo uniforme, aceleramos o frenamos, por lo tanto existe aceleración tangencial, la que es constante. Si el módulo de su aceleración es constante, también lo serán su dirección y sentido, ya que como vimos, el movimiento es recto.

Por lo tanto, la ecuación v(t) en el M.R.U.A. será:

$$a_n = 0 \Rightarrow a = a_t = cte \Rightarrow a = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t$$

Al igual que en el M.R.U, la variación de velocidad Δv corresponde a la igualdad $\Delta v = v - v_o$. Si reemplazamos en la formula anterior queda:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

$$v - v_o = a \cdot \Delta t$$

Despejamos la velocidad final, obtenemos una nueva formula de movimiento que se relaciona directamente con la velocidad, el tiempo y la aceleración del móvil:

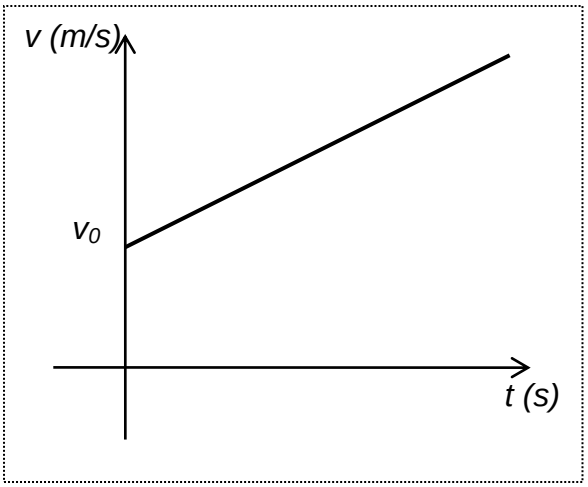
$$\boxed{v = v_0 + a\,\Delta t}$$

La fórmula de *x(t)* en el *M.R.U.A.* viene dada por:

$$\boxed{x = x_0 + v_0\,\Delta t + \tfrac{1}{2}\,a\,\Delta t^2}$$

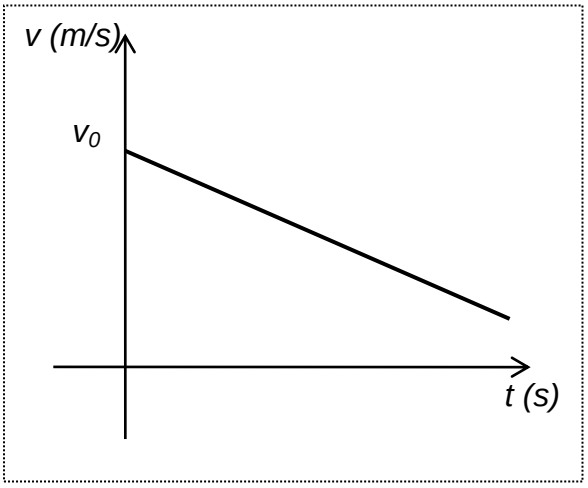
Si analizamos la gráfica de la velocidad con respecto al tiempo (v(t)) en el M.R.U.A., podremos observar que será una recta cuya inclinación dependerá de la aceleración, como se presenta a continuación:

Figura 12



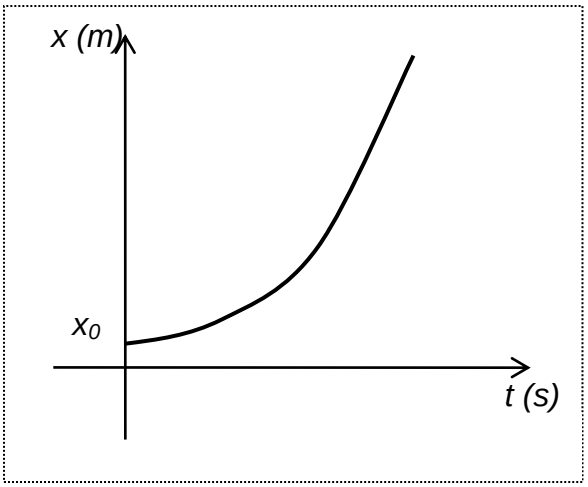
Si el móvil presenta una aceleración negativa (disminuye su celeridad) , la pendiente de la gráfica *v(t)* será también negativa:

Figura 13



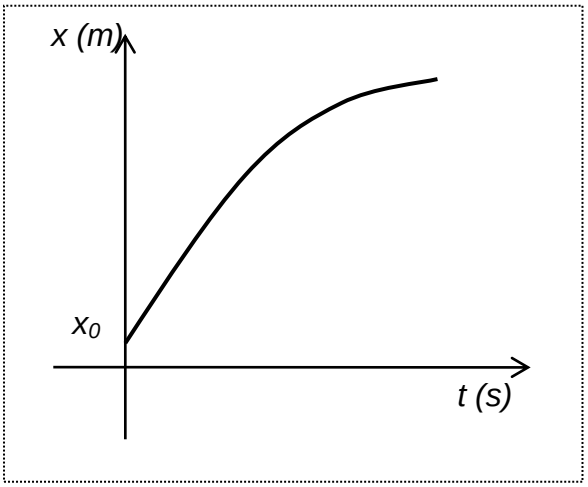
En cambio, la gráfica de la posición con respecto al tiempo (x(t)) en el M.R.U.A será una *parábola*:

Figura 14



Si el móvil presenta una aceleración negativa la orientación de la parábola *x(t)* será la inversa:

Figura 15



Consideraciones para no olvidar:

- El signo de la aceleración y de la velocidad depende del sistema de referencia que tomemos, no del cuerpo que acelere o frene.

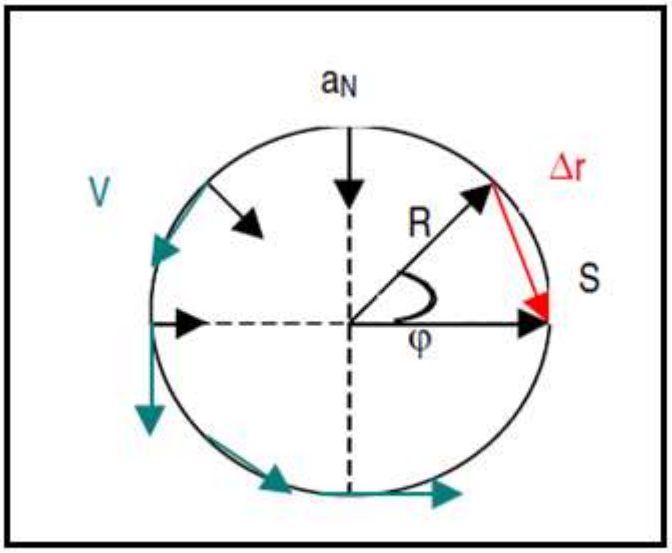
- Si consideramos positivo el sentido en el que avanza un cuerpo, entonces su aceleración será negativa cuando vaya en contra del movimiento del cuerpo, y positiva si va a favor de éste.

- Una partícula frena si su aceleración va en el sentido contrario a la velocidad y acelera si ambas van en el mismo.

1.1.11.3. Movimiento circular: Velocidad angular

Hablaremos de movimiento circular cuando la trayectoria recorrida por la partícula sea una circunferencia (Figura 16)

Figura 16

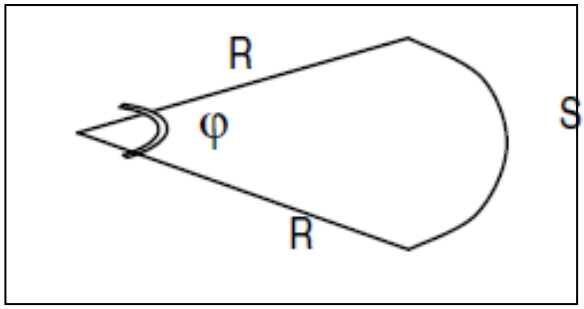


La trayectoria y el desplazamiento no coinciden, debido a que su recorrido es una circunferencia.

Como el movimiento es uniforme, el módulo de la velocidad es constante por lo que no hay aceleración tangencial. Pero si hay cambio de dirección, por lo que existe una aceleración normal la cual es constante, por lo tanto la aceleración media será igual que la instantánea en su única componente que es la normal.

El ángulo recorrido en el Movimiento circular se expresa en radianes (rad), según el Sistema Internacional (S.I) el cual se define como el ángulo cuyo arco tiene la longitud del radio.

Figura 17



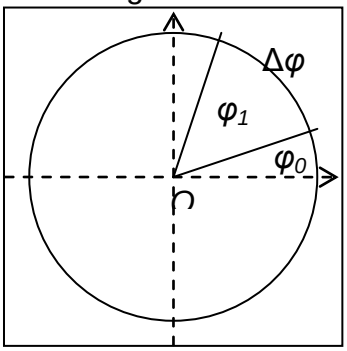
Por lo tanto, para calcular el valor en *rad* de un ángulo dado $\Delta\varphi$, habrá que dividir el arco que abarque, Δs , entre el radio R de la circunferencia:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R} \quad (rad)$$

Velocidad angular media

Supongamos un móvil que describe un movimiento circular. Si en el instante inicial t_0 se encuentra en una posición φ_0 , *y* en un instante posterior t_1 se encuentra en una posición φ_1, se define la *velocidad angular media*, ω, del móvil como:

Figura 18



$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t_1 - t_0} \quad (rad/s)$$

Así como los radianes, existe otra unidad de medida muy utilizada para expresar la velocidad angular, ésta es rev*oluciones por minuto* (r.p.m.).

Las **r.p.m** no pertenece al S.I. y para convertirlas a rad/s, hay que recordar que una revolución (vuelta*)* equivale a 2π *rad*.

Velocidad Angular Instantánea (ω)

Se define como la velocidad angular que lleva el móvil en cada instante. Se calcula midiendo el ángulo girado en intervalos de tiempo lo más cortos posible.

Matemáticamente se puede expresar mediante una relación entre la celeridad media del móvil, *v,* también llamada *velocidad lineal media* en el movimiento circular, y la velocidad angular media *ω*, pues aplicando la definición de *radián* $\Delta s = \Delta\varphi \cdot R$, *y* entonces:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{\Delta\varphi \; R}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{v = \omega \cdot R}$$

1.1.11.3.1 Movimiento circular uniforme (M.C.U.)

Un movimiento es *circular y uniforme* cuando el móvil recorre una circunferencia con velocidad angular *ω* constante y, por ende con celeridad *v* también constante (con lo que a_t será nula y a_n constante).

Por lo tanto, la ecuación *φ(t) del* M.C.U. será:

$$\omega = \text{cte} \Rightarrow \omega = \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega\, \Delta t}$$

El período (T) de un M.C.U. se definirá como el tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa. Se puede calcular dividiendo el ángulo de una vuelta (2π = 360°), por la velocidad angular:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad (s)$$

Se define la frecuencia (f) de un M.C.U. como el número de vueltas que da el móvil en la unidad de tiempo. Se calculará entonces como:

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}}$$

En el S.I. la frecuencia tendrá como unidad de medida el Hertz (Hz) en honor a un físico alemán del siglo XIX que estudió los fenómenos ondulatorios, pero también se puede medir en {ciclos / s} ó {s^{-1}}.

En el M.C.U. la aceleración no tiene componente *tangencial* pues la celeridad, *v*, permanece constante. Sólo varía la dirección del vector velocidad, por lo que la aceleración tendrá sólo componente *normal*, dirigida siempre hacia el centro de la circunferencia:

$$\boxed{a_t = 0 \implies a = a_n}$$

Como la variación de la dirección es uniforme (el radio de giro es constante), el módulo de la aceleración normal será también constante:

$$\boxed{a = a_n = \frac{v^2}{R}}$$

A modo de resumen:

velocidad angular ω (rad/s)

- velocidad angular media $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}$
- velocidad angular instantánea $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

Como $\varphi = \frac{S}{R}$ despejando $\varphi . R = S$ derivando toda la igualdad respecto al tiempo y como R es constante

$\frac{d\varphi}{dt} . R = \frac{dS}{dt}$ luego queda :

$$\boxed{V = \omega \cdot R}$$

1.2 Dinámica

Como se mencionó al principio de la unidad, la dinámica es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos y las causas que lo producen, como asimismo los efectos que esos movimientos pueden producir, es decir, la dinámica es la parte de la física que estudia las fuerzas y los movimientos que producen en los cuerpos.

1.2.1 Leyes de newton

La dinámica se fundamente en tres principios que fueron formulados por galileo, pero completados y corregidos por el físico inglés Isaac Newton., quien apoyado en su ley sobre la fuerza centrífuga y utilizando la tercera ley de Kepler (el cuadrado del período orbital de cualquier planeta, es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica), dedujo las tres leyes fundamentales de la mecánica celeste: la ley de la inercia, la ley fundamental de la dinámica y la ley de la acción y la reacción.

Pese a que estos principios no se demuestran, se admiten como verdaderos porque las consecuencias que de ellos derivan están de acuerdo a los hechos que se observan en la naturaleza.

Sin embargo estos principios sólo son válidos para valores cuya velocidad sea inferior a la de la luz y vistos desde sistemas de referencia inerciales (sistemas en reposo o con movimiento uniforme).

Primera ley de newton: principio de inercia

Antes de presentar la primera ley, es necesario aclarar algunos conceptos:

- Inercia será la tendencia de los cuerpos a conservar su estado de movimiento o reposo.
- Equilibrio: se dirá que un cuerpo está en equilibrio cuando su aceleración con respecto al sistema de referencia es nula, lo que sucede cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es cero.
- Reposo: un cuerpo estará en reposo cuando su velocidad respecto al sistema de referencia es nula, o sea no se mueve.

La primera Ley de Newton postula que "Todo cuerpo en reposo permanece en reposo a menos que sobre él actúe una fuerza externa. Así también, un cuerpo en movimiento continúa moviéndose con velocidad constante a menos que actúe sobre él una fuerza externa".

Si un cuerpo no interactúa con otros cuerpos, es posible identificar un marco de referencia en el cual tiene aceleración cero. En ausencia de fuerzas externas, cuando se vea

desde un marco de referencia inercial, un cuerpo en reposo permanece en reposo y un cuerpo en movimiento continúa moviéndose con una velocidad constante (es decir, rapidez constante en línea recta)

Segunda Ley de Newton

"La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa".

Matemáticamente se puede relacionar la fuerza y la masa de un cuerpo de la siguiente manera:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Donde m representa la masa del cuerpo y la derivada de la velocidad con respecto al tiempo (dv / dt), representa la aceleración. Escrito de modo más simple sería:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{m} \bullet \mathbf{a}$$

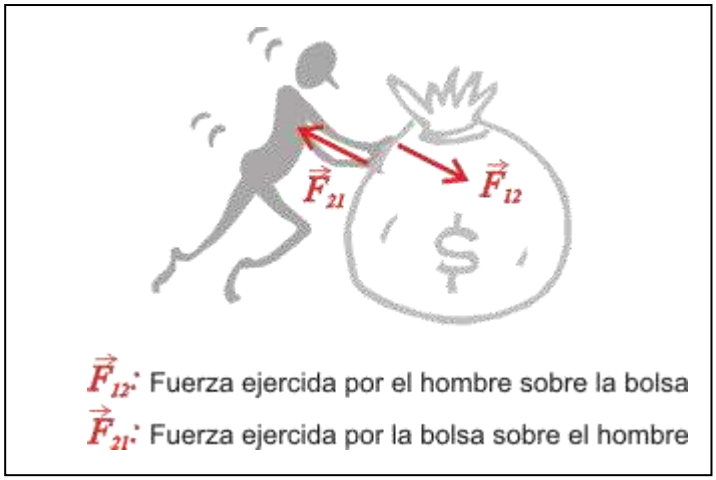
Tercera Ley de Newton

La tercera y última ley dice que " Si dos cuerpos interactúan, la fuerza F_{12} ejercida por el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza F_{21} ejercida por el objeto 2 sobre el objeto 1":

$$\mathbf{F_{12} = - F_{21}}$$

De modo más simple: Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, el segundo ejerce una fuerza igual pero en sentido opuesto, “a cada acción siempre se opone una reacción igual”.

Figura 19



Donde F_{12} (F_{21}) es la fuerza que ejerce el cuerpo de masa m_1 (m_2) sobre el cuerpo de masa m_2 (m_1). Si una de las fuerzas que interviene en la interacción entre dos cuerpos se llama *acción*, la otra recibe el nombre de *reacción*, por esto la Tercera Ley de Newton se conoce con el nombre de Ley de Acción y Reacción.

Ambas fuerzas (acción y reacción) actúan siempre en parejas y sobre cuerpos diferentes. Si actuarán sobre el mismo no existiría el movimiento acelerado, porque la resultante sería cero. Además deben cumplir los siguientes requisitos: tener igual magnitud, la misma dirección, sentido opuesto, actuar en cuerpos diferentes y actuar en parejas.

1.2.2 Conceptos de Fuerza y sus Consecuencias

Por experiencias cotidianas todos tenemos ideas básicas del concepto de fuerza. Al empujar un plato, cuando pateamos un balón, al caminar, estamos ejerciendo fuerzas. Pero ¿la fuerza siempre genera movimiento? la verdad es que no. Existen situaciones en que no se generan movimiento alguno, por ejemplo la fuerza de gravedad que actúa sobre ti en el instante que lees éste texto.

Entonces ¿qué es una fuerza (F)?. Es todo aquello capaz de producir deformaciones o aceleraciones sobre los cuerpos, es decir modifica el movimiento. Las fuerzas se representan por vectores lo que indica que es una magnitud vectorial, es decir que necesita un modulo, su unidad de medida, dirección y sentido para que la información sea completa.

La unidad de medida en el Sistema Internacional de Unidades (S.I) de la Fuerza es el Newton (N), nombrada así en reconocimiento a Isaac Newton, por su aporte a la física, especialmente a la mecánica clásica. El newton es una unidad derivada que se define como la fuerza necesaria para proporcionar una aceleración de 1 m/s^2 a un objeto de 1 kg de masa.

El instrumento de medición de las fuerzas se conoce con el nombre de dinamómetro, el cual está formado por un cilindro graduado, en cuyo interior se encuentra un muelle de un cierto material, un resorte por ejemplo, que se alarga por la acción de las fuerzas. Si se aplica una fuerza de una unidad sobre el dinamómetro, el resorte en su interior se estira hasta ejercer una fuerza igual y contraria a la aplicada. En la escala se mide el alargamiento del resorte y se le asigna una unidad de fuerza.

La fuerza no es una característica propia de los cuerpos, surge cuando ellos interaccionan entre sí, por lo tanto, para que se manifieste una fuerza se requieren al menos dos cuerpos. Las fuerzas realizan deformaciones en los cuerpos, pero además producen un cambio en la velocidad y por tanto producen aceleraciones.

Para que un cuerpo acelere, la fuerza neta o resultante de todas las que pueden estar actuando sobre él debe ser distinta de cero, no olvidando que a un cuerpo se le pueden aplicar varias fuerzas. Si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es cero, éste permanece en reposo o continua su movimiento con velocidad constante. Cuando esto ocurre se dice que la partícula está en equilibrio.

Se pueden distinguir dos grandes clases de fuerza, que encierran a todas las diferentes formas que existen a nuestro alrededor. Esta clasificación es respecto de la forma en que actúan:

- Fuerzas de contacto: representadas por el resultado del contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo al estirar un resorte.

- Fuerzas a distancia: actúan a través del espacio, sin que haya contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo la fuerza de atracción de la Tierra sobre los cuerpos, la que ejercen los imanes, etc.

También podemos clasificar fuerzas según el intervalo de tiempo en que actúan:

- Fuerzas instantáneas: Son aquellas que actúan en un intervalo de tiempo corto, resultan muy difíciles de medir y son fuerzas que inician movimiento pero en seguida dejan de actuar. Un ejemplo sería cuando lanzamos un cuerpo. No se consideran dentro de las fuerzas que actúan durante su movimiento.

- Fuerzas Continuas: actúan durante el movimiento del cuerpo. Producen movimientos acelerados si van a favor del movimiento del cuerpo y decelerados si van en contra.

1.2.3 Fuerzas fundamentales

La física contemporánea recurrió a cuatro interacciones o fuerzas fundamentales para describir el mundo, las que actúan sobre las partículas de la materia (y las antipartículas) vehiculadas (transportadas) por partículas llamadas vectores interacción, que son: fotón (interacción electromagnética), bosón (interacción débil), gluón (interacción fuerte) y gravitón (interacción gravitacional).

1. Fuerzas electromagnéticas de atracción o repulsión entre partículas cargadas en reposo o en movimiento, explica la cohesión de los átomos y es mucho más intensa que la fuerza gravitacional.

2. Fuerzas nucleares intensas entre partículas subatómicas, responsable de la existencia del núcleo atómico, protones y neutrones, y es responsable de un gran número de reacciones y desintegraciones; es la mayor magnitud (10^2 - 10^3 veces la fuerza electromagnética)
3. Fuerzas nucleares débiles de corto alcance, rige algunos proceso radiactivos, establece la estabilidad de algunos núcleos, es varios órdenes de magnitud (10^2) menor que la fuerza electromagnética.

4. Fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos debido a sus masas, entre otras cosas hace que caigan las manzanas y que suban las mareas, es la menor magnitud comparada con las otras.

1.2.4. Tipos de fuerzas

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se pueden distinguir en diferentes tipos:

Fuerza Peso

Antes de describirla hay que aclarar que en física el peso y la masa son muy distintos, por lo que no se deben confundir. La masa es la cantidad de materia (todo aquello que ocupa volumen) que tiene un cuerpo y se mide en Kg. El peso en cambio es una fuerza, que se relaciona con la masa del cuerpo y la aceleración de gravedad.

El Peso es la fuerza con que los cuerpos son atraídos hacia el centro de la Tierra por la acción de la gravedad. Su sentido siempre irá hacia el centro de la Tierra.

Fuerza de Roce

Es la fuerza con que la superficie se opone al deslizamiento y al movimiento de los cuerpos, y tienen lugar en la superficie de contacto entre los cuerpos. Si la fuerza de roce no existiera no podríamos caminar, nadar e incluso detenernos.

Su sentido será contrario al movimiento y siempre que un cuerpo se deslice o tienda a deslizarse por una superficie se hará presente.

Fuerza normal

Es la fuerza que la superficie ejerce sobre el cuerpo que está apoyado sobre la misma y sólo se manifiesta cuando ocurre lo anterior. Es una fuerza perpendicular a la superficie de contacto y es la responsable de mantener al cuerpo sobre la superficie.

Fuerza centrífuga

Se presenta cuando una partícula realiza movimientos curvilíneos. Es la fuerza que tiende a alejar a un cuerpo hacia fuera de la trayectoria, cuando describe un movimiento curvilíneo, con la finalidad de mantener el movimiento rectilíneo.

Fuerza centrípeta

También está presente en los movimientos curvilíneos al igual que la fuerza centrífuga y es que tiende a acercar a un cuerpo hacia el centro de la trayectoria, cuando describe un movimiento curvilíneo.

1.2.4.1. Conceptos de fricción y sus consecuencias

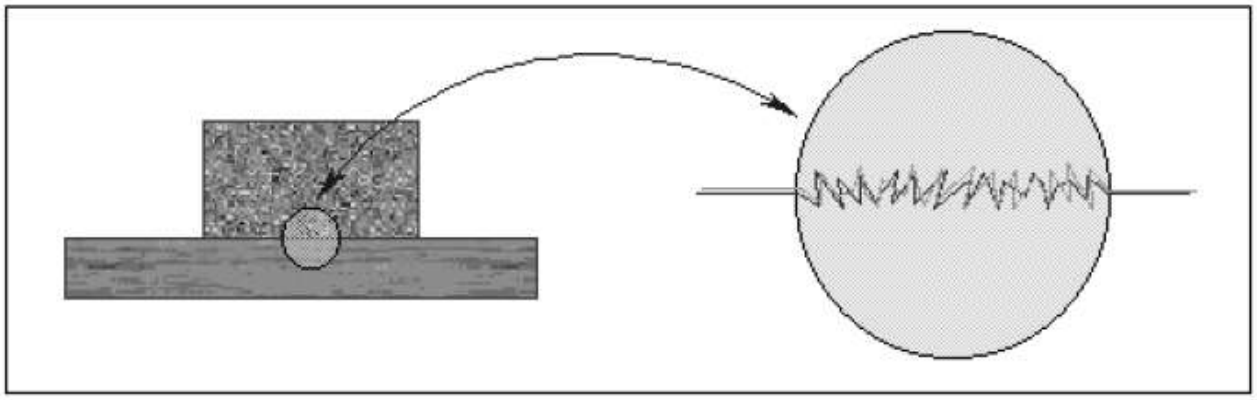
Cuando un cuerpo se mueve sobre una superficie o tal vez se mueve a través de un medio viscoso como el agua o el aceite, después de cierto intervalo de tiempo comienza a perder velocidad hasta detenerse. Esto se debe a que el cuerpo experimenta una resistencia a su movimiento debido a la interacción con el medio que lo rodea. Esa resistencia provoca un cambio en la velocidad del cuerpo, por lo tanto se mide como una fuerza y recibirá el nombre de fuerza de roce o fricción.

Esta fuerza es muy importante debido a que nos permite caminar, detenernos y realizar muchos de los movimientos cotidianos.

La fuerza de roce es paralela a la superficie de contacto de los cuerpos que se rozan y su dirección es opuesta al movimiento, jamás va en la misma dirección. Analiza lo mencionado ¿Qué pasaría si el roce fuese en la misma dirección del movimiento? ¿Nos detendríamos algún día?

El roce se produce debido a las irregularidades que presentan las superficies en contacto, aunque este se presente.

Figura 20



La fuerza de roce es más compleja de lo que se puede apreciar, si observamos microscópicamente las superficies podremos ver que las fuerzas electrostáticas entre átomos y moléculas son las responsables de que existan puntos específicos donde las superficies forman enlaces difíciles de romper.

Analicemos el siguiente caso: Un bloque en reposo se encuentra sobre una mesa horizontal y se aplica una fuerza F, si no se mueve es porque existe un equilibrio entre la fuerza aplicada y la de roce. La fuerza de roce que actúa sobre los cuerpos en reposo recibe el nombre de Fuerza de roce estático (F_E). Recuerda que la máxima fuerza de roce estático que puede experimentar un cuerpo, será igual a la mínima fuerza necesaria para iniciar el movimiento.

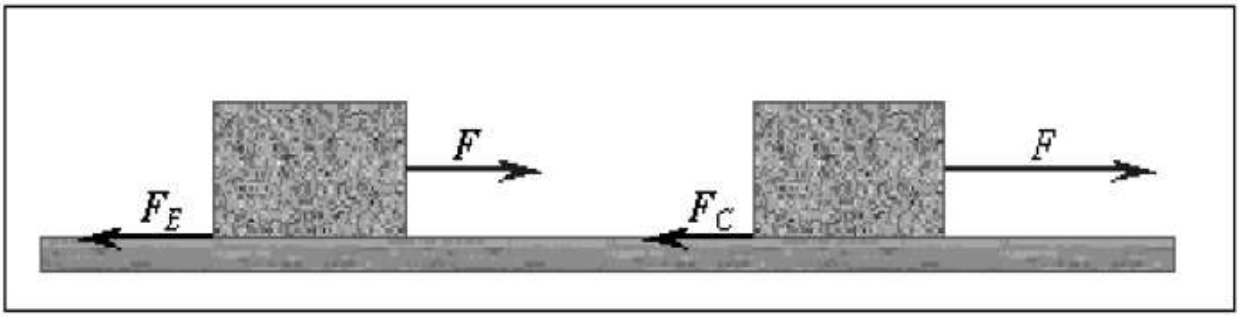
Si aumentamos la fuerza aplicada F. Cuándo el bloque está a punto de moverse, la $\boldsymbol{F_E}$ es máxima, pero si se sigue aumentando la fuerza aplicada a un valor mucho mayor, entonces el bloque comenzará a moverse y acelerará en la dirección de la fuerza aplicada.

Cuando el bloque esté en movimiento, la fuerza de roce estático disminuye de su máximo y recibe el nombre de Fuerza de Roce Cinético (F_C). Debido a que la fuerza de roce cinético aplicada ($\boldsymbol{F_C}$) no se equilibra con la fuerza F aplicada, el cuerpo presenta aceleración. En cambio si la fuerza F aplicada es igual a la fuerza de roce cinético F_C, entonces el cuerpo presentará una velocidad constante.

Si la fuerza aplicada F deja de actuar, entonces la fuerza de roce, que continua actuando, se opone al movimiento hasta que el bloque se detiene.

En la siguiente imagen podemos observar la dirección en la que actúan las fuerzas de roce Estático y Cinético sobre un cuerpo de masa m, al cual se le aplica una fuerza F en dirección a la derecha.

Figura 21



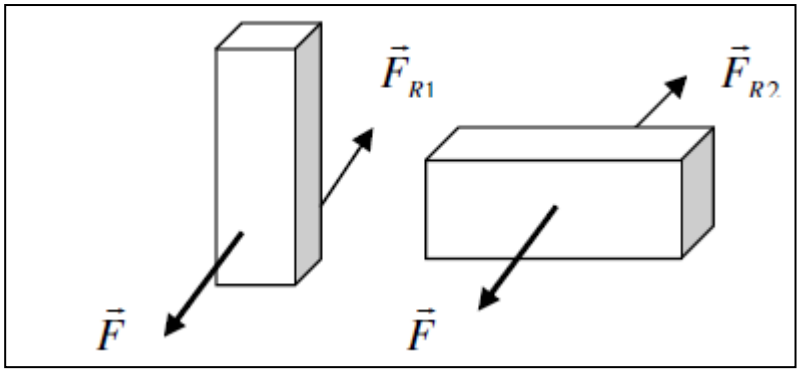
Experimentalmente se determinó que para dos tipos de superficies dadas, las fuerzas de roce estático y cinético son aproximadamente independientes del tamaño del área de las superficies en contacto y son proporcionales a la fuerza Normal (N).

Entonces a modo de conclusión podemos decir que el valor de la fuerza de rozamiento se caracteriza por:

- No depende de la cantidad de superficie de contacto: Si la rugosidad de las superficies en contacto y el tipo de material es el mismo en todas las caras del cuerpo, entonces se comprueba experimentalmente que la fuerza de rozamiento es igual para todas las caras.

$$\boxed{F_{R1} = F_{R2}}$$

Figura 22



- Depende de la naturaleza de las superficies en contacto: Este punto es lógico pues la fuerza de roce se origina por el contacto de unas superficies con otras, por

adherencias entre diversos materiales y por la rugosidad de las superficies la cual es directamente proporcional al rozamiento.

- Cada material posee su propio valor característico según el mayor o menor rozamiento observado al deslizar un objeto sobre ellos, éste valor constante y característico de cada material recibe el nombre de Coeficiente de rozamiento ***(μ).***

- Depende de la fuerza normal: cuanto mayor es la fuerza de apoyo del cuerpo sobre la superficie de movimiento, mayor es el rozamiento con la misma. En cambio las fuerzas que tienden a levantar al cuerpo disminuyen su apoyo y por lo tanto su rozamiento.

- La fuerza de roce se representa a través de la siguiente fórmula:

$$F_R = \mu \cdot N$$

1.2.4.1.1 Medición de coeficiente de roce estático (F_E)

Fuerza de roce opuesta a la fuerza aplicada y cuya constante de proporcionalidad con la normal se llama *coeficiente de roce estático (μ_E).* Entonces la magnitud de la fuerza de roce estático es:

$$F_E \leq \mu_E N$$

Cuando el bloque está a punto de moverse, l fuerza de roce estático es máxima, $\mathbf{F_{Emáx}}$, lo mismo que el coeficiente de roce máximo, $\boldsymbol{\mu_{Emáx}}$, entonces:

$$F_{Emáx} = \mu_{E\,max} N$$

1.2.4.1.2 Medición de coeficiente de roce cinético (F_C)

La fuerza de roce cinético es opuesta al movimiento y es aproximadamente independiente de la velocidad con que se mueven las superficies, en caso de tratarse de pequeñas velocidades, a medida que esta aumenta comienza a sentirse el efecto de la fricción con el medio donde se mueve el cuerpo.

La constante de proporcionalidad con la normal se llama coeficiente de roce cinético (μ_C), entonces la magnitud de la fuerza de roce cinético es:

$$F_C = \mu_C N$$

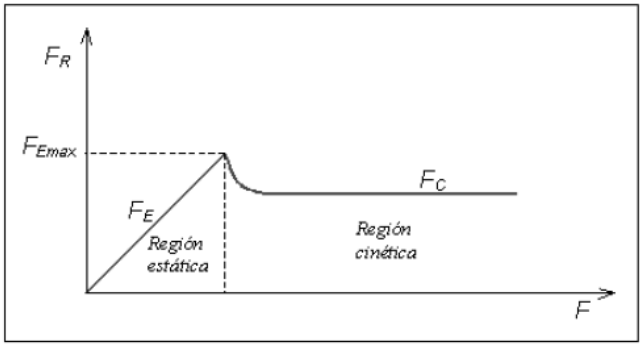
Las expresiones de F_C y F_E son empíricas, no representan leyes físicas fundamentales. Los coeficientes de roce estático y cinético son constantes adimensionales, sus valores dependen de la naturaleza de las superficies en contacto y en general para un par de superficies dadas $\mu_{Emáx} > \mu_C$.

En la siguiente tabla se presentan algunos valores de los coeficientes de roce:

Superficies	μ_E	μ_C
Madera- madera	0.25-0.5	0.2
Acero- acero	0.74	0.57
Vidrio- vidrio	0.94	0.40
Caucho- concreto	0.15	0.06
Cobre- vidrio	0.68	0.53
Hielo- hielo	0.1	0.03
Articulaciones humanas	0.01	0.003

El siguiente gráfico representa la magnitud de la fuerza aplicada F, versus la fuerza de roce:

Figura 24



1.2.5. Sistemas de poleas

Cuando varios cuerpos se unen mediante cuerdas, la fuerza que se aplica sobre uno de ellos y se va transmitiendo a los otros tensando la cuerda que los une. La fuerza que ejerce una cuerda tensa al tirar de un cuerpo unido a ella se llama ***TENSIÓN*** y se dibuja siempre partiendo del cuerpo que en ese momento se estudia.

Existen tantas tensiones como cuerdas haya en el montaje, y en ella actúa claramente la acción y reacción.

Para aplicar las leyes de Newton a un sistema con varios cuerpos enlazados, es conveniente seguir una serie de pasos ordenadamente:

1. Elegir un sentido lógico del movimiento: Para saber si el elegido es el correcto, debes verificar el signo de la aceleración, si esta te da un resultado negativo significa que elegiste mal el sentido de movimiento y deberás realizarlo nuevamente.

2. Dibujar todas las fuerzas que actúan, descomponiendo aquellas que no sean paralelas ni perpendiculares al desplazamiento del cuerpo.

3. Sólo actúan directamente en el movimiento de cada cuerpo aquellas fuerzas o componentes de fuerzas cuya dirección coincide con la del movimiento del cuerpo. Se considerará positivas aquellas fuerzas que van a favor del movimiento y negativas las que van en contra.

4. Si hay varios cuerpos unidos, se plantea la ecuación fundamental de la dinámica correspondiente a la segunda ley de Newton (∑ F = m • a) a cada cuerpo por separado. Con ello se obtendrán tantas ecuaciones como cuerpos haya unidos, incluyendo en la ecuación de cada uno solamente las fuerzas aplicadas directamente sobre él y que coinciden con la dirección en que se mueve dicho cuerpo.

5. Lo que resulta de todo ello es un sistema de ecuaciones de fácil solución si se suman todas las ecuaciones obtenidas.

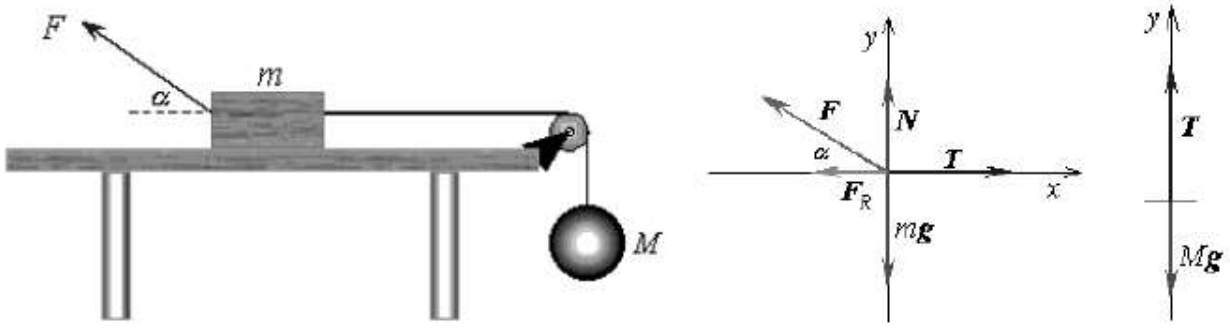
Analicemos la siguiente situación:

1) ***Ejemplo*** : *En el sistema mecánico de la figura 4.10a, se aplica una fuerza* ***F*** *inclinada un ángulo* α *sobre el cuerpo de masa m, ubicado sobre la mesa horizontal con coeficiente de roce* μ. *La polea por donde cuelga otro bloque de masa M no tiene roce y la cuerda se considera inextensible y de masa despreciable. Calcular la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.*

Solución: El sistema está en movimiento, por lo que se aplica la segunda Ley de Newton a cada masa:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y$$

Como no se conoce la dirección del movimiento, podemos suponer que el cuerpo de masa M desciende y tira a m hacia la derecha, lo que determina el sentido de la aceleración del sistema, entonces del DCL para m (figura 4.10b) y para M (figura 4.10c), en cada dirección x e y, se obtiene:



Para m

$$eje\ x:\ T - F\cos\alpha - F_R = ma \qquad (1)$$

$$eje\ y:\ N + F\,sen\,\alpha - mg = 0 \qquad (2)$$

Para M

$$eje\ y:\ T - Mg = -Ma \qquad (3)$$

Además se sabe que por definición, la fuerza de roce es: $F_R = \mu N$.

De (2) se despeja N y se reemplaza en F_R:

$$N = mg - F sen\alpha \quad \Rightarrow \quad F_R = \mu(mg - F sen\alpha) \qquad (4)$$

De (3) se despeja T: $\quad T = Mg - Ma \qquad (5)$

Ahora (4) y (5) se reemplazan en (1), lo que permite despejar la aceleración

$$Mg - Ma - F\cos\alpha - \mu(mg - F sen\alpha) = ma \Rightarrow$$

$$a = \frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu sen\alpha)}{M + m}$$

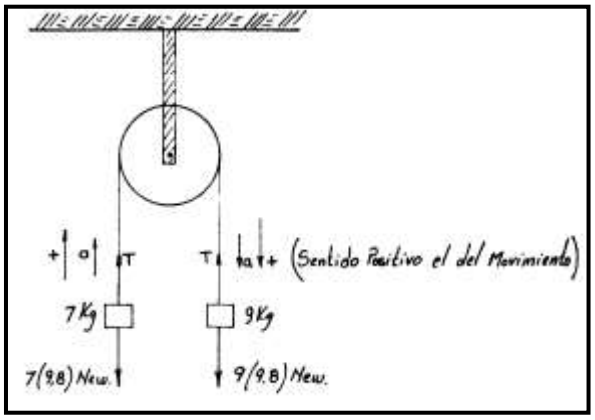
y la tensión T

$$T = Mg - M\frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu sen\alpha)}{M + m}$$

1.2.6. Cálculo de estados dinámicos de diversos sistemas

Ejemplo 1:

De una cuerda que pasa por una polea fija penden 2 masas de 7 Kg y 9 Kg respectivamente. Suponiendo que no hay roce ya que la cuerda es inextensible, calcular la aceleración (a) y la tensión (T) de la cuerda.



a) Consideremos las fuerzas aplicadas a la masa de 7 Kg

$$\Sigma Fi = m.a$$

$$[\ T - 7\ (9{,}8)\ ]\ New = 7\ Kg\ .\ a\ [m/seg^2] \quad (1)$$

b) Consideremos las fuerzas aplicadas a la masa de 9 kg

$$[\ 9\ (9{,}8) - T\ ]\ New = 9\ Kg\ .\ a\ [m/seg^2] \quad (2)$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sumando (1) y (2):

$$T - 7\ (9{,}8) + 9\ (9{,}8) - T = 7\ .\ a + 9\ .\ a$$
$$-7\ (9{,}8) + 9\ (9{,}8) = (\ 7 + 9\ )\ .\ a$$
$$2\ (9{,}8) = 16\ .\ a$$
$$a = 2\ .\ 9{,}8\ /\ 16 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}225\ m/seg^2$$

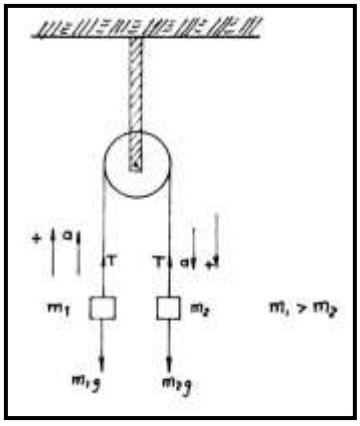
Para hallar T se reemplaza a = 1,225 m/seg^2 en (1) ó (2)
Reemplazando en (1) tendremos:

$$T - 7\ (9{,}8) = 7\ .\ 1{,}225$$
$$T = 7\ .\ 1{,}225 + 7\ (9{,}8)$$
$$T = 8{,}575 + 68{,}6 \quad \Rightarrow \quad T = 77{,}175\ New$$

Reemplazando en (2):

$$9\ (9{,}8) - T = 9\ .\ 1{,}225$$
$$T = 9\ .\ (9{,}8) - 9\ .\ 1{,}225$$
$$T = 88{,}2 - 11{,}025 \Rightarrow \quad T = 77{,}175\ New$$

Explicación teórica:



a) En m_1 :

$$[\ T - m_1\ .\ g\ ]\ New = m_1\ .\ a$$

b) en m_2:

$$[\ m_2\ .\ g - T\ ]\ New = m_2\ .\ a$$

Sumando a) y b)

$$T - m_1\ .\ g + m_2\ .\ g - T = m_1\ .a + m_2\ .a = (m_1 + m_2)\ .\ a$$

$$(m_2 - m_1).g = (m_1 + m_2).a$$

Luego, la aceleración es:

$$a = [(m_2 – m_1) . g] / (m_1 + m_2)$$

$$\text{Si } m_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = g$$
$$\text{Si } m_2 = m1 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \;;$$

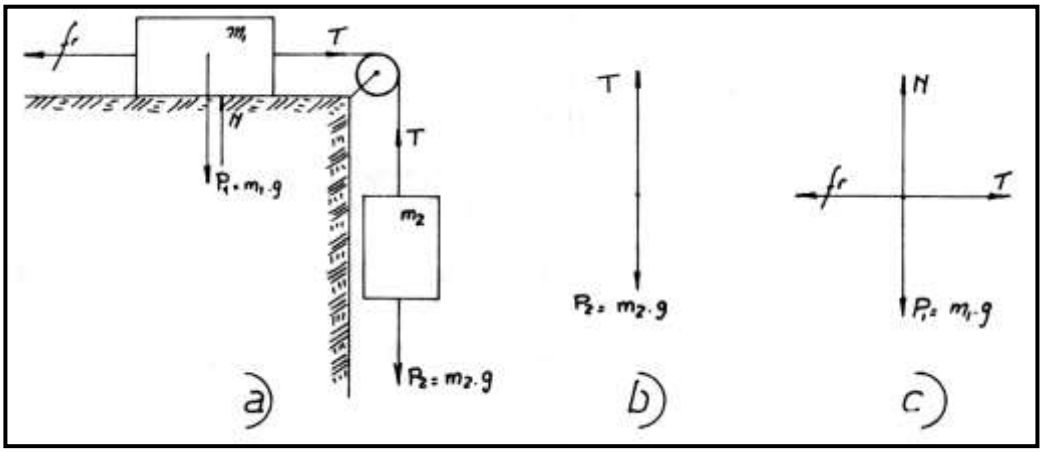
Para el ejemplo la aceleración es:

$$a = [(m_2 – m_1) . g] / (m_1 + m_2)$$
$$a = [(9 – 7) . 9.81] / (7 + 9)$$
$$a = 1.226 \text{ m/s}^2$$

Siendo positiva para el peso mayor y negativa para el menor.

Ejemplo 2:

Movimiento de varios cuerpos unidos. (Del Libro de Frederich Bueche: “Física para estudiantes de Ciencias e Ingenierías”)



Una situación interesante resulta cuando dos o más objetos son forzados a tener distintos tipos de movimiento por alguna vinculación entre ellos.

Por ejemplo, en la figura anterior el bloque sobre la mesa es arrastrado por el peso que cuelga de la polea. Consideremos que la masa de cada cuerpo es conocida y que la masa de la cuerda y de la polea son despreciables, podemos encontrar la aceleración del sistema a medida que el peso cae, arrastrando el bloque ubicado sobre la mesa.

Para hacer más general el problema, supongamos que una fuerza de fricción (fr) impide el movimiento del bloque a lo largo de la mesa.

- <u>Antes de comenzar el trabajo "cuantitativo" de esta situación, observemos algunos puntos "cualitativos":</u>

- Si no existiese fuerza de fricción, el peso colgado, de masa m_2, arrastraría al bloque en su caída, independientemente de la magnitud de su masa (m_1). Esto ocurre porque solo la fuerza de fricción (fr) está tratando de evitar que m_1 se mueva. El peso de m_1 (P_1) comprime al bloque sobre la superficie de la mesa, pero no tiene componente hacia la izquierda (en la figura 13) y en consecuencia no puede evitar que la masa (m_1) se mueva hacia la derecha y el sistema termina cayendo al vacío.

- Si la cuerda entre ambos bloques se rompe, la masa m_2 sería un cuerpo en caída libre. Únicamente, entonces, su aceleración sería igual a "g". En cambio, si la cuerda permanece tensa, la tensión en la misma tenderá a frenar su caída y su aceleración hacia abajo será menor que "g".($a < g$).

- Si la tensión en la cuerda fuera igual al peso de m_2 ($T = P_2 = m_2 \cdot g$), el cuerpo permanecerá en reposo en virtud de que la fuerza resultante sobre ella sería nula; en cambio, si el cuerpo desciende, es porque la tensión T sobre la cuerda es menor que el peso de m_2 ($T < P < m_2.g$).

- <u>Ahora tratemos el tema "cuantitativamente":</u>

Aplicaremos la segunda ley de Newton (Principio de masa), que trata de las fuerzas y la aceleración de un cuerpo.

En principio se aísla un cuerpo para estudiarlo. Aislando primero m_2, dibujamos las fuerzas actuantes sobre él (ver figura 13-b). Es considerar la dirección del movimiento como positiva para que la aceleración también lo sea.

Entonces:

$$\Sigma F_y = m \cdot a$$

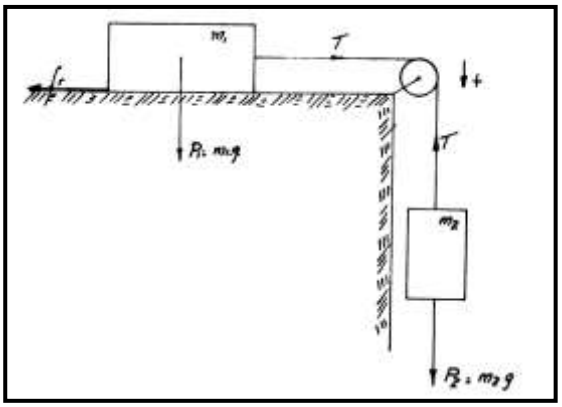
$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \qquad \textbf{(1)}$$

Esta ecuación contiene las incógnitas T y a.

Dibujando ahora el diagrama de cuerpo libre de m_1 como se muestra en la figura c, podemos escribir:

$$\Sigma F_x = m \cdot a$$
$$T - fr = m_1 \cdot a \qquad \textbf{(2)}$$

La aceleración **a** para las dos masas es la misma **($a_1 = a_2 = a$),** en virtud de que están unidas por una cuerda inextensible.



Si ecuaciones (1) y (2) despejamos T:

De (1) $T = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a$
De (2) $T = fr + m_1 \cdot a$

$$fr + m_1 \cdot a = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a$$
$$m_2 \cdot g - fr = m_2 \cdot a + m_1 \cdot a$$
$$\mathbf{a = (m_2 \cdot g - fr) / (m_2 + m_1)}$$

Como situación especial de esta última ecuación, podemos plantear:

- Si m_1 es muy grande en comparación con m_2, su inercia será “suficientemente” grande para mantener el sistema “completo” casi en reposo y la aceleración tendería a cero.

RESUMEN

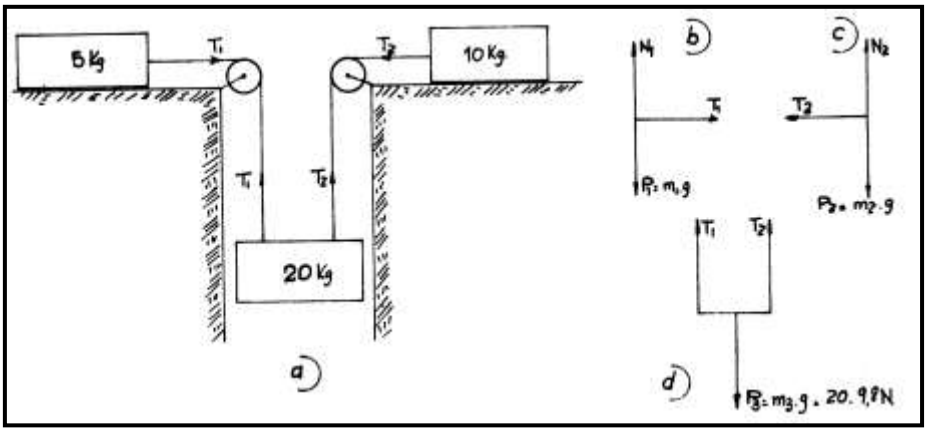
Considerando el rozamiento	Sin considerar el rozamiento
a) en m_2 $m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$ b) en m_1 $T - fr = m_1 \cdot a$	a) en m_2 $m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$ b) en m_1 $T = m_1 \cdot a$

$T = m_2.g - m_2.a$ $T = fr + m_1.a$ $\}$ $\Rightarrow m_2 . g - m_2 .a = fr + m_1 .a$ $(m_1 + m_2).a = m_2.g - fr$ $a = (m_2.g - fr) / (m_1 + m_2)$ Si $fr=0$ y $m_1 = 0 \Rightarrow a = g$ Si m_1 es muy grande $\Rightarrow$ a es muy pequeño	$T = m_2.g - m_2.a$ $T = m_1.a$ $\}$ $\Rightarrow m2 . g - m2 .a = m1 .a$ $1 + m2).a = m2.g$ $a = (m2.g) / (m1 + m2)$ $F_T = m_T . a$

Ejemplo 3:

Encontrar la aceleración de un bloque de 20 Kg (masa) según la figura 15, si las fuerzas de fricción son despreciables. También determinar T_1 y T_2.

Aislemos primero el bloque de 5 Kg y consideremos la dirección del movimiento como positiva. Su diagrama de cuerpo libre se encuentra en la parte b) de la figura15. Considerando que el movimiento de la masa de 5 Kg ocurre en la dirección de T_1 únicamente, las fuerzas P_1 y N_1 deben eliminarse una con otra.



Escribiendo:

$$F = m.a$$

Para este bloque:

$$T_1 = 5 . a \qquad (1)$$

En forma semejante para el bloque de 10 Kg:

$T_2 = 10.a \qquad (2)$

Ambos bloques tendrán la misma aceleración (provocada por el bloque de 20 Kg que cae). Observando el diagrama de cuerpo libre para el bloque de 20 kg , mostrado en la parte d) del a figura 15, decimos:

$$\Sigma F_i = m \,.\, a$$

$$20 \,.\, 9{,}8 - T_1 - T_2 = 20 \,.\, a$$

$$196 - T_1 - T_2 = 20 \,.\, a \qquad (3)$$

Por lo tanto tenemos tres ecuaciones que contienen las tres incógnitas T_1, T_2 y a. Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$196 - 5.a - 10.a = 20.a$$

$$196 = 20.a + 10.a + 5.a$$

$$196 = 35.a$$

$$a = 196/35$$

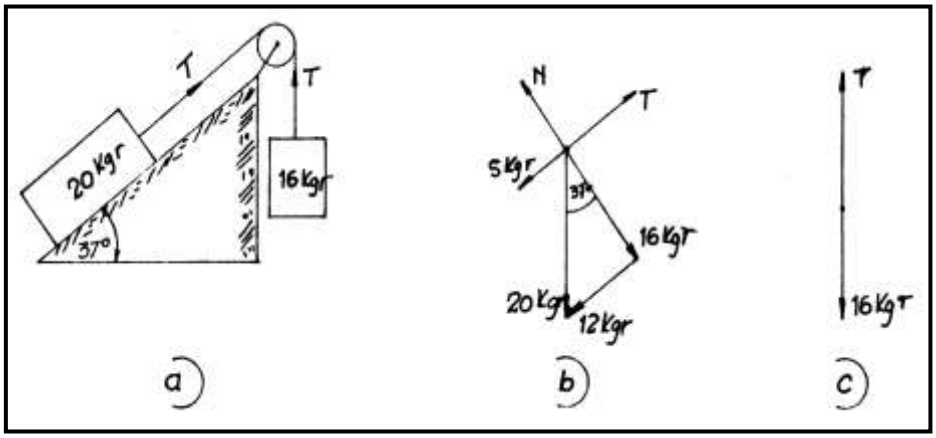
$$a = 5{,}6 \text{ m /seg2}$$

También se pueden resolver simultáneamente:

$$\left.\begin{array}{l} a = 5{,}6 \text{ m/seg}^2 \\ T_1 = 28 \text{ N} \\ T_2 = 56 \text{ N} \end{array}\right\}$$

Ejemplo 4:

Encontrar la aceleración y la tensión de la cuerda del sistema mostrado en la siguiente imagen.



La fuerza de fricción o de rozamiento entre el bloque y el plano es de 3 Kgr. Los diagramas de cuerpo libre de cada bloque se muestran en b y c.

Veamos primero en qué forma se movería el sistema si la fuerza de rozamiento fuera despreciable (f_r.=0). Observamos en la figura b que la componente del peso de 20 Kgr. paralela al plano inclinado es 16 Kgr, con sentido descendente y la tensión que tira al cuerpo hacia arriba con la misma dirección es 16 Kgr.

Como la tensión es mayor que la componente paralela al plano (16Kgr >12Kgr), el bloque se moverá hacia arriba por el plano inclinado.

En el problema hay que considerar la fuerza de rozamiento de 3 Kgr. Como es opuesta al movimiento, actúa sobre el bloque que está sobre el plano inclinado y en sentido descendente. Aplicaremos el Segundo Principio de la Dinámica a ambos bloques:

$$\Sigma F_i = m \cdot a$$

El sentido de los movimientos de los bloques se considera positivo. Como: m = P / g, donde g = 9,8 m/seg^2

Según el diagrama de la figura c:

$$16 - T = (16/9{,}8).a \qquad \textbf{(1)}$$

Según el diagrama de la figura b:

$$T - 12 - 3 = (20/9{,}8) \cdot a \qquad \textbf{(2)}$$

Sumando estas dos ecuaciones queda:

$$16 - T + T - 12 = (16/9{,}8 + 20/9{,}8) \cdot a$$
$$16 - 12 - 3 = (36/9{,}8) \cdot a$$
$$1 = (36/9{,}8)$$
$$a = 1 \text{ Kgr} \cdot (9{,}8 \text{ m/seg2}) / 36 \text{ Kgr}$$
$$a = 0{,}272 \text{ m/seg}^2$$

Reemplazando en (1) ó en (2) obtenemos el valor de T.

En (1): $16 - T = (16/9{,}8) \bullet (9{,}8/36)$

$$16 = 16/36 + T$$
$$T = 16 - 16/36$$
$$T = (576 - 16) / 36$$
$$T = 15{,}556 \text{ Kgr}$$

FISICA

IPLACEX
TECNOLÓGICO NACIONAL

UNIDAD III

ENERGÍA

INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD

Desde tiempos remotos la energía ha sido parte trascendental de la humanidad, las fuentes generadoras de energía se utilizaron con la finalidad de satisfacer demandas de carácter vital o prescindible para el hombre. En cambio sin otras fuentes de energía, como la entregada por el sol, simplemente no existiríamos.

La primera fuente de energía que el hombre pudo dominar fue el fuego, cuyo uso le permitió cocinar y calefaccionar su entorno, de ahí en adelante comenzó a buscar el modo de dominar o utilizar otro sistemas que generasen energía. Más adelante los científicos descubrieron que la energía era la responsable de sucesos que no tenían explicación concreta a través de los conceptos ya estudiados, lo que dio pie a que en física se diera solución a muchas incógnitas.

Basándonos en la descripción etimológica del concepto, podemos decir que la palabra energía proviene del griego 'energueia' (en, dentro), ergon (trabajo) - que contiene trabajo, y la podemos definir como una propiedad asociada a los sistemas materiales; gracias a la cual los cuerpos tienen capacidad de producir cambios en otros cuerpos o en ellos mismos; Así cualquier cambio requiere energía.

1.ENEGÍA: CONCEPTOS Y GENERALIDADES

En el universo la energía se encuentra presente de variados procesos y en diferentes formas, es de vital importancia en experiencias cotidianas como la velocidad y las fuerzas; Así también hablamos de energía en ciertas experiencias como cuando se pierde el suministro eléctrico o cuando la falta de combustible impide que un vehículo encienda. Todas estas situaciones nos entregan una visión algo abstracta de lo que la energía es.

La energía es uno de los temas más importantes en ciencias e ingeniería. Si bien cotidianamente hablamos de energía en términos de combustibles, de electricidad o de alimentos de consumo, éstas ideas no definen qué es en realidad

1.1 Definición de energía (E)

Etimológicamente el término energía proviene del griego ἐνέργεια/energeia que significa actividad, operación y ἐνεργός/energos que corresponde a la fuerza de acción o fuerza de trabajo realizada. He ahí el por qué sus diversas acepciones y definiciones están directamente relacionadas con la idea de una capacidad para obrar, transformar o poner en movimiento.

La investigación del concepto "*Energía*" arroja múltiples definiciones, tales como que "E*s la capacidad de un cuerpo o sistema para ejercer fuerzas sobre otros cuerpos o sistemas, o entre sus propios sistemas*", o que "*es la capacidad para realizar un trabajo*". Si bien las descripciones del concepto son muchas, sigue siendo difícil de definir debido a su naturaleza abstracta. Además, el hecho de que posea variadas interpretaciones complejiza aún más dicho axioma.

Recordemos los conceptos de fuerza y trabajo, para comprender de manera más clara el concepto de energía:

Fuerza: interacción entre dos o más cuerpos, que provoca un cambio de posición, una modelación momentánea de la estructura, una deformación o le permite conservar su estado de reposo, a uno o todos los cuerpos involucrados. Es decir, es aquella interacción que provoca "algo" sobre un cuerpo.

Trabajo: Se define como el producto entre el desplazamiento experimentado por el cuerpo y la fuerza aplicada al sistema. Entonces podemos decir que un cuerpo realiza trabajo siempre y cuando la fuerza aplicada sobre éste, permita que experimente un desplazamiento.

La unidad de medida de la energía en el Sistema Internacional (SI) recibe el nombre de Julio o Joule, y se representa por la sigla J. Un joule equivale a la cantidad de trabajo efectuado por una fuerza de 1 newton actuando a través de una distancia de 1 metro.

1.2 Trabajo (W)

Diariamente utilizamos el concepto de trabajo en diversas situaciones, pero no siempre éste es bien empleado. Analicemos el siguiente ejemplo: Un joven levanta un libro y lo deja suspendido en el aire durante 5 minutos. Al finalizar el tiempo sus brazos se sentirán fatigados y creerá que ha realizado un trabajo considerable sobre el libro. Sin embargo podemos concluir que no se ha desarrollado ninguno, pues si bien se ejerce una fuerza para sostener el libro no se produce ningún desplazamiento mientras ésta se aplica.

En física una fuerza realiza trabajo cuando actúa sobre un cuerpo que se mueve a través del tiempo, considerando que una componente de dicha fuerza se encuentre en la dirección del movimiento que experimenta el cuerpo.

Asociado al concepto de trabajo encontramos la energía. Cuando un sistema realiza trabajo sobre otro, existe una transferencia de energía entre los dos sistemas. Por ejemplo, si empujamos un carro de supermercado estamos realizando trabajo ya que existe una fuerza aplicada y un desplazamiento. Al mismo tiempo hay una transferencia de energía, debido a que la energía química de nuestro cuerpo se transfiere al carro y aparece en forma de energía cinética (energía asociada al movimiento de los cuerpos).

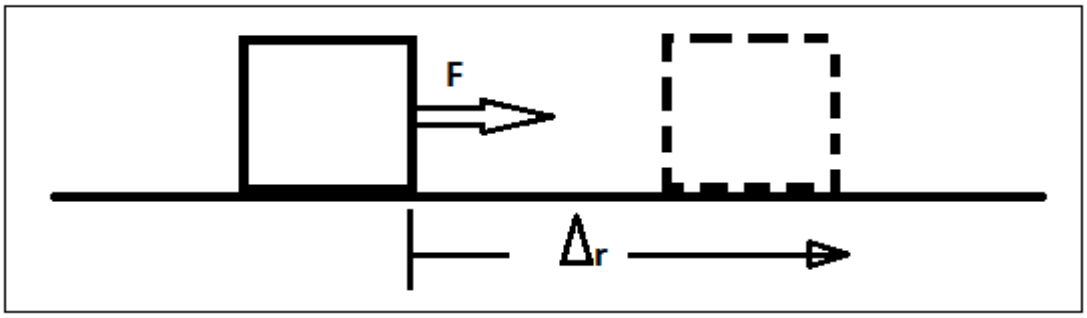
Cuando el trabajo realizado de un sistema es positivo, la energía se transfiere al sistema, en cambio cuando el trabajo es negativo la energía se transfiere desde el sistema.

1.2.1 Trabajo invertido por fuerzas constantes

Si la fuerza aplicada sobre un cuerpo es constante y en una sola dimensión (Figura 1), podemos determinar el trabajo calculando el producto entre la fuerza aplicada (F) y la distancia recorrida (Δr):

$$W = F \bullet \Delta r$$

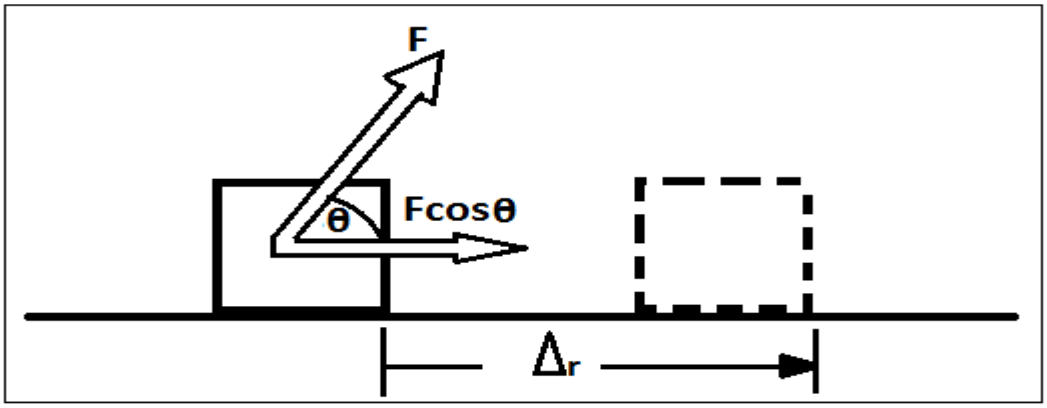
Figura 1



En el caso que la fuerza aplicada sobre un sistema no se realice en una sola dirección (Figura 2), o sea, presente un cierto ángulo de inclinación respecto del desplazamiento, entonces el trabajo se calculará con el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr del desplazamiento del cuerpo y el cos θ, siendo θ el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W = F \bullet \Delta r \bullet \cos \theta$$

Figura 2



Establezcamos ciertos eventos sobre el trabajo, que serán útiles posteriormente:

- Si el desplazamiento es cero ($\Delta r = 0$), el trabajo realizado será cero ($W = 0$)
- Si el ángulo de aplicación de la fuerza es $\theta = 90°$, o sea, es perpendicular al movimiento, el trabajo será nulo ($W = 0$). Lo anterior se debe a que el $\cos \theta = \cos 90° = 0$.

$$W = F \bullet \Delta r \bullet \cos \theta$$
$$W = F \bullet \Delta r \bullet \cos 90°$$
$$W = F \bullet \Delta r \bullet 0 = 0$$

- El trabajo será máximo cuando el desplazamiento y la fuerza estén en la misma dirección. Si la fuerza o una de sus componentes es paralela al movimiento, es decir, el ángulo θ = 0°, entonces el trabajo será máximo. Esto se debe a que θ = 0° y cos 0° = 1.

$$W = F \bullet \Delta r \bullet \cos \theta$$
$$W = F \bullet \Delta r \bullet \cos 0°$$
$$W = F \bullet \Delta r \bullet 1$$
$$W = F \bullet \Delta r$$

- El signo del trabajo será positivo si la fuerza aplicada sobre el cuerpo está en la misma dirección que el desplazamiento.
- El signo del trabajo será negativo cuando la proyección de la fuerza aplicada esté en la dirección opuesta al desplazamiento.

Cuando hay varias fuerzas realizando trabajo sobre una partícula, podemos calcular el trabajo total sumando el trabajo realizado por cada una de las fuerzas en cuestión:

$$W_{total} = F_{1x}\ \Delta_{x1} + F_{2x}\ \Delta_{x2} + F_{3x}\ \Delta_{x3} + \ldots.$$

Entiéndase por partícula a todo objeto que permanezca completamente rígido, que no gire y que posea la capacidad de que todas sus partes experimenten los mismos desplazamientos, durante el mismo intervalo de tiempo. Basándonos en ésta descripción, podemos determinar que el trabajo total de una partícula sobre la que actúan varias fuerzas y cuyo desplazamiento es el mismo es:

$$W_{total} = F_{1x}\ \Delta_{x1} + F_{2x}\ \Delta_{x2} + F_{3x}\ \Delta_{x3} + \ldots.$$
$$W_{total} = (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots.)\ \Delta_x$$
$$W_{total} = F_{neta\ x} \bullet \Delta_x$$

A modo de recomendación, es preferible determinar primero la fuerza neta sobre el sistema y posteriormente multiplicar dicho resultado con el desplazamiento.

La unidad de medida del trabajo es el Joule (J), misma unidad de medida de la energía. Ésta unidad proviene del producto de las unidades de medida de la fuerza y longitud establecidas en el SI:

$$W = F \bullet \Delta r$$
$$W = \text{Newton (N)} \bullet \text{metros (m)}$$
$$W = (\text{Kg} \bullet m^2) / s^2$$
$$\mathbf{W = Joule\ (J)}$$

Existe otra unidad de medida muy utilizada, el electrón volt (eV), el que se relaciona con los joule de la siguiente manera:

$$1\ eV = 1{,}6 \times 10^{-19}\ J$$

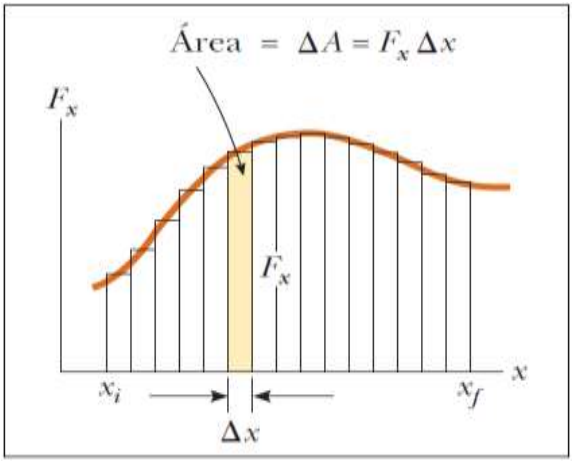
1.2.2 Trabajo consumido por fuerzas variables

Cuando hablamos de fuerzas variables la fórmula descrita anteriormente para determinar el trabajo efectuado pierde validez, pues ésta sólo es aplicable cuando la fuerza ejercida es constante en magnitud y dirección. No obstante, si consideramos un desplazamiento Δx muy pequeño, en el cual la componente x de la fuerza (F_x) es aproximadamente constante, entonces se puede realizar una aproximación del trabajo realizado:

$$W \approx F_x \ \Delta x$$

La Figura 3 representa un grafico posición v/s fuerza. Podemos observar que a medida que aumenta la distancia recorrida, la fuerza del sistema varía y que el área del rectángulo sombreado representa el trabajo en esa región.

Figura 3



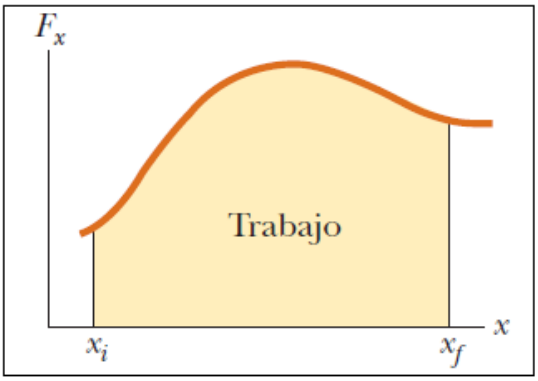
Ahora bien, cómo se observa en la grafica, el cuerpo se desplaza a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza que varía con la posición. Si su posición inicial es x_i, su posición final x_f y la fuerza es F_x, entonces podemos calcular aproximadamente el trabajo total consumido en dicho desplazamiento si sumamos todos sus intervalos:

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Si los desplazamientos los aproximamos a cero, el número total de intervalos aumentaría sin límites. Para determinar el trabajo en dicho trayecto habría que calcular el área definida por la curva F_x y el eje x (Figura 4):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

Figura 4



1.2.3 Trabajo consumido en un resorte

La fuerza que se ejerce sobre un resorte al ser estirado o comprimido, recibe el nombre de fuerza restauradora y está directamente relacionado con la constante de elasticidad que posea y el desplazamiento que experimente. Dicha fuerza se puede calcular matemáticamente como:

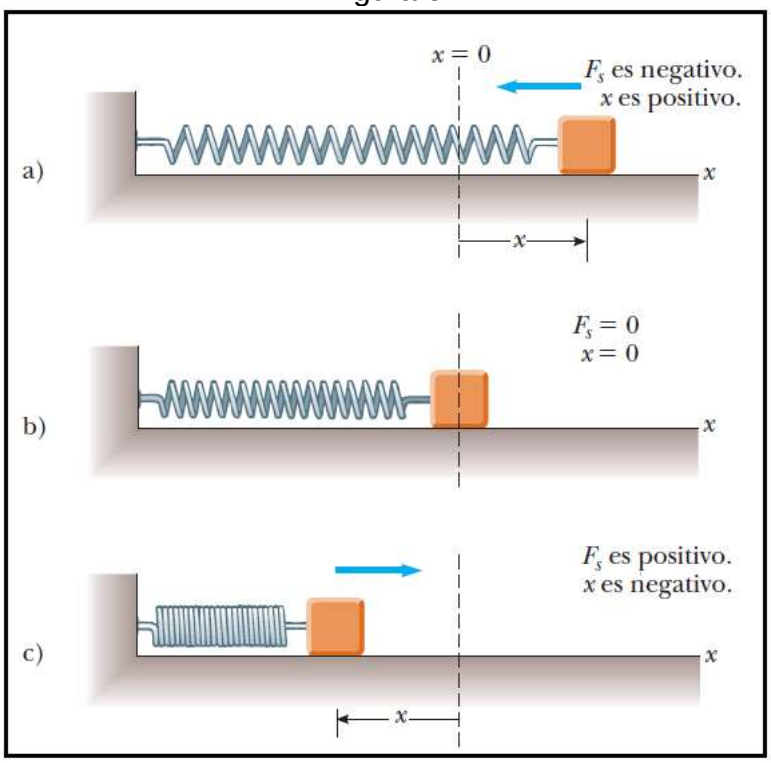
$$F_s = -k \bullet x$$

El signo negativo indica que la fuerza restauradora es opuesta a la fuerza aplicada que deforma el resorte, *x* es la posición del cuerpo en relación con su posición de equilibrio (x=0) y *k* es una constante llamada constante fuerza o constante de elasticidad.

En la Figura 5 podemos analizar como varía la posición de un resorte en tres situaciones:

a) Cuando el resorte está estirado, x es positivo y la fuerza restauradora se dirige a la izquierda.
b) El resorte se encuentra con su longitud original, es decir x = 0, por lo tanto la fuerza del resorte es cero.
c) El resorte está comprimido, o sea x es negativo y la fuerza restauradora se dirige hacia la derecha.

Figura 5



La fuerza externa necesaria para lograr que el resorte se estire o comprima, es directamente proporcional al estiramiento que experimente el resorte. Ésta ley se conoce como Ley de Hooke y se representa por la siguiente fórmula:

$$F = k \bullet x$$

Donde la constante k sigue representando la constante de elasticidad del resorte, pero en palabras más simples podemos decir que representa la rigidez del resorte, entonces un resorte más rígido será aquel que posea un mayor valor de k, mientras que los resortes más suaves tendrán pequeños valores de k. La unidad de medida de ésta constante es N/m (Newton/metro).

El trabajo de un sistema en el que un resorte experimenta un desplazamiento cuando se le aplica una fuerza externa, se puede calcular a través de la integral de dicho trabajo entre los intervalos x_i y x_f, según la siguiente fórmula:

$$W_{ap} = \int_{xi}^{xf} k\,x\,dx = \frac{1}{2}k\,x_f^2 - \frac{1}{2}k\,x_i^2$$

Examinando la fórmula de trabajo para un resorte podemos obtener las siguientes afirmaciones:

- Si la posición inicial es cero ($x_i = 0$) y la posición final es mayor que cero ($+ x_{máx}$), el trabajo será positivo, lo que indica que la fuerza está en la misma dirección del desplazamiento.
- Si la posición inicial es cero ($x_i = 0$) y la posición final es menor que cero ($- x_{máx}$), el trabajo será negativo, lo que indica que la fuerza está la dirección opuesta a la del desplazamiento.
- El trabajo para un resorte cuya posición inicia y final es la misma ($x_f = x_i$), siempre será cero.

1.3 Tipos de energía

La energía es participe de múltiples procesos de la naturaleza y la tecnología. Es por ello que dependiendo de las condiciones y características que presente y de los procedimientos en lo que intervenga, podremos distinguir distintos tipos de energía. Por ejemplo cuando hablamos de la energía proveniente del viento hablamos de energía eólica, la energía de una pila recibe el nombre de energía química o la energía relativa al movimiento se conoce como energía cinética.

A continuación definiremos algunos tipos de energía tales como: Energía cinética, potencial y elástica.

1.3.1 Energía cinética y teorema del trabajo – energía cinética

Cuando hablamos de energía cinética, nos referimos a aquella energía que se genera en un sistema, cuerpo o partícula que se encuentra en movimiento. Es una cantidad escalar, cuya unidad de medida es el Joule (J). Matemáticamente la energía cinética, representado por la sigla E_c o K en algunos textos, se relaciona directamente con la masa y la velocidad experimentada por una partícula y puede expresarse con la siguiente fórmula:

$$E_c = ½ \, m \, v^2$$

La energía cinética está directamente relacionada con el trabajo. En el trabajo una fuerza actúa sobre un cuerpo produciéndole una aceleración durante su desplazamiento, el que se puede representar a través de la siguiente igualdad:

$$W_{TOTAL} = \int_{r_i}^{r_f} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

La fuerza según la segunda ley de Newton corresponde a:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}}$$

Si reemplazamos la fuerza en la formula de trabajo, se obtiene:

$$W_{TOTAL} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r}$$

Desarrollamos la integral:

$$W_{TOTAL} = m\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \vec{v}d\vec{v}$$

$$W_{TOTAL} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

v representa la rapidez en la posición fina x, y v_0 su rapidez en la posición inicial x_0.

Se dice que el trabajo invertido por una fuerza neta en una partícula de masa *m,* es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de la cantidad ½ mv^2. Si dicha cantidad recibe el nombre de energía cinética, entonces podemos concluir que el trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de energía cinética de la misma:

$$W_{total} = \Delta E_c$$
$$W_{total} = E_{c\ final} - E_{c\ inicial}$$

De ésta igualdad se extrae el Teorema Trabajo – Energía cinética, que dice:

"Cuando se consume trabajo en un sistema, y el único cambio en el sistema es en su rapidez, el trabajo neto consumido en el sistema es igual al cambio en energía cinética del sistema".

Éste teorema indica que la rapidez de un sistema aumenta si el trabajo neto es positivo, ya que la energía cinética final es mayor que la inicial. En cambio si la rapidez disminuye, es debido a que el trabajo neto es negativo producto de que la energía final es mejor que la inicial.

1.3.1.1 Potencia y energía cinética

Se define potencia como el trabajo suministrado por una fuerza, durante un intervalo de tiempo, o dicho de otro modo, es la rapidez de transferencia de energía. Su unidad de medida es el vatio o watt (W):

$$1\ W = 1\ J/s$$

Para comprender la diferencia entre trabajo y potencia revisemos el siguiente ejemplo: en una construcción tenemos dos montacargas, cuyos motores consumen la misma energía al elevar un objeto, por lo tanto realizan el mismo trabajo. Ahora bien, si una de estas maquinas demora menos tiempo en elevar dicho objeto, entonces diremos que su potencia es mayor, debido a que realizando el mismo trabajo utilizó un tiempo menor.

Veamos ahora la parte matemática de la potencia. Si una partícula posee una velocidad instantánea (v) y durante un cierto intervalo de tiempo (*dt*) se desplaza una distancia $ds = v\ dt$, entonces la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$dW = F \bullet ds = F \bullet v\ dt$$

Si la potencia es directamente proporcional al trabajo e inversamente proporcional al tiempo, entonces las formula será:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \bullet v$$

Cómo la potencia está directamente relacionada con el trabajo, entonces posee directa relación con la energía cinética. Esto queda explícitamente expuesto a continuación:

$$W = \Delta E_c$$
$$W = E_{cf} - E_{ci}$$
$$P = W / t \qquad \text{; reemplazamos W}$$

$$P = \frac{(E_{cf} - E_{ci})}{t}$$

1.3.2 Energía potencial

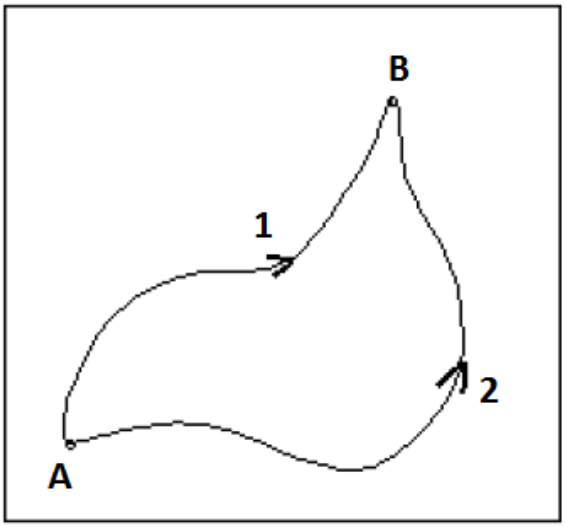
Es necesario definir ciertos conceptos antes de adentrarnos en qué es la energía potencial, a modo de que no se presenten vacíos posteriores.

- *Fuerzas conservativas:* entiéndase como aquellas fuerzas que son independientes de la trayectoria recorrida por un cuerpo entre dos puntos cualquieras. Dentro de éstas fuerzas destacamos la fuerza gravitacional, elástica, etc.

Supongamos que un cuerpo se mueve por la acción de una fuerza entre un punto inicial A y un punto final B. De ida recorre una trayectoria 1, mientras que de vuelta lo hace por una trayectoria 2 (completamente arbitraria a la primera) (Figura 6). Si la fuerza es conservativa, entonces el trabajo será independiente de la trayectoria y sólo dependerá de la coordenada inicial y final. De ser así se debe cumplir que:

$$W_{AB\ (trayectoria\ 1)} = W_{BA\ (trayectoria\ 2)}$$

Figura 6



Si consideramos el trayecto completo, ida y vuelta, primero de A hasta B y de B hasta A, entonces el trabajo total del sistema será cero (Figura 7). Esto ya que:

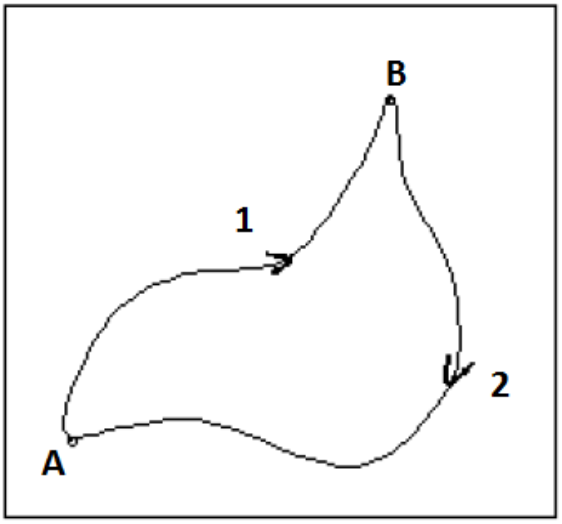
$$W_{BA\ (trayectoria\ 2)} = - W_{AB\ (trayectoria\ 2)} \quad ; \text{entonces}$$

$$W_{AB\ (trayectoria\ 1)} = - W_{BA\ (trayectoria\ 2)}$$

Posteriormente agrupamos los términos a un lado de la igualdad, demostrando que la suma de ambos trabajos da como resultado un trabajo total fina igual a cero:

$$W_{AB\ (trayectoria\ 1)} + W_{BA\ (trayectoria\ 2)} = 0$$

Figura 7



- *Fuerzas disipativas o no conservativas: representan aquellas fuerzas cuyo trabajo realizado es independiente de la trayectoria que realice el sistema entre dos puntos equidistantes:*

$$W_{AB\ (\text{trayectoria } 1)} \neq W_{BA\ (\text{trayectoria } 2)}$$

La explicación de la existencia de fuerzas disipativas, es que existen fuerzas como la de roce, que se oponen al movimiento de un cuerpo o sistema, generando que éste pierda energía. Volvamos ahora a la explicación de la Energía Potencial.

En física si bien el trabajo total realizado por un sistema se relaciona con la energía cinética, éste no representa completamente el trabajo realizado por las fuerzas externas actuantes sobre un sistema, las que dicho de paso, no incrementan la energía cinética. Es por ello que se introduce el concepto Energía Potencial, que está asociada a la energía en función de la posición.

1.3.2.1 Energía potencial gravitatoria

Si bien la energía potencial se relaciona al movimiento de un sistema, pero además es preciso destacar que sólo se asocia a tipos específicos de fuerzas y no a todas las fuerzas actuantes. Si movemos la posición de los integrantes del sistema o los giramos, entonces estaremos modificando su configuración y por ende su energía potencial.

Ahora bien, si por ejemplo la energía potencial de un objeto depende de la altura vertical de éste, respecto de la superficie de la tierra ¿qué tipo de energía potencial se estará representando? Veamos, si un agente externo eleva un objeto de masa *m*, desde una altura inicial y_i, hasta una altura final y_f (Figura 8). Si además la elevación no presenta aceleración, es decir posee velocidad constante, y el objeto se visualiza como una partícula en equilibrio, entonces el trabajo del sistema "objeto – tierra" se puede expresar como el producto de la fuerza aplicada (F_{ap}) y el desplazamiento vertical hacia arriba ($\Delta r = \Delta y\hat{j}$):

$$W_{\text{neto}} = (\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_f - mgy_i$$

La fuerza aplicada en ésta situación es la gravitacional, que para caída libre es el peso (P = mg) y el desplazamiento se representa como una variación de la posición respecto del eje y, por ello se representa como Δy ($\Delta y = y_f - y_i$).

Al observar ésta ecuación podemos identificar cierta similitud con la ecuación planteada en energía cinética, en ambas el trabajo es el resultado de una transferencia de energía del sistema, sólo que la energía en éste caso recibe el nombre de energía potencial.

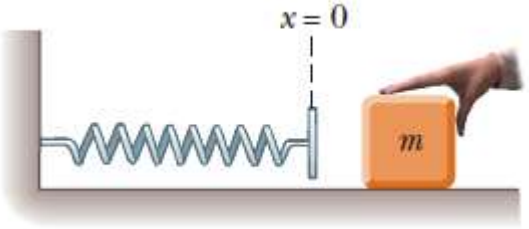
Entonces podemos concluir que la energía potencial es el producto entre la masa, la aceleración de gravedad y la altura experimentada por el sistema. La energía potencial es una cantidad escalar que se representa por la sigla E_p o U_g y cuya unidad de medida es el joule. Matemáticamente se puede expresar:

$$E_p = m \bullet g \bullet y$$

1.3.2.2 Energía potencial elástica

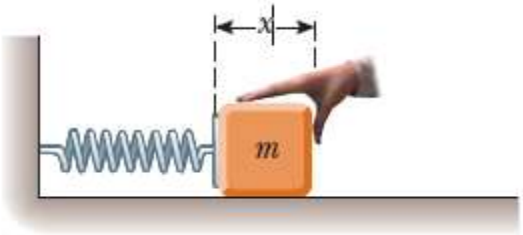
Otro tipo de energía potencial es la elástica. Considere un sistema que consta de un resorte y un bloque de masa m (Figura 9).

Figura 9



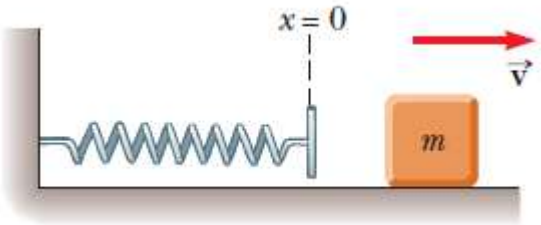
Sobre el bloque se aplica una fuerza hacia la izquierda, la que recibe el nombre de fuerza aplicada $F_s = kx$. Dicha fuerza es opuesta a la fuerza restauradora $F_s = -kx$ (Figura 10). Producto de la fuerza el resorte presenta un desplazamiento (Figura 10):

Figura 10



El trabajo realizado es negativo debido a que la fuerza restauradora se opone a la dirección del movimiento. Si dejamos de aplicar la fuerza sobre el resorte, éste realizará un trabajo positivo al volver a su punto de equilibrio.

Figura 11



Pues bien, si hablamos del trabajo total realizado por el resorte debemos concluir que este es cero debido a que vuelve al mismo punto de partida. De lo anterior se extrae que el resorte ejerce una fuerza conservativa. Para calcular la energía potencial utilizamos la siguiente ecuación:

$$dU = -F \bullet ds$$
$$dU = -F_x \bullet dx$$
$$dU = -(-kx)\, dx$$
$$dU = kx \bullet dx$$

Por lo tanto, si calculamos dicho valor obtenemos la siguiente igualdad:

$$U = \int kx\, dx = \frac{1}{2} k x^2 + U_0$$

U_0 representa la energía potencial en el instante en que el resorte se encuentra en su posición inicial, o sea que no está realizando ningún trabajo, por lo tanto $U_0 = 0$. Reemplazamos en la ecuación:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 + U_0$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 + 0$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

Recordemos que U representaba la energía potencial, por lo tanto se puede concluir que la energía potencial elástica (E_{pe}) es directamente proporcional a la mitad del cuadrado del desplazamiento y la constante de elasticidad del resorte, es decir:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$$

El teorema trabajo – energía implica que el trabajo total realizado sobre el bloque es cero, es decir:

$$W_{aplicado} = - W_{Resorte} \quad ; \text{ entonces}$$

$$W_{aplicado} + W_{Resorte} = 0$$

Luego:

$$W_{aplicado} = - W_{Resorte} = \Delta E_{pe\ (resorte)}$$

$$W_{aplicado} = E_{pe\ inicial} - E_{pe\ final}$$

$$W_{aplicado} = (½\ k\ x_i^2) - 0$$

$$W_{aplicado} = ½\ k\ x_i^2$$

Entonces el trabajo almacenado en este sistema resorte – bloque, se almacena en forma de energía potencial.

Tener presente:

Una función de energía potencial se asocia sólo con una fuerza conservativa. Si una fuerza conservativa F actúa entre integrantes de un sistema, mientras un integrante se mueve a lo largo del eje x desde x_i *a* x_f, el cambio en la energía potencial del sistema es igual al negativo del trabajo invertido por dicha fuerza:

$$Ep_f - Ep_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx$$

Los sistemas están en tres clases de configuraciones de equilibrio cuando la fuerza neta en un integrante del sistema es cero. Las configuraciones de *equilibrio estable* corresponden cuando E_p (x) es un mínimo. Las configuraciones de e*quilibrio inestable* corresponden

cuando E_p (x) es un máximo. El *equilibrio neutro* surge cuando E_p es constante mientras un integrante del sistema se mueve en alguna región.

1.4 Teorema de la conservación de la energía

La Energía Total de un sistema es la suma de todas las energías que tienen todos los objetos del sistema, incluyendo sus energías cinéticas, las energías asociadas a sus interacciones conservativas (energías potenciales), las llamadas energías internas, las almacenadas en sus enlaces químicos, sus vibraciones y rotaciones, las de la red cristalina si son sólidos, las asociadas a sus masas, en sus campos electromagnéticos, etc.

Se considera la idea de analizar situaciones físicas utilizando la aproximación de energía para sistemas aislados y no aislados. En un sistema aislado la Energía Total mantiene siempre su valor. Un Sistema Aislado puede intercambiar energía entre sus componentes, disminuir algunas y aumentar otras, pero finalmente la Energía Total conservará siempre su valor.

Dicha afirmación jamás ha podido ser violada, ni desde la escala de partículas elementales subatómicas hasta los confines conocidos del universo y dentro de los límites del error experimental, por ello recibe el nombre de "Principio".

Entonces el Principio de conservación de la energía indica que:

"La energía no se crea ni se destruye; sólo se transforma de unas formas en otras. En estas transformaciones, la energía total permanece constante; es decir, la energía total es la misma antes y después de cada transformación"

El fenómeno conocido como Principio de conservación de la energía mecánica, explicita que:

"La energía mecánica, conocida como la suma de las energías cinética y potencial, permanece constante siempre y cuando exista ausencia de rozamientos y no presente intervenciones de ningún trabajo externo".

Matemáticamente se puede expresar como:

$$E_{mecánica} = \Delta E_{sistema}$$

$$E_{mecánica} = E_c + E_p + E_{interna}$$

Energía Mecánica = Energía cinética + Energía Potencial + Energía Interna

1.4.1 Conservación de la energía para sistemas no aislados

Entiéndase por sistema aislado, a todos aquellos sistemas que no presentan ningún tipo de interacción son su medio ambiente, ni con las fuerzas externas e internas que en él actúan. Entonces en un sistema no aislado la energía cruza la frontera del sistema en ciertos intervalos de tiempo, producto de su interacción con el medio. Un ejemplo de ello puede ser el cambio de energía cinética que experimenta un objeto al interactuar con diversas fuerzas.

El trabajo es un método que permite transferir energía hacia un sistema, ¿Cómo lo hace? Aplicándole una fuera al sistema que genere un desplazamiento del punto donde dicha fuerza fue aplicada. Pues bien, existen otros medios para transferir energía dentro de los cuales podemos destacar:

- Las ondas mecánicas: también en este caso existe una transferencia de energía. Las ondas mecánicas permiten que una perturbación se propague a través del aire u otro medio. Un ejemplo de estas ondas son las ondas sísmicas.

- El calor también es un mecanismo de transferencia de energía, la que se activa cuando dos regiones del espacio se encuentran a temperaturas distintas. Por ejemplo cuándo instalamos una estufa dentro de una habitación. En este caso los electrones cercanos a la estufa están agitándose producto de la temperatura, eso genera una reacción en cadena donde dichos electrones colisionan con aquellos que poseen menor movilidad, provocando que estas partículas provoquen el mismo efecto con sus electrones más próximos. Es así como se logra igualar la temperatura dentro de todo el cuarto.

- Transmisión eléctrica: este tipo de transferencia de energía se produce mediante la corriente eléctrica. Por ejemplo un secador de pelo transfiere energía eléctrica en forma de energía calórica.

- La radiación electromagnética se refiere a las ondas electromagnéticas como la luz, microondas, ondas de radio, etc.

Basándonos en el principio de conservación de la energía podemos plantear el siguiente enunciado: *"Si la cantidad total de energía en un sistema cambia, sólo es porque la energía cruzó la frontera del sistema mediante un mecanismo de transferencia, como alguno de los métodos mencionados anteriormente".*

Matemáticamente podemos plantear éste enunciado general del siguiente modo:

$$\Delta E_{sistema} = \sum T$$

La energía total del sistema incluye todos los métodos de almacenamiento de energía (potencial, cinética e interna) y se representa por $E_{sistema}$. Mientras que la transferencia

corresponde a la cantidad de energía transferida a través de la frontera del sistema. Se representa por la letra T. Si ∑T corresponde a la sumatoria de las transferencias, entonces la representación matemática de un sistema no aislado se puede expresar como:

$$\Delta E_{sistema} = \sum T$$

$$\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta E_{int} = W + Q + T_{OM} + T_{TM} + T_{TE} + T_{RE}$$

Donde;

- W : Transferencia por trabajo
- Q : Transferencia por calor
- T_{OM} : Transferencia por ondas mecánica
- T_{TM} : Transferencia de materia
- T_{TE} : Transferencia eléctrica
- T_{RE} : Transferencia por radiación electromagnética

1.4.2 Conservación de energía para sistemas aislados

Un sistema aislado, cómo mencionamos anteriormente, es aquel que donde la energía no cruza la frontera del sistema por ningún método. Si una partícula se mueve por la acción de una fuerza conservativa, entonces podemos decir que el trabajo realizado es igual a la variación de la energía cinética, tal como quedo explicitado en el teorema de trabajo-energía:

$$W = \Delta E_c$$

Al ser una fuerza conservativa el trabajo puede expresarse en función de la energía potencial, ya sea gravitatoria, elástica u otra.

$$W = - \Delta E_p$$

Igualamos con la ecuación anterior obteniendo:

$$W = \Delta E_c = - \Delta E_p$$

$$\Delta E_c = - \Delta E_p$$

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta (E_c + E_p) = 0$$

Esta ecuación puede también ser escrita de la siguiente forma:

$$E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf}$$

Si la energía mecánica total se define como la suma de la energía cinética y la potencial:

$$E_m = E_c + E_p$$

Entonces *la ley de la conservación de la energía mecánica, postula que la energía mecánica total permanece constante, si las únicas fuerzas que actúan y realizan trabajo sobre el sistema son conservativas. Es decir*:

$$E_{mecánica\ total} = E_{MecánicaInicial} = E_{MecánicaFinal} = Cte.$$

En la vida real no existen sistemas mecánicos conservativos, ya que si bien la energía no se pierde, en efecto si se transforma. Por ejemplo la fuerza de roce es una fuerza disipadora, ya que disipa la energía de un sistema. La energía disipada será transformada en calor en las superficies de los cuerpos en contacto.

FISICA

IPLACEX
TECNOLÓGICO NACIONAL

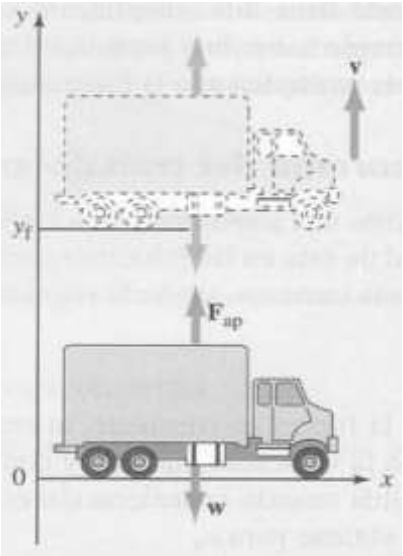
UNIDAD III

ENERGIA

1.5 Medición de la energía

Una vez revisada la parte teórica sobre la energía, podemos llevar a la práctica todo lo visto. A continuación revisaremos algunos ejemplos de los contenidos entregados, tratando en lo posible registrar todos los pasos necesarios para su correcto desarrollo. Se recomienda:

- En la medida de lo posible realizar un dibujo esquemático del problema.
- Leer comprensivamente el enunciado del problema y las preguntas planteadas, en ellos encontrará datos suficientes para plantear su ejercicio y determinar cuáles son los pasos a seguir.
- Buscar los datos
- Analizar y seleccionar las formulas pertinentes
- Aplicar y buscar soluciones



Ejemplo 1: Un camión de masa 3000 kg, es cargado por un buque mediante una grúa que ejerce una fuerza ascendente de 31 kN (32000 N) sobre el camión. Esta fuerza, que es suficientemente grande para vencer la fuerza de gravedad y empezar a levantar el camión, se aplica a lo largo de una distancia de 2 m. Determinar:

a) El trabajo realizado por la grúa
b) El trabajo realizado por la gravedad, y
c) La velocidad ascendente del camión después de haber subido 2m.

- Si observamos nuestro problema podemos observar que necesitamos el teorema trabajo-energía cinética para determinar la energía cinética del camión; luego con el dato encontrado podemos obtener la velocidad final del camión, para así finalmente determinar el trabajo total realizado por la grúa.

Esquema:

Solución:

a) Calcular el trabajo realizado por la fuerza aplicada:

$$W_{ap} = F_{ap\,y}\,\Delta y = F_{ap}\cos 0°\,\Delta y$$

Reemplazamos: $W_{ap} = (31000N)\ (1)\ (2m)$

$W_{ap} = 62{,}0\ kJ$

b) Calcular el trabajo realizado por la gravedad:

$$W_g = mg_y\,\Delta y = mg\cos 180°\ \Delta y$$

$$W_g = (3000\ kg)\ (9{,}81\ N/kg)\ (-1)\ (2m)$$

$$W_g = -\ 58{,}9\ kJ$$

c) Aplicar el teorema trabajo-energía cinética y obtener la velocidad final:

$$W_{total} = \Delta E_c$$

$$W_{ap} + W_g = E_{cf} - E_{ci}$$

$$W_{ap} + W_g = ½\ m\ v_f^2 - ½\ mv_i^2$$

Despejamos la velocidad final:

$$v_f^2 = v_i^2 + (2\ (W_{ap} + W_g))/m$$

Reemplazamos los datos:

$$v_f^2 = 0 + (2\ (62{,}000\ J - 58{,}900J))/3000\ kg$$

$$v_f^2 = 2{,}09\ m^2/s^2$$

$$v_f = 1{,}45\ m/s$$

Ejemplo 2: Si una persona saca de un pozo una cubeta de 20 kg y realiza un trabajo equivalente a 6.00 kJ, ¿Cuál es la profundidad del pozo? Suponga que cuando se levanta la cubeta su velocidad permanece constante.

Solución:

Como la energía cinética permanece constante, el trabajo realizado es igual al cambio de energía potencial.

Es decir, $W = \Delta E_p = mgh$.

Despejando la altura se obtiene:

$$h = W/mg = 6000/(20 \times 9.81) = 30.6 \text{ m}$$

Ejemplo 3: Una gota de lluvia ($m = 3.35 \times 10^{-5}$ kg) cae verticalmente a velocidad constante bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Después de que la gota ha descendido100 m, ¿Cuál es (a) el trabajo realizado por la gravedad y (b) la energía disipada por la resistencia del aire?

Solución:

a) Como la energía cinética permanece constante, el trabajo realizado es igual al cambio de energía potencial. Es decir:

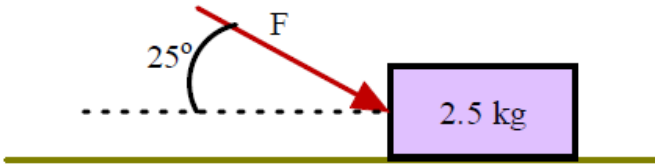
$$W = \Delta U = mgh$$
$$W = 3.35 \times 10^{-5} \times 9.81 \times 100$$
$$W = 32.9 \times 10^{-3} \text{ J}$$

b) Debido a que la energía cinética permanece constante, todo el trabajo se convierte en calor. Es decir, la energía disipada por la resistencia del aire es 32.9×10^{-3} J.

Ejemplo 4: Un bloque de 2.5 kg de masa es empujado 2.2 m a lo largo de una mesa horizontal sin fricción por una fuerza constante de 16.0 N dirigida a 25° debajo de la horizontal. Encuentre el trabajo efectuado por:

a) la fuerza aplicada,
b) la fuerza normal ejercida por la mesa,
c) la fuerza de la gravedad, y
d) la fuerza neta sobre el bloque.

Figura 12



Solución:

(a) Trabajo efectuado por la fuerza es:

$$W_F = Fd\cos\theta = 16 \times 2.2 \cos 25^o = 31.9 \text{ N}$$

(b) ya que el ángulo entre la fuerza normal y el desplazamiento es θ = 90°, entonces:

$$W_n = Fd\cos\theta = 0$$

(c) Ya que el ángulo entre la fuerza de la gravedad y el desplazamiento es θ = 90°, el trabajo será nuñlo.

$$W_g = 0$$

(d) La fuerza neta hace un trabajo igual a la suma de los trabajos efectuados por las fuerzas. Es decir:

$$W_T = W_F + W_n + W_g = 31.9 \text{ N}$$

Ejemplo 5: El líder de una porra levanta a su compañera que tiene un peso de 50.0 kg hacia arriba en línea recta una distancia de 0.60 m antes de soltarla. Si hace lo anterior 20 veces, ¿Cuánto trabajo ha realizado?

Solución:

- El trabajo realizado para subir una vez a la porrista es:

$$W = mgh = 50 \times 9.81 \times 0.6 = 294.3 \text{ J.}$$

- Subir a porrista 20 veces requiere un trabajo igual a 20 x 294.3 = 5,886 J.

Ejemplo 6: Un grupo de perros arrastra un trineo de 100 kg en un tramo de 2.0 km sobre una superficie horizontal a velocidad constante. Si el coeficiente de fricción entre el trineo y la nieve es 0.15, determine:

(a) el trabajo efectuado por los perros y
(b) la energía perdida debido a la fricción.

Solución:

(a) El trabajo es W = Fd. La fuerza aplicada por los perros es F = μmg. Por lo tanto:

$$W = \mu mgd$$
$$W = 0.15 \times 100 \times 9.81 \times 2000$$
$$W = 294{,}300 \text{ J.}$$

(b) La energía perdida debido a la fricción = 294,300 J, ya que tanto la energía cinética como la energía potencial permanecen constantes.

Problema 7: Con una fuerza horizontal de 150 N se empuja una caja de 40.0 kg 6.00 m sobre una superficie horizontal rugoso. Si la caja se mueve a velocidad constante, encuentre (a) el trabajo realizado por la fuerza de 150 N, (b) la energía cinética perdida debido a la fricción, y (c) el coeficiente de fricción cinética.

Solución:

(a) W = Fd = 150 x 6 = 900 J
(b) Energía perdida debido a la fricción = $\mu_K nd = \mu_K mgd$ = 900 J
(c) Despejando el coeficiente de fricción se obtiene:

$$\mu c = 900 / mgd = 900/(40)(9.8)(6) = 0.38$$

Problema 8. Un bloque de 15 kg es arrastrado con velocidad constante sobre una superficie horizontal rugosa por una fuerza de 70 N que actúa a 20° sobre la horizontal. El bloque se desplaza 5.0 m y el coeficiente de fricción cinético es 0.30. Determine el trabajo realizado por:

(a) la fuerza de 70 N,
(b) la fuerza normal, y la fuerza de la gravedad.
(d) ¿Cuál es la energía perdida debido a la fricción?

Solución:

(a) Si no hubiera fricción, el trabajo seria :

$$W = Fd\cos\theta = 70 \times 5 \times \cos 20° = 328.9 \text{ J}$$

(b) La fuerza normal posee un valor igual a 147 N. Se obtien:

$$F = m\,a$$
$$N - P = m\,a \quad ; \text{ como la } v = \text{cte, la } a = 0$$
$$N - P = 0$$
$$N = P$$
$$N = m\,g$$
$$N = 16 \text{ kg} \bullet 9{,}8 \text{ m/s}^2$$
$$N = 147 \text{ N}$$

La fuerza de gravedad o fuerza peso, nos da el mismo resultado que la fuerza normal (147 J), pero en sentido opuesto.

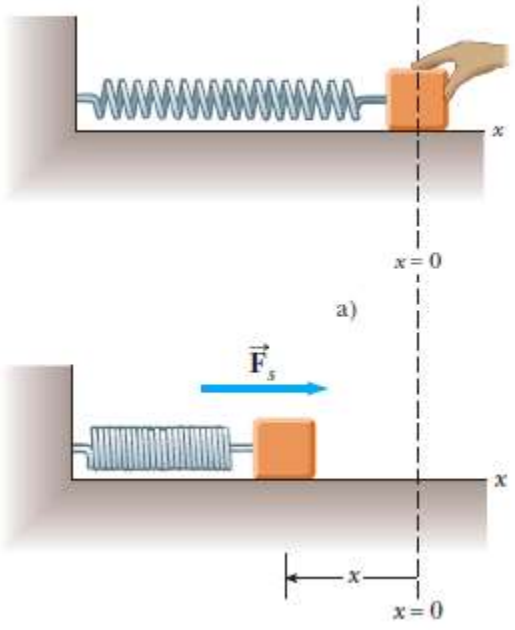
(c) Sin embargo, debido a la fricción, se tiene que hacer un trabajo adicional:

$$W_{\text{fricción}} = F_{\text{roce}}\, d = \mu\, m\, g\, d = 0.3 \times 15 \times 9.81 \times 5 = 220.7 \text{ J.}$$

Por lo tanto el trabajo total realizado sobre el trineo es:

$$328.9 + 220.7 = 549.6 \text{ J}$$

Ejemplo 9: Un bloque de 1,6 kg de masa se une a un resorte horizontal que tiene una constante de fuerza de 1,0 x 10^3 N /m. El resorte se comprime 2 cm y después se libera desde el reposo. Su esquema queda representado a continuación:



Calcular:

a) La rapidez del bloque mientras pasa a través de la posición de equilibrio x = 0 si la superficie no tiene fricción.

- Al analizar la situación podemos observar que el bloque inicia con $v_i = 0$ en su posición inicial $x_i = -2{,}0$ cm, y lo que se desea encontrar en la velocidad final cuando el bloque se encuentra en la posición final $x_f = 0$.

- Para encontrar el trabajo invertido por el resorte, utilizaremos los siguientes datos:

$$x_{máx} = x_i = -2{,}0 \text{ cm} = -2{,}0 \times 10^{-2} \text{ m}$$

- Aplicaremos la siguiente ecuación:

$$W = ½\, k\, x^2_{máx}$$
$$W = ½\,(1{,}0 \times 10^3 \text{ N/m})\,(-2{,}0 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0{,}2 \text{ J}$$

- En el bloque se consume trabajo y su rapidez cambia. La ecuación de conservación de energía se reduce al teorema trabajo-energía cinética. Aplicaremos dicho teorema para encontrar la rapidez en x=0:

$$W = (½\, mv_f^2) – (½\, mv_i^2)$$
$$V_f = \sqrt{(V_i^2 + (2 \bullet W)/m)}$$

Reemplazamos los valores en la ecuación:

$$V_f = \sqrt{(0^2 + (2 \bullet 0{,}2 \text{ J}) / 1{,}6 \text{ kg})}$$
$$V_f = 0{,}50 \text{ m/s}$$

b) Calcular la rapidez del bloque mientras pasa por la posición de equilibrio si una fuerza de fricción de 4,0 N retarda su movimiento desde el momento en que se libera.

- El sistema se identifica como el bloque y la superficie. El sistema no está aislado debido al trabajo consumido por el resorte y hay una fuerza no conservativa en acción: la fricción entre el bloque y la superficie.

- La ecuación más conveniente de aplicar es la siguiente:

$$E_{c\ final} = E_{c\ inicial} - F_{roce}\, d + \sum W_{otras\ fuerzas}$$

Despejamos el trabajo de la fuerza de roce ($F_{roce}\, d$) y reemplazamos los valores:

$$F_{roce}\, d = (4{,}0\ N)\ (2.0 \times 10^{-2}) = 0{,}080\ J$$

- Evaluamos $\sum W_{otras\ fuerzas}$, el trabajo invertido por el resorte y recordamos que el trabajo nos dio como resultado en el ítem a un valor igual a 0,20 J. Utilizamos $E_{ci} = 0$ en la primera ecuación y luego resuelva para la rapidez final:

$$E_{c\ final} = E_{c\ inicial} - F_{roce}\, d + \sum W_{otras\ fuerzas}$$

$$E_{cf} = 0 - 0{,}080\ J + 0{,}20\ J$$

$$E_{c\ final} = 0{,}12\ J$$

Utilizamos la formula de Energía cinética y luego igualamos dicha ecuación con el valor antes encontrado:

$$E_{c\ final} = (\tfrac{1}{2}\, m\, v_f^2)$$

$$0{,}12\ J = (\tfrac{1}{2}\, m\, v_f^2)$$
$$0{,}12\ J = (\tfrac{1}{2} \bullet 1{,}6\ kg \bullet v_f^2)$$

Despejamos el valor de la velocidad final:

$$V_f = \sqrt{(2 \bullet E_{cf})} / m$$

$$V_f = \sqrt{(2 \bullet 0{,}12\ J)} / 1{,}6\ kg$$

$$V_f = 0{,}39\ m/s$$

c) ¿Qué pasaría si la fricción aumentar a 10 N? ¿Cuál será la rapidez del bloque en x = 0?

- En éste caso el valor del trabajo de la fuerza de fricción o de roce mientras el bloque se traslada a x = 0 es:

$$W_{roce} = F_{roce}\, d = (10\ N)\ (2{,}0 \times 10^{-2}\ m)$$

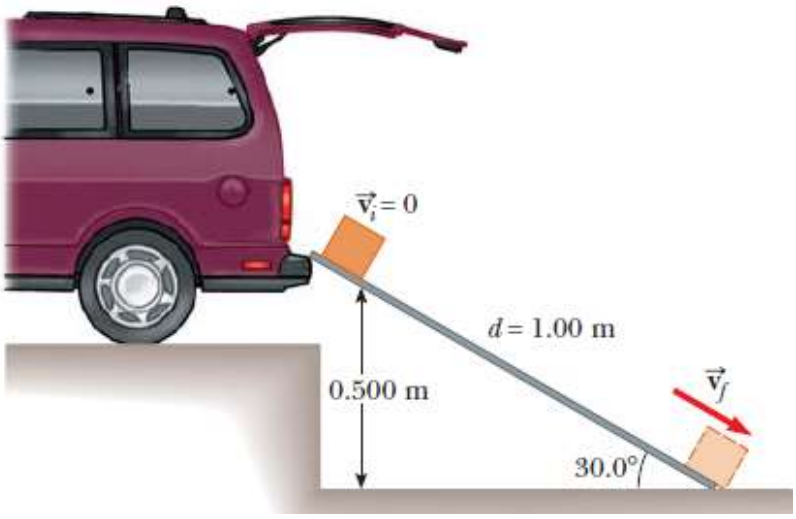
$$W_{roce} = F_{roce}\, d = 0{,}20\ J$$

Si observamos el resultado es igual en magnitud a la energía cinética en x = 0 sin la perdida debida de fricción. Debido a esto, toda la energía cinética se ha transformado por fricción cuando el bloque llega a x = 0, y su rapidez en éste punto es

v = 0. En esta situación la rapidez del bloque alcanza un máximo en alguna posición distinta de x = 0.

Ejemplo 10: Una caja de 3 kg se desliza hacia abajo por un rampa. La rampa mide 1 m de largo y está inclinada en un ángulo de 30°. La caja parte del reposo en lo alto, experimenta una fuerza de fricción constante de 5 N de magnitud y continúa su movimiento una corta distancia sobre el piso horizontal, después de dejar la rampa.

Esquema:



a) Determinar la rapidez de la caja al fondo de la rampa

Al conceptualizar la situación se debiera pensar que la caja se deslizará más lento por sobre la rampa, si la fuerza de fricción es mayor y viceversa.

Luego comienza el análisis de la situación: si la $v_i = 0$, la energía cinética inicial del sistema, cuando la caja está en lo alto de la rampa, es cero. Si la coordenada y se mide desde la base de la rampa (la posición final de la caja, para la cual se elige que la energía potencial gravitacional del sistema sea cero) con la dirección hacia arriba positiva, por lo tanto $y_i = 0{,}500$ m.

- Evaluamos la energía mecánica total del sistema cuando la caja está en lo alto:

$$E_{\text{mecánica inicial}} = E_{\text{cinética inicial}} + E_{\text{potencial inicial}}$$

$$E_{mi} = 0 + E_{pi}$$

$$E_{mi} = E_{pi} = m\, g\, y_i$$

$$E_{mi} = (3\text{ kg})\,(9{,}8\text{ m/s}^2)\,(0{,}5\text{ m})$$

$$E_{mi} = 14{,}7\text{ J}$$

- La energía cinética inicial en cero debido a que el bloque se encuentra el reposo, no así su energía potencial, recuerde que esta última depende de la altura y no del movimiento del bloque.

- La energía mecánica final queda expresada como sigue:

$$E_{mecánica\ final} = E_{cinética\ final} + E_{potencial\ final}$$

$$E_{mf} = E_{cf} + 0$$

$$E_{mf} = (\tfrac{1}{2}\, m\, v_f^2) + 0$$

- La energía potencial final es cero producto que la altura del bloque es cero al finalizar la rampa.

- Calculamos ahora la energía mecánica del sistema:

$$\Delta E_{mecánica} = E_{mecánica\ final} - E_{mecánica\ inicial}$$

$$\Delta E_{mecánica} = (\tfrac{1}{2}\, m v_f^2) - (m\, g\, y_i) = - W_{roce} = - F_{roce} d$$

- Despejamos la v_f^2 y posteriormente sustituimos los valores numéricos correspondientes:

$$v_f^2 = 2/m\ (mgy_i - F_{roce} d)$$

$$v_f^2 = 2/(3\ kg)\ (14{,}7\ J - (5\ N)\ (1\ m)$$

$$v_f^2 = 6{,}47\ m^2/s^2 \quad / \sqrt{}$$

$$v_f = 2{,}54\ m/s$$

b) ¿A qué distancia se desliza la caja sobre el piso horizontal si continúa experimentando una fuerza de fricción de 5 N de magnitud?

- Se analiza la situación y se debe llegar a la conclusión que en éste punto la energía mecánica corresponde solamente a energía cinética, porque la energía potencia se vuelve cero al no presentar altura. Se calculará la energía mecánica como sigue:

$$E_{mi} = E_{ci} = \tfrac{1}{2}\, m\, v_i^2$$

$$E_{mi} = \tfrac{1}{2}\ (3\ kg)\ (2{,}54\ m/s)^2$$

$$E_{mi} = 9,\ 68\ J$$

- Si la energía mecánica final es igual a cero, entonces:

$$E_{mf} - E_{mi} = 0 - 9{,}68\ J = -F_{roce}\, d$$

- Despejamos el desplazamiento y calculamos:

$$d = (9{,}68\ J) / (F_{roce})$$

$$d = (9{,}68\ J) / (5.00\ N)$$

$$d = 1{,}94\ m$$

1.6 Gráficos de energía: contra variables de posición, tiempo y velocidad

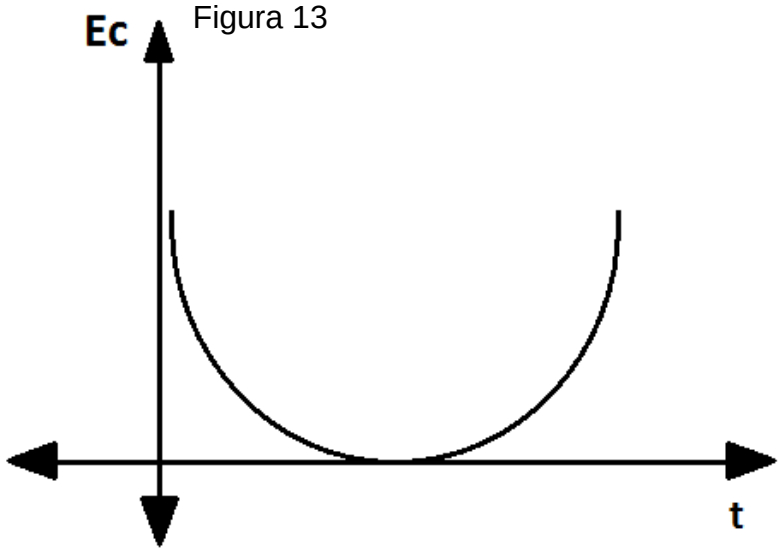
La energía presente en un sistema depende de diversas variables como la masa, la altura, la posición, el tiempo y la velocidad. Si bien existen operatorias que representan éstas relaciones, hay un modo más práctico de visualizarlos y es a través de los gráficos.

1.6.1 Gráfico de energía versus tiempo

Caso 1: Primero analicemos los gráficos de la energía cinética, potencial y mecánica con respecto al tiempo de un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba y vuelve al punto de partida.

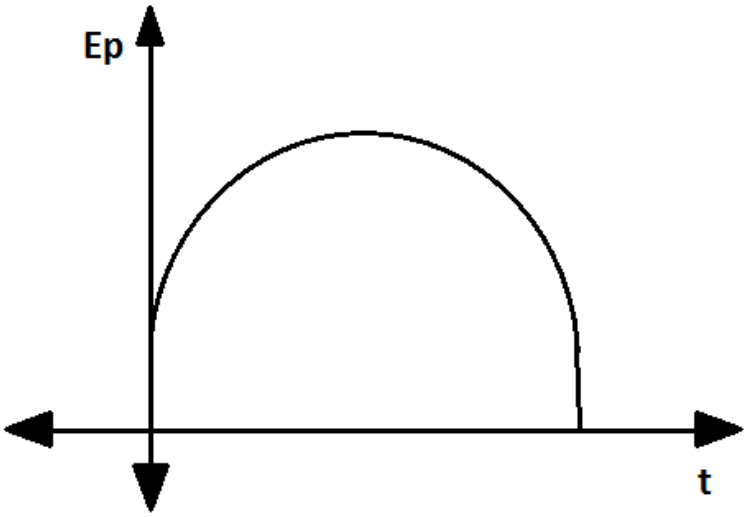
Energía cinética v/s tiempo

Figura 13



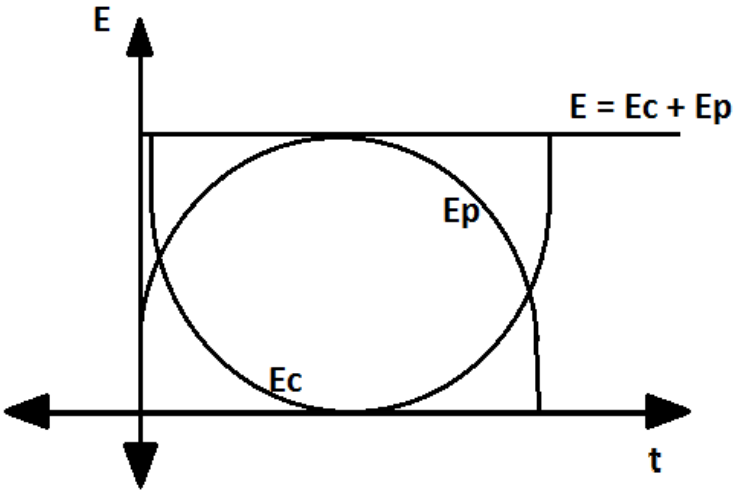
Energía potencial v/s tiempo

Figura 14

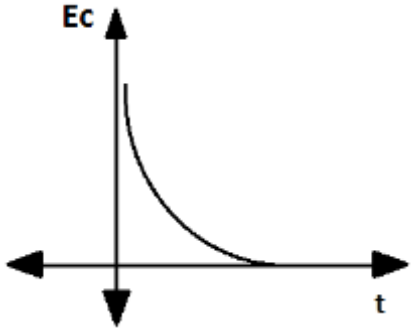
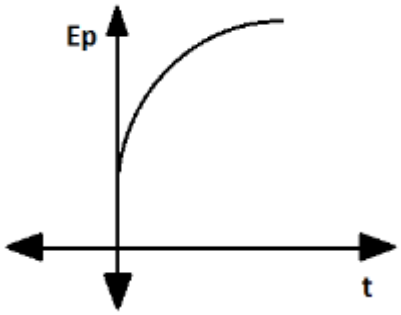
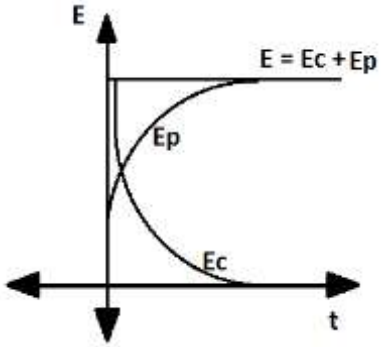


Energía mecánica v/s tiempo: Si se desprecia la acción del roce, la energía mecánica se conserva durante todo el proceso, por lo que la suma instantánea es constante, cómo lo indica la línea continua horizontal sobre las curvas segmentadas de E_c y E_p.

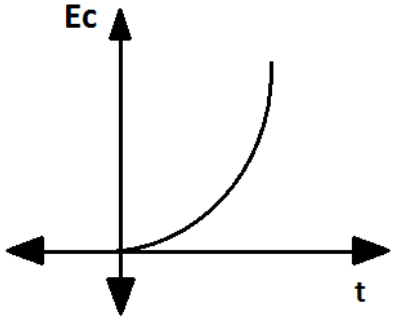
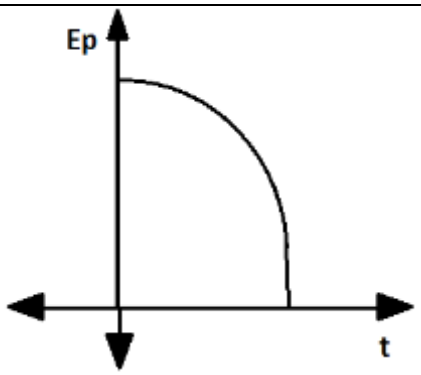
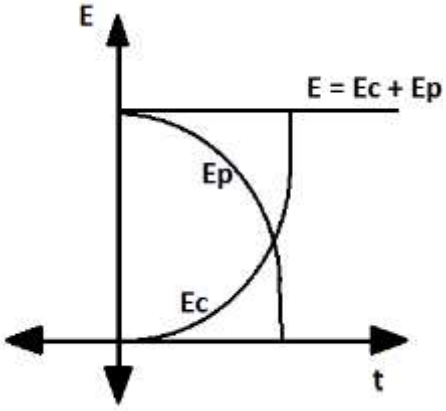
Figura 15



Caso 2: Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba. Sus graficas serán las siguientes.

Energía cinética v/s tiempo	Energía potencial v/s tiempo	Energía mecánica v/s tiempo
		

Caso 3: la situación ahora corresponde a la caída libre experimentada por un sistema o partícula a través del tiempo.

Energía cinética v/s tiempo	Energía potencial v/s tiempo	Energía mecánica v/s tiempo
		

1.6.2 Gráfico de energía versus posición

Revisemos los gráficos de la energía cinética, potencial y mecánica con respecto a la posición de un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba y vuelve al punto de partida.

Energía cinética v/s Posición: Debido a que la formula de la energía cinética no se relaciona directamente con la posición del sistema, es necesario utilizar la ecuación de la energía mecánica.

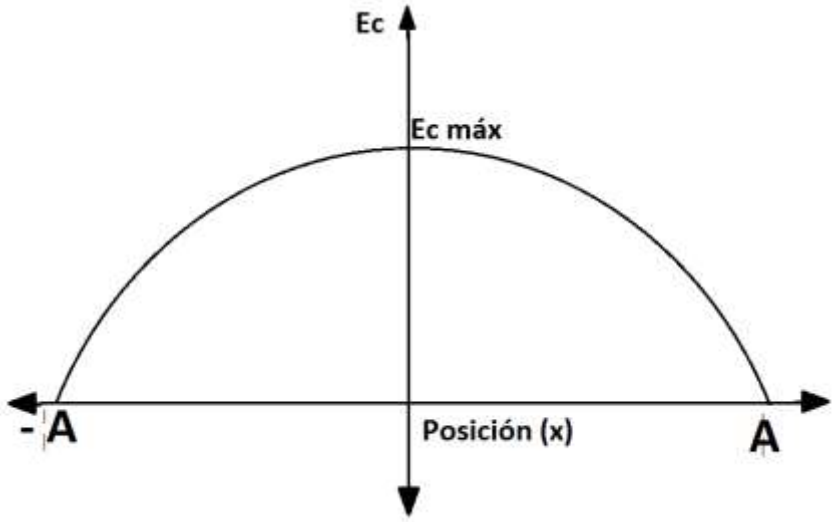
$$Em = (½ mv^2) + (½ kx^2) = (½ mv^2) + (½ kx^2) = ½ kA^2$$

A representa la amplitud de la grafica. Despejamos la energía cinética y factorizamos por el valor constante (½ k):

$$(½ mv^2) = ½ k (A^2 - x^2)$$

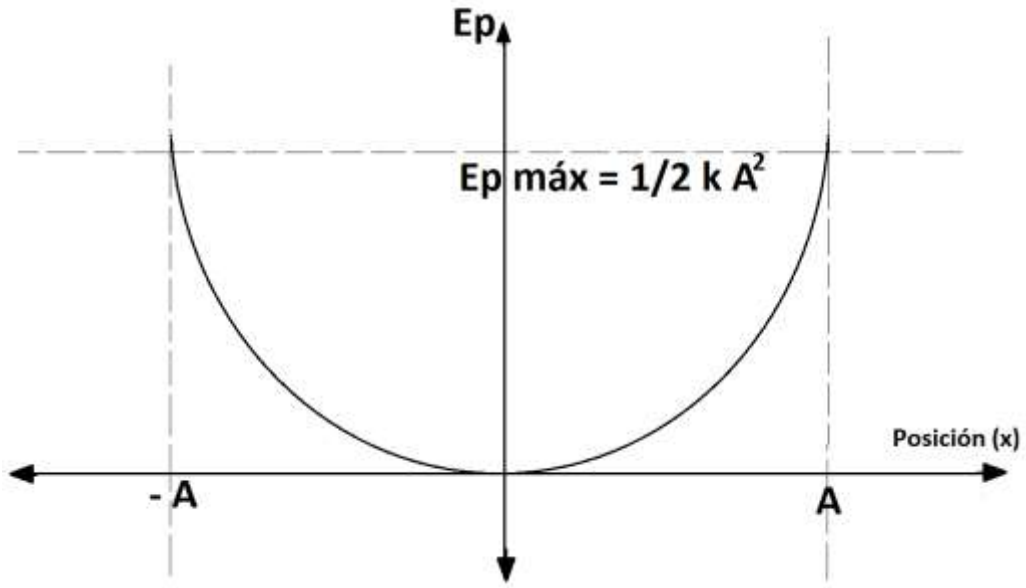
De esta igualdad se extrae la grafica que representa la Ec v/s Posición es una ecuación cuadrática, donde el signo negativo antecesor de la posición nos indica que la parábola está invertida y donde el valor $½ kA^2$ nos entrega el valor de la energía cinética máxima.

Figura 16



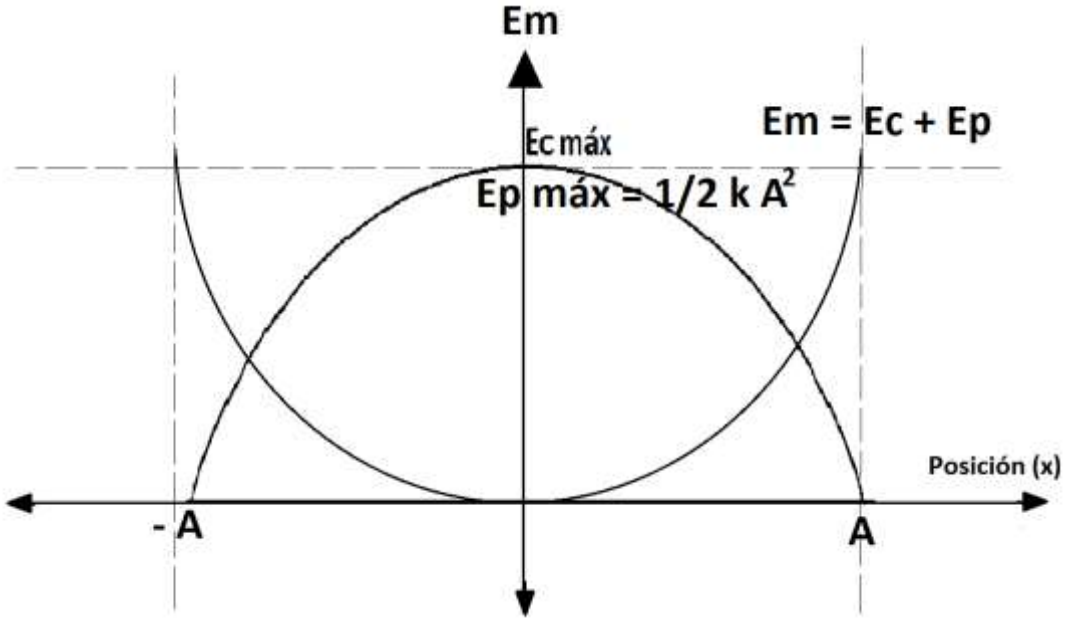
Energía potencial v/s posición: si observamos la ecuación de la energía potencial podemos observar que se trata de una ecuación cuadrática, cuya grafica es una parábola.

Figura 17



Energía mecánica v/s posición: Si se desprecia la acción del roce, la energía mecánica se conserva durante todo el proceso, por lo que la suma instantánea es constante, cómo lo indica la línea continua horizontal sobre las curvas segmentadas de E_c y E_p.

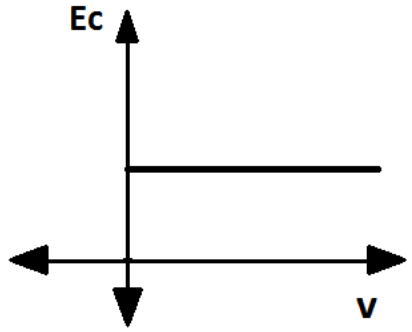
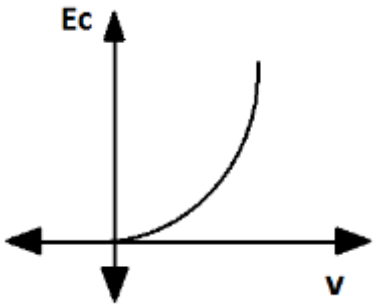
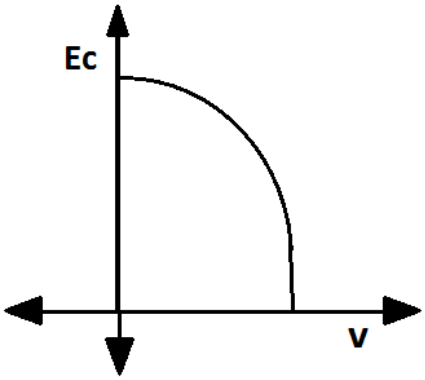
Figura 18



1.6.3 Gráfico de energía versus velocidad

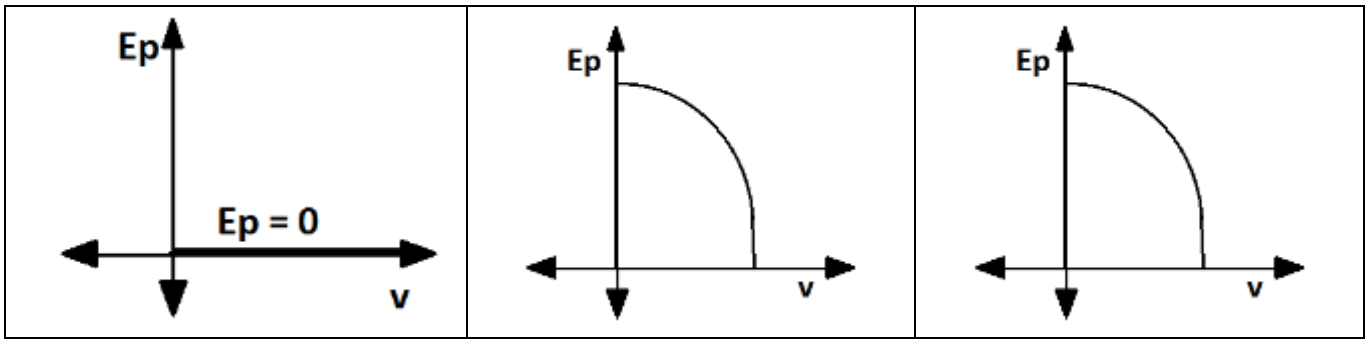
Verificaremos a continuación que es lo que sucede con los gráficos de la energía cinética, potencial y mecánica, respecto de la velocidad según ciertas situaciones. Primero analizaremos tres situaciones diferentes para la energía cinética.

Energía cinética v/s Velocidad

Para un movimiento horizontal y con velocidad constante	Para un movimiento vertical (caída libre) velocidad variable y aceleración constante	Para un movimiento vertical (lanzamiento vertical) velocidad variable y aceleración constante decreciente
		

Energía potencial v/s Velocidad

Para un movimiento horizontal y con velocidad constante	Para un movimiento vertical (caída libre) velocidad variable y aceleración constante	Para un movimiento vertical (lanzamiento vertical) velocidad variable y aceleración constante decreciente



2. CÁLCULO Y RELACIÓN DE TIPOS DE CHOQUE

Considere a siguiente situación: un grupo de amigos se encuentra jugando pool. Cuando uno de los jóvenes golpea la bola blanca, puede observar que esta viaja con una cierta velocidad impactando a la bola deseada. Como resultado de dicha colisión la bola golpeada adquiere una gran velocidad, alejándose de su posición original y golpeando a otras bolas o los bordes de la mesa. La fuerza promedio que se ejerce sobre la bola durante la colisión es grande, pero dura un intervalo de tiempo muy corto. Aunque la aceleración y fuerza con que es impactada la bola son grandes, varían en el tiempo, lo que hace compleja de analizar dicha situación.

Por lo anterior es que necesario estudiar ciertos conceptos como la cantidad de movimiento experimentada por un cuerpo.

2.1 Momentum líneal y su conservación

Entiéndase por cantidad de movimiento experimentada por un cuerpo a la relación directa existente entre la masa existente y la velocidad que dicho objeto experimenta. Este concepto surge de la necesidad por explicar sucesos que en ese momento era imposibles de explicar con las técnicas aprendidas.

El momento lineal, ímpetu o cantidad de movimiento (p) de una partícula, es una magnitud vectorial que puede considerarse como una medida de la dificultad de llevar la partícula hasta el reposo. Su dirección es siempre a lo largo de la velocidad y su unidad de medida en el SI es:

$$p = kg \bullet (m/s).$$

La definición de la cantidad de movimiento lineal de una partícula de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa *m* que se mueve con una velocidad *v* se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$p = m \bullet v$$

Revisemos un ejemplo que permita comprender mejor el concepto de momento lineal. Tenemos dos vehículo, un auto y una camioneta, que se mueven a la misma velocidad (100 km/h). El auto posee una masa de 1200 kg, mientras la camioneta tiene una masa de 1800 kg. Si comparásemos el momento lineal de dichos cuerpos podríamos concluir que la camioneta posee mayor momento, debido a que su masa es mayor, lo que genera que el producto calculado de un resultado superior al del auto.

De la segunda ley de Newton se puede extraer cierta relación entre el concepto de momento lineal y fuerza. Dice que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la derivada respecto del tiempo del momento de la partícula. Es decir:

$$F_{neta} = dp / dt$$

Dicho de otro modo la ecuación anterior muestra que la relación de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula

Para calcular el momento total de un sistema ($P_{sistema}$) de muchas partículas, debemos determinar la suma de los momentos de las partículas individualmente:

$$P_{sistema} = \sum m_i \, v_i = \sum p_i$$

Analicemos el caso de dos partículas en un sistema aislado, de masas m_1 y m_2, que se mueven con velocidades v_1 y v_2 en un instante de tiempo. Si el sistema es aislado, la única fuerza que puede actuar sobre una de las partículas, es la aplicada por la otra sobre ella. Si una fuerza proveniente de la partícula 1 actúa sobre la partícula 2, entonces debe haber una segunda fuerza de igual magnitud, pero sentido opuesto que provenga de la partícula 2 y actúe sobre la partícula 1. Es decir, las fuerzas en las partículas forman un par conocido como acción y reacción (tercera ley de Newton):

$$F_{21} = - F_{12}$$

Esta condición se expresa como:

$$F_{21} + F_{12} = 0$$

Entiéndase como F_{21} a aquella fuerza que ejerce el cuerpo 2 sobre el cuerpo 1, y la fuerza F_{12} es la fuerza ejercida por el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2.

Como las partículas no presentan velocidad constante, debido a que la fuerza produce una aceleración en ellas, podemos reemplazar la fuerza por su igualdad $F = m \bullet a$, obteniendo:

$$F_{21} + F_{12} = 0$$

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

Sustituiremos la aceleración, por la siguiente:

$$a = (dV / dt)$$

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

$$m_1 (dv_1 / dt) + m_2 (dv_2 / dt) = 0$$

Como las masas son constantes podemos incluirlas dentro de la operación de derivadas, obteniendo:

$$\frac{d(m_1\vec{\mathbf{v}}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{\mathbf{v}}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2) = 0$$

Si observamos la igualdad anterior podemos verificar que la suma ($m_1 V_1 + m_2 V_2$) respecto del tiempo es cero, en consecuencia esta suma debe ser constante. De esta operación se pudo establecer que: "*la suma de los momentos lineales de un sistema de partículas aislado se conserva*".

También se puede concluir *cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de partículas es cero, la derivada del momento linear total también es cero, y el momento lineal total del sistema permanece constante".* Matemáticamente se define:

$$P_{sistema} = \sum m_i v_i = M v_{cm} = \text{constante}$$

donde v_{cm} representa la velocidad del centro de masa del sistema y donde la Fuerza neta externa es igual a cero ($F_{neta,ext} = 0$).

Si con la formula ***d/dt (m₁v₁ + m₂v₂) = 0*** ; utilizamos la definición de cantidad de movimiento, podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$d / dt \ (p_1 + p_2) = 0$$

La derivada con respecto al tiempo es cero, lo que permite concluir que la cantidad de movimiento total del sistema aislado de dos partículas permanece constante, es decir: *la suma de momentos lineales antes de una colisión debe ser igual a la suma de momentos lineales después de dicha colisión, siempre y cuando se trate de un sistema aislado:*

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$$

donde p_{1i} y p_{2i} son los valores iniciales y p_{1f} y p_{2f} son los valores finales de las cantidades de movimiento para las dos partículas en el intervalo durante el que las partículas interactúan entre sí.

De lo anterior se extrae la ***ley de conservación de movimiento lineal***, que se puede establecer como:

"Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante"

Para contextualizar el concepto de conservación de momento veremos el siguiente ejemplo:

Un arquero de 60 kg está de pie en reposo sobre hielo sin fricción, y dispara una flecha de 0,50 kg horizontalmente a 50 m/s. ¿con qué velocidad el arquero se mueve sobre el hielo después de disparar la flecha?

Solución:
Lo primero es analizar la situación. Si observamos podemos ver que la flecha se dispara de una forma tal que el arquero retrocede en la dirección opuesta. Pero se debe tener cuidado pues no se puede resolver el problema si representamos la flecha como una partícula bajo una fuerza neta, porque no se posee información acerca de la fuerza aplicada en la flecha o la aceleración que experimenta. Tampoco se sabe cuánto trabajo se le aplicó al arco al ser jalado o la potencia que este tenía almacenado.

Entonces, ¿cómo calcular éste problema? Lo más fácil es resolver este problema utilizando como planteamiento la cantidad de movimiento del sistema.

Consideraremos que el sistema está constituido por el arquero con el arco y la flecha. Él sistema si bien no es aislado, ya que existe fuerza gravitacional y normal del hielo sobre el sistema, pero cómo dichas fuerzas son perpendiculares al movimiento, entonces podemos considerarlo aislado en termino de componentes.
Para resolver dicho problema debemos considerar el momento lineal antes de lanzar la flecha, y después del lanzamiento. El arquero corresponderá a la partícula 1 y la flecha será la partícula 2. Además diremos que la flecha se mueve en la dirección positiva de x.

Como siguiente paso es necesario recopilar los datos del problema:

Datos: $m_1 = 60$ kg
$m_2 = 0{,}50$ kg
$v_{2f} = 50\,\hat{i}$ m/s

Planteamos ahora la cantidad de movimiento horizontal total del sistema antes de disparar la flecha es cero:

$$P_{total\ inicial} = 0$$
$$p_1 + p_2 = 0$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

Luego igualamos la cantidad de momento antes y después de la colisión, despejamos la formula y calculamos la velocidad con que se mueve el arquero:

$$P_{inicial} = P_{final}$$

$$0 = p_{1f} + p_{2f}$$

$$0 = m\, v_{1f} + m\, v_{2f}$$

Despejamos, reemplazamos y calculamos:

$$\vec{v}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_{2f} = -\left(\frac{0.50\text{ kg}}{60\text{ kg}}\right)(50\,\hat{i}\text{ m/s}) = -0.42\,\hat{i}\text{ m/s}$$

El signo negativo de la velocidad no significa que ésta lo sea, sino más bien indica que el arquero se mueve en la dirección contraria al movimiento de la flecha. Esto tiene concordancia con la tercera ley de newton planteada al principio, donde dice que ambas fuerzas eran iguales, pero su sentido era opuesto.

2.2 Impulso y cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento de una partícula cambia si una fuerza neta actúa sobre ella. Él como varia la cantidad de movimiento producto de una fuerza es posible de calcular y es de gran utilidad para resolver algunos problemas, veamos de qué se trata. Supongamos que tenemos una fuerza neta ($\sum F$), que puede variar con el tiempo y que actúa sobre una partícula y que se puede expresar a través de la siguiente ecuación:

$\sum F = dp/dt$; despejamos la derivada del momento lineal

$dp = \sum F\, dt$; *esta derivada representa el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula cuando se le aplica una fuerza durante un intervalo de tiempo, pero necesitamos calcular su integral.*

$\Delta p = p_f - p_i = \int_{ti}^{tf} \sum F\, dt$; La cantidad que queda expresada en el lado derecho de la ecuación, es un vector que recibe el nombre de **Impulso** de la fuerza neta $\sum F$ que actúa sobre una partícula durante un cierto intervalo de tiempo:

$$I = \int_{ti}^{tf} \sum F\, dt = \Delta p$$

Esta igualdad se conoce como *teorema impulso – cantidad de movimiento, y expresa que el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso de la fuerza neta que actúa en ella, es decir:*

$$\Delta p = I$$

A grandes rasgos cuando uno habla de darle impulso a algo, significa que le estoy transfiriendo la cantidad de momento desde un agente externo, hacia la partícula involucrada.

Generalmente la fuerza neta que imparte dicho impulso puede variar en el tiempo, para ello es conveniente definir una nueva fuerza neta que esté promediada con el tiempo:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}\, dt$$

el impulso entonces será:

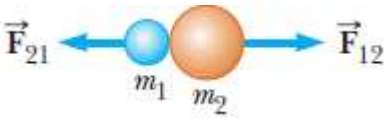
$$\vec{I} = \left(\sum \vec{F}\right)_{\text{prom}} \Delta t$$

Esta fórmula representa la fuerza promedio de una partícula en el tiempo.

2.3 Colisiones en una dimensión

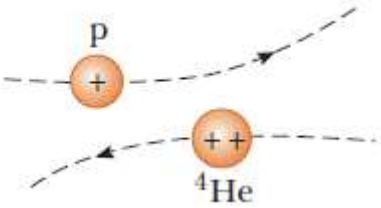
Una colisión corresponde a un evento durante el que dos partículas se acercan una a la otra e interactúan mediante fuerzas. Es sabido que aquellas fuerzas de interacción son mucho mayores que aquellas fuerzas externas que puedan afectar a una partícula, y debido a ello es que se puede aproximar con el impulso. En una colisión debe existir contacto físico entre dos objetos macroscópicos:

Figura 19



A nivel sub-microscópico el concepto de colisión no está bien definido, esto debido a que si por ejemplo una partícula alfa (el núcleo de una átomo de helio) y un protón se acercan, no estarán jamás en contacto físico debido a las fuerzas electrostáticas que ambos poseen y que generan un alejamiento.

Figura 20



Ahora bien, analicemos las condiciones existentes en una colisión: cuando dos partículas de masas m_1 y m_2 chocan puede existir una variación en las fuerzas impulsivas a través del tiempo, sin embargo estas fuerzas son internas al sistema de dos partículas. En consecuencia podemos decir que las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento se conserva.

Con la energía cinética total del sistema de partículas puede o no conservarse, todo dependerá del tipo de colisión. Existen dos tipos de colisiones, que son:

- **Colisión elástica:** es aquella donde la energía cinética total y la cantidad de movimiento total del sistema es la misma antes y después de la colisión. Este tipo de colisiones en el mundo microscópico (colisiones entre partículas atómicas y subatómicas), pues en aquellos cuerpos macroscópicos igual se provoca una mínima deformación de los cuerpos y pérdida de energía, casi insignificante.

- **Colisiones inelásticas:** existe pérdida de energía cinética total del sistema, o sea que la energía cinética antes de la colisión y después de esta no son la misma, aún cuando la cantidad de movimiento del sistema se conserve. Estas se pueden subdividir en dos tipos: Perfectamente inelásticas e inelásticas.

Para que no existan dudas, a continuación realizaremos un análisis más concreto de las colisiones perfectamente inelásticas y elásticas.

2.3.1 Colisión perfectamente inelásticas

Entiéndase por colisiones perfectamente inelásticas a aquellas cuando los objetos después de la colisión quedan unidos. Ejemplo: choque de un meteorito sobre la tierra.

Si tenemos dos partículas de masas m_1 y m_2, que se mueven a velocidades v_1 y v_2 a lo largo de la misma recta, las que chocan de frente y quedan unidas después de dicha colisión.

Si continúan su trayecto a la misma velocidad (v_f), entonces la cantidad de movimiento total del sistema será:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_f$$

Despejamos la ecuación, dejando la velocidad final a un lado de la igualdad. Queda:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

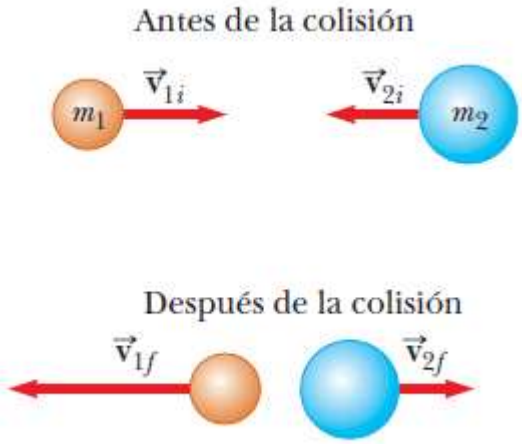
2.3.2 Colisión elásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2, que se mueven a velocidades v_{1i} y v_{2i} a lo largo de la misma recta, las que después de la colisión frontal que experimentan se separan a distintas velocidades v_{1i} y v_{2f}. Como en éste tipo de colisiones se conserva la energía cinética y la cantidad de movimiento del sistema, por ende podemos considerar que las velocidades a través de las siguientes igualdades:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 {v_{1i}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 {v_{2i}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 {v_{1f}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 {v_{2f}}^2$$

Figura 21



Las velocidades se orientarán al igual que en los sistemas de coordenadas, es decir, las velocidades orientadas hacia la derecha serán positivas, mientras que aquellas que se muevan hacia la izquierda, serán negativas.

Si realizamos algunas operatorias y técnicas matemáticas, podemos obtener un resultado alternativo para la igualdad antes planteada, la que quedaría de la siguiente manera:

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

Otras formulas que serán de utilidad, dependiendo de ciertas situaciones específicas, serán las siguientes:

Cuando la partícula dos está en reposo al inicio ($v_{2i} = 0$), tendremos las siguientes formulas que serán de utilidad:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

Si m_1 es mucho mayor que m_2 y $v_{2i} = 0$, se puede observar que en ambas ecuaciones las velocidades se aproximan de la siguiente manera: $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2\ v_{1i.}$ En palabras más simples si una partícula pesada choca frontalmente con una muy ligera que esta inicialmente en reposo, la primera continuará su movimiento sin inmutarse después del a colisión, mientras que la partícula ligera rebotará con una rapidez casi o igual al doble de la velocidad que traía la partícula más pesada.

Por el contrario si m_2 es mucho mayor que m_1 y la partícula 2 está inicialmente en reposo, se pueden observar las siguientes igualdades: $v_{1f} \approx - v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. Entonces cuando una partícula muy ligera choca frontalmente con una con una partícula muy pesada que se encuentra inicialmente en reposo, provocará que la partícula ligera invierta su velocidad, mientras que la pesada permanecerá prácticamente en reposo.

2.4 Colisiones en dos dimensiones

Tal como en las colisiones de dos partículas, este resultado implica que la cantidad de movimiento en cada una de las dimensiones x, y, z, se conserva. Para aquellas colisiones múltiples que ocurren en el plano, como un juego de villar, se obtienen dos ecuaciones componentes para conservación de cantidad de movimiento:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

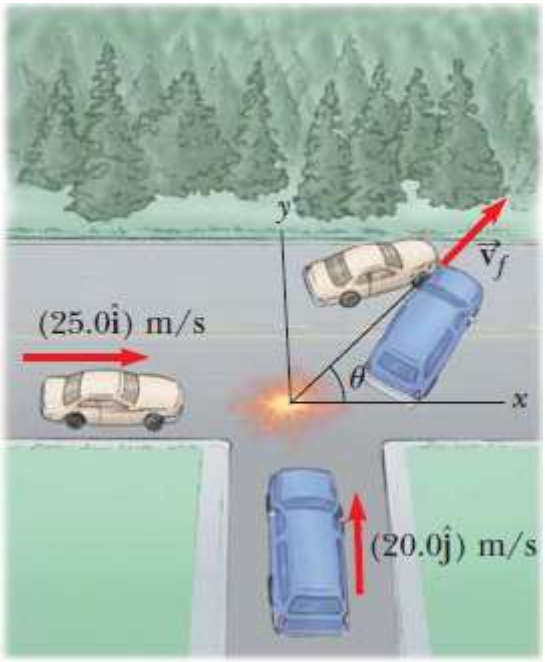
Los subíndices x e y nos indican las componentes de la velocidad en el plano (x,y).

Revisemos un ejemplo más concreto: Un automóvil de 1500 kg que viaja al este con una rapidez de 25 m/S, choca en un cruce con una camioneta 2500 kg que viaja al norte a una rapidez de 20 m/s. Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad del choque después de la colisión y suponga que los vehículos quedan unidos después de la colisión.

Solución:

Lo primero siempre será identificar el sistema de coordenadas que se utilizará. Para ellos determinaremos que la dirección x positiva será hacia el este y el norte a lo largo de la dirección y positiva. Luego debemos considerar los instantes inmediatamente previos y posterior a la colisión, despreciando el roce de las ruedas con el pavimento, por lo que consideraremos el sistema de vehículos como aislado.

Al estudiar el instante anterior a la colisión, podemos determinar que en el eje x solamente se encuentra con cantidad de movimiento el automóvil, mientras que en la dirección correspondiente al eje y, es la camioneta. Por ende, deberemos calcular la velocidad v_f, según el valor correspondiente del ángulo θ por el que continúan ambos vehículos después de la colisión.



Matemáticamente debemos determinar la cantidad de movimiento inicial del eje x:

$$\sum p_{xi} = m \bullet v = (1500\ kg) \bullet (25\ m/s)$$
$$\sum p_{xi} = 3{,}75 \times 10^4\ (kg \bullet m/s)$$

Luego identificamos la cantidad de movimiento final del eje x:

$$\sum p_{xf} = m \bullet v = (4000\ kg) \bullet v_f \cos\theta$$

Igualamos ambas cantidades:

$$\sum p_{xi} = \sum p_{xf}$$
$$3{,}75 \times 10^4\ (kg \bullet m/s) = (4000\ kg) \bullet v_f \cos\theta$$

Ahora realizamos el mismo procedimiento en el eje y. Evaluamos entonces la cantidad de movimiento inicial del sistema en la dirección y:

$$\sum p_{xi} = m \bullet v = (2500\ kg) \bullet (20\ m/s)$$

$$\sum p_{xi} = 5{,}00 \times 10^4\ (kg \bullet m/s)$$

Expresión de la cantidad de movimiento final:

$$\sum p_{xf} = m \bullet v = (4000\ kg) \bullet v_f \cos \theta$$

Igualamos ambas cantidades:

$$\sum p_{yi} = \sum p_{yf}$$

$$5{,}00 \times 10^4\ (kg \bullet m/s) = (4000\ kg) \bullet v_f \operatorname{sen} \theta$$

Planteadas ambas ecuaciones, la del eje x e y respectivamente, debemos determinar el valor del ángulo θ. Para ello podemos utilizar la formula de la tangente:

$$\tan \theta = \operatorname{sen} \theta / \cos$$

$$\tan \theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33$$

$$\tan \theta = \frac{(4\,000\ \text{kg}) v_f \operatorname{sen} \theta}{(4\,000\ \text{kg}) v_f \cos \theta} = 1.33$$

$$\theta = 53.1°$$

Una vez calculado el ángulo, lo reemplazamos en cualquiera de las fórmulas antes vistas, despejamos el valor de la velocidad fina y luego lo calculamos:

$$v_f = \frac{5.00 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{(4\,000\ \text{kg}) \operatorname{sen} 53.1°} = 15.6\ \text{m/s}$$

3. Momento angular

Para poder comenzar a estudiar el momento angular, primero debemos conocer qué es la inercia rotacional.

3.1 Inercia rotacional

Para comenzar el estudio de la inercia rotacional es necesario establecer, a modo de recordatorio, lo que establece la ley de la inercia:

"Un objeto que se encuentra en reposo tiende a permanecer en reposo, y un objeto que está en movimiento tiende a seguir en movimiento rectilíneo"

Debido a esta ley, es que a la inercia se le conoce como la tendencia de los cuerpos a permanecer en el estado de movimiento en que se encuentran. Para los sistemas en rotación también existe una ley sobre la inercia, la que se expresa de la siguiente manera:

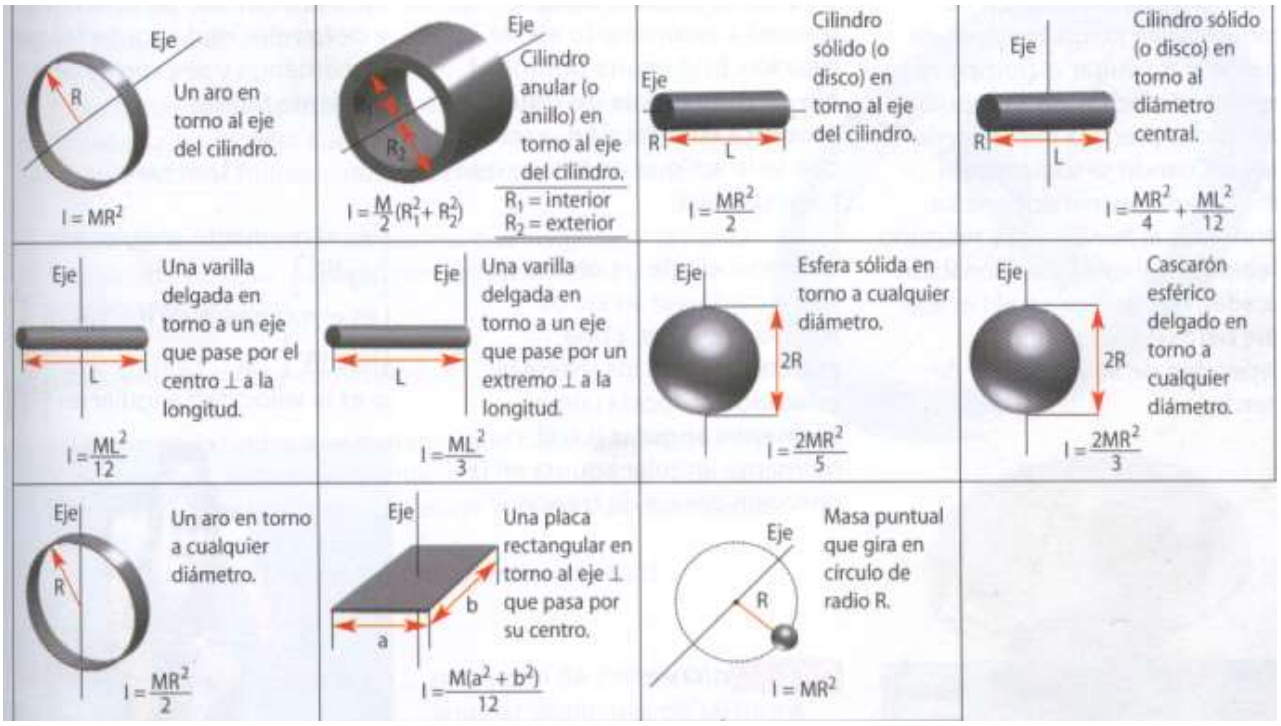
"Un objeto que se encuentra girando alrededor de un eje tiende a seguir girando sobre ese eje".

Cuando hablamos de objetos en rotación, primero debemos averiguar qué es lo que inicia el giro de un objeto. Si observamos y analizamos dicho suceso, podemos determinar que para que un objeto inicie o modifique su rotación, se requiere de una fuerza que actúe a cierta distancia del eje de giro. Ésta fuerza aplicada debe ser perpendicular al radio de giro, para así poder hacer girar un objeto, pero además debe de proporcionar un torque necesario que permita que la rotación se inicie o se modifique.

Cuando un torque actúa sobre un objeto, este girara indefinidamente a no ser que actúe otro torque que cambie su estado de movimiento rotacional. Esta tendencia a seguir girando corresponde a una inercia de rotación, ejemplo que se ve claramente cuando un ventilador es apagado y sus aspas siguen girando.

Otro factor relevante en la inercia que presenta un objeto es la masa, a mayor masa, mayor inercia y a menor masa, menor inercia. Si bien la inercia de rotación no depende exclusivamente de la masa del cuerpo, si depende de la distribución de esta, respecto del eje de rotación. Si en un cuerpo la mayoría de la masa está ubicada lejos del eje de rotación, la inercia rotacional será muy alta y costara hacerlo girar o detener su rotación. Por el contrario, si la masa está concentrada cerca del eje de rotación, la inercia será menor y será más fácil hacerlo girar o detener su rotación. La situación anterior es la que se conoce cómo **momento de inercia (I)**, que por definición corresponde a la forma en cómo se distribuye la masa en relación a su radio de giro.

Figura 22:
Momentos de inercia de algunos objetos



MOMENTO ANGULAR**:**

Hemos analizado la existencia de un eje de rotación de aquellos cuerpos que están girando, teniendo en cuenta además que dicho cuerpo siempre tiende a conservar este eje de rotación. Pues bien, lo recién mencionado corresponde a una característica de los sistemas rotatorios que recibe el nombre de momento angular. Este momento angular varía según las diferentes formas de los objetos y según el punto sobre el cual rote el objeto.

El momento angular apunta en la dirección del eje de rotación, produciendo una cierta estabilidad de giro en ese eje. El momento angular depende del momento de inercia (I) del objeto y de la velocidad angular (ω) y se expresa de la siguiente forma:

$$L = I\ \omega \left[\frac{kg\ m^2}{s}\right]$$

Si nos preguntamos, ¿cuál es la importancia del momento angular en nuestra vida cotidiana? Pues bien, la explicación más clara es que gracias al momento angula podemos mantener el equilibrio en una bicicleta en movimiento, y esto se debe a que al girar las ruedas, estas tienen momento angular.

3.2 Conservación del momento angular

Cuando un cuerpo se encuentra girando, *su momento angular permanece constante,* a no ser que actúe sobre él un torque externo que lo haga modificar su estado de rotación. Esto significa, por ejemplo, que si aumenta el momento de inercia, la rapidez angular disminuye de tal forma que el producto $I\ \omega$ no varía.

La conservación del momento angular implica que si el torque externo es 0, el momento angular final L_f es igual al momento angular inicial L_i.

$$L_i = L_f \qquad \text{o} \qquad I_i \cdot \omega_i = I_f \cdot \omega_f$$

Por ejemplo, si en un objeto que gira, la masa se concentra cerca del eje de rotación, disminuyendo su momento de inercia, este girara más rápido. Por el contrario, si la masa se concentra lejos del eje de rotación, aumentando su momento de inercia, la rotación será más lenta. Pueden cambiar I y ω, pero el producto será constante.