FÍSICA II

UNIDAD I

MECÁNICA VECTORIAL

1. INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA VECTORIAL

La mecánica vectorial o también conocida como mecánica newtoniana, es una especificación de la mecánica clásica que estudia el movimiento de las partículas y sólidos en el espacio.

La mecánica es la rama de la física que como ya dijimos estudia el movimiento y se subdivide en:

- ✓ Estática (Fuerzas en equilibrio mecánico)
- ✓ Cinemática (Estudia los movimientos, pero no las causas de éste)
- ✓ Dinámica (Estudia los movimientos y las causas de los mismos [Fuerza y energía])

La mecánica vectorial en específico, es aquella que nos permitirá describir sucesos físicos de la experiencia diaria que ocurren a velocidades muy inferiores a la velocidad de la luz y poseen escala microscópica. Para aquellos casos donde las velocidades sean próximas a la velocidad de la luz, utilizaremos la mecánica relativista.

En la mayoría de los casos prácticos que pueden ser objeto de estudio, la mecánica newtoniana o vectorial será suficiente para resolver los problemas que se presenten, sin importar en que sistema se encuentre el cuerpo o partícula. Ésta área de la mecánica es más simple que la mecánica de Hamilton y Lagrange, por lo mismo posee un campo de acción más limitado.

La mecánica de Newton se caracteriza por la presencia de leyes de las fuerzas como la ley de Hooke y la Ley Universal de la Gravitación. Gracias a estas las leyes, la mecánica newtoniana puede determinar el comportamiento de los cuerpos cuando se someten, o no se someten a fuerzas externas.

Algunos ejemplos de procesos cotidianos donde puede aplicarse la teoría de la mecánica vectorial para describir con gran exactitud un sistema son: la rotación de un trompo, movimiento de trenes y cohetes, movimientos planetarios, moléculas orgánicas y trayectorias de móviles en general. Ésta teoría es compatible con teorías clásicas como el electromagnetismo y la termodinámica, lo que la hace aún más importante y vital en física.

1.1 Forma gráfica y analítica de un vector

Antes de introducirse en los métodos gráficos y analíticos de los vectores, es necesario recordar algunas características, conceptos y propiedades de estos.

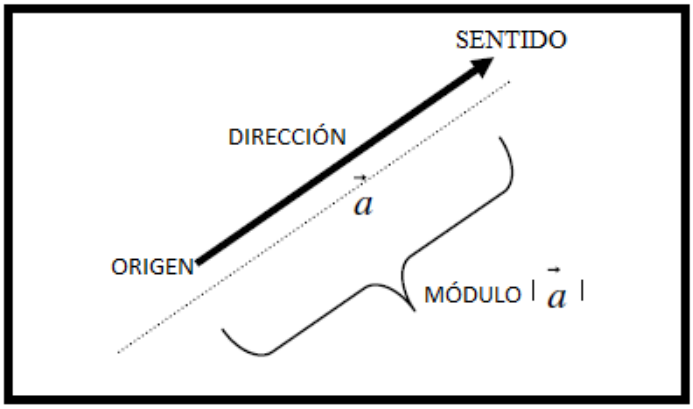
1.1.1 Vector: concepto y características

Un vector nace de la necesidad de explicar fenómenos físicos, que no podían ser descritos con simples valores numéricos, como es el caso de la velocidad, la aceleración, las fuerzas, entre otros. Físicamente se define como un segmento de recta orientado que posee magnitud, dirección y sentido. Matemáticamente se define como un elemento de un espacio vectorial, cuya naturaleza abstracta no es posible de ser representado mediante su módulo, longitud y orientación, en muchos espacios vectoriales.

Un vector posee:

- ✓ Magnitud o módulo (Determina el tamaño del vector)
- ✓ Dirección (Determina la recta del espacio en que se ubica el vector)
- ✓ Sentido (Determina hacia qué lado de la recta de acción apunta el vector)
- ✓ Origen (Punto desde donde comienza el vector)
- ✓ Punto de aplicación (en el caso de las fuerzas, es donde interactúa con el cuerpo)
- ✓ Vectores libres (Aquellos que no poseen punto de aplicación)

Figura 1



1.1.2 Forma gráfica de un vector

El método gráfico corresponde a un procedimiento basado en dibujos, que permite determinar el vector resultante obtenido después de aplicada una propiedad. Es útil en aquellos casos donde no se posee manejo del método analítico más exacto, no siendo un reemplazo de éste. Además es necesario poseer destrezas en el uso de instrumentos de medidas, que permitan obtener una representación correcta del vector buscado.

La forma gráfica es un procedimiento que posee algunos inconvenientes: Es poco preciso, esto debido a que se basa en una representación gráfica (dibujo) del vector en el cual se debe emplear una escala numérica apropiada que permita calcular su módulo

(longitud o tamaño). Es poco aplicable ya que si los vectores no se encuentran contenidos en el plano, se hace imposible la suma de dos o más de ellos.

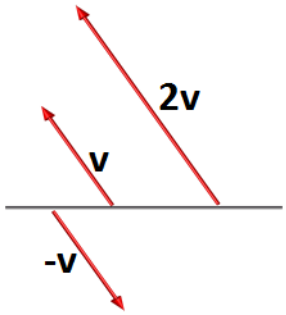
Analicemos algunas propiedades de los vectores utilizando éste método para su desarrollo.

1.1.2.1 Producto de un vector por un escalar

Para tener una mejor comprensión representaremos los vectores en negrita. El producto de un vector por un escalar, dará como resultado un nuevo vector que poseerá las siguientes características:

- ✓ El nuevo vector **2v**, tendrá la misma dirección del vector original **v**
- ✓ El módulo del vector **2v** será igual al producto del módulo de **v** y el escalar.
- ✓ Si el escalar es positivo, el sentido del nuevo vector será positivo. En cambio si el escalar es negativo el sentido será contrario al del vector original.
- ✓ Si el escalar es cero, el vector resultante será nulo
- ✓ Si el escalar es -1 el vector resultante se representará por el vector **–v** y será opuesto al vector original.

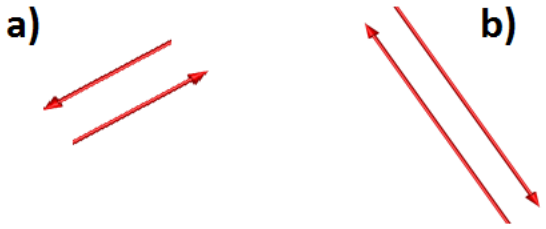
Figura 2



1.1.2.2 Suma de vectores colineales

Cuando hablamos de vectores colineales nos referimos a aquellos que poseen la misma dirección, pero no necesariamente el mismo sentido (a y b).

Figura 3



- ✓ Si ambos vectores están en la misma dirección y sentido, entonces el vector resultante será igual en módulo que la suma de los módulos de los vectores individuales y su sentido se conservará.

- ✓ Por el contrario si los vectores tuviesen diferentes sentidos, el vector resultante provendría de la diferencia de los módulos en cuestión y su sentido será la del vector mayor.

1.1.2.3 Suma de vectores no colineales

Cuando se busca determinar la suma de dos o más vectores consecutivos no colineales, podemos utilizar dos métodos gráficos conocidos como método del paralelogramo y del triángulo.

Método del triángulo

Éste método consiste en sumar dos vectores consecutivos, formando un triángulo con ellos y la resultante. Si tenemos dos vectores **x** e **y** ubicados en el plano, debemos realizar el siguiente procedimiento:

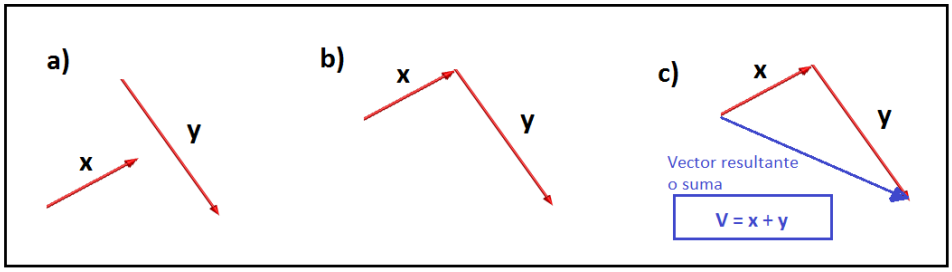
- ✓Se debe realizar un diagrama dibujado a escala, luego trazar el vector **x** respetando su dirección en el sistema de coordenadas. (Opción **a)** de la figura 3)

- ✓El vector **y** se dibujará utilizando la misma escala anterior, pero se deberá ubicar el origen del vector en la punta del vector **x**. Debes tener cuidado en que el vector **y** mantenga su dirección. (Opción **b)** de la figura 3)

- ✓ Posteriormente se trazará un vector desde el origen del vector **x** hacia la punta del vector **y.** Utilizando la escala escogida al comienzo, se medirá el tamaño del vector resultando, obteniendo así la magnitud del vector suma. (Opción **c)** de la figura 3)

✓ Finalmente se calcula el ángulo del vector suma, no olvidando que el ángulo se mide en sentido sinistrogiro (opuesto a las manecillas del reloj), tomando como origen de medida el eje x positivo.

Figura 3



Ejemplo: Si el vector **x** mide 25 m y el vector **y** mide 12 m, entonces el vector suma o resultante será:

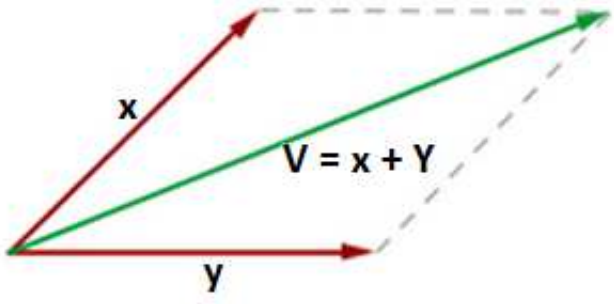
$$V = x + y = 25\ m + 12\ m = 37\ m$$

Método del paralelogramo

Este método recibe dicho nombre debido a que los vectores trazados forman un paralelogramo. Es el método empleado para sumar vectores concurrentes (se intersectan en algún punto del plano) y los pasos a seguir son:

- ✓ Dibuja a escala una flecha que represente la magnitud, sentido y dirección del primer vector.
- ✓ El segundo vector también deberá ser dibujado, teniendo precaución en hacer coincidir el origen de ambos vectores.
- ✓ Desde la punta de flecha del primer vector, trazar una recta paralela al segundo vector.
- ✓ Construido el paralelogramo, podemos obtener el vector resultante determinando por la diagonal que nace del origen de los vectores y finaliza en el vértice opuesto del paralelogramo
- ✓ La magnitud del vector resultante corresponde a la longitud del segmento trazado diagonalmente, respetando la escala original.
- ✓ El sentido del vector resultante siempre se representará por una punta de flecha, considerando que el origen del vector resultante es el mismo que el de los vectores principales.

Figura 4



La adición de vectores también posee propiedades como la conmutatividad y la propiedad asociativa:

- ✓ Propiedad conmutativa: $x + y = y + x$
- ✓ Propiedad asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$

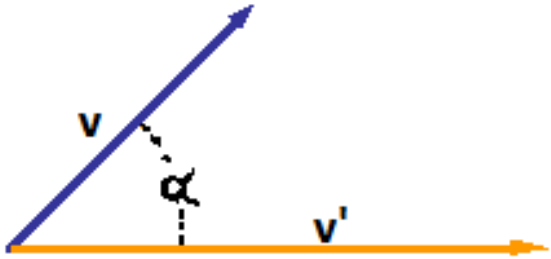
1.1.2.4 Producto escalar de dos vectores

El producto escalar entre dos vectores **v** e **v',** no nulos (entiéndase que un vector nulo posee módulo cero) será:

$$v \bullet v' = xx' + yy' + zz'$$

$$v \bullet v' = v \bullet v' \cos \alpha$$

Figura 5



El producto escalar posee propiedad conmutativa, es decir:

$$v \bullet v' = v' \bullet v$$

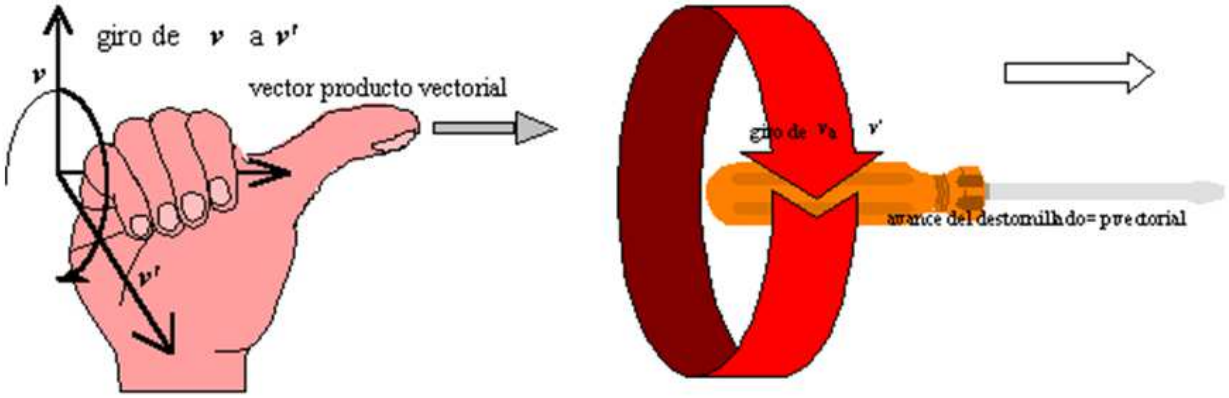
A su vez también tiene propiedad distributiva respecto de la suma de vectores:

$$v \bullet (x + y) = v \bullet x + v \bullet y$$

1.1.2.5 Producto vectorial de dos vectores

La aplicación del producto vectorial entre dos vectores, se definirá como un vector ***u*** cuya dirección será la misma que la de la recta perpendicular a ambos vectores multiplicados (**x** e **y**), y su sentido se determinará por la regla de la mano derecha.

Figura 5

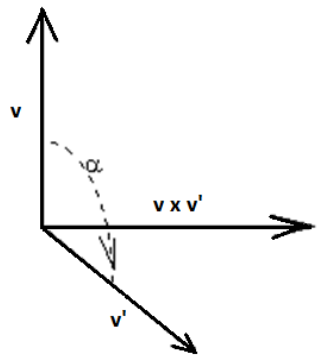


El producto vectorial se representa por una x ubicada entre los vectores. Producto vectorial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times v'$$

Módulo del productor vectorial: $\mathbf{u} = \mathbf{v} \bullet v' \text{ sen } \alpha$; que geométricamente corresponde al área del paralelogramo de la figura 6.

Figura 6



El producto vectorial no posee propiedad conmutativa.

1.1.3 Forma analítica de un vector

Éste procedimiento consiste en utilizar formulas o expresiones matemáticas para calcular la resultante de dos o más vectores. Analicemos algunas de estas propiedades.

1.1.3.1 Suma analítica de vectores

La suma de vectores a través del método analítico se llevará a cabo sumando sus respectivas componentes.

Vector **u =** (u_1, u_2) ; Vector **v** = (v_1, v_2)

Suma de vectores: **u + v =** $(u_1 + v_1 , u_2 + v_2)$

1.1.3. 2 Resta de vectores

La sustracción es la operación inversa a la adición, es por ello que para restar dos vectores libres **u** y **v** debemos sumar las componente del vector **u** con las componentes del vector opuesto a **v** (figura 7).

Vector **u =** (u_1, u_2) ; Vector **v** = (v_1, v_2)

Suma de vectores:

u – v = $(u_1 - v_1 , u_2 - v_2)$

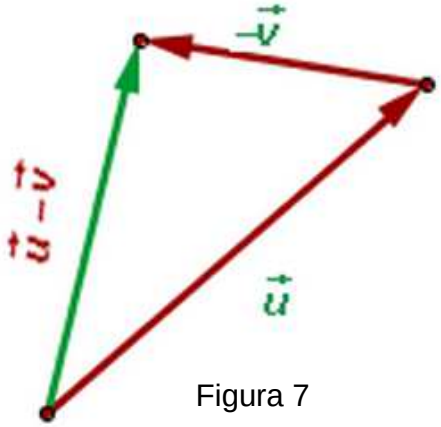


Figura 7

Revisemos un ejemplo:

Determina la adición y sustracción de los vectores **u** y **v,** cuyas componentes son:

u = (-4, 6) ; **v** = (2, -2)

- ✓ Adición : **u + v =** $(u_1 + v_1 , u_2 + v_2)$ **=** (-4 + 2 , 6 + (-2)) = (-2 , 4)
- ✓ Sustracción : **u - v =** $(u_1 - v_1 , u_2 - v_2)$ **=** (-4 - 2 , 6 – (-2)) = (-6 , 8)

1.1.3.3 Multiplicación de vectores

La multiplicación de un vector por un escalar, nos da como resultado otro vector. Como ya dijimos anteriormente los vectores serán representados por letras en negrita (**v**), mientras que el escalar por una letra **k.** El vector resultante tendrá:

- ✓ Una dirección igual al del vector **v**
- ✓ El mismo sentido que el vector **v**, si **k** es positivo
- ✓ El sentido será opuesto al vector **v**, si **k** es negativo
- ✓ El modulo del vector resultante se calculará de la siguiente manera:

$$|\mathbf{k}| \bullet |\mathbf{u}|$$

Matemáticamente el vector resultante se obtendrá al multiplicar las componentes del vector, por el escalar establecido en el problema, es decir:

Vector**: u =** (u_1, u_2) ; Constante o valor escalar: **k**

Método analítico de la multiplicación de un vector por un escalar:

$$\mathbf{k} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{k} \bullet (u_1, u_2) = (\mathbf{k} \bullet u_1, \mathbf{k} \bullet u_2)$$

Ejemplo: determina el vector resultante de los vectores **u (2, -5)** y **v (-1, -4)**, al multiplicarlos por un escalar cuyo valor es **k = 3**

- ✓ Vector resultante 1: $\mathbf{k} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{k} \bullet (u_1, u_2) = (\mathbf{k} \bullet u_1, \mathbf{k} \bullet u_2)$

$$\mathbf{3} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{3} \bullet (2, -5) = (3 \bullet 2, \mathbf{3} \bullet -5) = (6, -15)$$

- ✓ Vector resultante 2: $\mathbf{k} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{k} \bullet (v_1, v_2) = (\mathbf{k} \bullet \mathbf{v}_1, \mathbf{k} \bullet \mathbf{v}_2)$

$$\mathbf{3} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{3} \bullet (-1, -4) = (3 \bullet \mathbf{-1}, \mathbf{3} \bullet -4) = (-3, -12)$$

Propiedades de la Multiplicación de un vector por un número

- ✓ Asociativa:

$$k \bullet (k' \bullet u) = (k \bullet k') \bullet u$$

- ✓ Distributiva I:

$$k \bullet (u + v) = k \bullet u + k \bullet v$$

- ✓ Distributiva II:

$$(k + k') \bullet u = k \bullet u + k' \bullet u$$

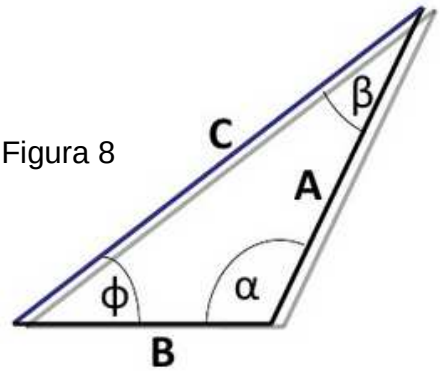
- ✓ Elemento Neutro:

$$1 \bullet u = u$$

1.1.3.4 Ley del coseno

La ley del coseno es un método analítico del paralelogramo. Matemáticamente es utilizado para calcular la magnitud del vector resultante, aunque también es empleado en cualquier triangulo (Figura 8) para encontrar uno de sus lados.

Figura 8



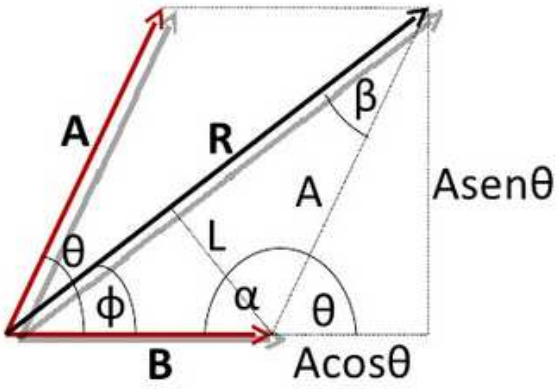
Las fórmulas que permiten determinar analíticamente el vector resultante de un paralelogramo, o el valor de uno de los catetos del triángulo son las siguientes:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos(\phi)$$
$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos(\beta)$$
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\alpha)$$

1.1.3.5 Ley del seno

La ley del seno también es un método analítico utilizado para calcular el vector resultante de un vector, y su fórmula de aplicación es la siguiente:

Figura 9



Se establecen las siguientes igualdades:

$$\frac{R}{\text{sen}\theta} = \frac{B}{\text{sen}\,\beta} = \frac{A}{\text{sen}\phi}$$

$$\frac{R}{\text{sen}\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\,\beta} = \frac{A}{\text{sen}\phi}$$

Tomamos la siguiente igualdad y la despejamos:

$$\frac{R}{\text{sen}\phi} = \frac{A}{\text{sen}\theta}$$

$$\text{sen}\phi = \frac{A\,\text{sen}\theta}{R}$$

Posteriormente seleccionamos otra igualdad y volvemos a despejarla:

$$\frac{B}{\text{sen}\beta} = \frac{A}{\text{sen}\,\phi}$$

$$L = B\,\text{sen}\,\beta = A\,\text{sen}\,\phi$$

Como: $\alpha = 180 - \theta$

Entonces podemos concluir que: $\text{sen}\theta = \text{sen}\,(180 - \theta) = \text{sen}\,\alpha$

1.2 Producto escalar y producto vectorial

Antes de analizar el producto vectorial y escalar de un vector, es necesario definir algunos conceptos claves tales como qué es una magnitud física, escalar y vectorial. Además recordaremos las componentes vectoriales de un vector, los vectores unitarios y otras propiedades esenciales del los vectores.

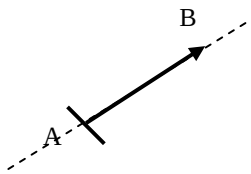
1.2.1 Magnitudes físicas

Se llama magnitud física a toda propiedad de los cuerpos que puede ser medida, como es el caso de la masa, el volumen, el tiempo, la velocidad, entre otros. Las magnitudes físicas pueden ser escalares y vectoriales.

Magnitudes escalares: quedan perfectamente determinadas por un número o módulo y una unidad de medida. Ejemplos: la masa, el volumen, el tiempo, la temperatura, etc.
Magnitudes vectoriales: para determinarlas además de un módulo y una unidad de medida, hay que dar una dirección y un sentido. Se representan mediante vectores. Ejemplos: la velocidad, la fuerza, etc.

1.2.1.1 Vectores

Como ya definimos un vector es un segmento de recta orientado. Diremos que en este caso el punto A corresponde al origen, B el extremo y el vector se representa como $\vec{AB}$ o bien como $\vec{V}$.

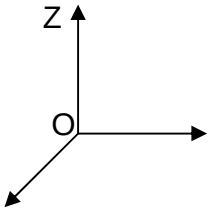


La dirección es la de la recta que contiene al vector, llamada recta de apoyo o línea de acción.

El sentido es el indicado por la punta de flecha de su extremo (B).

1.2.1.2 Componentes vectoriales de un vector

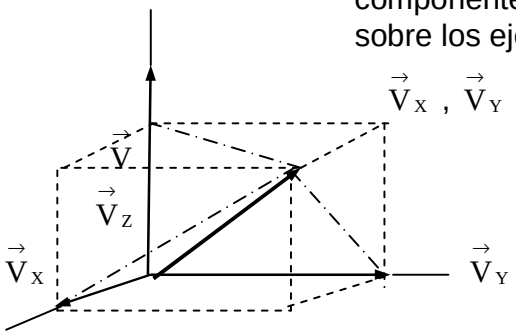
Para poder situar un vector en el espacio es necesario tomar un sistema de referencia. Para ello tomaremos el sistema de referencia formado por los ejes cartesianos (OX, OY, OZ), todos ellos perpendiculares entre sí.



Las puntas de flecha indican el sentido que arbitrariamente se toma como positivo.

Se llaman componentes vectoriales o vectores componentes de un vector $\vec{V}$, a sus proyecciones orientadas sobre los ejes de coordenadas.

$\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$, $\vec{V}_Z$; son las componentes vectoriales del vector $\vec{V}$



$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y + \vec{V}_Z}$$

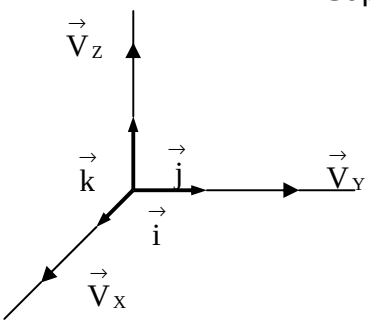
1.2.1.3 Vectores unitarios fundamentales. Componentes escalares.

Se habla de un vector unitario o también conocido como versor, a aquellos vectores que poseen un módulo igual a la unidad.

Todo vector se puede poner como, $\boxed{\vec{V} = |\vec{V}| \times \vec{u}}$ siendo $\vec{u}$ un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{V}$.

Se llaman vectores unitarios fundamentales a los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados y sentido positivo, los que serán representados de la siguiente manera ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Supongamos un vector de componentes vectoriales $\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$, $\vec{V}_Z$



$\vec{V}_X = Vx \cdot \vec{i}$, $\vec{V}_Y = Vy \cdot \vec{j}$, $\vec{V}_Z = Vz \cdot \vec{k}$

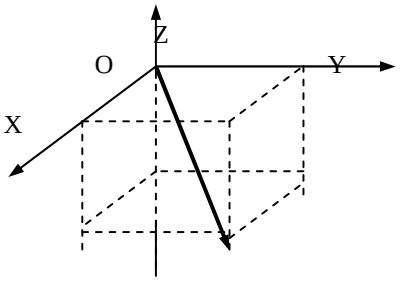
Por lo que: $\boxed{\vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j} + Vz \cdot \vec{k}}$

O bien $\vec{V} = (Vx , Vy , Vz)$

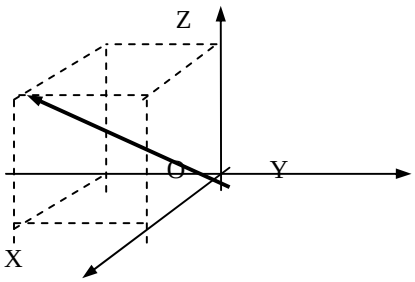
Los escalares Vx, Vy, Vz se llaman componentes escalares del vector $\vec{V}$. En valor absoluto coinciden con el módulo de las componentes vectoriales, pero están afectadas de un signo + o -, según el sentido de las componentes.

Veamos un par de ejemplos:

$\vec{A} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$

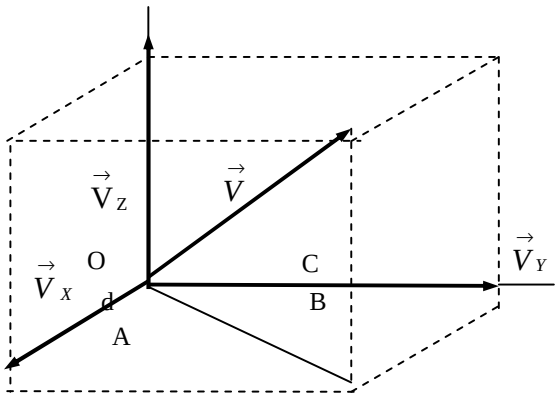


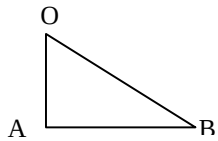
$\vec{B} = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$



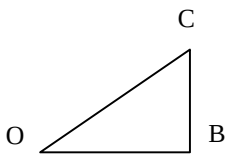
1.2.1.4 Módulo de un vector

Para calcular el modulo de un vector es necesario aplicar las siguientes formulas:





$$\mathbf{d}^2 = V_X^2 + V_Y^2$$



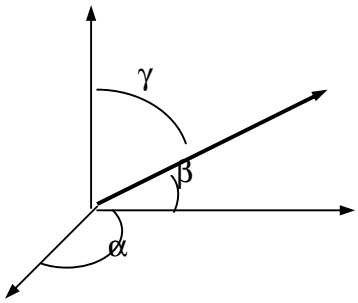
$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{d}^2 + V_Z^2$$

por lo que $V^2 = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2$, de donde:

$$\boxed{V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}}$$

1.2.1.5 Cosenos directores

Para determinar la dirección y el sentido de un vector, podemos utilizar los cosenos directores. Los cosenos directores son aquellos cosenos de los ángulos que forma el vector con los ejes cartesianos:



$$\cos\alpha = \frac{V_X}{V} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{V_Y}{V} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{V_Z}{V}$$

$\boxed{Vx = V.\cos\alpha}$ $\boxed{Vy = V.\cos}$ $\boxed{Vz = V.\cos}$

Como $V^2 = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2$, se deduce:

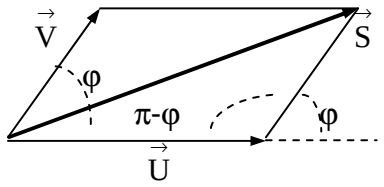
$$V^2 = V^2.\cos^2\alpha + V^2.\cos^2\beta + V^2.\cos^2\gamma \quad ; \quad V^2 = V^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$\boxed{1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

1.2.1.6 Operaciones con vectores

Para complementar la información sobre vectores antes vistas, revisaremos algunas propiedades y características que no fueron mencionadas y que serán de utilidad.

Cálculo del módulo de un vector



$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V}$; Por el teorema del coseno:

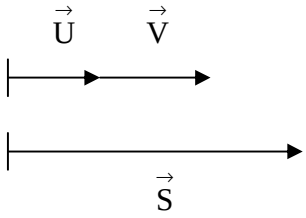
$$S^2 = U^2 + V^2 - 2.U.V.\cos(\pi-\varphi)$$

y como $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$

$$\boxed{S^2 = U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\varphi}$$

Casos particulares

1) Vectores con la misma dirección y sentido:

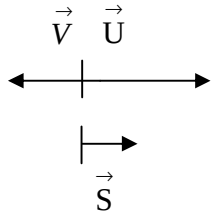


$\varphi = 0^o$, $\cos\varphi = 1$

$$S^2 = U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\varphi = U^2 + V^2 + 2.U.V$$

$S^2 = (U + V)^2$; $\boxed{S = U + V}$

2) Vectores con la misma dirección pero sentido contrario:

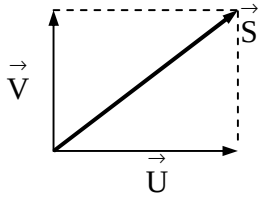


$\varphi = 180^o$, $\cos\varphi = -1$

$$S^2 = U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\varphi = U^2 + V^2 - 2.U.V$$

$S^2 = (U - V)^2$; $\boxed{S = U - V}$

3) Vectores perpendiculares:



$\varphi = 90^o$, $\cos\varphi = 0$

$$S^2 = U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\varphi = U^2 + V^2$$

$$\boxed{S = \sqrt{U^2 + V^2}}$$

Vector suma

Es un vector cuyas componentes son la suma de las componentes. Analíticamente (en función de las componentes cartesianas) se escribiría de la siguiente manera:

$$\vec{U} = Ux \cdot \vec{i} + Uy \cdot \vec{j} + Uz \cdot \vec{k} \quad , \quad \vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j} + Vz \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{S} = \vec{U} + \vec{V} = (Ux + Vx) \cdot \vec{i} + (Uy + Vy) \cdot \vec{j} + (Uz + Vz) \cdot \vec{k}}$$

Revisemos el siguiente ejemplo: Dados los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ Calcular la suma vectorial de ambos vectores:

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{S} = (2 + 4)\vec{i} + (-3 + 2)\vec{j} + (1 + 5)\vec{k}$$
$$\vec{S} = 6\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$$

Vector diferencia

El vector diferencia es un vector cuyas componentes son la diferencia de las componentes. En función de las componentes cartesianas, se escribiría como sigue:

$$\vec{U} = Ux \cdot \vec{i} + Uy \cdot \vec{j} + Uz \cdot \vec{k} \quad , \quad \vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j} + Vz \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{U} - \vec{V} = (Ux - Vx) \cdot \vec{i} + (Uy - Vy) \cdot \vec{j} + (Uz - Vz) \cdot \vec{k}}$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, la diferencia será:

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$$
$$\vec{R} = (2 - 4)\vec{i} + (-3 - 2)\vec{j} + (1 - 5)\vec{k}$$
$$\vec{R} = -2\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

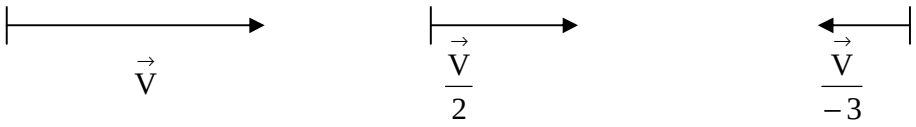
Cociente de un vector por un escalar.

El cociente de un vector $\vec{V}$ por un escalar, que llamaremos en esta ocasión "q", equivale al producto del vector por el inverso del escalar, es decir:

$$\frac{\vec{V}}{q} = \frac{1}{q} \times \vec{V}$$

Es, por tanto, otro vector que tiene las siguientes características:

- Módulo: el modulo del vector $\vec{V}$ dividido por el $|q|$
- Dirección: la dirección de $\vec{V}$.
- Sentido: el de $\vec{V}$ si q es +, y sentido contrario a $\vec{V}$ si q es –



El vector cociente en función de las componentes cartesianas, quedaría expresado:

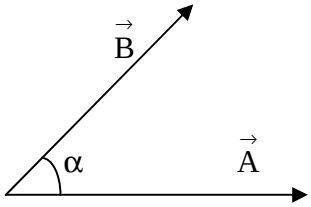
$$\vec{V} = Vx \,.\, \vec{i} + Vy \,.\, \vec{j} + Vz \,.\, \vec{k} \quad , \quad \boxed{\frac{\vec{V}}{q} = \frac{Vx}{q} \,.\, \vec{i} + \frac{Vy}{q} \,.\, \vec{j} + \frac{Vz}{q} \,.\, \vec{k}}$$

Ejemplo:

$$\vec{V} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \frac{\vec{V}}{2} = 3\vec{i} + \vec{j} - 1/2\,\vec{k}$$

1.2.2 Producto escalar de dos vectores

Llamaremos producto escalar de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, al escalar que se obtiene multiplicando el módulo de $\vec{A}$ por el módulo de $\vec{B}$ y por el coseno del ángulo que forman ambos vectores. Matemáticamente se expresaría como:



$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| \bullet |\vec{B}| \bullet \cos \alpha}$$

El resultado del producto escalar entre dos vectores, analizados en función de las componentes cartesianas, no entregaría los siguientes resultados:

$$\vec{A} = Ax \,.\, \vec{i} + Ay \,.\, \vec{j} + Az \,.\, \vec{k} \qquad , \qquad \vec{B} = Bx \,.\, \vec{i} + By \,.\, \vec{j} + Bz \,.\, \vec{k}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (Ax \bullet Bx)\, \vec{i} \,.\, \vec{i} + (Ax \bullet By)\, \vec{i} \,.\, \vec{j} + (Ax \bullet Bz)\, \vec{i} \,.\, \vec{k} + (Ay \bullet Bx)\, \vec{j} \,.\, \vec{i} + (Ay \bullet By)\, \vec{j} \,.\, \vec{j} +$$

$$(Ay \bullet Bz)\, \vec{j} \,.\, \vec{k} + (Az \bullet Bx)\, \vec{k} \,.\, \vec{i} + (Az \bullet By)\, \vec{k} \,.\, \vec{j} + (Az \bullet Bz)\, \vec{k} \,.\, \vec{k}$$

Como el producto escalar de los vectores unitarios es:

$\bullet$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Aplicando lo anterior, el producto escalar de los vectores quedaría:

$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = Ax \bullet Bx + Ay \bullet By + Az \bullet Bz}$$

Revisemos un ejemplo: Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$, calcular el el producto escalar.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = Ax \bullet Bx + Ay \bullet By + Az \bullet Bz$$
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (2 \bullet 4) + (-3 \bullet 2) + (1 \bullet 5)$$
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 8 - 6 + 5$$
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 7$$

1.2.3 Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se escribirá simbólicamente como: $\vec{A} \wedge \vec{B}$. El producto calculado nos entregará un vector resultante que posee las siguientes características:

- ✓ Módulo: el módulo del vector resultante se calculará con el producto del módulo de $\vec{A}$ por el módulo de $\vec{B}$, multiplicado por el seno del ángulo que forman entre ellos, es decir:

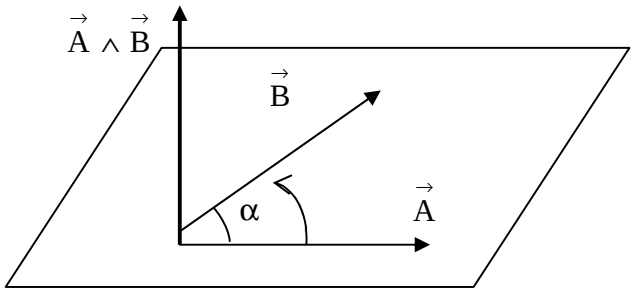
$$\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \text{sen } \alpha$$

- ✓ Dirección: del vector resultante será perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

- ✓ Sentido: se puede deducir de dos formas distintas:

1. Regla del sacacorchos: el sentido viene indicado por el sentido de avance de un sacacorchos que girase para ir del primer vector al segundo vector por el camino más corto.

2. Regla de la mano derecha: se determinará cogiendo con la mano derecha la dirección del vector producto vectorial, de tal forma que los dedos indiquen el sentido de paso del primer vector al segundo vector por el camino más corto, el pulgar extendido indica el sentido del vector producto vectorial.



El producto vectorial de dos vectores, en función de las componentes cartesianas:

$$\vec{A} = Ax \cdot \vec{i} + Ay \cdot \vec{j} + Az \cdot \vec{k} \qquad , \qquad \vec{B} = Bx \cdot \vec{i} + By \cdot \vec{j} + Bz \cdot \vec{k}$$

Comenzamos a calcular el producto vectorial en función de cada componente cartesiano:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (Ax \cdot Bx)\ \vec{i} \wedge \vec{i} + (Ax \cdot By)\ \vec{i} \wedge \vec{j} + (Ax \cdot Bz)\ \vec{i} \wedge \vec{k} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Como el producto vectorial entre los vectores unitarios es la indicada en el cuadro:

$\wedge$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Eliminando aquellos valores que dan como resultado cero, el producto vectorial de los vectores nos dará como resultado (método 1):

$$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = (Ay \cdot Bz - Az \cdot By)\ \vec{i} + (Az \cdot Bx - Ax \cdot Bz)\ \vec{j} + (Ax \cdot By - Ay \cdot Bx)\ \vec{k}}$$

Expresión que se corresponde con el desarrollo del determinante (método 2):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ay & Az \\ By & Bz \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} Ax & Az \\ Bx & Bz \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix} \vec{k}$$

Veamos un ejemplo: tenemos dos vectores $\vec{A}(1, 2, 4)$ y $\vec{B}(2, -1, 3)$. Hallar el producto vectorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$ utilizando los dos métodos antes mencionados:

Método 1:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (Ay \,.\, Bz - Az \,.By)\,\vec{i} + (Az \,.\, Bx - Ax \,.Bz)\,\vec{j} + (Ax \,.By - Ay \,.\, Bx)\,\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (2 \,.\, 3 - 4 \,.\, (-1))\,\vec{i} + (4 \,.\, 2 - 1 \,.\, 3)\,\vec{j} + (1 \,.\, (-1) - 2 \,.\, 2)\,\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 10\,\vec{i} + 5\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$$

o bien como desarrollo del determinante, método 2:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (2 \times 3 - -1 \times 4)\,\vec{i} - (1 \times 3 - 4 \times 2)\,\vec{j} + (-1 \times 1 - 2 \times 2)\,\vec{k}$$

$$= (6 + 4)\,\vec{i} - (3 - 8)\,\vec{j} + (-1 - 4)\,\vec{k}$$

$$= (10)\,\vec{i} - (-5)\,\vec{j} + (-5)\,\vec{k}$$

$$= 10\,\vec{i} + 5\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$$

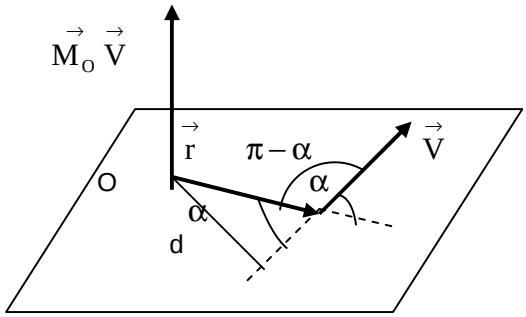
Con ambos métodos obtuvimos el mismo resultado.

1.2.4 Momento de un vector respecto a un punto.

Se llama momento de un vector, a aquel vector $\vec{V}$ respecto a un punto O:

$$\boxed{\vec{M}_O\,\vec{V} = \vec{r} \wedge \vec{V}}$$

donde $\vec{r}$ (vector de posición) un vector que tiene como origen el punto O, y como extremo, el origen de $\vec{V}$.



El vector momento, es entonces un vector que tiene las siguientes características:

- ✓ Módulo: el módulo del vector momento, se calcula a través producto del módulo de $\vec{r}$ por el módulo de $\vec{V}$ y por el seno del ángulo que forman entre ellos:

$$\left|\vec{M}_O\ \vec{V}\right| = \left|\vec{r}\right| \,.\, \left|\vec{V}\right| \,.\, \text{sen}\ \alpha \quad ; \qquad \text{como} \quad \left|\vec{r}\right| \,.\, \text{sen}\,\alpha = d \quad ,$$

siendo d la distancia del punto O a la línea de acción de $\vec{V}$, también se puede calcular:

$$\left|\vec{M}_O\ \vec{V}\right| = d \,.\, \left|\vec{V}\right|$$

es decir, el vector $\vec{V}$ se puede deslizar a lo largo de su línea de acción, sin que se modifique su momento.

- ✓ Dirección: su dirección será perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{V}$.

- ✓ Sentido: se traslada paralelamente $\vec{V}$ hasta el punto O, para que ambos vectores tengan origen común y a continuación se aplica la regla del sacacorchos o la regla de la mano derecha: el sentido viene indicado por el sentido de avance de un sacacorchos que girase para ir de $\vec{r}$ a $\vec{V}$ por el camino más corto.

1.2.5 Teorema de VARIGNON

El teorema de Varignon nos indica que el momento de la suma de varios vectores respecto a un punto O, es igual a la suma de los momentos de los vectores por separado, respecto a dicho punto.

$$\vec{M}_O \vec{S} = \vec{M}_O(\vec{U} + \vec{V}) = \vec{M}_O \vec{U} + \vec{M}_O \vec{V}$$

Algunas magnitudes vectoriales, como la velocidad, varían en función de un escalar, como el tiempo: $\vec{V} = f(t)$. Se define la derivada de $\vec{V}$ respecto a t, como:

$$\vec{V}' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

La derivada de un vector $\vec{V}$ respecto a un escalar t , es la suma de las derivadas de sus componentes:

$$\vec{V} = Vx \bullet \vec{i} + Vy \bullet \vec{j} + Vz \bullet \vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\,Vx}{dt} . \vec{i} + \frac{d\,Vy}{dt} . \vec{j} + \frac{d\,Vz}{dt} . \vec{k}}$$

1.3 Concepto de fuerza

A continuación definiremos qué es una fuerza y cuál es su importancia en el movimiento de un cuerpo o sistema, no sin antes introducir el concepto a través de las leyes que lo respaldan.

1.3.1 Ley de las fuerzas

La mecánica de Newton se caracteriza por la existencia de varias leyes de las fuerzas, dentro de las que podemos destacar la Ley de Hooke y la Ley Universal de la Gravitación. Es a través de estas leyes de todas las fuerzas, que la mecánica newtoniana puede determinar el comportamiento de los cuerpos cuando estos se somete o no a una o varias fuerzas externas.

En física clásica las principales leyes de las fuerzas que son vistas en la formación académica de una persona, son las llamadas leyes de Newton. A continuación enfatizaremos en ellas.

1.3.2 Leyes de newton

Las Leyes de Newton o leyes del movimiento de Newton, son tres principios a partir de los cuales se explican la mayor parte de los problemas planteados en dinámica, sobre todo en aquellos casos relacionados con el movimiento de los cuerpos.

Las Leyes de Newton permiten explicar movimientos de astros, proyectiles artificiales creados por el ser hombre, vehículos, así como toda la mecánica de funcionamiento de las máquinas. Los fenómenos en los cuales pueden ser de utilidad son múltiples y variados, he ahí su importancia en la dinámica.

Fundamentos teóricos de las leyes de Newton

Antes de comenzar a utilizar el concepto de fuerza, Isaac Newton tuvo que comenzar a manejar otros conceptos básicos y necesarios para sustentar sus estudios y posteriormente plantear las leyes.

El primer concepto que maneja Isaac Newton es el de masa, que identifica con la "cantidad de materia" presente en un cuerpo o sistema.

Posteriormente Newton asume que la cantidad de movimiento, es el resultado del producto de la masa por la velocidad.

En tercer lugar, precisa la importancia de distinguir entre lo absoluto y relativo siempre que se hable de tiempo, espacio, lugar o movimiento. Es así como describe el movimiento como una traslación de un cuerpo de un lugar a otro. En cambio el movimiento absoluto y verdadero de un cuerpo, se compone por el movimiento (relativo) de ese cuerpo en el lugar (relativo) en que se lo considera, con el movimiento (relativo) del lugar mismo en otro lugar en el que esté situado, y así sucesivamente, paso a paso, hasta llegar a un lugar inmóvil, es decir, al sistema de referencias de los movimientos absolutos. De acuerdo con esto, Newton establece que los movimientos aparentes son las diferencias de los movimientos verdaderos y que las fuerzas son causas y efectos de estos. Consecuentemente, la fuerza en Newton tiene un carácter absoluto, no relativo.

Basándose en estos fundamentos, Newton enunció estas leyes, que hoy en día son consideradas como las más importantes de la mecánica clásica. Estas leyes son tres y se conocen como: Primera ley de Newton o ley de inercia, Segunda ley de Newton o ley de fuerza (relación entre fuerza y aceleración) y tercera ley de Newton o también conocida como ley de acción y reacción.

Isaac Newton planteó que todos los movimientos se atienen a estas tres leyes principales formuladas en términos matemáticos. Un concepto es la fuerza, causa del movimiento; otro es la masa, la medición de la cantidad de materia puesta en movimiento; los dos son denominados habitualmente por las letras F y m.

1.3.2.1 Primera ley de Newton o ley de Inercia

La primera ley del movimiento rebate la idea aristotélica que planteaba que un cuerpo sólo se puede mantenerse en movimiento cuando se le aplica una fuerza. Para Newton en cambio el planteamiento es el siguiente:

En latín:

"Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare"

En español:

"Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él"

Esta ley postula que un cuerpo no puede cambiar su estado inicial por sí solo, ya sea un estado de reposo absoluto o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que se aplique una fuerza o una serie de fuerzas sobre dicho cuerpo, no olvidando que la resultante de las fuerzas aplicadas no puede ser nulo. Isaac Newton observó que los cuerpos que están en movimiento se encuentran sometidos constantemente a fuerzas de roce o fricción, que los frena de forma progresiva. Dicho pensamiento fue novedoso para la época, debido a que los pensamientos o acuerdos anteriores indicaban que el movimiento o la detención de un cuerpo se debían exclusivamente a si una fuerza se estaba ejerciendo sobre el cuerpo o no, pero nunca entendiendo como esta a la fricción.

En consecuencia, un cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme implica que no existe ninguna fuerza externa neta o, dicho de otra forma; un objeto en movimiento no se detiene de forma natural si no se aplica una fuerza sobre él. En el caso de los cuerpos en reposo, se entiende que su velocidad es cero, por lo que si esta cambia es porque sobre ese cuerpo se ha ejercido una fuerza neta.

Esta ley sirve para definir un tipo especial de sistemas de referencia conocidos como Sistemas de referencia inerciales, que son aquellos sistemas de referencia desde los que se observa que un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza neta se mueve con velocidad constante. Si bien teóricamente estos sistemas existen, en realidad es imposible encontrar un sistema de referencia inercial, puesto que siempre hay algún tipo de fuerzas actuando sobre los cuerpos. Aún así es posible encontrar un sistema de referencia en el que el problema que estemos estudiando se pueda tratar como si estuviésemos en un sistema inercial.

1.3.2.2 Segunda ley de Newton o ley de fuerza

La ley de fuerza o segunda ley del movimiento de Newton postula lo siguiente:

"El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime."

En las palabras originales de Newton:

"Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur."

Esta ley explica qué ocurre si sobre un cuerpo en movimiento (cuya masa no debe ser constante) actúa una fuerza neta: la fuerza modificará el estado de movimiento, cambiando la velocidad en módulo o dirección. En concreto, los cambios experimentados en el momento lineal de un cuerpo son proporcionales a la fuerza motriz y se desarrollan en la dirección de esta; las fuerzas son causas que producen aceleraciones en los cuerpos.

En resumen: la fuerza se define simplemente en función del momento que se aplica a un objeto, con lo que dos fuerzas serán iguales si causan la misma tasa de cambio en el momento del objeto.

Matemáticamente esta ley se puede plantear como la derivada del momento lineal en función del tiempo:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

Donde:

$\mathbf{p}$ es el momento lineal

$\mathbf{F}_{\text{net}}$ la fuerza total o fuerza resultante.

Suponiendo que la masa es constante y que la velocidad es muy inferior a la velocidad de la luz la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}$$

Sabemos que $\mathbf{p}$ es el momento lineal, que se puede escribir el producto entre la masa y la velocidad de un cuerpo:

$$P = m \bullet V$$

donde **m** es la masa del cuerpo y **V** su velocidad.

Ahora bien, si consideramos que la masa es constante y que podemos escribir la aceleración en función de su derivada, $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$, entonces podemos reemplazar y modificar la ecuación anterior, obteniendo el siguiente resultado:

$$\mathbf{F = m \bullet a}$$

El producto de la masa por la aceleración es la ecuación fundamental de la dinámica, y nos dará como resultado la fuerza aplicada. La constante de proporcionalidad de esta ecuación, es su masa de inercia, la cual será distinta para cada cuerpo.

Revisemos lo anterior: si en la formula presentada despejamos la masa “m” de la ecuación, obtenemos que m es la relación que existe entre la división de la “F” por la “a”. Cuando un cuerpo tiene una gran resistencia a cambiar su aceleración, o sea presenta una gran masa, se dice que tiene mucha inercia. Por el contrario, cuando un cuerpo presente poca resistencia a cambiar su aceleración, será consecuencia de que su masa en pequeña y se dirá que su inercia es poca. Producto de lo anterior diremos que la masa se define como una medida de la inercia del cuerpo.

Por tanto, si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, esta partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en dirección de ésta. La expresión anterior así establecida es válida tanto para la mecánica clásica como para la mecánica relativista, a pesar de que la definición de momento lineal es diferente en las dos teorías: mientras que la dinámica clásica afirma que la masa de un cuerpo es siempre la misma, con independencia de la velocidad con la que se mueve, la mecánica relativista establece que la masa de un cuerpo aumenta al crecer la velocidad con la que se mueve dicho cuerpo.

La unidad fundamental de la fuerza recibirá el nombre de Newton, en honor al físico Isaac Newton, y se representará por una (N). Si la masa y la aceleración tienen un valor unitario (valen 1), la fuerza también valdrá 1. Es así como se dice que el newton es la fuerza necesaria para que una masa de un kilogramo presente una aceleración de 1 m/s². Se entiende que la aceleración y la fuerza han de tener la misma dirección y sentido.

Es vital que recuerden que esta ecuación es muy importante en la resolución de problema de dinámica, donde se busca determinar la clase de fuerza que se necesita para producir los diferentes tipos de movimiento: rectilíneo uniforme (m.r.u), circular uniforme (m.c.u) y uniformemente acelerado (m.r.u.a).

Tenga presente cuando desarrolle algún problema lo siguiente: Si sobre el cuerpo actúan muchas fuerzas, habría que determinar primero el vector suma de todas esas fuerzas. También tener en cuenta que si se está analizando el caso de un objeto que cae hacia la tierra con una resistencia del aire igual a cero, la fuerza que actuaría sobre el sería su peso y le provocaría una aceleración descendente igual a la de la gravedad.

1.3.2.3 Tercera ley de Newton o ley de acción y reacción

Isaac Newton planteo su tercera ley llamada de acción y reacción, planteando lo siguiente:

"Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto"

La formulación original de Newton es:

"Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi"

Esta ley es completamente original, esto ya que las dos primeras leyes ya habían sido propuestas en su origen por Galileo, Hooke y Huygens. La ley de acción y reacción hace de las leyes de la mecánica un conjunto lógico y completo.

La tercera ley de Newton expone que por cada fuerza que actúa sobre un cuerpo, este realiza una fuerza de igual intensidad, pero de sentido contrario sobre el cuerpo que la produjo. Dicho de otra forma, las fuerzas, situadas sobre la misma recta, siempre se presentan en pares de igual magnitud y de dirección, pero con sentido opuesto.

Este principio presupone que la interacción entre dos partículas se propaga instantáneamente en el espacio (lo cual requeriría velocidad infinita), y en su formulación original no es válido para fuerzas electromagnéticas puesto que estas no se propagan por el espacio de modo instantáneo, sino que lo hacen a velocidad finita.

Es importante observar que este principio de acción y reacción relaciona dos fuerzas que no están aplicadas al mismo cuerpo, produciendo en ellos aceleraciones diferentes, según sean sus masas. Por lo demás, cada una de esas fuerzas obedece por separado a la segunda ley. Junto con las anteriores leyes, ésta permite enunciar los principios de conservación del momento lineal y del momento angular.

1.3.3 ¿Qué es una fuerza?

Cuando tratamos de definir el concepto fuerza, podemos observar que es un concepto difícil de definir, pese a ser muy conocido. Pues bien, todos sabemos que aunque no podamos definir el concepto, sí podemos intuir su significado a través de la experiencia diaria, veamos.

Una fuerza es "algo" que cuando actúa sobre un cuerpo, que posee una masa específica, le provoca un efecto o variación.

Por ejemplo, al levantar pesas, al golpear una pelota con la cabeza o con el pie, al empujar algún cuerpo sólido, al tirar una locomotora de los vagones, al realizar un esfuerzo muscular al empujar algo, etcétera siempre hay un efecto.

Si ahondamos más, podemos observar que el efecto de la aplicación de una fuerza sobre un objeto puede generar:

• Una Modificación del estado de movimiento en que se encuentra el objeto que la recibe,

• O una modificación de su aspecto físico.

Los aspectos antes nombrados no son excluyentes, es decir, que pueden ocurrir ambos efectos en forma simultánea. Es el caso por ejemplo, cuando se patea una lata de bebida: esta lata puede adquirir movimiento, pero al mismo tiempo también puede deformarse.

Como ya consensuamos, la fuerza es un tipo de acción que un objeto ejerce sobre otro objeto (se dice que hay una interacción). Esto puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

— un objeto empuja a otro: un hombre levanta pesas sobre su cabeza
— un objeto atrae a otro: el Sol atrae a la Tierra
— un objeto repele a otro: un imán repele a otro imán
— un objeto impulsa a otro: un jugador de fútbol impulsa la pelota de una patada
— un objeto frena a otro: un ancla impide que un barco se aleje.

• Debe haber dos cuerpos: de acuerdo a lo anterior, para poder hablar de la existencia de una fuerza, se debe suponer la presencia de dos cuerpos, ya que debe haber un cuerpo que atrae y otro que es atraído, uno que impulsa y otro que es impulsado, uno que empuja y otro que es empujado, etc.
Dicho de otra manera, si se observa que sobre un cuerpo actúa una fuerza, entonces se puede decir que, en algún lugar, hay otro u otros cuerpos que constituyen el origen de esa fuerza.

• Un cuerpo no puede ejercer fuerza sobre sí mismo. Si se necesita que actúe una fuerza sobre mi persona, tendré que buscar algún otro cuerpo que ejerza una fuerza, porque no existe ninguna forma de que un objeto ejerza fuerza sobre sí mismo (yo no puedo empujarme, una pelota no puede "patearse" a sí misma).

• La fuerza siempre es ejercida en una determinada dirección: puede ser hacia arriba o hacia abajo, hacia adelante, hacia la izquierda, formando un ángulo dado con la horizontal, etc.

Para representar la fuerza se emplean **vectores**. Los vectores son entes matemáticos que tienen la particularidad de ser direccionales; es decir, tienen asociada

una dirección. Además, un vector posee **módulo,** que corresponde a su longitud, su cantidad numérica y su **dirección** (ángulo que forma con una línea de referencia).
Debido a que la fuerza es una unidad vectorial, entonces se debe recordar que la dirección y sentido de una flecha representa un vector gráficamente a través de una flecha, que se encuentra en la dirección correspondiente.

La definición que utilizaremos en física para la fuerza será la siguiente:

"Fuerza es toda causa capaz de modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo"

1.3.3.1 Clasificación de las fuerzas

Una fuerza puede clasificarse de acuerdo a algunos criterios, de los que destacaremos los siguientes: fuerzas según su punto de aplicación y según el tiempo que dure dicha aplicación. Para comprender un poco mejor de que se tratan ambos criterios, realizaremos una breve descripción de ellos.

1.3.3.1.1 Según su punto de aplicación

Dentro de esta clasificación encontramos dos fuerzas, cuya diferencia radica en el punto de aplicación donde actúan, estas son:

a) Fuerzas de contacto: son aquellas en que el cuerpo que ejerce la fuerza está en contacto directo con el cuerpo que la recibe. Por ejemplo: esta fuerza se ve en casos como cuando golpeamos una pelota con la cabeza, al sujetar algo o tirar algo, etc.

b) Fuerzas a distancia: el cuerpo que ejerce la fuerza y quien la recibe no entran en contacto físicamente. El ejemplo más familiar de una fuerza de este tipo es la atracción gravitatoria terrestre, responsable de que todos los cuerpos caigan hacia el suelo. Otro ejemplo es la fuerza que un imán ejerce sobre otro imán o sobre cualquier objeto metálico.

1.3.3.1.2 Según el tiempo que dura la aplicación de la fuerza

En esta categoría podemos encontrar las siguientes clasificaciones:

a) Fuerzas impulsivas**:** son generalmente de muy corta duración, es decir, que el tiempo de contacto entre el objeto al que se le aplica la fuerza y el cuerpo que le aplica la fuerza es muy breve. Por ejemplo: cuando un tenista golpea una pelota con su raqueta.
b) Fuerzas de larga duración: son las que actúan durante un tiempo comparable o mayor que los tiempos característicos del problema de que se trate, dicho más explícitamente, el tiempo de contacto entre el objeto al que se le aplica la fuerza y el cuerpo que la provoca es mayor. Por ejemplo, el peso de una persona es una fuerza que la Tierra ejerce siempre

sobre una persona y que está presente constantemente durante las 24 horas del día. La fuerza que ejerce un cable que sostiene una lámpara, durará todo el tiempo que la lámpara esté colgando de ese cable. La fuerza que ejerce el cable sobre un teleférico durará mientras este siga colgando y estando en esa posición.

1.3.3.1.3 Según sea interna o externa

Asimismo, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden ser exteriores e interiores.

a) Fuerzas exteriores: son aquellas fuerzas que actúan sobre un cuerpo, y que son ejercidas por otros cuerpos.

b) Fuerzas interiores: son las que una parte de un cuerpo ejerce sobre otra parte de sí mismo.

1.3.4 Unidades de medida de una fuerza

Para poder cuantificar una magnitud física, lo primero que se debe hacer es establecer su unidad de medirla.

En el Sistema Internacional (SI) de unidades la fuerza se mide en newton y su símbolo se representa por una (N). En el sistema CGS (centímetro, gramo, segundo) la fuerza se mide en dinas y su símbolo es (dyn). Por último en el sistema técnico su unidad de medida es el kilopondio, cuyo símbolo se registra como (kp). Un kilopondio es lo que comúnmente se llama un kilogramo, un kilogramo fuerza o simplemente un kilo.

Un newton es la fuerza que, al ser aplicada a un cuerpo de masa 1 Kilogramo, le comunica una aceleración de 1 metro por segundo al cuadrado.

1.3.5 Fuerza como cantidad vectorial

Si buscas la definición de fuerza, podrás observar que se indica que es una cantidad vectorial, pero ¿qué significa esto?

Significa que posee tres componentes:

- ✓ Un valor o módulo: que viene dado por un número y una unidad de medida (25 Newton, por ejemplo).
- ✓ Una dirección: que correspondería a la línea de acción de la fuerza (dirección vertical, por ejemplo).
- ✓ Un sentido: que vendría a ser la orientación, el hacia dónde se dirige la fuerza (hacia arriba, por ejemplo).

Estos tres componentes deben estar siempre incluidos en la información de una fuerza.

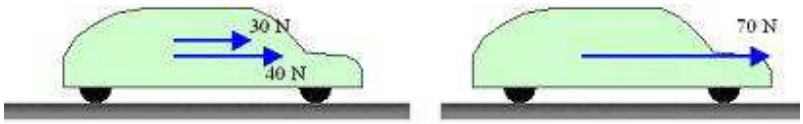
1.3.6 Propiedades de la fuerza

Las fuerzas son cantidades que se pueden sumar y restar. No tiene sentido físico el multiplicarlas o dividirlas. Analicemos algunos casos donde se aplican propiedades matemáticas al concepto de fuerza.

Caso 1:

Si sumas dos fuerzas que van en la misma dirección y en el mismo sentido, entonces la suma es la suma aritmética de ellas. Si sus valores son 40 Newton y 30 Newton, el resultado sería 70 Newton en la dirección y sentido común que tienen.

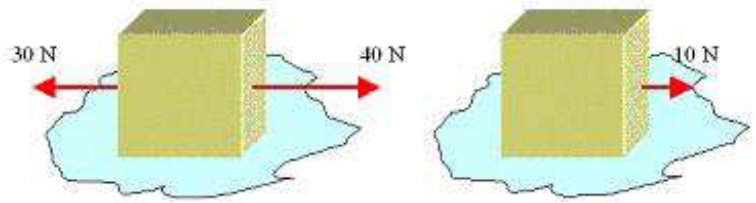
Figura 10



Caso 2:

Si sumas dos fuerzas que van en la misma dirección pero sentidos distintos, una a la derecha y la otra a la izquierda por ejemplo, entonces la suma es la diferencia (Resta) entre ellas. El resultado de esta diferencia debe mantener la misma dirección, pero su sentido dependerá del sentido de la fuerza mayor. Por ejemplo, si el valor de dos fuerzas son 40 Newton a la derecha y 30 Newton a la izquierda, entonces la suma sería 10 Newton a la derecha.

Figura 11



Caso 3:

Si sumas dos fuerzas que van en la misma dirección pero sentidos opuestos y resulta que las dos fuerzas tienen el mismo valor numérico, entonces la suma de ellas dará como resultado el valor 0. En este caso se puede decir que las fuerzas se anulan.
Pero ojo: las dos fuerzas deben estar actuando sobre el mismo cuerpo, de lo contrario no se pueden anular, incluso no podrían sumarse.

Caso 4:

Si las fuerzas que se van a sumar no tienen la misma dirección, el problema se complica bastante y habría que recurrir a procedimientos geométricos e incluso de trigonometría (seno, coseno, tangente). Para ello es recomendable aplicar por ejemplo el teorema de Pitágoras, cuando los vectores formen un triangulo rectángulo.

Recomendación: Cuando graficamos una fuerza que actúa sobre un cuerpo, se dibuja con una flecha partiendo desde el centro del cuerpo que la recibe.

FÍSICA II

UNIDAD I

MECÁNICA VECTORIAL

1.4 Movimiento de una partícula

La ciencia encargada del estudio del movimiento de los cuerpos, recibe el nombre de cinemática. Ésta rama de la física se relacionados específicamente con ciertas variables escalares como el tiempo y con cuatro conceptos vectoriales fundamentales, que son: la posición, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

El movimiento es un fenómeno físico que se define como: Un cambio de posición experimentado por los cuerpos de un sistema, con respecto a ellos mismos o a otro cuerpo que se toma como marco de referencia. Todo cuerpo en movimiento describe una trayectoria.

Observemos un caso y analicemos el concepto de movimiento. Pensemos en un ciclista que está en competencia. Este ciclista estará en movimiento con respecto a la gente que lo ve pasar, pero se encontrará en reposo con respecto a él mismo, pues se encuentra siempre sobre su bicicleta. ¿Entonces el ciclista está en movimiento o detenido? La respuesta correcta seria que su movimiento es relativo, es decir, va a depender del sistema de referencia desde el cual se analice.

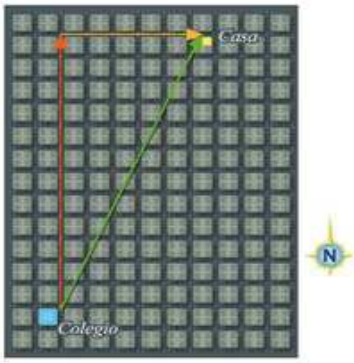
Pues bien, de lo anterior podemos destacar que el movimiento es de carácter relativo, aunque para poder comprender mejor de que se trata, debemos tener claro los conceptos de trayectoria y desplazamiento:

- ✓ Trayectoria o camino recorrido: es la línea continua por la cual un cuerpo se mueve, por lo tanto, esta puede ser recta, curva o enredarse sobre sí misma, ya que el objeto puede pasar varias veces sobre el mismo punto. A la longitud de la trayectoria la denominaremos distancia recorrida.

- ✓ Desplazamiento: se representa por una flecha que está dirigida desde el punto inicial del movimiento hasta un punto cualquiera en el que se encuentre el móvil, y corresponde al cambio de posición de este. En palabras imples el desplazamiento corresponderá a la línea recta que une el punto de partida y el punto de llegada de un cuerpo, siendo siempre el camino más corto que éste puede realizar. El desplazamiento solo depende de los puntos entre los cuales se ha movido el cuerpo, y es independiente del camino seguido por él.

Tanto el desplazamiento como la trayectoria se miden según el sistema internacional (SI) de medidas, donde la unidad de medida de las distancias es el metro o centímetros (sin excluir a todas sus transformaciones).

Figura 12



Veamos un ejemplo:

Pedro, para trasladarse desde el colegio a su casa, realiza el siguiente recorrido: en su bicicleta viaja 12 cuadras al norte y luego 5 cuadras al este. ¿Cuánto mide el camino recorrido y el desplazamiento realizado por Pedro?

Camino recorrido o trayectoria en este caso corresponde al perímetro del triangulo, que en este caso es la suma de todas las cuadras que recorrió Pedro. O sea:

d = 12 cuadras + 5 cuadras
d = 17 cuadras

El desplazamiento, es la distancia recta que existe entre la posición inicial y la final de Pedro. En este caso corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo. Por lo tanto hay que aplicar el teorema de Pitágoras. (Calculo que está debajo del recuadro de la izquierda.)

O sea: $\Delta x = \sqrt{(12)^2 + (5)^2}$

$\Delta x = \sqrt{144 + 25}$

$\Delta x = \sqrt{169}$

$\Delta x =$ 13 cuadras

Para no olvidar:

La distancia es una magnitud escalar, solo nos da el modulo. Por ejemplos si usted recorre 3 m en cualquier dirección y sentido, entonces diremos que acaba de entregar un valor escalar que correspondería a la distancia, cuyo modulo es 3 m.

El desplazamiento en cambio es una magnitud vectorial, o sea nos da el modulo, la dirección y el sentido. Entonces si usted hace el mismo recorrido de 3m dentro del aula, desde el pizarrón hacia el fondo de tu sala, entonces nos estarías entregando el desplazamiento realizado, pues nos entregaste el modulo que es 3 m, la dirección que es el plano horizontal (caminas en el suelo) y el sentido que es desde la pizarra hacia el fondo de la sala.

Revisemos el siguiente ejemplo: una hormiga camina en línea recta sobre una rama, cambiando su posición durante su recorrido como muestra el esquema. Se observa que comienza en A y avanza hasta B, donde gira y regresa hasta C. Allí vuelve a girar para detenerse en D. Determinar:

a) ¿Cuál es el desplazamiento de la hormiga?
b) ¿Cuál es la distancia recorrida por la hormiga durante todo el trayecto?

a) Posición inicial = 0 cm
Posición final = 6cm+12cm = 18 cm

Desplazamiento = 18cm - 0cm = 18 cm

b) Posición inicial = 0 cm
Posición final = 6cm+12cm+8cm+8cm+12cm+12cm = 58cm
Distancia recorrida = 58cm – 0 cm = 58cm (o trayectoria)

1.4.1 Conceptos de rapidez y velocidad

Para comprender la diferencia entre rapidez y velocidad es necesario realizar una breve descripción de ambos conceptos.

Rapidez media: Se define como la razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla. Se representa matemáticamente a través de la siguiente expresión:

$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}(\frac{m}{s})$ en el SI en la vida cotidiana se mide en $\frac{Km}{h}$.

Por lo tanto la rapidez o rapidez media es una magnitud escalar. Analicemos el siguiente ejemplo: si una persona camina 900m, tardándose 50 minutos, calcula su rapidez.

Datos:

d_i = 0 m ; t_i = 0 s

d_f = 900m ; t_f = 50min = 3.000 s

Reemplazo: $$v = \frac{900-0}{3.000-0} = \frac{900}{3.000} = 0{,}3\frac{m}{s}$$

Velocidad media: se define como la razón entre el desplazamiento del cuerpo y el tiempo empleado, queda representada por la siguiente expresión:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}(\frac{m}{s}) \quad \text{; en el SI}$$

Por lo tanto la velocidad media o velocidad es una magnitud vectorial. Analicemos el siguiente ejemplo: un auto viaja al sur y recorre 12.000m, tardándole 300 s, calcula la velocidad.

Datos:
d_i = 0 m ; t_i = 0 s
d_f = 12.000m ; t_f = 300 s

Reemplazo: $v = \frac{12.000 - 0}{300 - 0} = \frac{12.000}{300} = 40\frac{m}{s}$

1.4.2 Aceleración media

Otro concepto importante de revisar cuando hablamos de movimiento, es la aceleración. La aceleración media es aquella que involucra cualquier cambio de velocidad ocurrido durante un cierto intervalo de tiempo. Operacionalmente, la aceleración media se obtiene como la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo, es decir se calcula con la siguiente expresión:

$a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}(\frac{m}{s^2})$ En el SI, la aceleración en una magnitud vectorial.

Llevemos a la práctica lo aprendido desarrollando los siguientes ejemplos:

1. Una moto parte del reposo hacia el sur y alcanza una velocidad de 35 m/s, al cabo de 7 s. Calcula su aceleración.

Datos:
$V_i = 0$ m/s ; $t_i = 0$ s
$V_f = 35$ m/s ; $t_f = 7$ s

Reemplazamos en: $a = \frac{Vf - Vi}{tf - ti} = \frac{35 - 0}{7 - 0} = \frac{35}{7} = 5\ \frac{m}{s^2}$

2. Un auto viaja por la carretera hacia el norte a 30 m/s, al cabo de 20 s cambia la velocidad hasta 10 m/s. Calcula la aceleración.

Datos:
$V_i = 30$ m/s ; $t_i = 0$ s
$V_f = 20$ m/s ; $t_f = 10$ s

Reemplazamos en: $a = \frac{20 - 30}{10 - 0} = \frac{-10}{10} = -1\frac{m}{s^2}$

Importante:
- ✓ Cuando aumenta la velocidad, la aceleración es siempre positiva
- ✓ Cuando disminuye la velocidad, la aceleración es siempre negativa
- ✓ Cuando no hay cambio en la velocidad, no hay aceleración

1.4.3 Tipos de movimientos

Para introducirnos posteriormente en aquellos conceptos más complejos, recordaremos algunos tipos de movimientos que poseen una trayectoria en línea recta.

1. Aquellos movimientos que poseen velocidad constante es decir, no presentan aceleración, reciben el nombre de movimiento uniforme rectilíneo o simplemente MUR.
2. Los movimientos con velocidad variable o sea, que presentan aceleración, adquieren el nombre de movimiento uniformemente acelerado o simplemente MUA.

Movimiento rectilíneo uniforme MUR

El MUR es aquel movimiento en el que un móvil recorre distancias iguales en tiempos iguales. Se cumplen las siguientes condiciones:

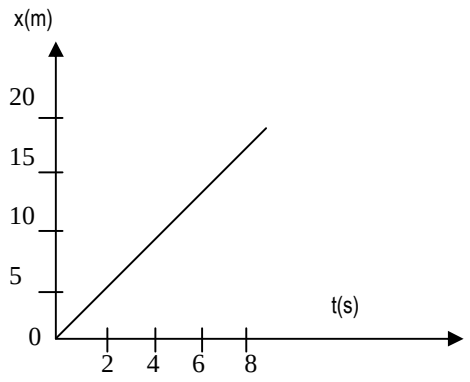
- ✓ Su trayectoria es entre recta
- ✓ Su velocidad es constante
- ✓ No tiene aceleración

Revisemos un ejemplo que permita comprender mejor éste tipo de movimiento:

Se presenta la siguiente tabla con datos que representan la posición y el tiempo recorrido por una persona.

Posición x (m)	0	5	10	15	20
Tiempo t (s)	0	2	4	6	8

El grafico, posición/ tiempo

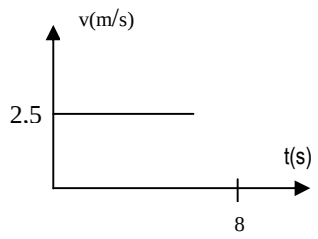


Si observamos el grafico o la tabla de datos, podemos notar que representa un MUR, debido a que la grafica es una línea recta, que parte del origen (0,0) y avanza a medidque la persona camina alejándose de él.

- ✓ Calcularemos la velocidad: Como en un MUR la velocidad es constante, basta calcularla en cualquier punto.

$$v_{2-6} = \frac{15-5}{6-2} = \frac{10}{4} = 2{,}5 m/s$$ = Constante

Grafico velocidad/tiempo



Comprobemos que este movimiento no presenta aceleración:

$$a = \frac{2{,}5-2{,}5}{8-0} = \frac{0}{8} = 0(m/s^2)$$

- ✓ Para que puedas aplicar los conceptos vistos, utiliza estos datos para contestar algunas preguntas con respecto a una caminata realizada por una persona cualquiera, cuyas posiciones y sus respectivos tiempos son indicadas abajo:

Posición x (m)	20	15	10	5	0
Tiempo t (s)	0	3	6	9	12

a) Por qué estos datos representan un MUR
b) ¿Qué significa el punto (0,20)
c) Hacia dónde camina la persona
d) En qué posición se encuentra la persona cuando han transcurrido 9 segundos del recorrido
e) Qué tiempo ha transcurrido cuando la persona llega al origen
f) Grafica la posición/tiempo
g) Calcula la velocidad
h) Grafica la velocidad/tiempo

No olvides que si te dan como información solo un grafico velocidad/ tiempo de un MUR, como el de la figura, se puede determinar la distancia recorrida usando el área bajo la curva, ejemplo:

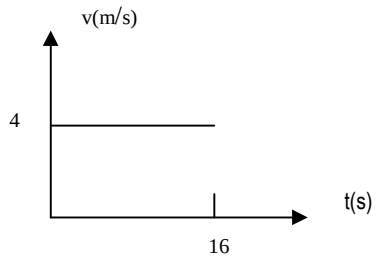
Área del rectángulo = largo · ancho

$= 4\ \frac{m}{s} \cdot 16$ s (simplificando los segundos)

$= 64$ m

Respuesta, el grafico (figura 12) nos indica que la partícula recorrió 64 m

Figura 13

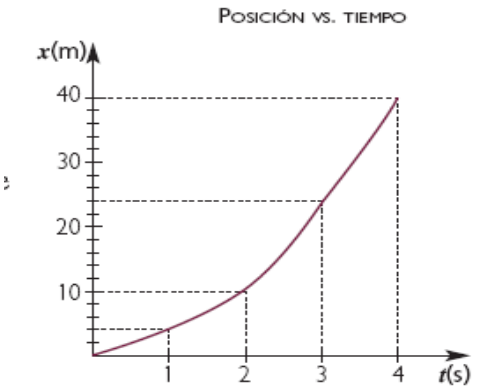


Movimiento rectilíneo uniforme acelerado MUA

El MUA se reconoce porque no se recorren distancias iguales en tiempos iguales, cumpliéndose que:

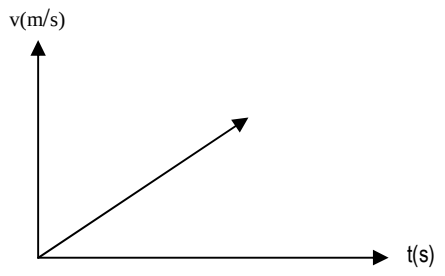
- ✓ Su trayectoria es una línea recta
- ✓ Su velocidad es variable
- ✓ Tiene aceleración

Figura 14



Al analizar el gráfico posición/tiempo, nos damos cuenta que la partícula no recorrió la misma distancia en intervalos iguales de tiempo, esto quiere decir que su velocidad fue variando. Cuando el movimiento que experimenta un cuerpo es una trayectoria rectilínea y su velocidad experimenta variaciones iguales en intervalos de tiempo también iguales, se dice que tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, que se abrevia MUA, donde el gráfico "posición/tiempo", que representa el movimiento, ya no es una recta, sino una curva como la de la imagen.

La gráfica aceleración /tiempo de un MUA es la siguiente:



Fórmula para determinar la distancia recorrida en un MUA

$$x = d = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

donde:

- ✓ x = d = distancia recorrida de la persona o partícula, auto, etc, unidad en metros en el SI o en centímetros en el sistema CGS.
- ✓ v_i = velocidad inicial de la persona o partícula, auto, etc.; su unidad de medida es $\frac{m}{s}$ en el SI y $\frac{cm}{s}$ en el sistema CGS.
- ✓ a = aceleración de la persona o partícula, auto, etc.; su unidad de medida es $\frac{m}{s^2}$ en el SI y $\frac{cm}{s^2}$ en el sistema CGS
- ✓ t = tiempo del recorrido, su unidad de medida en ambos sistemas es el segundo

Ejemplo: Un auto viaja hacia el Norte partiendo del reposo, a los 6 minutos del recorrido su velocidad es de 30 m/s. Determina la distancia que recorrió el auto en los 6 minutos de su recorrido.

- ✓ Primero: anotar los datos;
- ✓ Segundo: verificar que todos estén en un mismo sistema,
- ✓ Tercero: calcular la aceleración y remplazar en la ecuación respectiva.

Datos:

v_i = 0 m/s ; $t_i = 0$ s

$v_f =$ 30 m/s ; t_f = 6 min = 360 s

d = ?

Para determinar la distancia, primero debemos calcular la aceleración:

$$a = \frac{30-0}{360-0} = \frac{30}{360} = \frac{3}{36} = 0{,}08\frac{m}{s^2}$$

Luego reemplazamos en la formula de la distancia:

$$X_f = X_i + V_o \bullet t + ½\, a \bullet t^2$$

Considere que X_f es la posición final de un cuerpo, por lo que es igual que la distancia total recorrida por un móvil (X_f = d). Reemplazamos todos los datos y la formula queda como sigue:

$$d = 0 \cdot 360 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}08 \cdot 360^2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}08 \cdot 129600 = \frac{1}{2} \cdot 10368 = 5.184 \text{ m}$$

Respuesta: el auto recorrió 5.184 en los primeros 6 minutos del recorrido.

1.5 Movimiento de una partícula en una trayectoria curva

Como el movimiento de una partícula en una trayectoria curva es un movimiento complejo y por lo tanto se necesita entregar algunas nociones básicas que permitan su mejor comprensión.

1.5.1 Nociones básicas

- ✓ Sistemas de referencia:

Se dice que el movimiento es relativo, por ende, éste depende del objeto desde el cual se está observando el movimiento del cuerpo al cual nos hemos referido. A este objeto se le denomina observador, de manera que distintos observadores aprecian en general distintos movimientos para un mismo objeto. Por ejemplo, el movimiento de una pelota que dejamos caer desde un auto es visto de manera diferente por un observador ligado a tierra que por otro ligado al auto.

Definido el observador, utilizamos la cinemática para describir el movimiento. Lo primero es definir a un observador como un sólido rígido o sistema de puntos materiales cuyas distancias relativas permanecen siempre constantes. A pesar de que en la naturaleza no existen cuerpos totalmente rígidos, esta simplificación se puede aplicar a los sistemas materiales en los cuales la variación en las distancias relativas de sus partículas es despreciable desde el punto de vista macroscópico. En todo caso, para el desarrollo de la teoría se puede considerar siempre la existencia de sólidos ideales para descripción del movimiento.

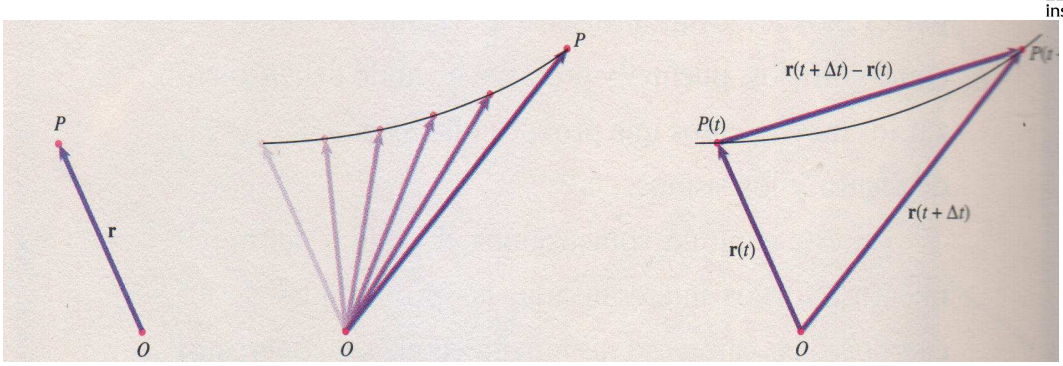
Entonces dado un sólido rígido cualquiera, se denomina sistema de referencia al conjunto formado por un punto “O” del sólido y una recta ó dos ó tres del mismo que pasan por “O”. A este punto se le denomina origen del sistema de referencia. Estas rectas son ortogonales, por lo que el sistema de referencia se denomina rectangular.

El origen del sistema es arbitrario, por lo que un observador puede definir infinitos sistemas de referencia. Por otro lado, cada sistema de referencia está ligado a un único observador y cada punto “P” ubicado dentro del sistema, obtendrá un único trío de números que indiquen su posición en el sistema de referencia, estos números recibirán el nombre de coordenadas de un punto (x,y,z).

- ✓ Vector de posición ó radio vector:

Se puede definir la posición de un punto “P”, escogiendo un punto de referencia “O” y representando el vector de posición “r” de O a P, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, (Figura 14)

Figura 15



Suponiendo que el punto “P” se encuentra en movimiento con respecto al punto “O”, de manera que “r” es una función del tiempo “t” (Fig. 1.b), esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$r = f(t) = r(t)$$

La ecuación que liga al vector **r** con el tiempo “t” se llama Ecuación del Movimiento o Ley del Movimiento de “P”. Como el vector “r” es función del tiempo “t”, las componentes del mismo también son función del tiempo, por lo tanto, la expresión anterior es equivalente a la siguiente:

$$\mathbf{r} = x_{(t)}\,\mathbf{i} + y_{(t)}\,\mathbf{j} + z_{(t)}\,\mathbf{k}$$

- ✓ Curva indicatriz ó trayectoria

En cinemática la trayectoria es el conjunto de todas las posiciones por las que pasa un cuerpo en movimiento, o sea, es el lugar geométrico de los extremos del vector de posición.

De acuerdo a la expresión:

$$\mathbf{r} = x_{(t)}\,\mathbf{i} + y_{(t)}\,\mathbf{j} + z_{(t)}\,\mathbf{k}$$

Las componentes del vector de posición *x, y* y *z,* son también función del tiempo, por lo cual:

$$X = f_{(t)},\ y = f_{(t)}\ yz = f_{(t)}$$

a estas expresiones se les conoce como las ecuaciones paramétricas de la trayectoria ó ecuaciones cartesianas del movimiento.

Si en las ecuaciones paramétricas de la trayectoria se elimina el parámetro “t”, se obtiene la ecuación cartesiana de la misma, que en general responderá a la forma:

$$f_{(x,y,z)} = 0$$

La trayectoria puede ser recta o aproximarse a una curva continua; en el primero de los casos estamos en presencia de un movimiento rectilíneo y en el caso de una trayectoria curva se habla de un movimiento curvilíneo.

La trayectoria curvilínea puede ser bidimensional (plana) o tridimensional (con torsión). En las trayectorias curvas es importante determinar la clase o grado de diferenciabilidad, si la curva es *k* veces diferenciable y las derivadas *k*-ésimas son continuas.

Como algunas de las curvas son muy conocidas, solemos asociarlas con estos nombres:

- ✓ Movimientos circulares
- ✓ Movimientos elípticos
- ✓ Movimientos parabólicos
- ✓ Movimiento pendular
- ✓ Movimiento oscilatorio
- ✓ Movimientos ondulares

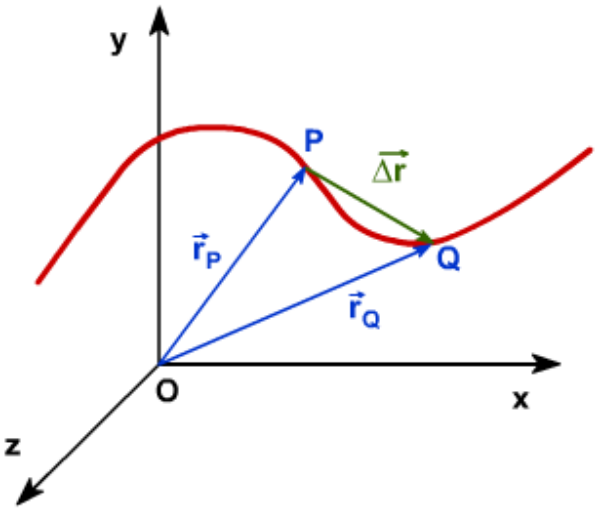
✓ Espacio recorrido y vector desplazamiento:

Defínase trayectoria como la línea determinada por las sucesivas posiciones del móvil en el curso de su movimiento.

Espacio recorrido es el camino que realiza el móvil medido sobre la trayectoria.

Vector desplazamiento es el vector definido por la posición inicial, que será el origen del vector, y la posición final, que será su extremo. Su símbolo es $\Delta\mathbf{r}$.

Figura 16



En el gráfico se observa que si un móvil se desplaza entre los puntos "P" y "Q" de la trayectoria, efectúa un desplazamiento Δ**r** y recorre un arco de longitud S. Observar el carácter escalar del arco frente el al vectorial del desplazamiento. Donde: $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$ es el vector desplazamiento.

- ✓ Velocidad

La velocidad se define como la magnitud física que expresa la variación de la posición de un objeto en función del tiempo, o el desplazamiento del objeto por unidad de tiempo. Suele representarse por la letra ***v***. La velocidad puede distinguirse según el lapso considerado, por lo cual se hace referencia a la velocidad instantánea, la velocidad media, etc. Su unidad de medida, en el Sistema Internacional de Unidades, es el metro por segundo (m/s).

En el Figura 15 el vector desplazamiento que indica el cambio de posición del punto "P", es: $\vec{\Delta r} = \vec{r}_{(t+\Delta t)} - \vec{r}_{(t)}$, por lo tanto la velocidad de "P" respecto a "O" en el tiempo "t" se define como:

$$\vec{V} = \frac{d_{\vec{r}}}{d_t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{d_t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_{(t+\Delta t)} - \vec{r}_{(t)}}{\Delta t}$$

Donde:

r *(t* + Δ*t)* – **r** *(t)* es el cambio de posición o desplazamiento de "P", durante el intervalo de tiempo Δt.

Si la velocidad es la razón de cambio de la posición "P" respecto a "O", o sea la derivada del vector desplazamiento con respecto al tiempo, lo que indica que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.

La ecuación anterior equivale a las cartesianas siguientes:

$$\dot{x} = \frac{d_x}{d_t} = f_1'(t) \quad ; \quad \dot{y} = \frac{d_y}{d_t} = f_2'(t) \quad ; \quad \dot{z} = \frac{d_z}{d_t} = f_3'(t)$$

Como expresión analítica de la velocidad se puede decir:

$$v = \vec{i}\,\dot{x} + \vec{j}\,\dot{y} + \vec{k}\,\dot{z}$$

La magnitud de la velocidad se denomina rapidez y su valor se determina mediante la fórmula:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Otra forma de esta expresión es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{d\dot{x}^2 + d\dot{y}^2 + d\dot{z}^2}{dt^2}} = \frac{ds}{dt}$$

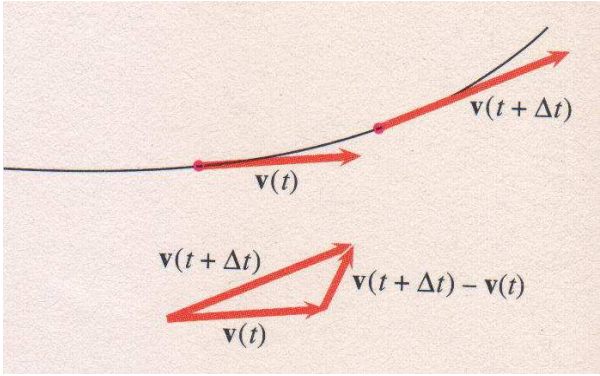
En la cual “S” representa la longitud descrita, o sea, una distancia medida sobre la trayectoria.

Las componentes del vector velocidad nos indican en qué forma está ocurriendo el movimiento, el valor positivo de la componente indica que la correspondiente coordenada crece, o sea, que la proyección del móvil sobre dicho eje se aleja del origen; un valor negativo indica que la correspondiente coordenada decrece y, por último, un valor nulo indica una coordenada estacionaria, o sea, que la proyección del móvil se halla en reposo.

- ✓ Aceleración

La aceleración es una magnitud vectorial que nos indica el ritmo o tasa con que aumenta o disminuye la velocidad de un móvil en función del tiempo. Sus dimensiones son longitud/tiempo^2 y como unidades, según el sistema internacional, se utiliza el m/s^2.

Figura 17



También se puede definir la aceleración como el vector derivada de la velocidad con relación al tiempo, o sea, la segunda derivada del vector de posición con respecto al tiempo.

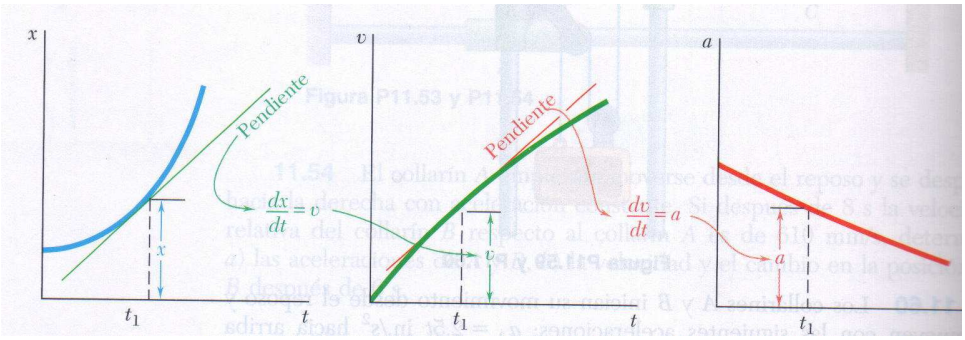
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Análogamente a lo expresado para las velocidades, un valor negativo de una componente de la aceleración indica que la componente de la velocidad sobre tal eje disminuye; un valor positivo es signo de que la correspondiente de la velocidad aumenta, mientras que un valor nulo de la aceleración para un instante dado corresponderá a un valor de la velocidad que es un máximo o un mínimo. En el diagrama de los espacios, el instante para el cual la aceleración es nula, corresponde a un punto de inflexión.

- ✓ Interpretación geométrica

Las fórmula fundamentales $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d_t}$ y $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d_t} = \frac{d^2\vec{r}}{d_t^2}$ tienen un significado geométrico.

Figura18



La primera fórmula expresa que la velocidad en cualquier instante es igual a la pendiente de la curva “x-t”en el mismo instante. La segunda indica que la aceleración es igual a la pendiente de la curva “v-t”, Estas dos propiedades pueden utilizarse para determinar de manera gráfica las curvas “v-t” y “a-t” de un movimiento cuando se conoce la curva “x-t”.

1.5.2 Movimiento en una trayectoria curva

En el movimiento rectilíneo, los vectores de posición, velocidad y aceleración, están descritos por sus respectivos escalares:

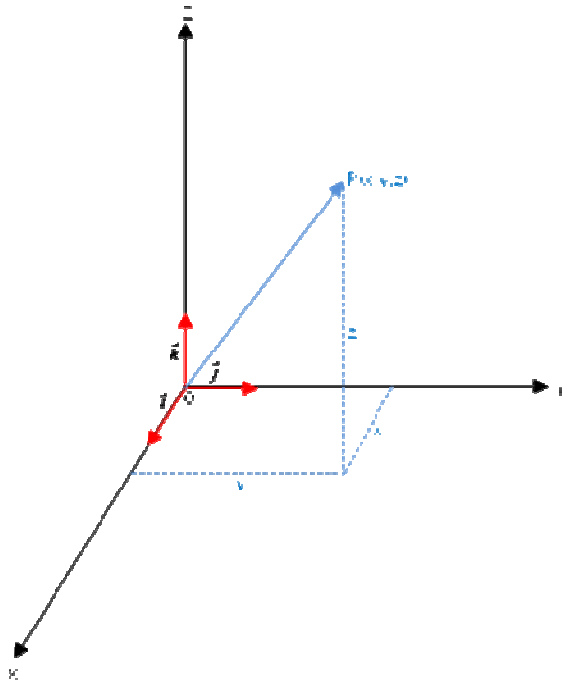
$$\vec{r} = rx_{\vec{i}} + ry_{\vec{j}} + rz_{\vec{k}}$$
$$\vec{v} = vx_{\vec{i}} + vy_{\vec{j}} + vz_{\vec{k}}$$
$$\vec{a} = ax_{\vec{i}} + ay_{\vec{j}} + az_{\vec{k}}$$

En el caso del movimiento curvilíneo se debe especificar además de las magnitudes, las direcciones de éstos vectores, por lo cual se requiere de un sistema coordenado para expresarlos en función de sus componentes escalares, que son:

- ✓ Coordenadas cartesianas

Sea $\vec{r}$ el vector de posición de un punto “P”de coordenadas P(x,y,z):

Figura 19



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Si el sistema coordenado no gira, para la velocidad se tiene:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d_t} = \frac{d_x}{d_t}\vec{i} + \frac{d_y}{d_t}\vec{j} + \frac{d_z}{d_t}\vec{k}$$

ó lo que es lo mismo:

$$\vec{v} = vx_{\vec{i}} + vy_{\vec{j}} + vz_{\vec{k}}$$

Donde:

$$v_x = \frac{d_x}{d_t}; \quad v_y = \frac{d_y}{d_t}; \quad v_z = \frac{d_z}{d_t}$$

La aceleración de “P” es:

$$\vec{a} = ax_{\vec{i}} + ay_{\vec{j}} + az_{\vec{k}}$$

Donde:

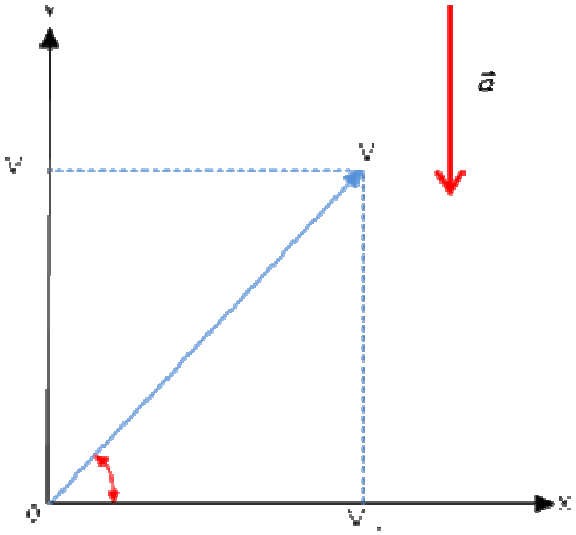
$$a = \frac{dv_x}{d_t}; \quad a = \frac{dv_y}{d_t}; \quad a_z = \frac{dv_z}{d_t}$$

✓ Caso de un proyectil

Si un cuerpo se dispara al aire y la resistencia de éste es insignificante, su aceleración será igual a la aceleración de la gravedad "g". De acuerdo al "Principio de independencia de movimientos", formulado por Galileo Galilei, el lanzamiento de un proyectil se puede estudiar como resultado de la composición de dos movimientos:

1. Uniforme a lo largo del eje "X"
2. Uniformemente acelerado a lo largo del eje vertical "Y"

Figura 20



En el gráfico $a_x = 0$; $a_y = - g$; $a_z = 0$.

Suponiendo que en el tiempo t = 0, el proyectil se encuentra en el origen "O", tiene velocidad "V_0" y forma un ángulo "θ_0" sobre la horizontal; se tiene:

Velocidad, aceleración y posición en el eje “X”

$$\cos\theta_o = \frac{V_{0x}}{V_0} \;;$$

$$\mathbf{V_{0x} = V_0 . \cos\theta_0}$$; Velocidad en el eje “X”

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d_{Vx}}{d_t} = 0$$; Aceleración en eje “X”

$$V_x = \frac{d_x}{d_t}$$

Pero:

$$V_{0x} = V_0 . \cos\theta_0 \,,$$ por tanto:

$$\frac{d_x}{d_t} = V_0 . \cos\theta_0 \;\rightarrow\; d_x = V_0 . \cos\theta_0 . d_t \;\rightarrow\; \int_0^x d_x = \int_0^t V_0 . \cos\theta_0 . d_t$$

$$\mathbf{x = V_0 . \cos\theta_0 . t}$$ Posición en el eje “X”

Velocidad, aceleración y posición en el eje “Y”:

$$\operatorname{sen}\theta_o = \frac{V_{0y}}{V_0} \;\rightarrow\; V_{0y} = V_0 . \operatorname{sen}\theta_o$$

En t = 0, y = 0 y $V_{oy} = V_o \operatorname{sen}\theta_o$

$$a_y = \frac{d_{Vy}}{d_t}$$ pero: $$a_y = -g \;\rightarrow\; \frac{d_{Vy}}{d_t} = -g \;\rightarrow\; d_{Vy} = -g d_t$$

$$\int_{V_{0y}}^{V_y} d_{Vy} = \int_{t_0}^{t} -g . d_t \;\rightarrow\; V_y - V_{0y} = -g . t \;\rightarrow\; V_y - V_0 . sen\theta_0 = -g . t$$

$$V_y = V_0.sen\theta_0 - g.t$$ Aceleración en eje “Y”

$$V_y = \frac{d_y}{d_t} \rightarrow d_y = V_y.d_t \rightarrow \int_0^y d_y = \int_0^t (V_0.sen\theta_o - gt).d_t$$

$$y = V_0.sen\theta_o.t - \frac{1}{2}g.t^2$$ Posición en el eje “Y”

Ecuación de la trayectoria:

$$x = V_0.\cos\theta_0.t \qquad y = V_0.sen\theta_o.t - \frac{1}{2}g.t^2$$

Despejando el parámetro “t”, se tiene:

$$t = \frac{x}{V_0.\cos\theta_0}$$

Sustituyendo el valor de “t” en la ecuación de “y”

$$y = V_0.sen\theta_o.\frac{x}{V_0.\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_0.\cos\theta_0}\right)^2 = \frac{x.V_0.sen\theta_o}{V_0.\cos\theta_0} - \frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\theta_0}$$

$$y = x.tg\theta_0 - \frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\theta_0}.x^2$$

1.5.2.1 Movimiento circular de una partícula

El movimiento circular está presente en la vida cotidiana en múltiples elementos que giran como motores, manecillas del reloj, engranajes, looping de las montañas rusas y las ruedas son algunos ejemplos que lo demuestran.

Para estudiar un movimiento como éste es necesario definir el vector velocidad (**v**) en cada instante; Se debe conocer su módulo o magnitud, la dirección de **v** que es la recta

tangente a la trayectoria en el punto que la partícula ocupa en el instante considerado, y su sentido es del movimiento de la partícula en ese instante.

El sentido y dirección de **v** cambian constantemente ya que varían la dirección y sentido de la tangente a la curva. Un cuerpo se moverá según una trayectoria curva, siempre y cuando la aceleración existente en el cuerpo tenga una componente perpendicular a la dirección del movimiento. Esta aceleración perpendicular a la velocidad se denomina aceleración centrípeta ($\mathbf{a_c}$) y está siempre dirigida hacia el centro de la trayectoria. Esta aceleración también suele recibir el nombre de aceleración radial o aceleración normal, pues tiene la dirección del radio de curvatura de la trayectoria en el punto dado, y apunta hacia el centro de la curva.

La aceleración tangencial ($\mathbf{a_T}$) es un vector con la misma dirección de **v**. Si una partícula está moviéndose por una curva cualquiera posee una aceleración instantánea cuyas componentes son: la aceleración normal ($\mathbf{a_T}$) de dirección perpendicular **v** y otra tangencial ($\mathbf{a_T}$) de dirección igual a la de **v**, la velocidad de la partícula cambia tanto en dirección y sentido como en módulo.

El movimiento circular se puede diferenciar en las siguientes categorías:

✓ Movimiento Circular Uniforme:

Un objeto físico realiza un movimiento circular uniforme cuando describe circunferencias de radio determinado con rapidez constante. Es decir, el objeto físico recorre en la circunferencia arcos iguales en intervalos de tiempos iguales, sea estos tiempos grandes o pequeños.

Algunos ejemplos cotidianos de movimiento circular uniforme pueden ser el movimiento de un electrón que gira en torno al núcleo del átomo de hidrógeno; el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra; el movimiento de una partícula dispuesto sobre el plato de un tocadiscos; el movimiento de un objeto cualquiera que permanece fijo sobre la superficie de la Tierra, pues esta rota uniformemente alrededor de su eje.

Si hacemos girar una piedra atada al extremo de una cuerda y además de eso, el módulo de la velocidad permanece constante, entonces se puede afirmar que la piedra está dotada de un movimiento circular uniforme (MCU). Por lo tanto en este movimiento la velocidad tiene magnitud constante, pero su dirección varía en forma continúa.

Existen dos conceptos que son imprescindibles, el periodo y la frecuencia, sus definiciones son:

- Periodo (T): Tiempo que la partícula tarda en da una vuelta completa. La fórmula que la representa es $T = 1/n$, donde n representa el n° de vueltas.
- Frecuencia (f): n° de vueltas o revoluciones que da la partícula en movimiento por unidad de tiempo. Su fórmula es $f = n / T$.

Como podemos observar el periodo y la frecuencia son valores inversos, por lo que:

$$T = 1 / f \qquad y\ f = 1 / T$$

Las unidades del periodo (T) son unidades de tiempo (seg), las unidades de la frecuencia (f) son las inversas de tiempo y se describen seg^{-1}. También es de uso frecuente revoluciones por minutos (r.p.m o rev/min), revoluciones por segundos (r.p.s o rev/seg) para referirse a la frecuencia.

Una revolución = 1 rev = 2p rad. Otra unidad de uso frecuente es el Hertz (se abrevia Hz), que expresa el número de vueltas por segundo.

Velocidad tangencial y velocidad angular

Velocidad Tangencial o Lineal en un movimiento circular uniforme (MCU) la velocidad tangencial cambia continuamente de dirección y sentido, pero la rapidez es constante porque la longitud del vector velocidad tangencial no varía.

Si se tiene un objeto físico cualquiera que describe circunferencias de centro O y radio r, con MCU en el sentido contrario del movimiento de las agujas del Reloj, la velocidad tangencial o lineal es aquella que tiene el objeto físico en un instante cualquiera del movimiento circular.

Se representa por un vector tangente a la circunferencia en el punto que se considere. Se puede observar que en el MCU la velocidad tangencial o lineal no es constante, pues el vector que representa dicha velocidad cambia continuamente de dirección y sentido. El módulo de la velocidad tangencial en MCU se mide por el cociente entre el arco descrito por el móvil y el tiempo empleado en recorrerlo.

Ahora bien, la velocidad angular se puede analizar de la siguiente manera: se considera un objeto físico que describe circunferencias de centro O y radio r con MCU. Si en un intervalo de tiempo t el objeto físico pasa de la posición A a la posición B describiendo el arco AB y el radio r barre el ángulo α. Como α tiene su vértice en el centro de la circunferencia, se cumple que la medida del ángulo α es igual a la medida del arco AB. Por consiguiente, si el objeto físico describe áreas iguales, se tendrá que el radio r barre ángulos iguales en tiempo iguales, por lo que se habla de una Velocidad Angular del objeto físico. Una característica que distingue a este tipo de movimientos es que el ángulo que recorre una partícula por unidad de tiempo es constante, por lo que su velocidad angular es constante.

La velocidad angular en un movimiento circular uniforme se mide por el cociente entre el ángulo recorrido por el radio y el tiempo empleado en barrerlo. Designando la velocidad angular por la letra griega ω (omega) se tiene: $\omega = \alpha / t$.

El ángulo α puede medirse en grados o en revoluciones (1 Rev. = 360º), o también en cualquier otra unidad de medida angular.

En física es de mucho uso medir los ángulos en la unidad llamada Radián. Un Radián es un ángulo central de una circunferencia que intercepta un arco de dicha circunferencia, cuya longitud es igual al radio de la misma. Si se quiere determinar a cuántos radianes equivale un ángulo cualquiera α basta calcular cuantas veces cabe la longitud del radio en la longitud del arco.

El angulo se puede calcular: $\alpha = L / r$ (rad) ; Siendo L la longitud del arco y la longitud del radio es r.

Para que la velocidad angular quede perfectamente definida se tiene que conocer su dirección y sentido. La dirección de **ω** está dada por la dirección del eje de rotación o una recta cualquiera paralela a él y su sentido se asume positivo si el cuerpo gira en sentido contrario a las agujas del reloj, y negativo si lo hace en el mismo sentido de las agujas del reloj. Este sentido se obtiene mediante una convención: se coloca la mano derecha, de tal manera que el pulgar extendido coincida con el eje de rotación y los otros cuatro dedos indiquen el sentido del movimiento del cuerpo; el sentido del vector **ω**.

El vector así definido es la velocidad angular. Cuanto mayor sea la velocidad angular del movimiento circular de una partícula, mayor será el ángulo que barre el radio vector de la partícula por unidad de tiempo; es decir, estará girando con mayor rapidez.

Otra manera de evaluar la velocidad angular, consiste en considerar que la partícula realiza una vuelta completa o revolución. En este caso el ángulo descrito será $\Delta\alpha = 2\pi$ rad y el intervalo de tiempo será de un período, o sea $\Delta t = T$, así:

$$\omega = 2\pi / T$$

Como el ángulo se mide en radianes, en grados o en vueltas y el período se mide en segundos, las unidades de ω serán: Grados/seg; rad/seg; revolución/minuto.

Se observa que la expresión de la rapidez angular depende exclusivamente de T; luego, quiere decir que esta velocidad es la misma para todos los puntos que están en rotación alrededor del eje y que en cualquier situación la velocidad angular es un vector.

Existe una relación entre los módulos de la Velocidad tangencial y la velocidad angular, la que sería:

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi n / t \quad ; \quad V = 2\pi r n / t}$$

Si en cualquiera de estas ecuaciones n = 1, entonces se tendrá que en cada vuelta t = T. Sustituimos t por T en ambas ecuaciones (rapidez angular y rapidez tangencial) en función del período T, entonces:

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi / T \quad ; \quad V = 2\pi r / T}$$

Como la frecuencia y el periodo se relacionan ($f = 1/T$), podemos sustituir dicha igualdad en las ecuaciones de rapidez angular y circular en función de la frecuencia, lo que nos arrojaría:

$$\omega = 2 \pi f \quad ; \quad V = 2 \pi f r$$

Revisemos un ejemplo: una rueda gira con una rapidez angular de $\omega = 500$ rad/seg. Calcular su periodo y su frecuencia.

- Primero calcularemos la velocidad angular en función del periodo, es decir, despejaremos la formula y luego reemplazaremos los datos.

  Despejamos : $\omega = 2 \pi / T$; $T = 2 \pi / \omega$

  Reemplazamos : $T = 2 \pi / \omega = 2 (3{,}14 \text{ rad}) / 500 \text{ rad/seg}$

  Resolvemos : $T = 1{,}25 \times 10^{-2}$ seg

- Obtenida la frecuencia puedo calcular el periodo:

  $f = 1 / T = 1 / (1{,}25 \times 10^{-2} \text{ seg})$

  $f = 79{,}6$ rev/seg

1.6 Cinemática en coordenadas cartesianas, plano polares y tangente – mormal

Como ya dijimos al principio la cinemática es una rama de la física dedicada al estudio del movimiento de los cuerpos en el espacio, sin atender a las causas que lo producen (lo que llamamos fuerzas). Pues bien, dentro de todos los movimientos existentes, podemos encontrar un subconjunto muy importante, que es el de los movimientos planos, definidos por la condición de que la velocidad y la aceleración estén siempre contenidas en el mismo plano.

Caracterización del movimiento plano

Un movimiento que transcurre en un plano, no tiene por qué ocurrir en uno de los planos coordenados, lo que implica que sus coordenadas tampoco deben ser necesariamente las comunes (*x* e *y* por ejemplo). Lo que se quiere explicar es que estas condiciones no son suficientes como para establecer que el movimiento sea plano.

Entonces ¿qué nos indica que un movimiento es plano? Bueno, para caracterizar cuándo un movimiento es plano tenemos dos técnicas:

- ✓ El vector velocidad y el vector aceleración definen un plano. Se trata de que este plano siempre sea el mismo. Para ello el vector unitario perpendicular al plano es:

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

debe ser independiente del tiempo. A partir de la velocidad y la aceleración se halla $\vec{B}$. Si es evidente que es constante, o su derivada respecto al tiempo es nula en todo momento, entonces el movimiento es plano.

$$\vec{B} \neq \vec{B}(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{movimiento plano}$$

Equivalentemente, en lugar de la velocidad y la aceleración pueden emplearse los vectores tangente y normal.

$$\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B} \neq \vec{B}(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{movimiento plano}$$

- ✓ La otra forma consiste en observar que, puesto que la velocidad y la aceleración deben estar siempre en el mismo plano, la derivada respecto al tiempo de la aceleración (que nos da cómo varía ésta) también debe encontrarse en el mismo plano. Por tanto, debe ser ortogonal al vector $\vec{B}$definido anteriormente. Esto nos lleva a la condición vectorial:

$$(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = 0$$

En términos de las componentes cartesianas, esta condición se puede escribir:

$$\begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ a_x & a_y & a_z \\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{movimiento plano}$$

Por ejemplo, consideremos el movimiento en tres dimensiones

$$\vec{r} = At\vec{\imath} + Bt^3\vec{\jmath} + (Ct + Dt^3)\vec{k}$$

¿Se trata de un movimiento plano? No lo parece porque las tres componentes son no nulas y además varían de diferente manera. Hallamos la velocidad, la aceleración y la derivada de ésta respecto al tiempo:

$$\vec{v} = A\vec{\imath} + 3Bt^2\vec{\jmath} + (C + 3Dt^2)\vec{k} \qquad \vec{a} = 6Bt\vec{\jmath} + 6Dt\vec{k} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = 6B\vec{\jmath} + 6D\vec{k}$$

Construimos el determinante con los tres vectores

$$(\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = \begin{vmatrix} A & 3Bt^2 & C + 3Dt^2 \\ 0 & 6Bt & 6Dt \\ 0 & 6B & 6D \end{vmatrix} = 0$$

Puesto que la segunda y la tercera fila son proporcionales, el determinante es nulo. Por tanto, el movimiento es plano, aunque no lo pareciera en principio.

1.6.1 Coordenadas cartesianas, plano polares y tangente – mormal

Ahora bien, todo movimiento necesita un sistema de coordenadas que lo represente. En el caso del movimiento en el plano podemos encontrar distintos sistemas de coordenadas que pasaremos a explicar a continuación.

1.6.1.1 Coordenadas cartesianas

En el caso del movimiento plano, puede elegirse un sistema de referencia en el que el plano de movimiento sea el OXY. En este caso, la posición, la velocidad y la aceleración pueden escribirse como vectores de solo dos componentes:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} \\ \vec{a} &= \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} \end{aligned}$$

1.6.1.2 Coordenadas polares

En el caso de movimiento en un plano, es útil considerar las coordenadas polares para describir el movimiento de la partícula $\{\rho, \varphi\}$. Estas coordenadas son la distancia al origen del sistema de referencia (ρ) y el ángulo que forma el vector de posición con el eje *OX* (φ).

Se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante las relaciones:

$$x = \rho\cos(\varphi) \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

y sus inversas:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Las coordenadas polares llevan asociadas una base vectorial $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi\}$, que apuntan respectivamente en la dirección radial (en la que varía ρ) y acimutal (en la que varía φ). Esta base se relaciona con la canónica por el cambio de base:

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \cos(\varphi)\vec{\imath} + \operatorname{sen}(\varphi)\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\varphi &= -\operatorname{sen}(\varphi)\vec{\imath} + \cos(\varphi)\vec{\jmath} \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \operatorname{sen}(\varphi) \\ -\operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{pmatrix}$$

y su inverso:

$$\begin{aligned} \vec{\imath} &= \cos(\varphi)\vec{u}_\rho - \operatorname{sen}(\varphi)\vec{u}_\varphi \\ \vec{\jmath} &= \operatorname{sen}(\varphi)\vec{u}_\rho + \cos(\varphi)\vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\varphi \end{pmatrix}$$

Figura 21

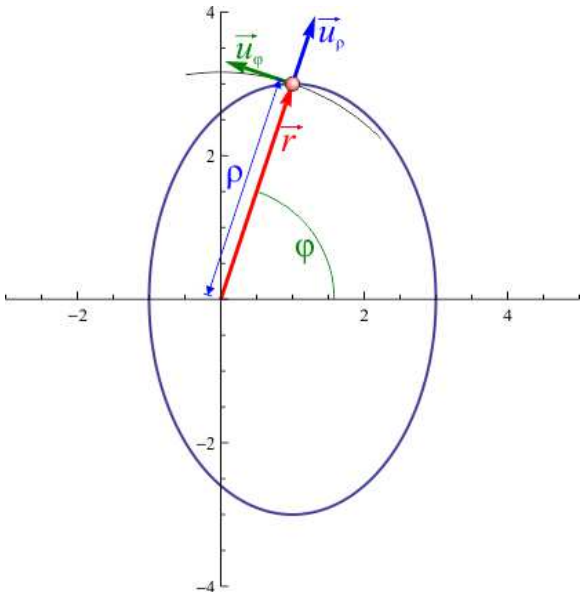
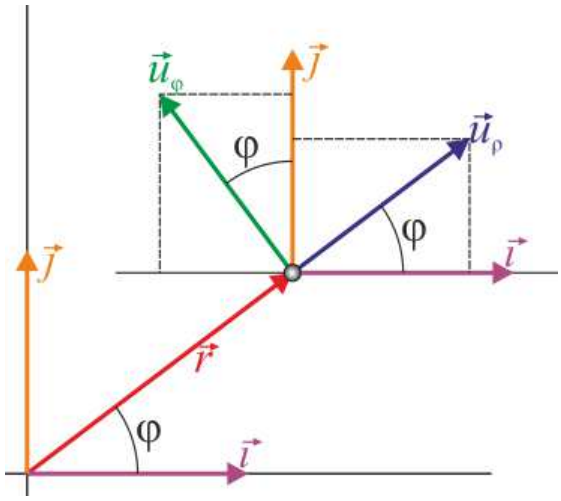
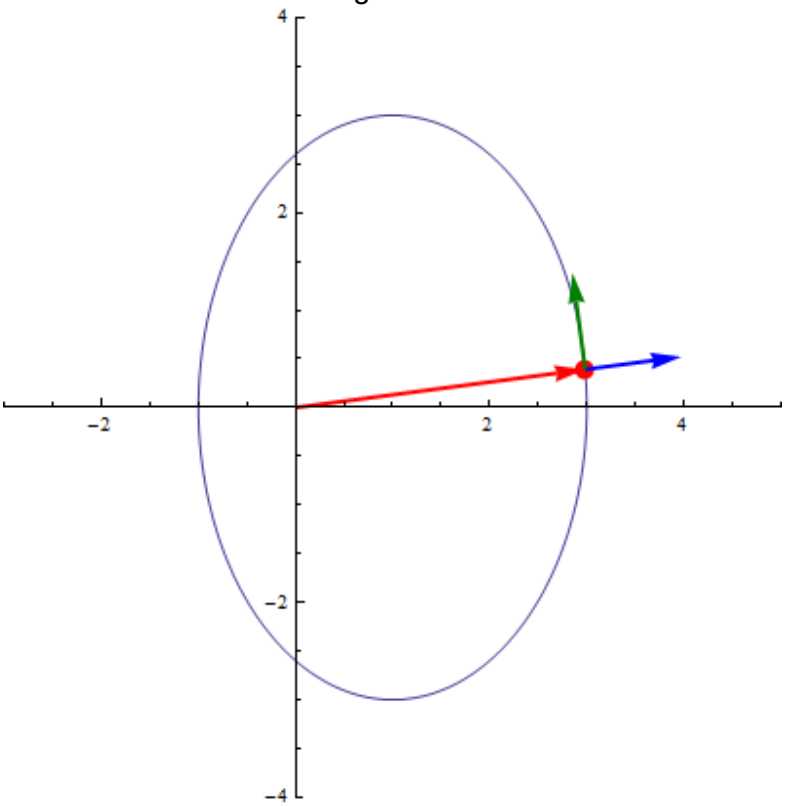


Figura 22



Los vectores unitarios en polares dependen de la posición. Aunque tengan el mismo nombre, el vector $\vec{u}_\rho$ en un punto es diferente del vector $\vec{u}_\rho$ en otro. Por ello, hay que tener un cuidado infinito a la hora de operar con vectores en coordenadas polares.

Figura 23



En particular, cuando consideramos el movimiento de una partícula, su posición, y por tanto los vectores de la base en polares, son funciones del tiempo. Por ello, cuando

aparezca una derivada o una integral, habrá que tenerlos en cuenta. Sus derivadas respecto del tiempo valdrán:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}(\varphi)\vec{\imath} + \dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{\jmath} = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{\imath} - \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}(\varphi)\vec{\jmath} = -\dot{\varphi}\vec{u}_\rho$$

1.6.1.2.1 Posición en polares

Puesto que el vector $\vec{u}_\rho$ es el unitario en la dirección del vector de posición en el plano tenemos que la expresión de este en polares es:

$$\vec{u}_\rho = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r} = |\vec{r}|\vec{u}_\rho = \rho\vec{u}_\rho$$

1.6.1.2.2 Velocidad en polares

La velocidad se calculaba derivando la expresión que a continuación presentaremos con respecto al tiempo, no olvidando que hay que derivar el vector unitario. Aplicamos la derivada de un producto:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\rho + \rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$$

Esta expresión nos dice que la velocidad se compone de dos partes, una radial, debida a que la partícula se acerca o aleja del origen de coordenadas, y una acimutal, asociada al giro en torno a éste.

Por ejemplo, si consideramos una partícula describiendo un movimiento circular alrededor del origen, donde:

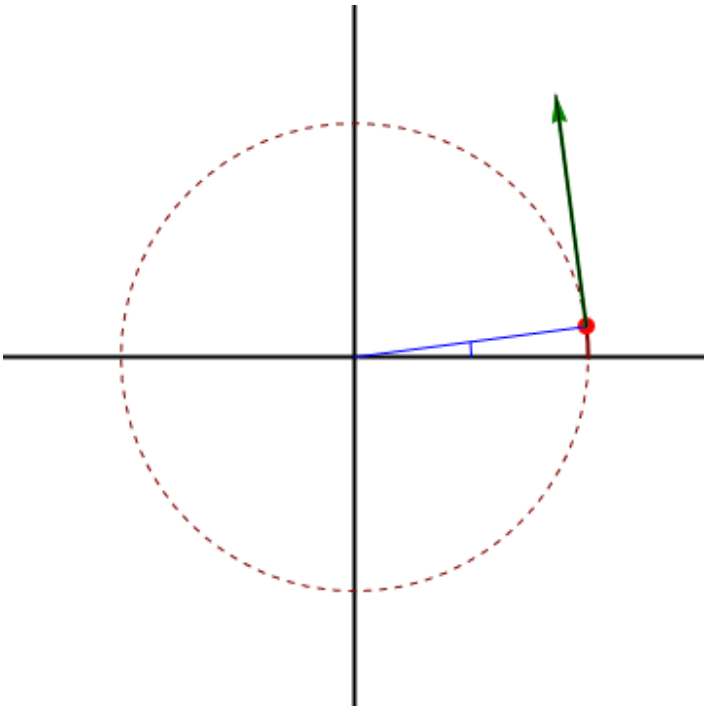
$$\rho = A = \mathrm{cte} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\rho} = 0 \qquad \dot{\varphi} = \omega$$

Y el resultado de la velocidad es:

$$\vec{v} = \overbrace{\dot{\rho}}^{0}\,\vec{u}_\rho + \overbrace{\rho}^{A}\,\overbrace{\dot{\varphi}}^{\omega}\,\vec{u}_\varphi = \omega A\vec{\varphi}$$

En un movimiento circular alrededor del origen la velocidad es puramente acimutal, ya que la partícula solo gira en torno al origen.

Figura 24



Sin embargo, el que la velocidad acimutal sea distinta de cero (que visto desde el origen se vea girar), no implica que el movimiento sea circular, ni siquiera curvo.

Consideremos el caso de una partícula que sigue un movimiento rectilíneo y uniforme a lo largo de una recta paralela al origen de forma que:

$$x = L \qquad y = v_0 t$$

La expresión de este movimiento en polares es:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{L^2 + v_0^2 t^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 t}{L}\right)$$

Las derivadas respecto al tiempo de estas dos magnitudes valen:

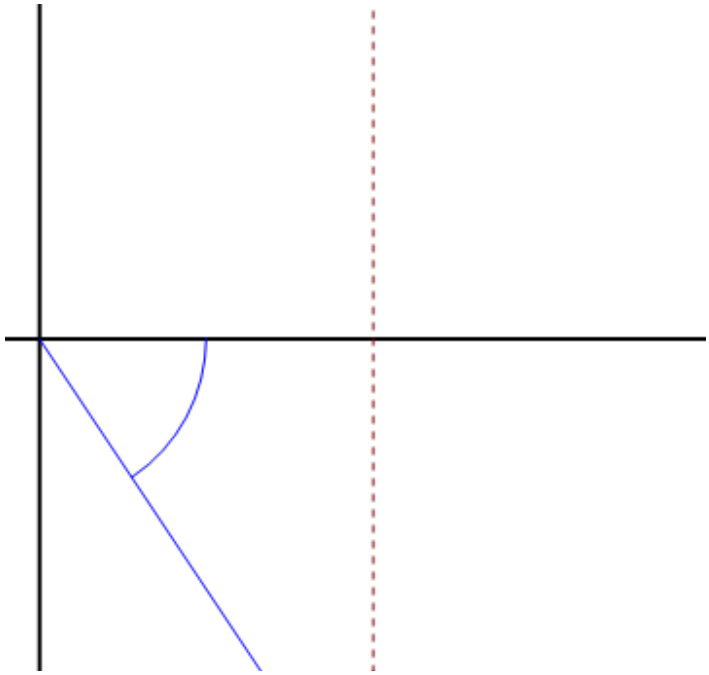
$$\dot{\rho} = \frac{v_0^2 t}{\sqrt{L^2 + v_0^2 t^2}} \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_0 L t}{L^2 + v_0^2 t^2}$$

y esto nos da la velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \frac{v_0^2 t \vec{u}_\rho + v_0 L t \vec{u}_\varphi}{\sqrt{L^2 + v_0^2 t^2}}$$

vemos que aunque el movimiento sea rectilíneo y uniforme, resulta una velocidad radial y una acimutal no nula. Para interpretarlo nos imaginamos a un observador situado en el origen de coordenadas, que apunte en todo momento a la partícula. Este observador ve a la partícula acercarse y alejarse (pasando por un mínimo justo cuando está en la perpendicular a la recta), y también ve cambiar la dirección de observación, lo que equivale a un giro.

Figura 25



1.6.1.2.3 Aceleración en polares

Operando igualmente obtenemos la expresión de la aceleración en polares, solo que esta vez debemos derivar más términos y también el vector $\vec{u}_\varphi$:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}t} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\varphi}{\mathrm{d}t} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi$$

En el caso del movimiento circular tenemos que, para la coordenada radial

$$\rho = A \qquad \dot{\rho} = 0 \qquad \ddot{\rho} = 0$$

y para la acimutal:

$$\dot{\varphi} = \omega \qquad \ddot{\varphi} = \alpha$$

lo que nos da la aceleración lineal

$$\vec{a} = -A\omega^2\vec{u}_\rho + A\alpha\vec{u}_\varphi$$

En general tendrá tanto componente radial (que en este caso coincide con la aceleración normal) como componente acimutal (que en este caso coincide con la tangencial).

En el caso del movimiento rectilíneo y uniforme, tras una serie de cálculos bastante laboriosos se llega a que:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = 0 \qquad \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$$

y por tanto

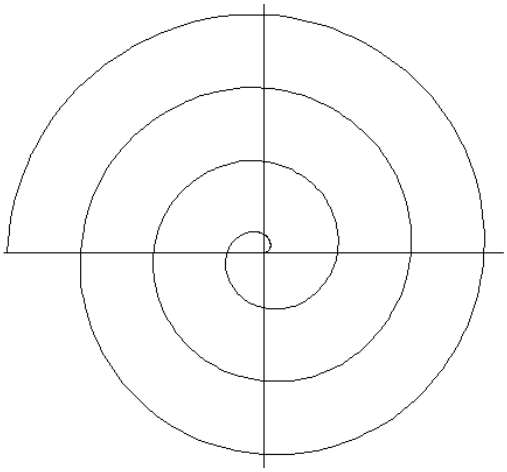
$$\vec{a} = 0\vec{u}_\rho + 0\vec{u}_\varphi = \vec{0}$$

como corresponde a un movimiento rectilíneo y uniforme.

Resumen de expresiones

Los vectores de posición, velocidad y aceleración en este sistema quedan, por tanto:

Figura 26



$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\,\vec{u}_\rho \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi \\
\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi
\end{aligned}
$$

En coordenadas polares, la rapidez es igual a

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}$$

Como ejemplo de movimiento que es más fácil de expresar en coordenadas polares que en cartesianas, consideremos una partícula que describe una *espiral de Arquímedes*, en la cual la distancia al centro aumenta linealmente con el tiempo. Empleando coordenadas cartesianas, la ecuación horaria es:

$$\vec{r} = kt\cos(\omega t)\vec{\imath} + kt\,\mathrm{sen}(\omega t)\vec{\jmath}$$

lo cual, a la hora de derivar para hallar la velocidad y la aceleración puede ser bastante engorroso. En coordenadas polares se expresa

$$\rho = kt \qquad\qquad \varphi = \omega t$$

y la velocidad y aceleración son inmediatas

$$\vec{v} = k\vec{u}_\rho + k\omega t\vec{u}_\varphi \qquad \vec{a} = -k\omega^2 t\vec{u}_\rho + 2k\omega\vec{u}_\varphi$$

1.6.1.2.4 Coordenadas ÓN en cilíndricas

Las coordenadas polares pueden extenderse a tres dimensiones añadiendo una tercera coordenada cartesiana, que sería la altura *z*.

$$x = \rho\cos(\varphi) \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi) \qquad z = z$$

Estas tres coordenadas se denominan respectivamente radial, acimutal y vertical.

La base vectorial se amplía simplemente añadiendo el vector $\vec{k}$

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_\rho &= \cos(\varphi)\vec{\imath} + \mathrm{sen}(\varphi)\vec{\jmath} \\
\vec{u}_\varphi &= -\mathrm{sen}(\varphi)\vec{\imath} + \cos(\varphi)\vec{\jmath} \\
\vec{k} &= \vec{k}
\end{aligned}
$$

Esta base es ortonormal y dextrógira.

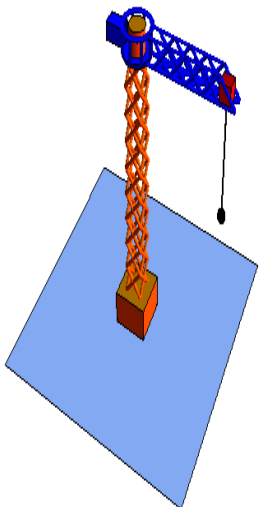
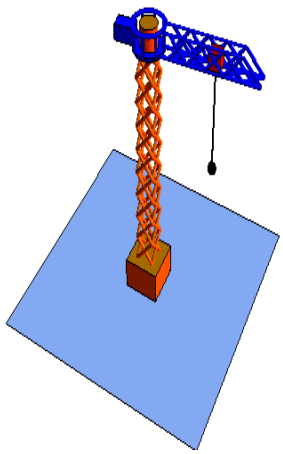
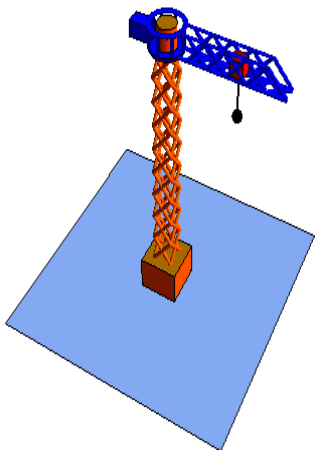
En coordenadas cilíndricas la posición, velocidad y aceleración quedan

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho\,\vec{u}_\rho + z\vec{k}\\ \vec{v} &= \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \dot{z}\vec{k}\\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}\end{aligned}$$

Un movimiento sencillo de representar en coordenadas cilíndricas sería el de una hélice (no confundir con una espiral), recorrida con rapidez constante

$\rho = A \qquad \varphi = \omega t \qquad z = v_0 t$

Figura 27

Movimiento radial	Movimiento acimutal	Movimiento vertical
		

Primera caso: el peso se mueve hacia delante y hacia atrás, avanzando y retrocediendo por el riel que la sostiene-

Caso 2: El sistema que sostiene el peso (estructura en azul) gira sobre su eje en 360°.

Caso 3: el peso se mueve como si fuese un péndulo.

FÍSICA II

UNIDAD II

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO

1. SISTEMA DE PARTÍCULAS Y CENTRO DE MASA

Un sistema de partículas es un conjunto de partículas cuyas propiedades globales estudiaremos, pero antes es necesario definir brevemente algunos conceptos básicos y necesarios.

- Fuerza exterior de un sistema de partículas: Corresponde a aquella fuerza que viene de fuera del sistema.

- Fuerza interior: es aquella que proveniente de las interacciones entre las propias partículas del sistema. Se pueden denotar como F^{ext} y F^{int}

- Centro de masas: El centro de masa se refiere a cuerpos o a varios cuerpos que se mueven en relación de otros y se define como el punto (x,y) que se mueve en la misma trayectoria que seguiría una partícula sometida a una fuerza neta.

El centro de masas para un sistema de partículas discreto es:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

Cuando se tenga un sistema continuo el centro de masas vendrá definido como:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

o, expresándolo mejor en función de la densidad del sistema:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \rho\, dm}{m_T}$$

siendo m_T la masa total del cuerpo continuo.

- Teorema de Pappus: Este teorema resulta muy útil para calcular el centro de masas de algunas figuras. El procedimiento consiste en tomar un área cerrada cualquiera en un plano, luego se debe generar un sólido rotando el área en el espacio de manera tal que cada punto siempre se mueva perpendicular al plano del área. El resultado que obtendremos será que el sólido generado tendrá un volumen igual que el área de esta sección empleada por la distancia que se ha desplazado el centro de masas.

➢ Dinámica del centro de masas

a. Velocidad

Hallar la magnitud $\vec{v}_{cm}$ es simplemente derivar la ecuación del centro de masas para un sistema de partículas discreto:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

con lo cual se obtiene:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m_T}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$$

o, también se tiene:

$$m_T\vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i.$$

Aceleración: se deriva dos veces la ecuación del centro de masas para un sistema de partículas discreto, obteniendo:

$$\vec{F}^{ext} = m_t\vec{a}_{cm}.$$

Para llegar a este resultado ha hecho falta darse cuenta de que cada $\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i$ se puede descomponer en $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$ donde $\vec{F}_i^{int} = \sum_{j\neq i}^{N}\vec{F}_{ij}$, siendo estas $\vec{F}_{ij}$ todas las fuerzas de interacción entre las partículas o, más concretamente, la fuerza que una partícula j ejerce sobre la i. Posteriormente cuando se suman todas estas fuerzas en la fórmula general se tiene que el sumatorio $\sum_{i}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\vec{F}_{ij}$ se anula ya que, por el principio de acción y reacción, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

1.1 Ecuación de movimiento de un sistema de partículas

Un Sistema de Partículas se define como un conjunto de puntos materiales limitados por una superficie cerrada. Los sistemas de partículas se pueden clasificar en sistemas discretos (deformables o indeformables) y continuos (deformables o sólidos rígidos).

Sistema de Partículas Discretos

Un sistema de partículas se considera que es discreto si lo compone un conjunto finito de puntos materiales. Microscópicamente cualquier cuerpo se compone de una estructura discreta, sin embargo, para explicar su comportamiento a nivel macroscópico se le considera formado por una distribución continua de materia.

En los sistemas indeformables, la distancia relativa entre las partículas que lo forman puede variar a lo largo del tiempo. En cambio en los sistemas deformables, esta distancia permanece constante sean cuales sean las interacciones que recibe el sistema por parte del medio.

- **rij** = **ri** – **rj** = cte → Sistema Indeformable.
- **rij** = **ri** – **rj** ≠ cte → Sistema Deformable.

Sistema de Partículas Continuos

Los sistemas continuos deformables son los que se modifican al actuar fuerzas sobre ellos.

Por el contrario los cuerpos que se estudian en la aproximación del sólido rígido son aquéllos en los que se supone que las fuerzas que actúan sobre ellos son tan pequeñas que el sistema no se deforma bajo su acción.

Fuerzas Interiores y Exteriores

Un sistema de partículas compuesto por “N” partículas, tiene la capacidad de interactuar entre sí (de forma más o menos complicada) y además pueden interaccionar con otras partículas que no pertenecen al sistema. Por esto es de mucha utilidad agrupar las fuerzas en dos grandes grupos, que son:

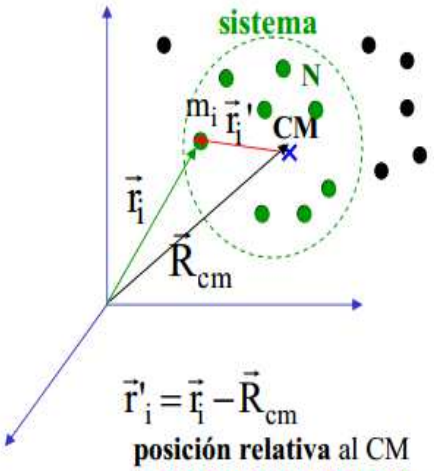
- Fuerzas Exteriores: producidas por las partículas ajenas al sistema.
- Fuerzas Interiores: producidas por las partículas pertenecientes al sistema.

La suma de todas las fuerzas interiores que actúan sobre un sistema de partículas es el vector nulo (**0**), tanto si el sistema se encuentra en equilibrio como si no lo está, expresado como:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} = \mathbf{0}$$

Que es lo mismo que decir que el sumatorio de las fuerzas de cada partícula “i” sobre todas las otras partículas “j” es nulo.

A modo de resumen:



$\vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{cm}$

posición relativa al CM

(**coordenadas relativas**)

sistema constituido por **N** partículas (independientes o bien constituyendo un cuerpo rígido)

$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ **masa total** del sistema

$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$ posición del **centro de masas** del sistema

$\vec{V}_{cm} = \dot{\vec{R}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i$ velocidad CM

$\vec{A}_{cm} = \ddot{\vec{R}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i$ aceleración CM

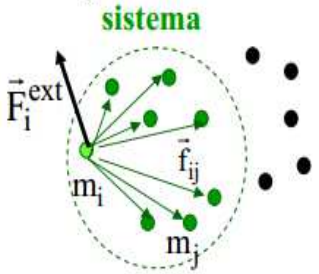
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{f}_i$$

fuerza total sobre la partícula i,

resultante de las F externas (origen fuera del sistema)

Resultante de las F de interacción con las otras N-1 partículas del sistema $\vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}$

3ª ley Newton $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$



Ecuaciones del movimiento

El movimiento del sistema está determinado cuando se conozca la evolución temporal de cada una de las partículas que lo forma.

Si aplicamos la 2ª Ley de Newton a cada una de las partículas obtendremos "N" ecuaciones vectoriales, y si las combinamos una sola:

$$\boldsymbol{F}_{ext} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} = m_i\, \boldsymbol{a}_i$$

$$\boldsymbol{F}_{ext} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{a}_i$$

Como el segundo sumatorio es nulo, todo se reduce a la 2ª ley de Newton:

$$\boldsymbol{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{a}_i = m\, \boldsymbol{a}$$

(donde "m" representa la masa total), lo que viene queriendo decir que la aceleración total del sistema de partículas queda determinada únicamente por el conjunto de fuerzas exteriores que actúan sobre él.

1.2 Momento lineal y angular de un sistema de partículas

El momento lineal de un sistema de partículas se define como la suma de los momentos de cada una de las partículas que integran el sistema. Esto quiere decir que el momento lineal de un sistema será:

$$\vec{p} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i.$$

Atendiendo a la fórmula de momentum, podemos ver claramente que:

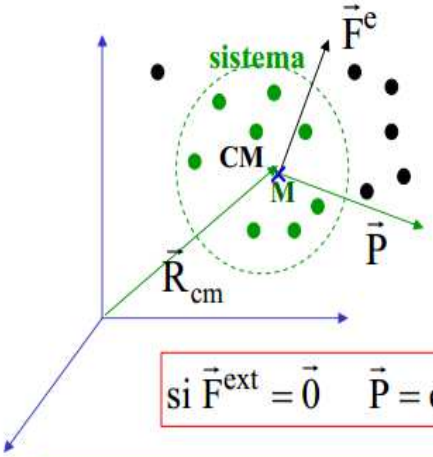
$$\vec{p} = m_t \vec{v}_{cm}.$$

Si la fuerza exterior ejercida sobre el sistema de partículas es nula, haciendo uso de la formula anterior, se ve que el momentum permanece constante. De lo anterior se puede enunciar la conservación del momento lineal total del sistema:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte.$$

- Si la fuerza neta externa que actúa sobre un sistema es nula, el momento lineal de éste se conserva.

Conservación del Momento Lineal



$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{V}_{cm}$ **Momento lineal total** del sistema

$$\boxed{\dot{\vec{P}} = \frac{d(M\vec{V}_{cm})}{dt} = \vec{F}^{ext}}$$

El CM del sistema se mueve como si fuese una partícula de masa M (masa total), sobre la que actúan todas las fuerzas externas al sistema

$$\boxed{\text{si } \vec{F}^{ext} = \vec{0} \quad \vec{P} = cte}$$

No hay interacción del sistema con lo que hay fuera de él: **Sistema Aislado** - Conservación del momento del sistema

Demostración: las fuerzas internas se cancelan mutuamente, no cambian el movimiento del sistema

2ª ley Newton, partícula i $\dot{\vec{p}}_i = m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{f}_i$

sumando para todas las partículas i $\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{F}^{ext} + \vec{0}$

$\sum_{i<j} (\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}) = 0$ sumadas por parejas

Ejemplo, N=3

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} = (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}) + (\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31}) + (\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}) = \vec{0}$$

Momento de una fuerza

Si un cuerpo experimenta una aceleración es porque tiene una *causa* que lo provoca. Newton descubrió que la *fuerza* es la causante de que esto suceda. Entonces

¿Cuál es la causa de una rotación?, bueno, la causante de una rotación es el momento de una fuerza.

Se tiene la siguiente igualdad: $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, donde *M = r F sin α,* siendo *α* el ángulo formado entre el vector $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Por tanto la componente perpendicular al vector posición es la que interviene realmente en la rotación.

Momento angular

En dinámica de traslación la variación del momento lineal ($\vec{p}$) respecto al tiempo, recibe el nombre de fuerza.

Existe en dinámica de rotación, una magnitud análoga tal que su derivada temporal nos proporciona el momento de las fuerzas $\vec{M}$.

Comprobemos lo antes dicho. Tenemos que $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, donde $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ y $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. Si derivamos lo anterior se llega a la conclusión de que, efectivamente, esta magnitud es la análoga del momento lineal $\vec{p}$ en cuanto que al ser derivada se obtiene $\vec{M}$.

- Derivar esta magnitud no es complicado, razonando que un producto vectorial no es sino un producto combinado de las componentes de un vector no parece descabellado admitir que

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Así tenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

en donde $\vec{p} = m\vec{v}$ y cuya derivada nos dará: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Tenemos entonces un primer sumando que será $\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$, por ser el producto vectorial de dos vectores paralelos, y un segundo sumando que es, efectivamente, igual a $\vec{M}$.

También se puede expresar L en función del momento de inercia I , ya que $L = I\omega$

- La igualdad $L = I\omega$ se puede conseguir tomando un sólido rígido y calculando cuanto será su momento angular. Para una determinada partícula tendremos que $L_i = m_i r_i v_i$. De aquí sólo resulta interesante conocer cuánto será la proyección de este valor sobre el eje Z que vamos a tomar en este caso como el eje de rotación. Esta proyección se logra multiplicando L_i por el $\sin\theta_i$, siendo θ_i el ángulo formado por $\vec{r}_i$ con el eje de giro. Así tenemos que:

$$L_z = \sum_i L_{z_i} = \sum_i m_i r_i v_i \sin\theta_i = \sum_i m_i R_i^2 \omega$$

siendo R_i la distancia de la partícula i al eje. Todo esto se puede expresar ahora fácilmente como

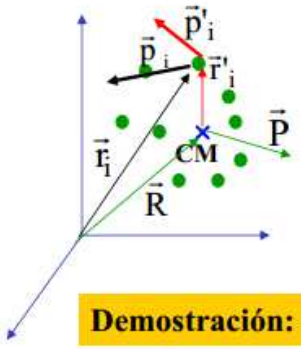
$$L_z = \omega \sum_i m_i R_i^2 = I\omega$$

puesto que se define $I = \sum_i m_i R_i^2$. Existen algunos ejes en un cuerpo, generalmente ejes de simetría, tales que si el cuerpo rota alrededor de estos ejes, el momento angular total es paralelo al eje de rotación, y por tanto para ellos $L_z = L$. En estos casos se puede escribir que

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

El momento angular total como vector $\vec{L}$ no tiene por qué estar en la dirección del eje de rotación si este eje no coincide con alguno de simetría del cuerpo.

Conservación del Momento angular



Momento angular total del sistema

(primer teorema de König)

$$\boxed{\vec{L} = \vec{R}\times\vec{P} + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel}}$$

L del CM respecto al origen

L del sistema respecto al centro de masas.

Demostración: $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$ **posición relativa** al CM (coordenadas relativas)

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = \sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{R} = M\vec{R} - M\vec{R} = \vec{0}$$ (Posición del CM respecto al CM)

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times m_i(\dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{R}}) = \sum_i m_i \left[(\vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i') + (\vec{r}_i' \times \dot{\vec{R}}) + (\vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i') + (\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \right])$$

$$\sum_i (m_i \vec{r}'_i) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \sum_i (m_i \dot{\vec{r}}_i') = (\vec{0} \times \dot{\vec{R}}) + (\vec{R} \times \vec{0}) = \vec{0}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left[(\vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i') + (\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) \right] = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i + \vec{R} \times \vec{P} = \vec{L}_{rel} + \vec{L}_{cm}$$

1.3 Trabajo y energía

Hablamos de trabajo cuando una fuerza mueve un cuerpo y libera la energía potencial de este, es decir, se realiza un trabajo cuando se vence una resistencia a lo largo de un camino. La energía en cambio corresponde a la capacidad que posee un cuerpo (una masa) para realizar trabajo luego de ser sometido a una fuerza; es decir, el trabajo no se puede realizar sin energía. Para comprender mejor ambos conceptos, ahondaremos un poco.

Energía

Si bien el concepto de energía es complejo de definir, podemos decir que corresponde a la capacidad que posee un cuerpo para realizar trabajo.

La energía potencial y la energía cinética son dos elementos a considerar, tanto en la mecánica como en la termodinámica. Estas formas de energía se originan por la

posición y el movimiento de un sistema en conjunto, y se conocen como la energía *externa* del sistema.

En general (para un sistema no-relativista), la energía total, E_T , de un sistema puede descomponerse en energía de masa, E_m, energía cinética, E_k, energía potencial, E_p, y energía interna, U, es decir,

$$E_T = E_m + E_k + E_p + U$$

Donde:

$$E_m = mc^2$$

$$E_k = ½mv^2$$

La energía potencial depende de los campos externos a los que está sometido el sistema y viene dada por una función de la posición, y la energía interna U que considera la energía de las partículas que constituyen el sistema y sus interacciones a corta distancia.

El cambio de energía total del sistema puede descomponerse en

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U$$

donde ΔE_k y ΔE_p representan el cambio de su energía externa, cinética y potencial respectivamente, y ΔU representa el cambio de su energía interna, dada por la energía cinética y potencial de las moléculas, átomos y partículas subatómicas que constituyen el sistema.

Energía interna

La energía interna de un sistema, U, tiene la forma de energía cinética y potencial de las moléculas, átomos y partículas subatómicas que constituyen el sistema, es decir,

$$U = E_{k\,int} + E_{p\,int}$$

donde la energía cinética interna es la suma de la energía cinética de todas las partículas del sistema,

$$E_{k\,int} = \sum_j ½m_jv_j^2$$

y la energía potencial interna es la suma de la energía potencial debida a la interacción de todas las partículas entre si,

$$E_{p\,int} = \sum_{ij} E_{pij}$$

Energía Cinética

Un cuerpo tiene energía si es capaz de interaccionar con el sistema del cual forma parte, para realizar un trabajo. La unidad de energía en el Sistema internacional es el Joule (J). Dos de los principales tipos de energía son la energía potencial y energía cinética.

- Energía cinética. Todo cuerpo en movimiento tiene energía cinética. La ecuación que representa a la energía cinética es la siguiente:

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2$$

Donde Ec = energía cinética en Joules
m = masa del objeto en kg
v = velocidad del objeto en m/seg.

Trabajo

El concepto de trabajo se relaciona directamente con la energía, es por ello su definición se desarrollará a continuación.

Trabajo Para Fuerzas Paralelas a la Horizontal

El trabajo corresponde a una magnitud escalar, que se produce sólo cuando una fuerza mueve a un cuerpo en su misma dirección. Su valor se calcula multiplicando la magnitud de la componente de la fuerza localizada en la misma dirección en que se efectúa el movimiento del cuerpo, por el desplazamiento que éste realiza.

Si la fuerza que mueve el cuerpo se encuentra totalmente en la misma dirección en que se efectúa el desplazamiento, el ángulo θ es igual a cero o 90° ya que el coseno de 0 ó 90° es igual a 1, donde el trabajo será igual a:

$$T = F\ d$$

Se realiza un trabajo de un joule (1 J) cuando al aplicar una fuerza de un Newton a un cuerpo, este se desplaza un metro. De donde:

$$1\ J = N.m.$$

Trabajo Para Fuerzas Que Forman Un Angulo Respecto A La Horizontal.

Cuando la fuerza aplicada para desplazar un cuerpo, se aplica con un cierto ángulo respecto a la horizontal, diferente de 0° y 90°, entonces para calcular el trabajo mecánico realizado, se utiliza la siguiente ecuación.

$$T = Fd \cos \theta.$$

Donde T = trabajo realizado en N.m = joule = J
F cos θ = Componente de la fuerza en la dirección del movimiento en Newtons (N).
d = desplazamiento en metros (m).

Teorema del trabajo

El trabajo de una fuerza externa resultante sobre un cuerpo es igual al cambio de la energía cinética del cuerpo.

Potencia Mecánica.

La potencia mecánica se define como la rapidez con que se realiza un trabajo. Se mide en watts (W) y se dice que existe una potencia mecánica de un watt cuando se realiza un trabajo de un joule por segundo: 1 W = J/seg. Su expresión matemática es:

$$P = \frac{T}{t}$$

donde P = potencia en Joules/seg = watts (W).
T = trabajo realizado en Joules (J).
t = tiempo en que se realiza en trabajo en segundos (seg).

La unidad usada en el Sistema Internacional para medir potencia es el watt y significa trabajo de un joule realizado en un segundo. Aunque también se emplean las siguientes unidades prácticas: el caballo de fuerza (H.P.) y el caballo de vapor (C.V.)

1 H.P. = 746 Watts 1 C. V. = 736 Watts.

Como el trabajo es igual a T = Fd y como la potencia es P = T/d = Fd/t, pero d/t = v (velocidad) entonces la potencia es igual a:

P = Fv.
P = Potencia mecánica en Watts.
F = Fuerza en en Newtons.
v = velocidad en metros por segundo (m/seg).

Esta expresión permite calcular la potencia si se conoce la velocidad que adquiere el cuerpo, misma que tendrá una dirección y un sentido igual a la de la fuerza que recibe.

Para conocer la eficiencia (η) o rendimiento de una máquina que produce trabajo, tenemos la expresión:

$$\eta = \frac{\text{Trabajo producido por la máquina}}{\text{Trabajo suministrado a la máquina.}} \times 100.$$

Fuerzas Conservativas Y No Conservativas

Energía Potencial. Cuando levantamos un cuerpo a una cierta altura (h), debemos efectuar un trabajo igual al producto de la fuerza aplicada por la altura a la que fue desplazado. Este trabajo se convierte en energía potencial gravitacional, llamada así pues su origen se debe a la atracción gravitacional ejercida por la tierra sobre el cuerpo. Así pues, debido a la atracción de la tierra, si el cuerpo se deja caer, será capaz de realizar un trabajo del mismo valor sobre cualquier objeto en el que caiga, ya que puede comprimir un resorte, perforar el piso e introducir pilotes hechos de hormigón armado en terrenos frágiles.

Como el trabajo (T) realizado para elevar un cuerpo es igual a la energía potencial gravitacional (EPG), tenemos:

$$EPG = T = Ph.$$

La fuerza requerida para elevar un cuerpo a una cierta altura es igual a su peso, por lo tanto:

$$F = P = mg$$

Donde la energía potencial gravitacional es igual a:

$$EPG = Ph = mgh.$$

$g = 9.8\ m/seg^2$. Sistema Internacional
$g = 32.2\ ft/seg^2$. Sistema Inglés.

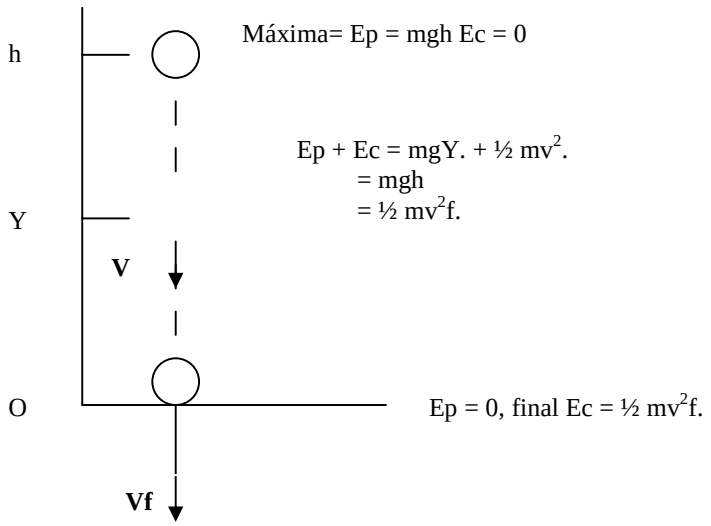
Demostración Del Teorema De Conservación De La Energía Mecánica, Y Aplicaciones Del Teorema.

Con mucha frecuencia, a velocidades relativamente bajas tiene lugar un intercambio entre las energías potencial y cinética. Por ejemplo, supongamos que se levanta una masa m hasta una altura h y, luego se deja caer, como se muestra en la figura 1.

Una fuerza externa ha incrementado la energía del sistema, dándole una energía potencial, Ep = mgh en el punto más alto. Esta es la energía total disponible para el sistema y no puede modificarse, a menos que se enfrente a una fuerza de resistencia externa. A medida que la masa cae, su energía potencial disminuye debido a que se reduce la altura sobre el piso. La disminución de energía potencial reaparece en forma de energía cinética a causa del movimiento. En ausencia de la resistencia del aire, la energía total permanece igual (Ep + Ec). La energía potencial sigue transformándose en energía cinética hasta que la masa llegue al piso (h = 0). En esta posición final, la energía cinética es igual a la energía total, y la energía potencial es cero. Es importante señalar que la suma de Ep y Ec es la misma en cualquier punto durante la caída.

$$\text{Energía total} = Ep + Ec = \text{constante}.$$

Figura 1



Se dice que la energía mecánica se conserva. En nuestro ejemplo, la energía total en el punto más alto es *mgh* y la energía total a ras de suelo es *½ mv²*, si se desprecia la resistencia del aire. Ahora podemos enunciar el principio de la *conservación de la energía mecánica*:

"En ausencia de resistencia del aire o de otras fuerzas disipativas, la suma de las energías potencial y cinéticas es una constante, siempre que no se añada ninguna otra energía al sistema".

Siempre que se aplique este principio resulta conveniente pensar en el inicio y el final del proceso de que se trate. En cualquiera de esos puntos, si la velocidad no es igual a cero, existe una energía cinética, y si la altura no es cero hay una energía potencial. Así pues, podemos escribir:

$$(Ep + Ec)inicial = (Ep + Ec)\ Final.\ (1)$$
$$mgh_o + ½\ mv^2_o. = mgh_f + ½\ mv^2f.\ (2)$$

Los subíndices o y f indican los valores iniciales y finales, respectivamente. La ecuación (2), por supuesto, se aplica cuando no participan fuerzas de fricción.

Resolviendo esta ecuación para *vf* obtenemos una ecuación útil para determinar la velocidad final, a partir de las consideraciones generales sobre la energía de un cuerpo que cae desde el reposo sin que lo afecte la fricción.

$$vf = \sqrt{2gh_o}.\ (4).$$

Una gran ventaja de este método es que la velocidad final se determina a partir de los estados de energía inicial y final. La trayectoria real no tiene importancia cuando no hay fricción. por ejemplo, se obtiene la misma velocidad final si el objeto sigue una trayectoria curva partiendo de la misma altura inicial h_o.

1.4 Momento de inercia

El momento de inercia (I) corresponde es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo. Cuando un cuerpo gira en torno a uno de los ejes principales de inercia, la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud escalar llamada momento de inercia. Sin embargo, en el caso más general posible la inercia rotacional debe representarse por medio de un conjunto de momentos de inercia y componentes que forman el llamado tensor de inercia.

El momento de inercia refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro. Además depende sólo de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento. Podemos agregar también que desempeña un papel análogo al de la masa inercial en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme. Es el valor escalar del momento angular longitudinal de un sólido rígido.

Ecuaciones Del Momento De Inercia

Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, el momento de inercia del mismo se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el cuadrado de la distancia *r* de cada partícula a dicho eje. Matemáticamente se expresa como:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Para un cuerpo de masa continua (Medio continuo), se generaliza como:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 \, dV$$

Matemáticamente se debe tener en cuenta que el subíndice V de la integral indica que se integra sobre todo el volumen del cuerpo. Se resuelve a través de una integral triple.

Este concepto desempeña en el movimiento de rotación un papel análogo al de masa inercial en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme. La masa es la resistencia que presenta un cuerpo a ser acelerado en traslación y el Momento de Inercia es la resistencia

que presenta un cuerpo a ser acelerado en rotación. Así, por ejemplo, la segunda ley de Newton: a = F / m tiene como equivalente para la rotación:

$$\tau = I\alpha$$

donde:

- τ es el momento aplicado al cuerpo.
- I es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación y
- $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ es la aceleración angular.

La energía cinética de un cuerpo en movimiento con velocidad *v* es $\frac{1}{2}mv^2$, mientras que la energía cinética de un cuerpo en rotación con velocidad angular ω es $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde *I* es el momento de inercia con respecto al eje de rotación.

La conservación de la cantidad de movimiento o momento lineal tiene por equivalente la conservación del momento angular $\vec{L}$:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

El vector momento angular, en general, no tiene la misma dirección que el vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Ambos vectores tienen la misma dirección si el eje de giro es un eje principal de inercia. Cuando un eje es de simetría entonces es eje principal de inercia y entonces un giro alrededor de ese eje conduce a un momento angular dirigido también a lo largo de ese eje.

1.5 Ecuación de movimiento de un sólido

Antes de explicar la ecuación de movimiento de un sólido, es necesario identificar los posibles movimientos de un sólido rígido:

1. Traslación A - rectilínea
   B – curvilínea.
2. Rotación alrededor de un eje fijo.
3. Movimiento plano general.
4. Movimiento alrededor de un punto fijo.
5. Movimiento General.

De todos estos movimientos estudiaremos tres de ellos, que son: traslación, Rotación alrededor de un eje fijo y Movimiento alrededor de un punto fijo.

1.5.1 Traslación

Un cuerpo sólido rígido realiza un movimiento de traslación cuando, considerando un segmento entre dos puntos A y B del cuerpo, este se mantiene siempre paralelo a sí mismo, durante todo el movimiento. Si consideramos el cuerpo rígido como un conjunto continuo de puntos materiales, cada punto material describirá, en el movimiento una trayectoria determinada y a todos los demás puntos materiales describirá trayectorias equidistantes entre sí.

Si la traslación es rectilínea, las trayectorias son rectas y paralelas entre sí (equidistantes), y si la traslación es curvilínea, las trayectorias de los puntos materiales son curvas planas o alabeadas equidistantes entre sí.

Figura 3. Traslación Rectilínea

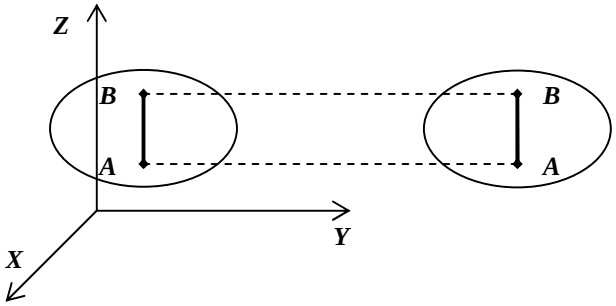


Figura 4. Traslación curvilínea

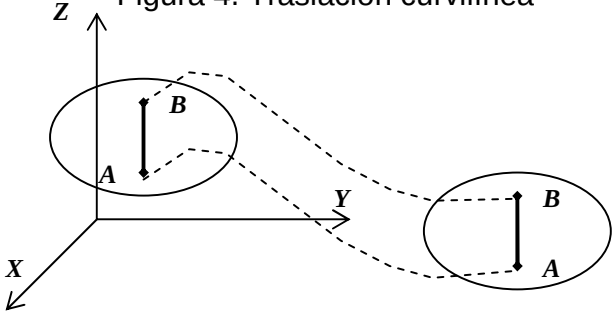
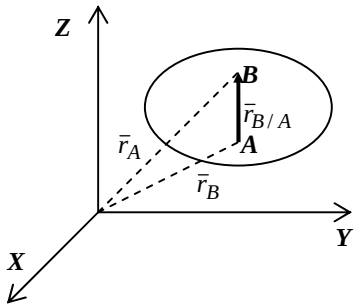


Figura 5. Vector posición de una traslación



En un movimiento de traslación rectilínea o curvilínea según se muestra en la figura 3, el vector posición del punto *B* es:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

A $\vec{r}_{B/A}$ lo llamaremos "vector de *B* con respecto a *A*" y es constante. Si derivamos la igualdad anterior, obtendremos:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}}_{0}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

Esto quiere decir que en un instante dado, la velocidad de *B* es igual a la velocidad de *A* y a la de cualquier otro punto material del sólido rígido (ya sea un movimiento de traslación rectilínea o curvilínea).

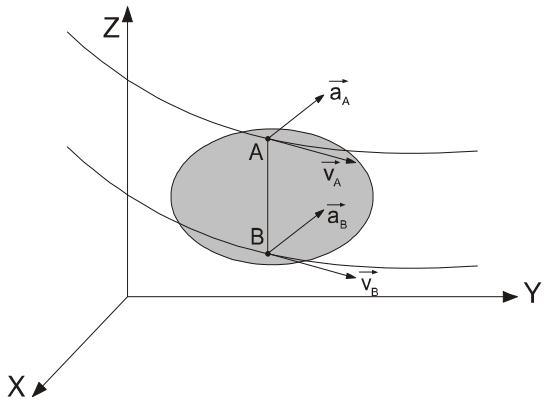
Si derivamos la última ecuación respecto del tiempo, obtendremos la aceleración:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Entonces la aceleración del punto *B* es la misma que la del punto *A* y será la misma de cualquier otro punto material del sólido rígido.

Figura 6. Vectores velocidad y aceleración en una traslación

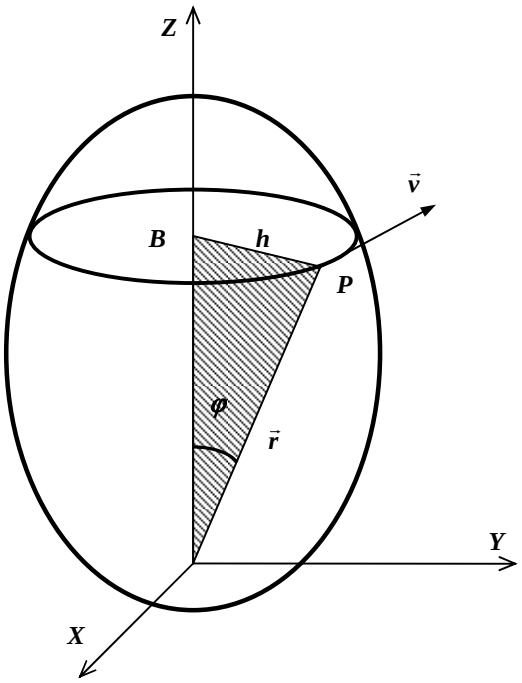


Podemos concluir que en un sólido en movimiento de traslación todos sus puntos tienen la misma velocidad instantánea y la misma aceleración instantánea.

1.5.2 Movimiento de rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo que lo atraviesa

Considerando un sistema de coordenadas rectangulares donde el eje *Z* coincide con el eje *e* de rotación del sólido rígido. Considerando la base ortogonal O($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Figura 7. Sólido rígido girando alrededor de un eje fijo



Siendo: $h = \overline{BP}$ y $h = \vec{r} \cdot sen\varphi$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = BP.d\theta \qquad pero \qquad BP = h \quad \therefore \quad v = BP.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\begin{cases} BP = r.sen\,\varphi \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \end{cases}$$

entonces $$v = \underbrace{r\ .\ \omega\ .\ sen\ \ sen\,\varphi}_{\left|\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right|}$$

Esta expresión es el módulo del producto vectorial entre él vector velocidad angular de rotación y el radio vector posición del punto *P*.

Entonces de la relación entre velocidades: $$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

La velocidad angular es la misma para todos los puntos materiales del cuerpo rígido y él vector posición $\vec{r}$ depende de la posición del punto material con respecto al punto *O*. Todos los puntos materiales del cuerpo giran describiendo circunferencias alrededor del

eje de rotación, en planos paralelos y en un mismo plano son circunferencias concéntricas. Cada punto tiene su propia velocidad lineal.

Además: $$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{k}$$

Por lo tanto la velocidad angular es un vector que esta sobre el eje *Z*, que es el eje de rotación. Si derivamos la ecuación anterior con respecto al tiempo, obtendremos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

pero: $$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{a} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

entonces: $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}}_{a_t} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}}_{a_n}$$

resolviendo: $$\left|\vec{a}\right| = a = \alpha \,.\, r \,.\, sen\varphi + \omega^2 \,.\, r \,.\, sen\varphi$$

Para una circunferencia se cumple que $h = r \,.\, sen\,\varphi$, entonces:

$$a = \alpha \cdot h \cdot \vec{i_o} + \omega^2 \cdot h \cdot \vec{n_o}$$

Por otro lado:

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{k} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{k} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \vec{k}$$

Entonces él vector $\vec{a}$ aceleración angular está también sobre el eje de rotación.

Ecuaciones Que Definen El Movimiento De Rotación De Un Sólido Rígido Alrededor De Un Eje Fijo

Pueden referirse directamente a la descripción del punto del cuerpo. Observemos las siguientes situaciones.

Sabemos que para un movimiento circular:

$$\omega_m = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Siendo ω_m la velocidad angular media y ω la instantánea:

$$a_m = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$a = \frac{d\omega}{dt}$$

Siendo a_m la aceleración angular media y a la aceleración angular instantánea.

- En el caso de movimiento de rotación uniforme: ω = cte. $\Rightarrow \omega_m = \omega$.

$$\theta = \theta_o + \omega \,.\, (t - t_o) \qquad \text{y} \qquad \text{si } t_o = 0$$

Entonces, $\theta = \theta_o + \omega \,.\, t$; corresponderá al espacio medido en función del ángulo recorrido en movimientos circular

- Si el movimiento de rotación uniformemente acelerado: α = cte. $\Rightarrow a_m = w$.

$$\omega = \omega_o + \alpha \,.\, (t - t_o) \qquad \text{y si } t_o = 0$$

Entonces, $w = w_o + \alpha \,.\, t$; que corresponderá a la velocidad angular en función del tiempo en movimientos circular

Conocido el ángulo descrito; entonces se expresa:

$$\theta = \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

y si $\theta \neq 0$, entonces: $\theta = \theta_o + \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$; que corresponderá al espacio medido en función del ángulo de barrido y del tiempo.

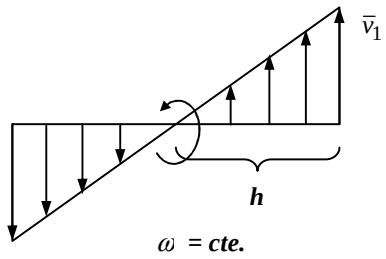
Recordando que en MRUA $v^2 = v^2_o + 2 \cdot a \left(e - e_o\right)$; podemos deducir la ecuación: $\omega^2 = \omega^2_{\boldsymbol{o}} + 2 \cdot \alpha \cdot \left(\theta - \theta_{\boldsymbol{o}}\right)$ que representará la velocidad angular en función del ángulo descrito.

1.5.3. Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo de cada uno de los puntos de un sólido rígido.

Este movimiento depende de la posición del cuerpo e cuestión. Observemos la siguiente situación:

- Observemos la siguiente figura (Figura 8). Después de extensos procedimientos matemáticos que evitaremos nombrar por motivos prácticos, obtendremos las formulas que nos permitirán determinar la velocidad y aceleración lineal de cualquier punto del cuerpo en cuestión.

Figura 8



Las formulas a, b y c permiten determinar la velocidad y la aceleración lineal de cualquier punto del cuerpo si siempre que conozcamos la ley de rotación del cuerpo, es decir, la velocidad angular ω, la aceleración angular α y la distancia entre el punto dado y el eje de rotación h_i.

a) $v = \omega \cdot h$

b) $a = \sqrt{a^2_t + a^2_n} = \sqrt{\alpha^2 \cdot h^2 + \omega^4 \cdot h} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a = h \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$ *aceleración lineal total en función de la aceleración y la velocidad angular*

c) $tg\mu = \dfrac{\alpha}{\omega^2}$

Recíprocamente, si se conoce el movimiento de un punto del cuerpo, sobre la base de las mismas formulas es posible determinar el movimiento de todos los otros puntos del cuerpo, así como todas las características del movimiento del cuerpo completo. Se pueden determinar ω y α.

1.6 Teoremas de conservación

Antes de comenzar a exponer los distintos teoremas de conservación, debemos explicar qué es una constante de movimiento.

Una constante de movimiento o integral primera es una magnitud en función de la posición, velocidad de la partícula (o de las partículas, si hay más de una), cuyo valores constante en el tiempo, pese a que la posición y la velocidad si son variables en el tiempo

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad C(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \mathrm{cte.}$$

Se denominan también integrales primeras, porque estas cantidades suelen obtenerse integrando una vez las ecuaciones de movimiento.

El valor concreto de una constante de movimiento puede calcularse a partir de las condiciones iniciales (o de los valores de la posición y velocidad en cualquier instante)

$$C(\mathbf{r},\mathbf{v}) = C(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)$$

Las integrales primeras pueden tener una interpretación física directa (como la energía o el momento cinético) o ser combinaciones más o menos abstractas válidas para un solo problema concreto.

1.6.1 Constantes dependientes del tiempo

De modo general pueden encontrarse constantes de movimiento que además de la posición y velocidad, dependen del tiempo

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad C(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \mathrm{cte.}$$

Su valor concreto lo da de nuevo la evaluación en un instante concreto

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = C(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$$

Puede parecer raro que se diga que una cantidad función del tiempo no depende del tiempo. Lo que se afirma es que aunque en la *función* puede aparecer la variable *t*, el *valor* de la función es constante.

Para una partícula libre la aceleración es nula, así que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{C}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$$

y por tanto $\mathbf{C}$ tiene siempre el mismo valor, aunque sea una función del tiempo. Hallamos este valor a partir de las condiciones iniciales.

$$\mathbf{C} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t = \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 \cdot 0 = \mathbf{r}_0$$

Y ahora, una vez que tenemos las dos constantes de movimiento, podemos despejar y escribir la solución

$$\mathbf{r} - \mathbf{v}t = \mathbf{r}_0 \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \;\Rightarrow\; \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$$

Hemos llegado al resultado conocido de que una partícula libre describe un movimiento rectilíneo y uniforme siguiendo un camino más complicado que el habitual. Sin embargo, en muchos problemas más complicados, el uso de integrales primeras es el método más sencillo e intuitivo.

1.6.2 Cantidad de movimiento

Se define la cantidad de movimiento de una partícula como el producto de su masa por su velocidad

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

La segunda ley de Newton tal como la formuló el propio Newton establece que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento es la resultante de las fuerzas aplicadas sobre la partícula

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}$$

Esta ecuación, para el caso de masa constante, se reduce a la más familiar versión:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

De esta expresión es inmediato que:

"La cantidad de movimiento de una partícula permanece constante cuando la fuerza es nula durante un intervalo de tiempo"

Para el caso de una partícula este teorema de conservación aporta poca información nueva. Sin embargo, su extensión al caso de un sistema de partículas es extremadamente útil.

En ocasiones, no nos interesa tanto establecer la constancia de la cantidad de movimiento, sino saber cuánto varía. Supongamos una partícula que viaja libremente y por tanto con cantidad de movimiento constante $\mathbf{P_1}$. Entonces es sometida a una fuerza $\mathbf{F}(t)$ durante un intervalo entre t_1 y t_2 (por ejemplo, durante una colisión, a partir del cual vuelve a moverse libremente, con cantidad de movimiento constante $\mathbf{P_2}$. Se trata de hallar el incremento en la cantidad de movimiento durante la colisión. Integrando en la segunda ley de Newton obtenemos:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

Esta integral de la fuerza sobre un intervalo recibe el nombre de impulso, por tanto la igualdad anterior establece que el incremento de la cantidad de movimiento es igual al impulso recibido.

1.6.3 Momento cinético

Se define el momento cinético (o *momento angular*)de una partícula respecto a un punto O como la cantidad

$$\mathbf{L}_O = m\overrightarrow{OP} \times \mathbf{v}^P$$

o, más sencillamente

$$\mathbf{L}_O = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

donde hay que entender que el vector de posición se mide respecto al punto O. Si queremos medir el momento angular respecto a un punto B el momento cinético cambia correspondientemente:

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_0 + \mathbf{p} \times \overrightarrow{OB}$$

De la definición de momento cinético resulta proporcionalidad a la velocidad areolar:

$$\mathbf{L}_O = 2m\mathbf{V}_A$$

y por tanto la constancia del momento cinético equivale a la de la velocidad areolar.

Derivando el momento cinético respecto al tiempo, y posteriormente utilizando el producto $m\mathbf{a}$, se obtiene que la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_O}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O$$

Por tanto, la derivada respecto al tiempo del momento cinético respecto a un punto es igual al momento, respecto al mismo punto, de la fuerza neta que actúa sobre dicha partícula. Esto ocurrirá cuando la fuerza sea nula o cuando sea paralela al vector de posición (*fuerza central*). Por ello, podemos enunciar el teorema de conservación en la forma

> "*Si la fuerza neta que actúa sobre una partícula P es nula o es central con centro en un punto fijo O durante un cierto intervalo de tiempo, el momento cinético de la partícula respecto al punto O se mantiene constante durante dicho intervalo.*"

Entre las fuerzas centrales que verifican la ley de conservación del momento cinético respecto al centro de fuerzas están:

- La ley de Hooke
- La ley de la Gravitación Universal
- La ley de Coulomb

1.6.3.1 Conservación parcial del momento cinético

Si bien el momento cinético no se conserva, igual se debe obtener una ley de conservación más restringida. Para ello, tenemos en cuenta que el momento cinético es un vector y posee tres componentes. Puede ocurrir que aunque el vector como tal no sea constante, una de sus componentes sí lo sea.

Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario fijo. La componente del momento angular según la dirección de $\mathbf{u}$ es:

$$L_u = \mathbf{L}_O \cdot \mathbf{u}$$

Derivando aquí respecto al tiempo

$$\frac{\mathrm{d}L_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_O}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u} = M_u$$

Si se anula la componente en la dirección de $\mathbf{u}$ del momento de las fuerzas aplicadas, la componente del momento cinético en dicha dirección permanece constante.

1.6.4 Trabajo, energía cinética y potencia

Se define el trabajo elemental realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula que realiza un desplazamiento diferencial $\mathrm{d}\mathbf{r}$ como la cantidad escalar:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

A partir de aquí obtenemos el trabajo realizado sobre una partícula que se mueve desde un punto A a un punto B recorriendo una curva C como la suma de los trabajos elementales a lo largo de dicha curva:

$$W_{A \to B} = \int_{C\,A}^{B} \delta W = \int_{C\,A}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Igualmente, se define la potencia desarrollada por la fuerza como el trabajo que realiza durante un tiempo d*t*, dividido por dicho intervalo:

$$P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Aplicando la segunda ley de Newton la potencia desarrollada por una fuerza puede escribirse como la derivada respecto al tiempo de la energía cinética:

$$P = \mathrm{m}\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$$

siendo K la energía cinética de la partícula:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Integrando respecto al tiempo obtenemos: $$W_{A \to B} = \int_{A}^{B} P\,\mathrm{d}t = \Delta K = K_B - K_A$$

El trabajo realizado sobre una partícula entre dos puntos equivale al incremento de la energía cinética de dicha partícula. Este trabajo no tiene por qué ser necesariamente positivo. Si la partícula se ve frenada, su energía cinética disminuye y el trabajo resultante es negativo.

1.6.5 Energía potencial

El trabajo realizado por una fuerza cuando una partícula se mueve desde un punto A a un punto B depende en general del camino recorrido.

Existe una clase de fuerzas, denominadas fuerzas conservativas, para las cuales el trabajo entre dos puntos es independiente del camino que se emplea para ir de uno a otro:

$$W_{A\to B} = \int_{C_1 A}^{B} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_2 A}^{B} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Esto permite definir una función denominada *energía potencial* como el trabajo, cambiado de signo, para ir desde un punto fijo (el *origen de potencial*) hasta un punto fijo:

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Entre los casos importantes de fuerzas conservativas tenemos:

- El peso, para el cual, si el origen de potencial es la superficie terrestre y *z* la altura sobre ella:

$$U(\mathbf{r}) = mgz$$

- Más en general la fuerza gravitatoria producida por un cuerpo fijo sobre otro, tomando como origen de potencial el infinito, tiene una energía potencial:

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|}$$

- El oscilador armónico, que cumple, tomando el origen de potencial en el punto de equilibrio

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k|\mathbf{r}|^2$$

Conocida la energía potencial, puede hallarse la fuerza calculando su *gradiente*:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$$

que en el caso de una función dependiente de una sola coordenada se reduce a una derivada ordinaria.

1.6.6 Conservación de la energía mecánica

Cuando existe una energía potencial de la cual deriva la fuerza que actúa sobre una partícula se cumple la siguiente identidad:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

esto es, el trabajo realizado sobre la partícula es igual a la disminución de su energía potencial.

Combinando este teorema con el de las fuerzas vivas obtenemos:

$$-\Delta U = U(A) - U(B) = W_{A\to B} = K(B) - K(A) = \Delta K$$

esto es, la que disminuye la energía potencial es igual a lo que aumenta la energía cinética (o viceversa). Reagrupando términos y definiendo la energía mecánica de la partícula como la suma de su energía cinética más la potencial obtenemos:

$$E(A) = K(A) + U(A) = K(B) + U(B) = E(B) = \mathrm{cte}$$

Lo que se conoce como teorema de conservación de la energía mecánica: “En ausencia de fuerzas no conservativas, la energía mecánica de una partícula permanece constante.”

Este teorema deja de cumplirse cuando sobre la partícula actúan fuerzas no conservativas, como el rozamiento. Las fuerzas que reducen la energía mecánica (normalmente transformándola en calor) se conocen como *fuerzas disipativas*.

Si sobre una partícula actúan tanto fuerzas conservativas como no conservativas, las consideramos por separado:

$$\Delta K = W_c + W_{nc}$$

El trabajo de las fuerzas conservativas es igual a la disminución de su energía potencial:

$$\Delta K = -\Delta U + W_{nc}$$

Agrupando términos resulta que el incremento de la energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas:

$$\Delta E = W_{nc}$$

En el caso particular de una fuerza de rozamiento, este trabajo es negativo y la energía mecánica disminuye como consecuencia de la fricción.

Si en lugar de considerar un incremento finito, calculamos la derivada respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = P_{nc}$$

esto es, la derivada de la energía mecánica es la potencia desarrollada por las fuerzas no conservativas.

1.7 Momento de una fuerza

Se denomina momento de una fuerza F respecto de un punto O, al producto vectorial del vector posición de la fuerza b (llamado brazo) por el vector fuerza F, es decir:

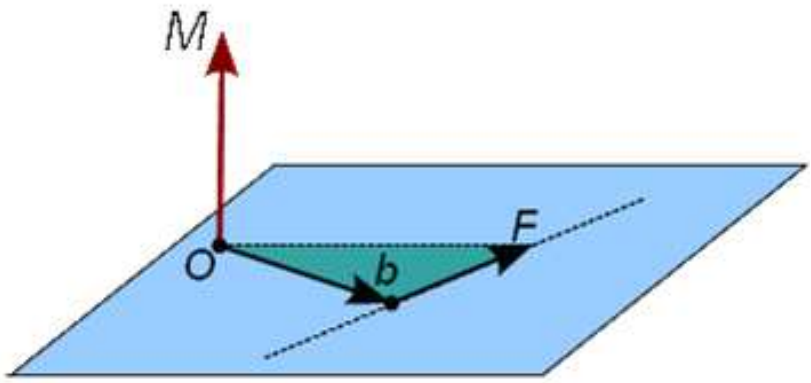
$$M_O = \vec{b} \times \vec{F}$$

Donde b es el vector que va desde el punto de apoyo O, que será el centro del momento, o el eje de giro, hasta la línea de acción de la fuerza F, perpendicularmente.

En un producto vectorial, el resultado es un vector. Por eso el momento M es un vector perpendicular al plano determinado por los vectores b y F.

El momento de una fuerza se expresa en unidades de fuerza por unidades de distancia. En el Sistema Internacional la unidad se denomina Newton metro.

Figura 9



FÍSICA II

UNIDAD II

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO

2. CENTRO DE GRAVEDAD Y CENTRO DE MASA

A continuación definiremos los conceptos de Centro de Gravedad (C.G) y Centro de Masas, con la finalidad de comprender a cabalidad ambas nociones.

2.1 El centro de gravedad (C.G)

Es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre las distintas masas materiales de un cuerpo. En otras palabras, el centro de gravedad de un cuerpo es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas que la gravedad ejerce sobre los diferentes puntos materiales que constituyen el cuerpo.

$$\mathbf{F = M\ A_{CM}}$$

2.2 Centro de masas y centro de gravedad

El centro de masas coincide sólo si el campo gravitatorio es uniforme, es decir, viene dado en todos los puntos del campo gravitatorio por un vector de magnitud y dirección constante. En general para un campo gravitatorio que decrece con la distancia, el centro de gravedad está a una está más cerca del centro de masas que crea el campo, que el centro de gravedad del objeto. Sin embargo, para grandes distancias, como es el caso típico la diferencia entre ambas distancias es pequeña comparada con las propias distancias.

2.3 Centroide y centro de gravedad

La definición en geometría del Centroide o baricentro de un objeto X perteneciente a un espacio n-dimensional es la intersección de todos los hiperplanos que dividen a X en dos partes de igual n-volumen con respecto al hiperplano. Informalmente, es el promedio de todos los puntos de X.

En física el Centroide, el centro de gravedad y el centro de masas pueden, bajo ciertas circunstancias, coincidir entre sí, aunque designan conceptos diferentes. El Centroide es un concepto puramente geométrico que depende de la forma del sistema; el centro de masas depende de la distribución de materia, mientras que el centro de gravedad depende también del campo gravitatorio.

Consideremos un cuerpo material:

- Para que el Centroide del cuerpo coincida con el centro de masa, el cuerpo debe tener densidad uniforme o una distribución de materia que presente ciertas propiedades, tales como la simetría.

- Para que un centro de masa del cuerpo coincida con el centro de gravedad, el cuerpo debe estar bajo la influencia de un campo gravitatorio uniforme.

- El Centroide, el centro de masas y el centro de gravedad coinciden para un cuerpo de densidad másica homogénea que está inmerso en un campo gravitatorio uniforme

Una figura cóncava puede tener su Centroide en un punto situado fuera de la misma figura. El Centroide de una lámina con forma de cuarto de Luna estará en algún punto fuera de la lámina.

El Centroide de un triángulo (también llamado baricentro) se encuentra en el punto donde se intersecan sus transversales de gravedad (líneas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto). Este punto es también el centroide de la superficie del triángulo.

2.4 Propiedades del centro de gravedad

Un objeto apoyado sobre una base plana estará en equilibrio estable mientras la recta de acción de la fuerza de gravedad resultante que pasa su centro de gravedad intersecte la base de apoyo.

Serán estables los objetos apoyados sobre una base rígida dentro del campo gravitatorio terrestre, si el centro de gravedad está situado sobre la vertical de la base de apoyo.

Si el cuerpo se desplaza de la posición de equilibrio (caracterizada por el hecho de que la distancia vertical entre el centro de gravedad y la base de apoyo es mínima), siempre habrá un torque de restauración. No obstante, cuando el centro de gravedad cae fuera del centro de apoyo, el torque de restauración pasa sobre el cuerpo, debido a un torque gravitacional que lo hace rotar fuera de su posición de equilibrio.

Peso de un cuerpo en presencia de la Tierra

Los cuerpos siempre caen en dirección a la Tierra con una aceleración de gravedad (g) igual a 9,8 m/s^2. Sobre estos cuerpos actuará una fuerza dirigida en el mismo sentido de dicha aceleración.

Isaac Newton dijo que no sólo la Tierra posee la propiedad de atraer hacia sí los cuerpos que se encuentran cerca de su superficie, sino que también existen esas fuerzas de atracción entre dos cuerpos cualesquiera del Universo, a estas fuerzas las llamó fuerzas de gravitación. La fuerza de atracción de los cuerpos que nos rodean son demasiado débiles, por lo que no son de gran importancia.

Newton enunció la ley de gravitación universal de la siguiente manera: «Todos los cuerpos se atraen entre sí con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa».

$$F = G\frac{MM'}{d^2}$$

G es la constante de gravitación universal, independiente de todas las circunstancias o medio ambiente que rodee a los cuerpos que se atraen. La distancia entre los cuerpos se representará como "d" en la fórmula anterior. Las masas de los cuerpos en interacción se representarán cómo m_1 y m_2, siendo F una magnitud vectorial. Adecuando la fórmula anterior, nos quedaría:

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^3}\boldsymbol{r}_{21}}$$

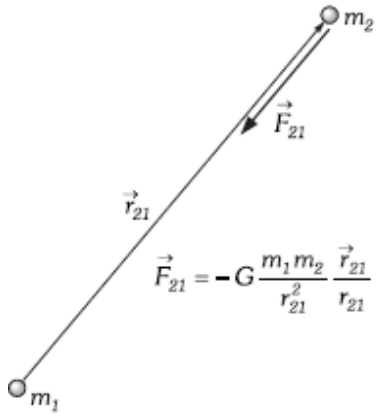


Figura 10

El signo negativo indica que el vector r_{21} que define la posición m_2 relativa a m_1 es de sentido contrario a F_{21} (fuerza con que m_1 atrae a m_2).

Intensidad Del Campo Gravitatorio Terrestre En Un Punto

Es la fuerza con que la Tierra atrae a la unidad de masa, colocada en el punto. La intensidad del campo es un vector de dirección vertical y de sentido hacia el interior de la Tierra.

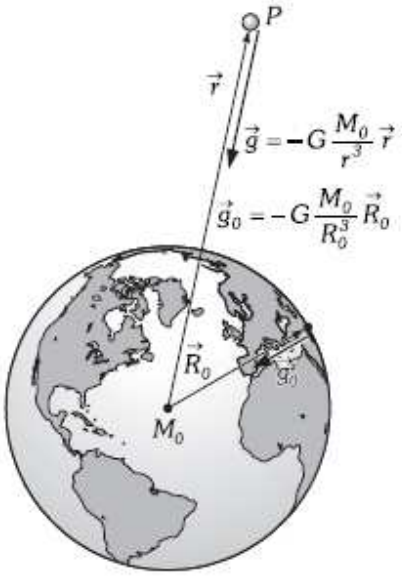
$$\boxed{\boldsymbol{g} = -G\frac{M_0}{r^3}\boldsymbol{r}}$$

El signo menos nos indica que el vector r que nos define la posición de la unidad de masa relativa al centro de la Tierra es de sentido contrario a g. En la superficie terrestre será:

$$\boldsymbol{g}_0 = -G\frac{M_0}{R_0^3}\boldsymbol{R}_0$$

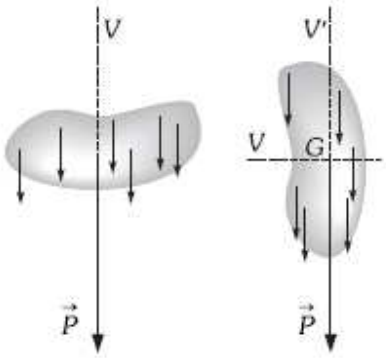
Aproximadamente igual a los ya mencionados 9,8 m/s2. Valor que tomaremos también para puntos próximos a la superficie de la Tierra y que comienza a variar cuando la altura a la que se coloca el cuerpo es significativa frente al radio terrestre: R0 = 6 370 km.

Figura 11



Si un cuerpo está sometido al campo gravitatorio terrestre; cada una de las partículas del cuerpo está solicitada por una fuerza vertical y hacia abajo de valor m_1g (m_1 = masa de la partícula; g = intensidad de la gravedad). Siendo los pesos de las partículas fuerzas paralelas, la resultante de componerlas (primero dos a dos, las resultantes entre sí, etc.) es una fuerza de valor: $P = m_1g + m_2 g + m_3 g + ... = (m_1 + m_2 + m_3 + ...) g = Mg$, siendo M la masa total del cuerpo. La dirección del peso es, pues, paralela a las componentes. El punto de aplicación está situado en la vertical V, que coincide con la dirección de P. Si consideramos el mismo problema, con el cuerpo en otra posición, el punto de aplicación del peso (de módulo, dirección y sentido idéntico al anterior), estará en la vertical V'. Cualquiera que sea el número de posiciones que consideremos, todas las verticales, V', V'', V'', que coincide con la del peso en cada caso, se cortan en un punto que es el CG.

Figura 12

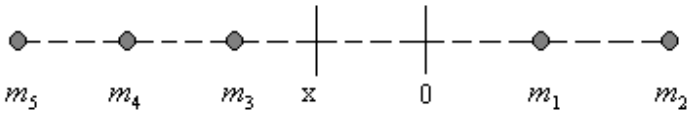


2.5 Cálculo de centroides

A continuación se explicará cómo calcular el Centroide de distintos cuerpos.

2.5.1. Momentos y centros de masa

Si tenemos teóricamente cinco masas puntuales situadas sobre una recta



Sea x_i la distancia dirigida (quiere decir que es en el sentido habitual, si m_i está a la derecha de $0 x_i > 0$ y si m_i está a la izquierda de $0 x_i < 0$)

El momento de m_i con respecto a 0 está definido como $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5$ o en general con n masas $\sum_{i-1}^{n} m_i x_i$ y el centro de masa del sistema como:

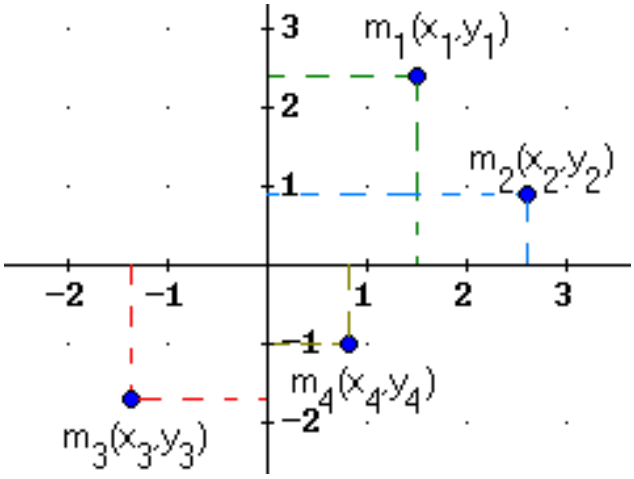
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i-1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i-1}^{n} m_i}$$

Revisemos los siguientes ejemplos:

1. Tenemos 5 masas, estas son de 1,3,1,2,4 (grs) respectivamente y están localizadas en los puntos (1,0) $(\frac{3}{2},0)$ (-2,0) (-3,0) $(-\frac{7}{2},0)$. $\bar{x}=\frac{1+\frac{9}{2}-2-6-14}{11}=-1.5$; éste es el punto en que se equilibraría el sistema si se sostuviera en ese punto con un alfiler esa recta que no tiene peso y que tiene las masa así distribuidas.

Si ahora se toman masas puntuales m_i distribuidas en diferentes puntos del plano xy

Figura 13



Momento con respecto al eje y $=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ (porque x_i es la abscisa del punto y por lo tanto la distancia dirigida al eje y)

Momento con respecto al eje x $=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ (porque y_i es la ordenada del punto y por lo tanto la distancia dirigida al eje x)

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{M_y}{Masa\ total} \qquad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{M_x}{Masa\ total}$$

$(\bar{x},\bar{y})$ es el centro de masa del sistema

2. Tenemos 5 masas de masas de 2, 2, 1, 3, 1, 4 gramos están localizadas respectivamente en los puntos (1,1)(2,3) (4,6) (-3,1) (-2,-2) (-4,-1). Encontrar el centro de masa del sistema:

$$\bar{x} = \frac{2+4+4-9-2-16}{13} = -\frac{17}{13} = -1.30$$

$$\bar{y} = \frac{2+6+6+3-2-4}{13} = \frac{11}{13} = 0.846$$

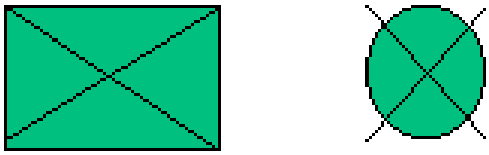
En el punto $(-1.3, 0.846)$ se encuentra localizado el centro de masa de este sistema. Este sería el punto donde se equilibraría, sostenido por un alfiler, el sistema suponiendo que las masas están distribuidas sobre una lámina extremadamente delgada que no tiene peso.

2.5.2 Centro de masa de una región plana.

La región plana se va a tomar como una lámina bidimensional de densidad ρ (en g/cm^2 o kg/m^2 o lb/p^2).

Si una región tiene un ejes de simetría, el centro de masa (si la densidad es uniforme) estará sobre el o los ejes de simetría: Así un circulo tendrá su centro de masa en el centro que es el punto de intersección de los diámetros, un rectángulo en el punto de corte de sus diagonales, o en el punto de intersección de las rectas que bisectan sus lados.

Figura 14



Sea la región plana limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x .

Consideremos una partición del intervalo:

$$[a,b] \quad a = x_0, x_1, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n = b$$

Se toma $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Consideremos el $i-esimo$ rectángulo. Este tiene como base $x_i - x_{i-1}$ y altura $f(t_i)$. El centro de masa de un rectángulo como ese está localizado en $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \frac{1}{2} f(t_i))$

El momento de un rectángulo con respecto al eje x es $\underbrace{\rho}_{} \quad \underbrace{(x_i - x_{i-1}) f(t_i)}_{} \; \bar{y}_i$ y

el momento de un rectángulo con respecto al eje y es $\underbrace{\rho}_{} \quad \underbrace{(x_i - x_{i-1}) f(t_i)}_{} \; \bar{x}_i$

$densidad \quad masa$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} \rho f(t_i) \; \bar{x}_i \; \Delta_i x \approx M_y \qquad \sum_{i=1}^{n} \rho f(t_i) \; \bar{y}_i \; \Delta_i x \approx M_x$

$\sum_{i=1}^{n} \rho f(t_i) \Delta_i x \approx Masa_{total}$.

Haciendo el razonamiento usual para cuando la norma de la partición tiende a 0 y para tomar el límite de cada una de las sumas $M_y = \rho \int_a^b x f(x) \; dx$, $(f(t_i) \to f(x))$,

$\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \to \frac{2x}{2} = x$ cuando $(\Delta_i x \to 0)$

$$M_x = \rho \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) \; dx$$

$$Masa = \rho \int_a^b f(x) \; dx$$

$$\bar{x} = \frac{\rho \int_a^b x f(x) \; dx}{\rho \int_a^b f(x) \; dx} \qquad \bar{y} = \frac{\rho \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) \; dx}{\rho \int_a^b f(x) \; dx}$$

Como siempre es mejor tratar de manejar el concepto que usar las ``fórmulas'' porque así se puede adaptar a otro tipo de situación por ejemplo para cuando en la región la curva está dada en términos de y así como el intervalo de integración.
La densidad termina simplificándose al ser uniforme y la expresión de cada denominador termina siendo el área de la región.

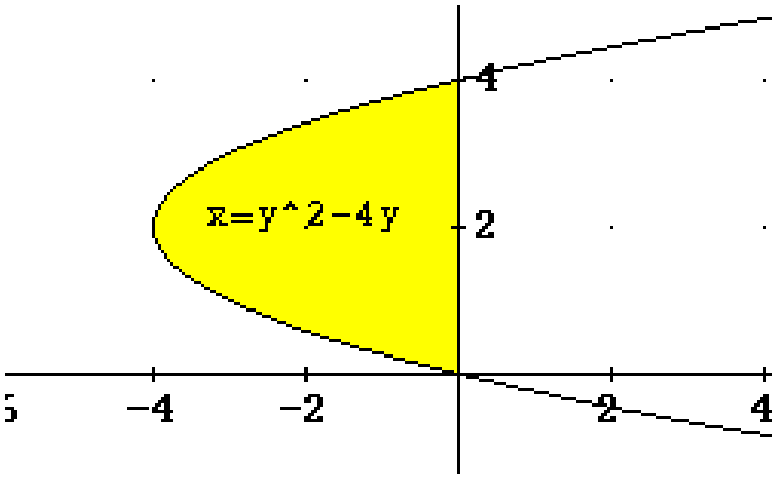
Veamos los siguientes ejemplos:

1. Encontrar el centro de masa de la región limitada por un arco de la función $y = senx$ y el eje x. Tomando el arco para $x \in [0.\pi]$

$$\left\{\begin{array}{l} Area = \int_0^{\pi} senx\ dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2 \\ M_y = \int_0^{\pi} xsenx\ dx = [-x\cos x + senx]_0^{\pi} = \pi \\ M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sen^2x\ dx = \left[x - \frac{1}{2}sen(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\pi \end{array}\right\}.$$

$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$ que es una respuesta lógica puesto que la recta $x = \frac{\pi}{2}$ es eje de simetría y que $\bar{y}$ debe quedar más hacia 0 que hacia 1 por la forma de la gráfica.

2. Encontrar el centro de masa de la región limitada por la curva $x = y^2 - 4y$ y el eje y



$$\left\{\begin{array}{c} Area = \int_0^4 (4y - y^2)\ dy = \left[2y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^4 = \frac{32}{3} \\ \hline M_y = \int_0^4 \frac{x}{2}(4y - y^2)\ dy = \frac{1}{2}\int_0^4 (y^2 - 4y)(4y - y^2)\ dy = \\ \hline \frac{1}{2}\left[-\frac{y^5}{5} - \frac{16}{3}y^3 + 2y^4\right]_0^4 = -\frac{256}{15} \\ \hline M_x = \int_0^4 y(4y - y^2)\ dy = \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^4 = \frac{64}{3} \end{array}\right|$$

$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{5}{8}, 2\right)$ que también es una respuesta lógica dado que $y = 2$ es eje de simetría, que $\bar{x}$ tiene que ser negativo y por la forma de la gráfica más hacia 0 que hacia el vértice que queda en $x = 4$.

2.5.3 Centro de masa de una región plana comprendida entre dos curvas.

Basado en el mismo proceso que se hizo para la región plana limitada por una sola curva , usando centro de masa de un iésimo rectángulo y siendo $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ se deduce $Masa_{i-ésimo\ rectángulo} = \rho(f(t_i) - g(t_i))\Delta_i x$.

$$M_{y\ i-ésimo\ rectángulo} = \rho\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(f(t_i) - g(t_i))\Delta_i x$$

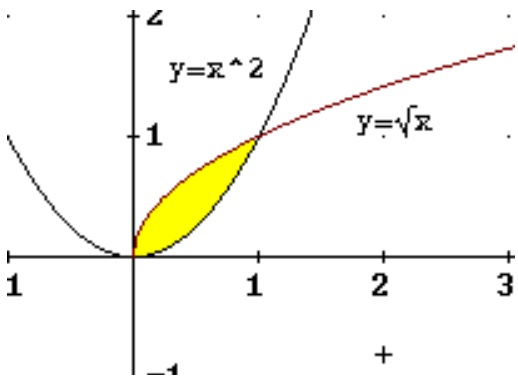
$$M_{x\ i-ésimo\ rectángulo} = \rho\frac{1}{2}(f(t_i) + g(t_i))(f(t_i) - g(t_i))\Delta_i x$$

Lo cual conlleva a las integrales (Habiendo simplificado ρ):

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x)-g(x))\,dx}{\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))}{\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx}$$

Revisemos los siguientes ejemplos:

1. Encontrar el centro de masa de la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$. Los puntos de intersección de las curvas son $(0,0)$ y $(1,1)$



$$\begin{cases} Area = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\ M_y = \int_0^1 (x^{3/2} - x^3)dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{20} \\ M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{20} \end{cases}$$

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$$

Siendo la recta $y = x$ eje de simetría de la región parece razonable la respuesta

2. Encontrar el centro de masa de la región limitada por la curva $x = y^2 - 4y$ y la recta $x - y + 4 = 0$. Los puntos de intersección de las dos gráficas se obtienen con $y^2 - 4y - y + 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$; $(y-4)(y-1) = 0 \Rightarrow y = 4$ y $y = 1$ los puntos son $(0,4)$ y $(-3,1)$

$$\left\{\begin{array}{c} Area = \int_1^4 ((y-4)-(y^2-4y))dy = \int_1^4 (5y-4-y^2)dy = \\ \hline \left[\frac{5}{2}y^2 - 4y - \frac{1}{3}y^3\right]_1^4 = \frac{9}{2} \\ \hline M_y = \frac{1}{2}\int_1^4 ((y-4)+(y^2-4y))((y-4)-(y^2-4y))dy = \\ \hline \frac{1}{2}\left[-5y^3 - 4y^2 + 16y - \frac{y^5}{5} + 2y^4\right]_1^4 = -\frac{54}{5} \\ \hline M_x = \int_1^4 y((y-4)-(y^2-4y))dy = \frac{45}{4} \end{array}\right.$$

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{Area}, \frac{M_x}{Area}\right) = \left(-\frac{12}{5}, \frac{5}{2}\right) = (-2.4, 2.5)$$

Los centros de masa obtenidos cuando la densidad es uniforme se llaman Centroides.

3. Condiciones de equilibrio

Existen varias condiciones de equilibrio, donde la primera recibe el nombre de equilibrio traslacional, la siguiente equilibrio rotacional.

- Equilibrio traslacional: Un cuerpo se encuentra en equilibrio traslacional si y solo si la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.

  Sus ecuaciones son las siguientes:

  $$\Sigma F_x = 0 \text{ y } \Sigma F_y = 0.$$

  Un cuerpo puede encontrarse en equilibrio de traslación, sin embargo puede estar girando sobre su propio eje debido a 2 o más fuerzas (ej: la rotación del volante de un automóvil se debe a la capacidad que tiene cada fuerza para hacerlo girar).

- Equilibrio Rotacional: es la segunda condición de equilibrio. Un cuerpo esta en equilibrio de rotación, la suma de los momentos o torcas de las fuerzas que actúan sobre él respecto a cualquier punto debe ser igual a cero. Matemáticamente esta ley se expresa con la ecuación:

$$\Sigma M=0$$

- Cuando sobre un cuerpo actúan fuerzas que no tienen una línea de acción común, tal vez exista equilibrio trasnacional pero no necesariamente equilibrio rotacional. En otras palabras, quizá no se mueva ni a la derecha ni a la izquierda, tampoco hacia arriba ni hacia abajo, pero puede seguir girando.

- La línea de acción de una fuerza es una línea imaginaria que se extiende indefinidamente a lo largo del vector en ambas direcciones. Cuando las líneas de acción de las fuerzas no se intersectan en un mismo punto, puede haber rotación respecto a un punto llamado eje de rotación.

- La distancia perpendicular del eje de rotación a la línea de la fuerza se llama brazo de palanca de la fuerza, el cual determina la eficacia de una fuerza dada para provocar el movimiento rotacional.

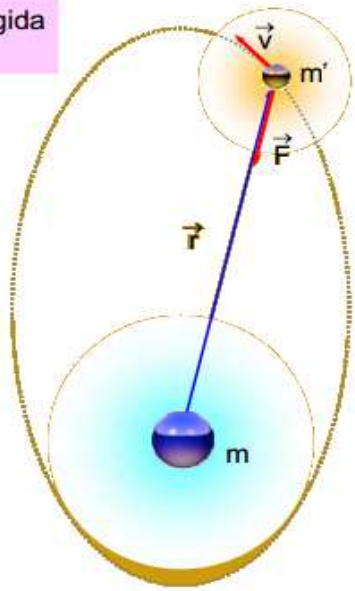
3.1 Equilibrio que involucra fuerzas centradas

Concepto de Fuerza central: Fuerza dirigida siempre hacia el mismo punto, cualquiera que se a la posición de la partícula sobre la que está actuando

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa y dirigida siempre hacia un punto

Ejemplos de fuerzas centrales:

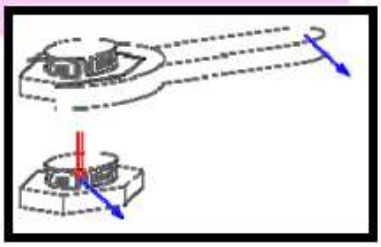
- Fuerza gravitatoria.
- Fuerza recuperadora de una mas.
- Fuerza que ejerce el núcleo sobre un electrón.
- Fuerza centrípeta.



Momento de una fuerza, respecto de un punto. Momento de una fuerza Central

Cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo rígido que puede girar alrededor de algún eje, el cuerpo tenderá a realizar una rotación, siempre que la fuerza no se dirija o provenga del eje.

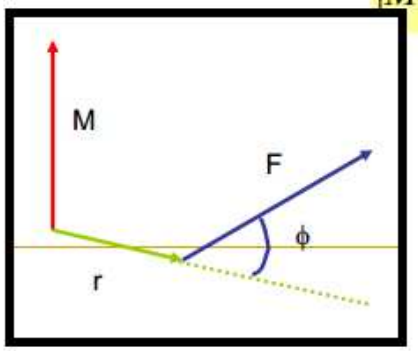
La capacidad de una fuerza para hacer girar un cuerpo alrededor de un eje se mide por una magnitud que se llama momento de torsión.



Definición y unidades:

$$\overline{M} = \vec{r} \times \overline{F}$$

$$\left|\overline{M}\right| = r \cdot F \, sen\,\phi = F \cdot d$$



- Es un vector axial. Es un producto vectorial
- Solamente está definido respecto de un punto.
- d es el brazo del momento, distancia perpendicular.

Momento angular de una partícula

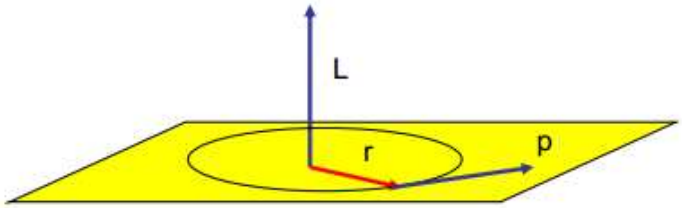
Cantidad de movimiento ... que determina la interacción de una partícula con otras. Si no hay interacción, si está aislada, la cantidad de movimiento de conserva.

Momento angular es el momento de la cantidad de movimiento. Unidades

$$\overline{L} = \vec{r} \times \overline{p}$$

$$\left|\overline{L}\right| = r \cdot p \cdot sen\,\phi$$

- Es un vector axial. Es un producto vectorial.
- Depende del punto respecto del cual se toman momentos
- Si r es $\perp$ a p el momento angular es máximo
- Si r es $\parallel$ a p el momento angular es cero (mov. rectilíneo)



Momento Angular de una Partícula:

Momento angular de un partícula en movimiento circular

$$L_0 = mrv\,\text{sen}\,90 = mrv = mr^2\omega \Rightarrow \boxed{L_0 = I\omega}$$

donde $I = mr^2$ es el Momento de inercia

Momento angular de un sólido que tiene un movimiento de rotación en torno a un eje

$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \ldots = \omega\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\right) = I\omega$$

donde $I = \sum m_i r_i^2$ es el momento de iniercia del sólido rígido

Momento de inercia de una esfera y de distintos cuerpos geométricos

$$L_{esfera} = \frac{2}{5}MR^2 \qquad L_{cilindro} = \frac{1}{2}MR^2$$

Momento angular terrestre

La Tierra posee dos momentos angulares:

- Momento angular orbital: respecto del Sol

$$L_0 = r\ M\ v_0 = M\ r^2\ \omega_0 = I\ \omega_0$$

Ej-4.: Calcula el momento angular orbital de la Tierra alrededor del Sol.

$2{,}7 \cdot 10^{40}$ kg·m²·s

- Momento angular intrínseco: debido al movimiento de rotación sobre su eje

$$L_0 = I\ \omega = \frac{2}{5}M\ R^2\ \omega$$

Ej-5.: Calcula el momento angular intrínseco de rotación de la Tierra.

$7{,}1 \cdot 10^{33}$ kg·m²·s

Los electrones también tiene dos momentos angulares: orbital (*l*) y de espín (*s*)

Relación entre el momento angular y el momento de torsión:

A partir de la definición de momento angular y derivando respecto al tiempo ...

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{derivando respecto del tiempo}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a} = \vec{F} \\ \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0 \quad \text{son vectores paralelos} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \\ \text{y} \quad \boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} \end{array}$$

Conservación de momento angular

Si no actúa ningún momento de torsión sobre una partícula, el momento angular de la partícula permanece constante.

$$\text{Si } \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cte$$

Esto ocurre:

- Cuando F=0
- Cuando r=0
- Cuando F y r son paralelos. (Fuerzas centrales)

Todo cuerpo sometido a fuerzas centrales conserva el momento angular

Ecuación fundamental de la dinámica de rotación

A partir de la relación entre el momento angular y el momento de una fuerza

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\alpha}}$$

Momento Angular y segunda ley de Kepler

Toda partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central conserva su momento angular.

- Por conservar la dirección:

  El momento angular será perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$, por tanto la trayectoria de la partícula debe estar en un plano

- Por conservar el sentido

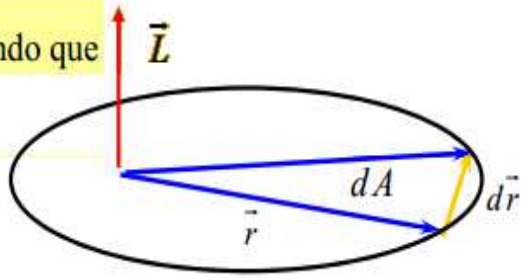
  Si $\vec{L}$ conserva el sentido, la partícula siempre recorrerá la órbita en el mismo sentido, y por tanto las trayectorias de los cuerpos en el seno de campos de fuerzas centrales serán curvas planas

- Por conservar el módulo:

  Representa el área del paralelogramo formado por los dos vectores que constituyen el producto vectorial

$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times d\vec{r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}dt\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|dt$ y considerando que

$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\times m\vec{v}\right| = m\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$ se deduce $\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m}}$



- La ley de las áreas es aplicable a cualquier fuerza central aunque no fuera proporcional al inverso del cuadrado de la distancia.

Esta ley justifica el hecho de que un planeta que gira alrededor del Sol va más deprisa en el perihelio que en el afelio.

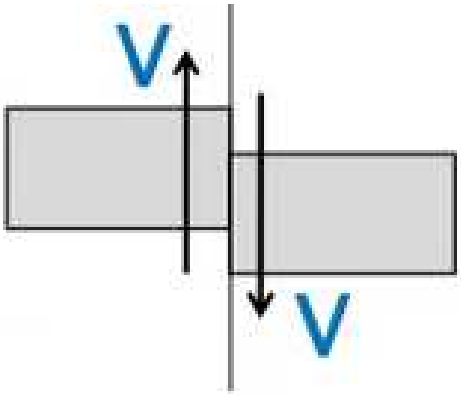
$$\text{Si } \bar{L} \text{ es constante} \Rightarrow \vec{r}_A \times m\vec{v}_A = \vec{r}_P \times m\vec{v}_P$$
$$\Rightarrow \boxed{r_A v_A = r_P v_P}$$

Como la velocidad no es perpendicular en todo momento al vector de posición, se puede concluir que esta fuerza tiene una componente tangencial que modifica el módulo de la velocidad. Del afelio al perihelio acelera y frena de nuevo hacia el afelio.

3.2 Fuerza cortante, momento flexionante

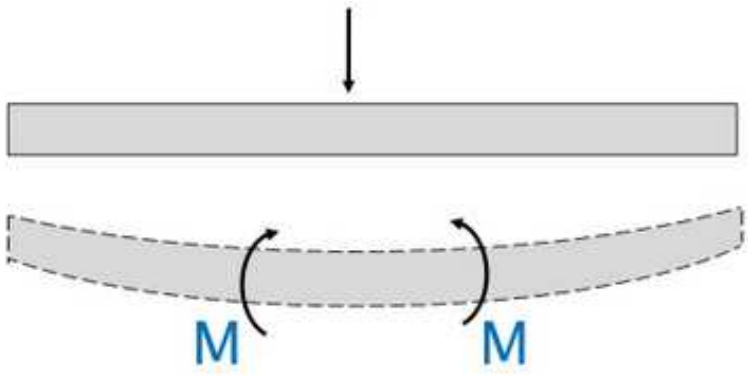
La fuerza cortante se define como la suma algebraica de todas las fuerzas externas, perpendiculares al eje de una viga (o elemento estructural) que actúan a un lado de la sección considerada. Será positiva cuando la parte situada a la izquierda de la sección tiende a subir con respecto a la parte derecha, como muestra la figura:

Figura 15



El momento flector corresponderá a la suma de los momentos producidos por todas las fuerzas externas a un mismo lado de la sección, respecto a un punto de dicha sección, como muestra la figura.

Figura 16



Es además necesario definir qué es una viga. Una viga es un elemento estructural donde sus dimensiones es mucho mayor a otras dos, y a través de uno o más apoyos, transmite a la fundación u otros elementos estructurales las cargas aplicadas en la dirección de su eje.

Las vigas se pueden clasificar según sus características estáticas en:

- Isostáticas: Se pueden resolver utilizando las ecuaciones de equilibrio (El n° de incógnitas es igual al n° de ecuaciones)
- Hiperestáticas: Para resolver se requiere de otras condiciones adicionales, además de las ecuaciones de equilibrio. (El n° de incógnitas es mayor que el n° de ecuaciones)

Diagrama De Fuerzas Cortantes Y Momento Flector

Estos diagramas permiten representar gráficamente los valores "V" (velocidad producida en las fuerzas cortantes) y "M" (que representa el momento flector) a lo largo de los ejes de los elementos estructurales.

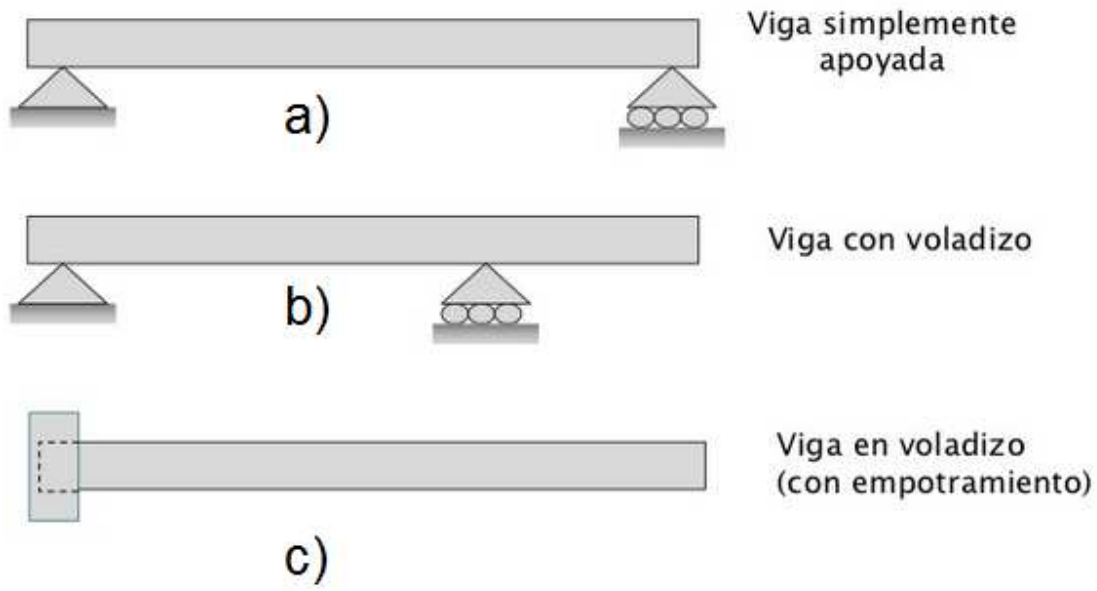
Un diagrama se construye dibujando una línea de base que corresponde en longitud, al eje de la viga (elemento estructural (ee)) y cuyas ordenadas indicarán en valor de "V" y "M" en los puntos de la viga.

Los miembros ligeros que soportan cargas aplicadas perpendicularmente a sus ejes longitudinales se llaman vigas. En general, las vigas son barras rectas y largas que tienen secciones transversales constantes. A menudo se clasifican según el modo en que están soportadas.

Por ejemplo:

- Una viga simplemente apoyada está soportada por un pasador en un extremo y por un rodillo en el otro, figura a).
- Una viga en voladizo está empotrada en un extremo y libre en el otro, figura b).
- Una viga con coladizo tiene uno o ambos extremos libres situados más allá de los soportes, figura c).

Figura 17



Las vigas pueden considerarse entere los elementos estructurales más importantes. Como ejemplos se cuentan los miembros usados para soportar el piso de un edificio, la cubierta de un puente o el ala de un aeroplano. También el eje de un automóvil, la pluma de una grúa e incluso muchos de los huesos del cuerpo humano funcionan como vigas.

Debido a las cargas aplicadas, las vigas desarrollan una fuerza cortante y un momento flexionante internos que, en general, varían de punto a punto a lo largo del eje de la viga. Se necesita primero determinar la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo en la viga. Una manera de hacerlo es expresar V y M como funciones de la posición x a lo largo del eje de la viga. Esas funciones de fuerza cortante y momento flexionante pueden trazarse y representarse por medio de gráficas llamadas diagramas de cortante y momento. Los valores máximos de V y M pueden entonces obtenerse de esas gráficas.

Además, como los diagramas de cortante y momento dan información detallada sobre la variación de la fuerza cortante y del momento flexionante a lo largo del eje de la viga, son usados por los ingenieros para decidir dónde colocar la viga en varios puntos a lo largo de su longitud.

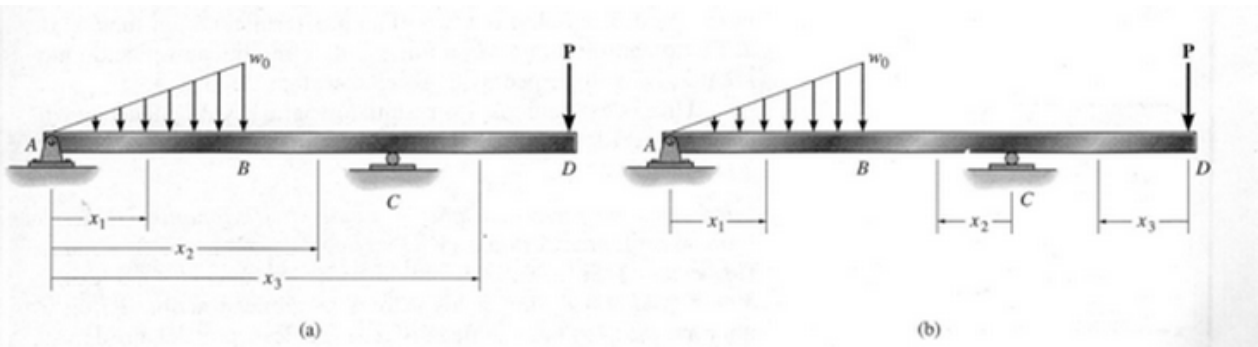
Usaremos el método de las secciones para determinar la fuerza cortante V y el momento flexionante M en un punto específico. Sin embargo, si tenemos que determinar V y M como funciones de x a lo largo de una viga, entonces es necesario localizar la sección imaginaria o corte a una distancia x arbitraria desde el extremo de la viga y calcula V y M en términos de x. Respecto a esto, la selección del origen y de la dirección positiva para cualquier x seleccionada es arbitraria. Con frecuencia, el origen se localiza en el extremo izquierdo de la viga y la dirección positiva se toma hacia la derecha.

En general. Las funciones de fuerza cortante y momento flexionate internos obtenidas en función de x serán descontinuas, o bien sus pendientes serán discontinuas en puntos en que una carga distribuida cambia o donde fuerzas o momentos concentrados son aplicados. Debido a esto , las funciones de cortante y momento deben determinarse para cada región de la viga localizada entre dos discontinuidades calesquiera de carga.

Por ejemplo, tendrán que usarse las coordenadasX_1, X_2 y X_3para describir la variación de V y M a lo largo de la viga en la figura 2A. Esas coordenadas serán válidas sólo dentro de las regiones de A a B ´para X_1, de B a C para X_2 y de C a D para X_3. Aunque cada una de esas descripciones coordenadas tiene el mismo origen, esto no tiene que ser siempre el caso. Antes bien, es más fácil expresar V y M como funciones de x_1, x_2 y x_3 con orígenes en A, C y D, como se muestra en la figura 2B. Aquí x_1 es positiva hacia la derecha y x_2, y x_3 son positivas hacia la izquierda.

Convención de signos para vigas. Antes de presentar un método para determinar la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones de x y luego trazar esas funciones (diagramas de fuerza cortante y momento flexionante), es necesario primero establecer una convención de signos que nos permita definir fuerzas cortantes y momentos flexionantes internos positivos y negativos.

Figura 18



Esto es: análogo a la asignación de direcciones coordenadas x positiva hacia la derecha y y positiva hacia arriba al graficar una función y=f(x). Aunque la selección de una convención de signos es arbitraria.

PROCEDIMIENTO DE ANALISIS.

El siguiente procedimiento constituye un método para determinar las funciones de fuerza cortante y momento flexionante y para trazar los diagramas correspondientes para una viga.

- Reacciones en los soportes. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la viga y determine todas las reacciones en los soportes. Descomponga las fuerzas en componentes que actúen perpendicular y paralelamente al eje de la viga.

- Funciones de fuerza cortante y momento flexionante. Seleccione coordenadas de la posición x tales que cada coordenada se extienda sobre una región de la viga localizada entre fuerzas concentradas, momentos concentrados, o discontinuidades de la carga distribuida. El origen de cada coordenada puede fijarse en cualquier punto conveniente, pero por lo regular se fija en el extremo izquierdo de la viga.

- Seccione la viga perpendicularmente a su eje en cada posición x y dibuje el diagrama de cuerpo libre de uno de los dos segmentos. Asegúrese de que V y M se muestran actuando en sus sentidos positivos, de acuerdo con la convención de signos dada en la figura 3. Use la ecuación de equilibrio =0 para determinar V en función de x. El momento interno M en función de x se obtiene sumando momentos, =0, respecto a la sección cortada de la viga.

- Una vez obtenidos, los resultados para V y M pueden verificarse usando los resultados de la ecuación 2, V=dM/dx y –w=dV/dx.

- Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Trace la función de fuerza cortante (V versus x) y de momento flexionante (M versus, x). Si los valores numéricos de las funciones que describen V y M son positivos, los valores se grafican arriba del eje x, mientras que los valores negativos se grafican por debajo de este eje. Generalmente es conveniente mostrar los diagramas de cortante y momento directamente abajo del diagrama de cuerpo libre de la vida.

3.4 Método de los nodos, método de las secciones

Para comprender el método de los nodos y de las secciones, primero es necesario definir que es una armadura.

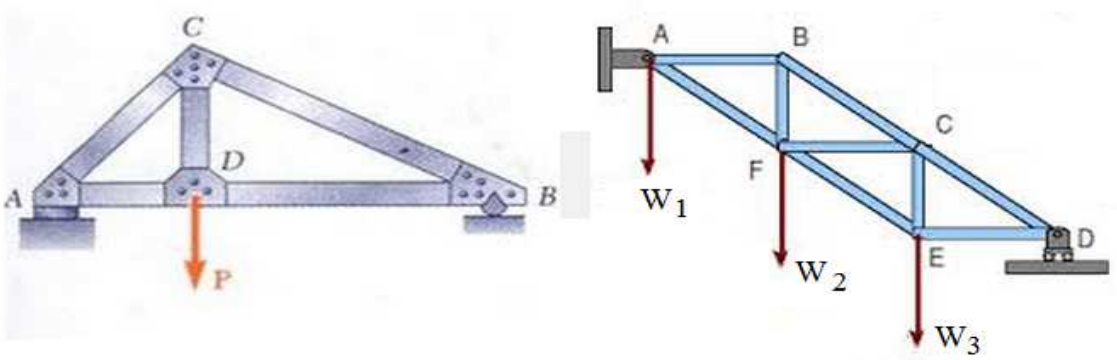
Armadura

Una armadura es un montaje de elementos delgados y rectos que soportan cargas principalmente axiales (de tensión y compresión) en esos elementos.

Los elementos que conforman la armadura, se unen en sus puntos extremos por medio de pasadores lisos sin fricción localizados en una placa llama "Placa de Unión", o por medio de soldadura, remaches, tornillos, clavos o pernos en el caso de armaduras de madera, para formar un armazón rígido.

Como los elementos o miembros son delgados e incapaces de soportar cargas laterales, todas las cargas deben estar aplicadas en las uniones o nodos.
Se dice que una armadura es rígida si está diseñada de modo que no se deformará mucho o se colapsará bajo la acción de una carga pequeña.

Figura 19



Armaduras simples

La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial.

Las armaduras simple, son aquellas armaduras que se obtienen a partir de una armadura triangular rígida, agregándole dos nuevos elementos y conectándolos en un nuevo nodo.

Si a una armadura triangular rígida le agregamos dos nuevos elementos y los conectamos en un nuevo nodo, también se obtiene una estructura rígida.

Las armaduras que se obtienen repitiendo este procedimiento reciben el nombre de armaduras simples. Se puede comprobar que en una armadura simple el número total de elementos es m = 2 n -3, donde n es el número total de nodos.

Figura 20. Armaduras Simples

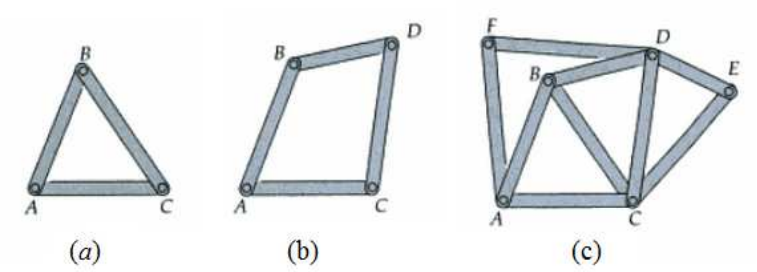


Figura21. Armaduras para puentes

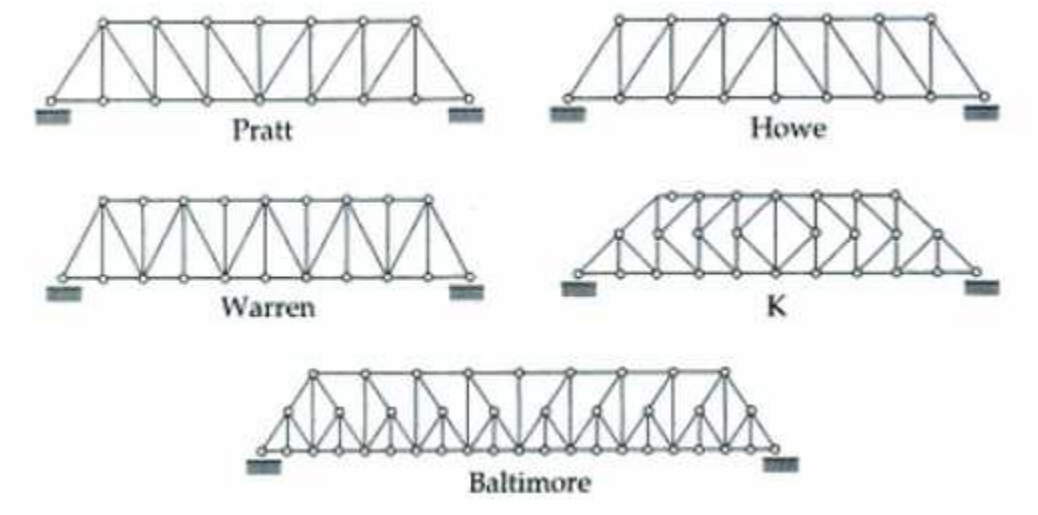
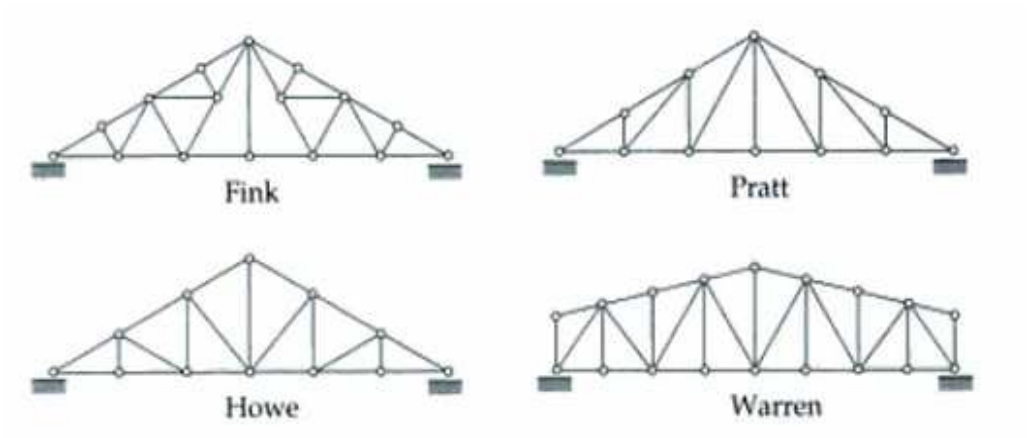


Figura 22. Armadura para techos



3.4.1 Análisis de armaduras por el método de los nodos

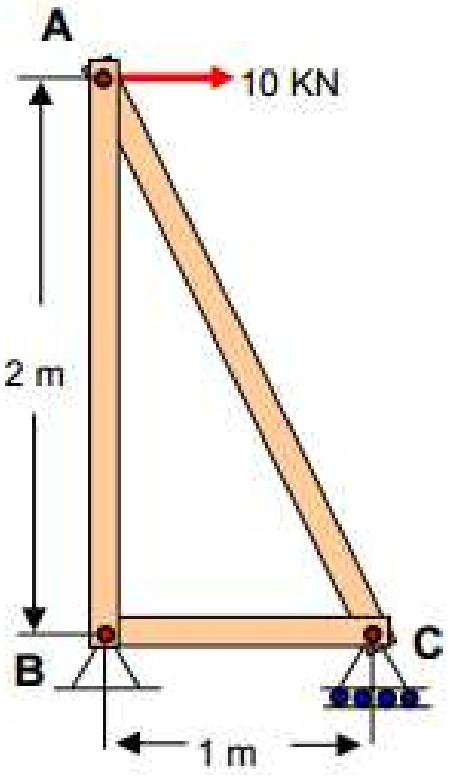
El método de los nodos nos permite determinar las fuerzas en los distintos elementos de una armadura simple. Consiste en:

1. Obtener las reacciones en los apoyos a partir del DCL de la armadura completa.
2. Determinar las fuerzas en cada uno de los elementos haciendo el DCL de cada uno de los nodos o uniones. Se recomienda empezar analizando aquellos nodos que tengan no más de dos incógnitas.

Si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia el perno, dicho elemento está en compresión; si la fuerza ejercida por un elemento sobre el perno está dirigida hacia fuera de éste, dicho elemento está en tensión.

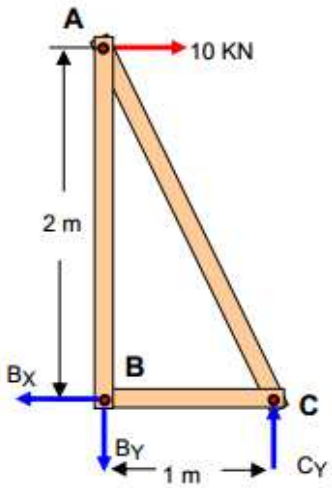
Ejemplo :

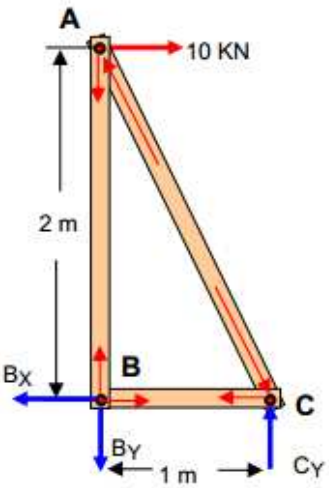
1. Determinar las fuerzas axiales en los miembros de la armadura e indicar si están en tensión o en compresión.



Solución:

- Primero realizamos el Diagrama de fuerzas sobre la estructura.





$\Sigma M_C = 0$

$+$ $B_Y (1) - 10 (2) = 0$

$B_Y (1) = 10 (2)$

$B_Y = 20$ KN

$\sum F_X = 0$

$10 - B_X = 0$

$B_X = 10$ KN

$\sum F_Y = 0$

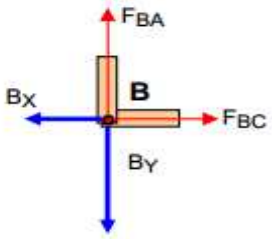
$C_Y - B_Y = 0$

$C_Y = B_Y$ Pero: $B_Y = 20$ KN

$C_Y = 20$ KN

- Diagrama de fuerza para los nodos A y B

NUDO B



$\sum F_X = 0$

$F_{BC} - B_X = 0$

$F_{BC} = B_X$

pero: $B_X = 10$ KN

$F_{BC} = 10$ KN (tensión)

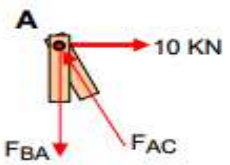
$\sum F_Y = 0$

$F_{BA} - B_Y = 0$
$F_{BA} = B_Y$

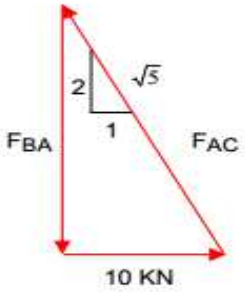
pero: $B_Y = 20$ KN

$F_{BA} = 20$ KN (tensión)

NUDO A



$$\frac{F_{BA}}{2} = \frac{10}{1} = \frac{F_{AC}}{\sqrt{5}}$$



$$\frac{F_{BA}}{2} = \frac{10}{1} = \frac{F_{AC}}{\sqrt{5}}$$

Hallamos F_{AC}

$$\frac{10}{1} = \frac{F_{AC}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{AC} = 10\left(\sqrt{5}\right) = 22{,}36KN$$

F_{AC} = 22,36 KN (compresión)

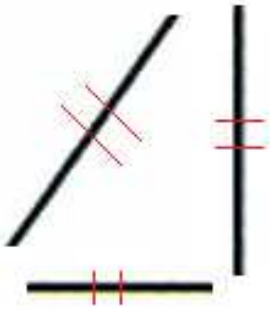
3.4.2 Método de las secciones

El método de las secciones para el análisis de armaduras se basa en el equilibrio de cuerpo rígido de una parte de la armadura.

Pasos para analizar una armadura por el método de las secciones.

1. Realizar un diagrama de cuerpo libre sobre la armadura completa. Escribir las ecuaciones de equilibrio y resolver estas ecuaciones para determinar las reacciones en los apoyos.

2. Localice los miembros de la armadura para los cuales se desean encontrar las fuerzas. Marque cada uno de ellos con dos trazos cortos como se muestra en la figura.



3. Trace una línea (corte) a través de la armadura para separarla en dos partes. No es necesario que la línea sea recta, sino que debe separar a la armadura en dos partes apropiadas. Así mismo, se debe tener en cuenta que cada una de las partes de la armadura debe contener por lo menos un miembro completo (sin cortar).

4. Seleccione una de las partes de la armadura seccionadas en el paso 3 y dibuje un diagrama de cuerpo libre de ella. A menos que se tenga otra información, suponga que las fuerzas desconocidas en los miembros son de tensión.

5. Escriba las ecuaciones de equilibrio para las partes seleccionadas en el paso 4. Si en el paso 3 fue necesario cortar más de tres miembros con fuerzas desconocidas en ellos, es posible que se tenga que considerar partes adicionales de la armadura o nodos por separados. Para determinar las incógnitas.

6. Resuelva el conjunto de ecuaciones obtenidas en el paso 5 para determinar las fuerzas desconocidas.

7. Repita los pasos 3 a 6, según se requiera, para completar el análisis.

Ejemplo : Determinar las fuerzas en los elementos FH, GH y GI, de la siguiente armadura:

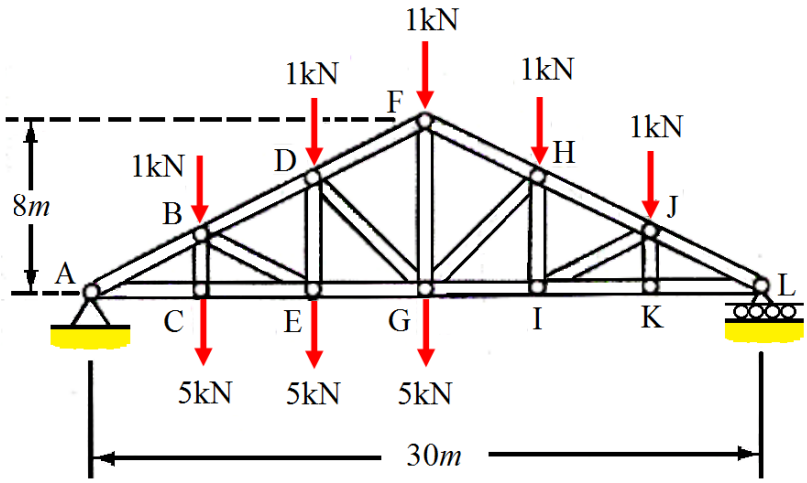
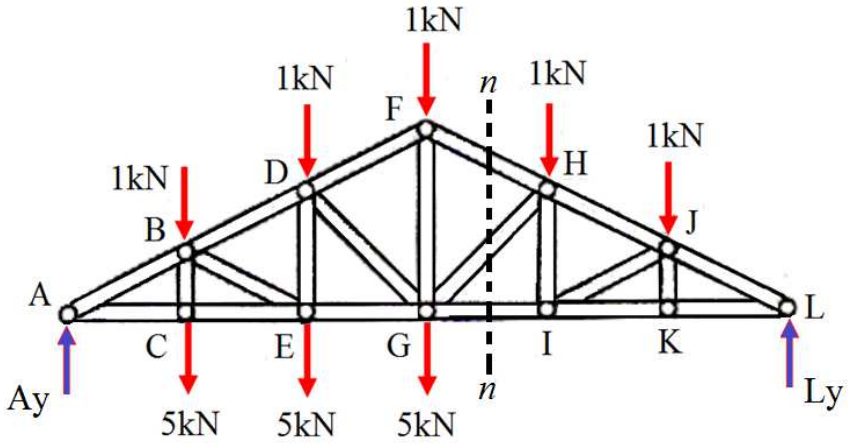


Diagrama de fuerza para toda la armadura



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Ay + Ly - 20kN = 0$$

$$Ay + Ly = 20kN \qquad (1)$$

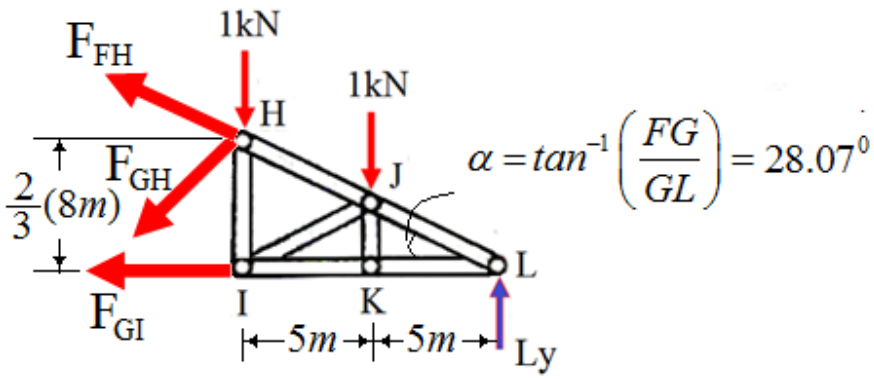
$$\sum M_A = (30m)Ly - (6kN)(5m) - (6kN)(10m) - (6kN)(15m) - (1kN)(20m) - (1kN)(25m) = 0$$

$$Ly = 7.5kN \qquad (2)$$

Reemplazamos la ecuación (2) en (1) obteniendose:

$$Ay = 12.5kN$$

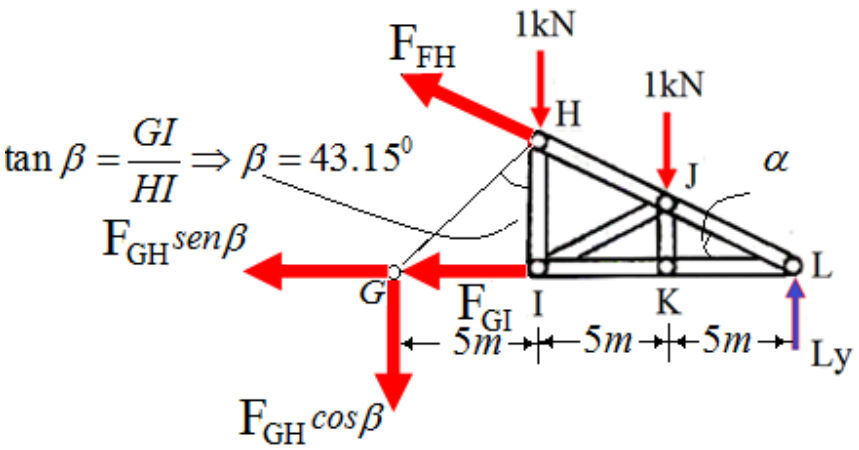
Fuerza en el elemento GI. Se pasa la sección *nn* a través de la armadura como se muestra en la figura. Utilizando la porción HLI de la armadura como cuerpo libre, se puede obtener el valor de F_{GI}.



$$\sum M_H = 0 \Rightarrow (7.5kN)(10m) - (1kN)(5m) - F_{GI}(5.33m) = 0$$

$$F_{GI} = 13.13kN$$

Fuerza en el elemento GH. Se mueve FGH a lo largo de su línea de acción hasta que actué en el punto G y se calcula el momento para la sección de la armadura con respecto a L.



$$\sum M_L = 0 \Rightarrow (1kN)(10m) + (1kN)(5m) - \left(F_{GH}\cos\beta\right)(15m) = 0$$

$$F_{GH} = -1.371kN \Rightarrow \quad F_{FH} = 1.371kN$$

FÍSICA II

UNIDAD III

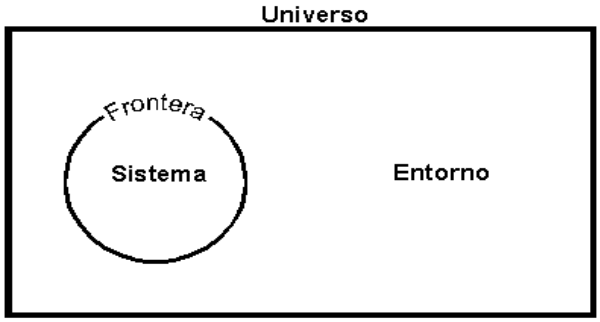
FUNDAMENTOS DE LA TERMODINÁMICA

1. INTRODUCCIÓN A LA TERMODINÁMICA

Etimológicamente la termodinámica es un término proveniente del griego “θερμο = termo” que significa calor y “δύναμις = dínamis” que significa fuerza. En física se define como la ciencia que estudia las propiedades materiales de los sistemas macroscópicos y de la inter-conversión de las distintas formas de energía, en particular de la transformación de calor en trabajo.

Ésta ciencia corresponde a una teoría fenomenológica, es decir, a partir de razonamientos deductivos, estudia sistemas reales, sin modificar y sigue un método experimental. Como ciencia fenomenológica, la termodinámica no se ocupa de ofrecer una interpretación física de sus magnitudes, sino más bien estudia y clasifica las interacciones entre diversos sistemas, lo que lleva a definir conceptos como sistema termodinámico y su contorno. Un sistema termodinámico se caracteriza por sus propiedades, relacionadas entre sí mediante las ecuaciones de estado. Éstas se pueden combinar para expresar la energía interna y los potenciales termodinámicos, útiles para determinar las condiciones de equilibrio entre sistemas y los procesos espontáneos. Con estas herramientas, la termodinámica describe cómo los sistemas responden a los cambios en su entorno. Esto se puede aplicar a una amplia variedad de ramas de la ciencia y de la ingeniería, tales como motores, cambios de fase, reacciones químicas, fenómenos de transporte, e incluso agujeros negros.

Los sistemas que son objeto del estudio de la termodinámica se denominan Sistemas Termodinámicos. Un sistema termodinámico es una parte del universo que se aísla para su estudio. Este “aislamiento” se puede llevar a cabo de una manera real, en el campo experimental, o de una manera ideal, cuando se trata de abordar un estudio teórico.



Conviene precisar el concepto de sistema termodinámico como una cantidad de materia limitada por una superficie cerrada. Si el sistema es un bloque de cobre, la superficie es simplemente la del bloque. El sistema pudiera ser un gas, o un gas y un líquido, contenido en un cilindro provisto de un pistón móvil.

Los sistemas termodinámicos se clasifican según el grado de aislamiento que presentan con su entorno en:

- Sistema aislado:

  Es aquel que no intercambia ni materia ni energía con su entorno. Un ejemplo de este clase podría ser un gas encerrado en un recipiente de paredes rígidas lo suficientemente gruesas (paredes adiabáticas) como para considerar que los intercambios de energía calorífica sean despreciables, ya que por hipótesis no puede intercambiar energía en forma de trabajo.

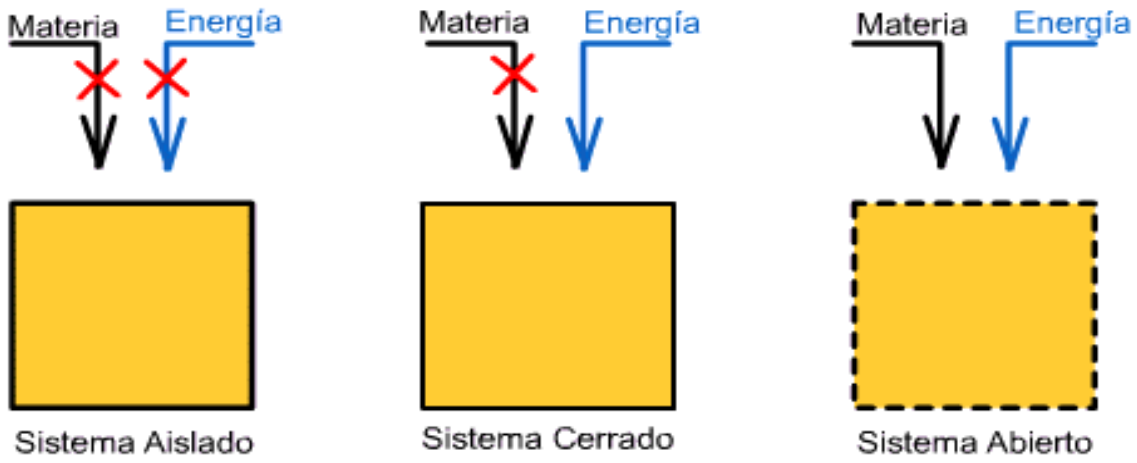
- Sistema cerrado:

  Es un sistema que puede intercambiar energía pero no materia con el exterior. Existen muchos ejemplos de sistemas cerrados, el planeta Tierra se puede considerarse un sistema cerrado. Una lata de sardinas también podría estar incluida en esta clasificación.

- Sistema abierto:

  En esta clase se incluyen la mayoría de sistemas que pueden observarse en la vida cotidiana, acá existe intercambio de materia y energía. Por ejemplo, un vehículo motorizado es un sistema abierto, ya que intercambia materia con el exterior cuando es cargado, o su conductor se introduce en su interior para conducirlo, o es cargado de combustible, o se consideran los gases que emite por su tubo de escape pero, además, intercambia energía con el entorno. Sólo hay que comprobar el calor que desprende el motor y sus inmediaciones o el trabajo que puede efectuar acarreando carga.

Figura 1. Sistemas Termodinámicos



Es necesario definir algunos conceptos que nos permitan comprender mejor que es la termodinámica.

➢ Estado Termodinámico

El estado termodinámico de un sistema se representa por un conjunto de parámetros macroscópicos linealmente independientes (Presión, volumen, temperatura, etc.). Las magnitudes que sólo son función de los parámetros independientes en el instante considerado, son las funciones de estado.

El estado termodinámico de un sistema es estacionario, cuando sus parámetros permanecen constantes en el tiempo; si no existen fuentes de energía externas, el sistema se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico.

El estado termodinámico de un sistema es transitorio, cuando sus parámetros dependen del tiempo.

➢ Proceso Termodinámico

Se denomina proceso al conjunto de infinitos estados intermedios por la que pasa un sistema, cuando cambia de un estado inicial a un estado final. Estas transformaciones deben transcurrir desde un estado de equilibrio inicial a otro final; es decir, que las magnitudes que sufren una variación al pasar de un estado a otro deben estar perfectamente definidas en dichos estados inicial y final.

Un proceso termodinámico puede ser visto como los cambios de un sistema, desde unas condiciones iniciales hasta otras condiciones finales, debidos a interacciones con el entorno de trabajo o calor.

El trabajo realizado durante el proceso por o en contra del sistema, se puede representar como el área bajo la curva en un

Figura 2. Diagrama Presión v/s Volumen

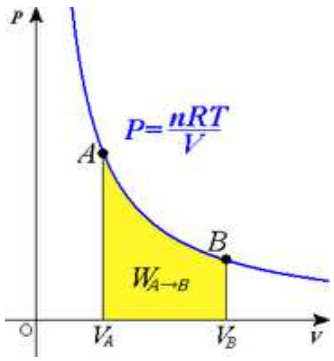
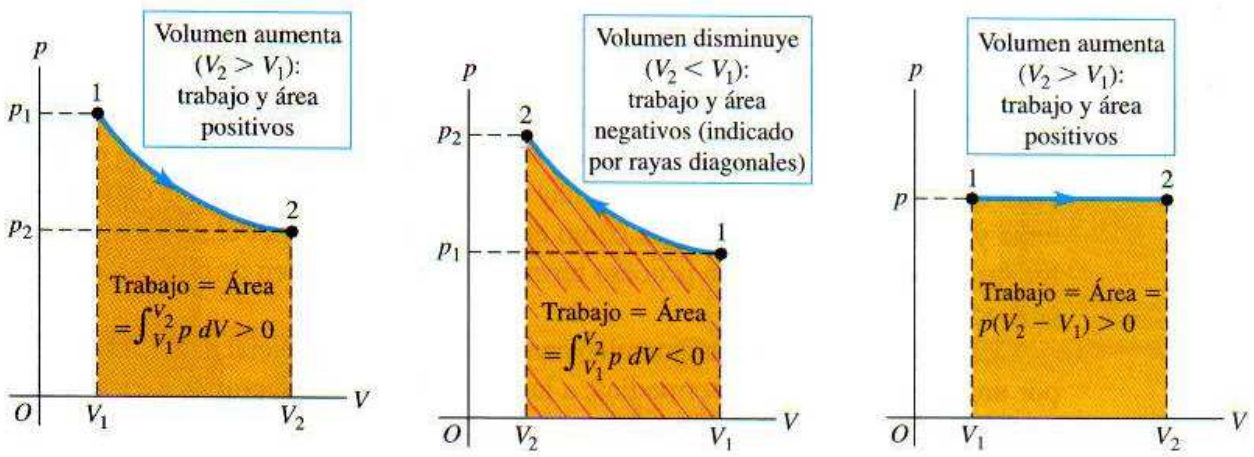


Figura 3



➢ Procesos Reversibles e Irreversibles

Un proceso termodinámico desde un estado inicial $_i$ a un estado final $_f$ tal que, tanto el sistema como el medio externo pueden reintegrarse desde el estado final $_f$ a su estado inicial $_i$, de forma que no se origine ningún cambio exterior al sistema ni a su medio ambiente, se dice que es un proceso reversible.

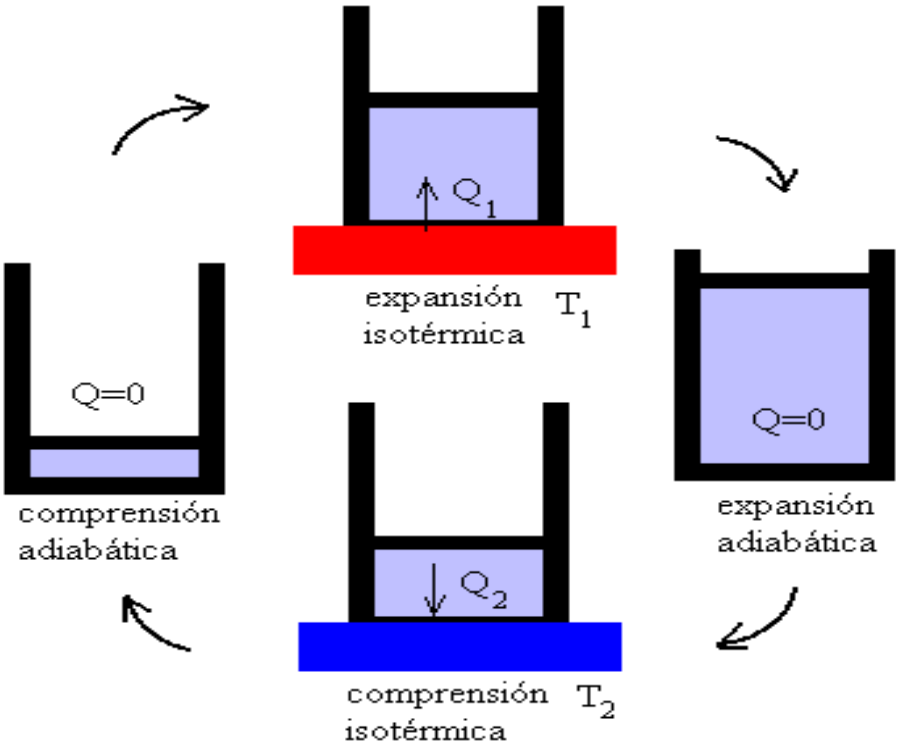
Caso contrario es el proceso irreversible. Hablaremos de un proceso termodinámico irreversible en aquellos casos donde no exista ninguna posibilidad de que un suceso vuelva a su estado original. Por ejemplo el envejecimiento, la erosión, la fotosíntesis, la evaporación son procesos de transformación natural, cuya principal característica es que son procesos que se desarrollan durante un lapso de tiempo determinado, o sea que no es instantáneo, y además no tienen la posibilidad de revertirse

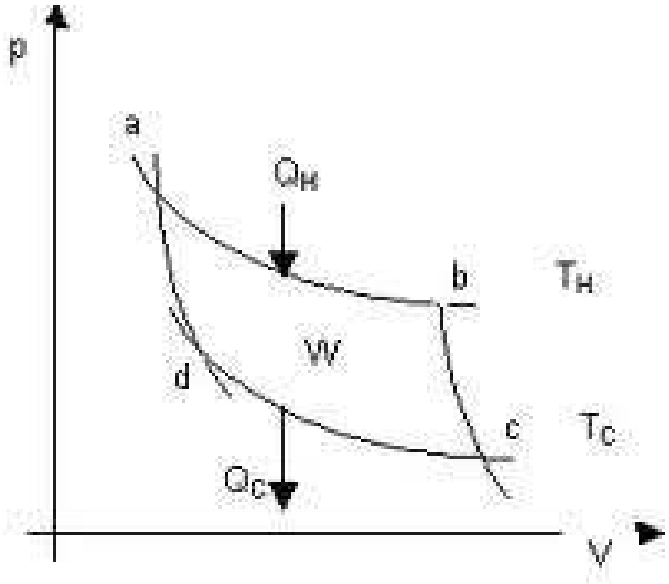
Los procesos “reversibles” son idealizaciones “convenientes” para la descripción ordenada y simplificada de procesos que ocurren realmente en la naturaleza. Son aproximaciones y pueden ser considerados sólo bajo ciertas condiciones.

➢ Ciclo Termodinámico

Se denomina ciclo termodinámico a cualquier serie de procesos termodinámicos tales que, al transcurso de todos ellos, el sistema regrese a su estado inicial; es decir, que la variación de las magnitudes termodinámicas propias del sistema sea nula.

Figura 4


Q1
expansión
isotérmica
T1
Q=0
expansión
adiabática
Q=0
compresión
adiabática
Q2
compresión
isotérmica
T2

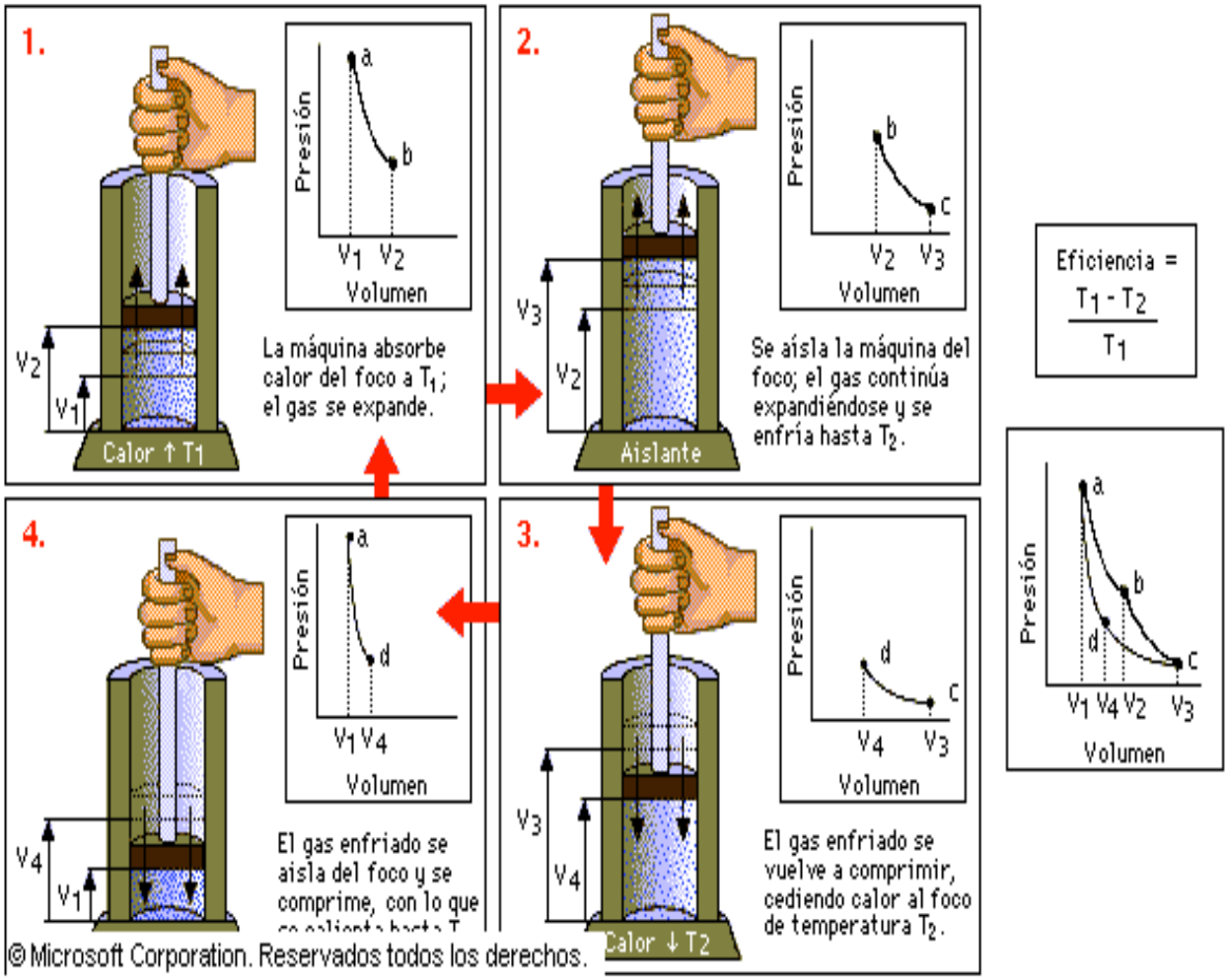

p
a
QH
b
TH
W
d
c
TC
QC
V

En un ciclo Termodinámico la ΔU es cero y el trabajo neto realizado es igual al calor neto recibido por el sistema.

Un motor térmico de eficiencia perfecta realizaría un ciclo ideal en el que todo el calor se convertiría en trabajo mecánico. El científico francés del siglo XIX Sadi Carnot, que concibió un ciclo termodinámico que constituye el ciclo básico de todos los motores térmicos, demostró que no puede existir ese motor perfecto. Cualquier motor térmico pierde parte del calor suministrado. El segundo principio de la termodinámica impone un límite superior a la eficiencia de un motor, límite que siempre es menor del 100%. La eficiencia límite se alcanza en lo que se conoce como ciclo de Carnot.

Generalmente, el estudio de los ciclos termodinámicos se lleva a cabo suponiendo que el sistema es un fluido perfecto, que funciona en una máquina igualmente perfecta, es decir, suponiendo que el ciclo está constituido por una serie de transformaciones termodinámicas ideales.

Figura 5



© Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

1.a) Tipos de Variables

Existen dos tipos de variables termodinámicas.

- Variables intensivas son aquellas que resultan independientes de la extensión (geométrica) del sistema, como por ejemplo la presión y la densidad. Estas propiedades son no aditivas, ya que si medimos alguna de estas variables en cualquier subdivisión de los sistemas obtendremos los mismos valores numéricos.

- Variables extensivas son aquellas proporcionales a la extensión del sistema y estas si resultan aditivas. El volumen, la energía, etc., son ejemplos de propiedades extensivas. Si nosotros medimos el volumen de la mitad del sistema, hallaremos un valor de volumen que corresponde a la mitad del valor del sistema completo, por ello el volumen es una propiedad extensiva.

A menudo es conveniente obtener ciertas propiedades intensivas a través de sus correspondientes extensivas. Por ejemplo el volumen especifico se obtiene dividiendo el volumen del sistema entre la masa del mismo. La densidad es la masa por unidad de volumen y es el inverso del volumen específico, etc.

1.b) Definiciones fundamentales

El desarrollo y aplicaciones de la termodinámica dependen en gran medida, de los conceptos de: sistema termodinámico, alrededores, equilibrio y temperatura.

- Sistema termodinámico:

Un sistema termodinámico está constituido por cierta cantidad de materia o radiación en una región del espacio que nosotros consideramos para su estudio. Al hablar de cierta región del espacio, surge de manera natural el concepto de frontera, esto es, la región que separa al sistema del resto del universo físico. Esta frontera. en la mayoría de los casos, está constituida por las paredes del recipiente que contiene al sistema (fluidos, radiación electromagnética), o bien, su superficie exterior (trozo de metal, gota de agua, membrana superficial). Sin embargo, puede darse el caso de que la frontera del sistema sea una superficie abstracta, representada por alguna condición matemática como en el caso de una porción de masa de un fluido en reposo o en movimiento.

Es importante señalar que el sistema termodinámico y sus fronteras están determinados por el observador. De hecho el observador determina el sistema a estudiar a través de las restricciones que impone cuando lo elige para su estudio. Estas restricciones pueden ser de naturaleza geométrica, mecánica o térmica. Las

primeras están impuestas a través de paredes que confinan al sistema a una región finita del espacio. Las mecánicas determinan como poder intercambiar energía con el sistema a través de la transmisión de trabajo mecánico, incluyendo todos los equivalentes de este trabajo: el trabajo magnético, eléctrico, químico, electroquímico, etc. Por ejemplo un fluido encerrado en un recipiente con un pistón movible. Las paredes térmicas determinan la propiedad de poder afectar el grado relativo de enfriamiento o calentamiento que posee el sistema.

- Alrededores

La parte del universo que interacciona con el sistema constituye sus alrededores. La interacción entre el sistema y sus alrededores estará caracterizada por los intercambios mutuos de masa y energía, en sus diversas formas, la energía puede intercambiarse por medios mecánicos o por medios no mecánicos, esto es por procesos de calentamiento o enfriamiento.

En el caso de que un sistema está contenido en un recipiente, lo cual es una situación común en termodinámica, el grado de interacción con sus alrededores dependerá de la naturaleza de sus paredes. Podemos definir dos tipos de paredes que son:

a) Paredes adiabáticas, son aquellas que no permiten que un sistema modifique su grado relativo de calentamiento. Los llamados aislantes térmicos a nivel comercial son excelentes ejemplos de materiales con esta propiedad, como la madera, el asbesto, etc.

En general supondremos que los sistemas poseen dimensiones suficientemente pequeñas para poder despreciar los efectos del campo gravitacional.

b) Paredes diatérmicas, son aquellas que permiten interacciones que modifiquen el grado relativo de calentamiento. Los metales son materiales que constituyen excelentes paredes diatérmicas.

En virtud de la naturaleza de las paredes, los sistemas termodinámicos se pueden clasificar en:

1. Sistema cerrado. Tiene paredes impermeables al paso de la materia; en otras palabras, el sistema no puede intercambiar materia con sus alrededores, y su masa permanece constante.

2. Sistema abierto. Puede existir intercambio de materia o de alguna forma de energía con sus alrededores.

3. Sistema aislado. No puede tener absolutamente ninguna interacción con sus alrededores: la pared resulta impermeable a la materia y a cualquier forma de energía mecánica o no mecánica.

1.1 Equilibrio térmico

Todos los cuerpos tienen una energía llamada energía interna. La cantidad de energía interna de un cuerpo es muy difícil de establecer ya que las partículas que forman un cuerpo tienen energías muy variadas. Tienen energías de tipo eléctrico, de rotación, de traslación y vibración debido a los movimientos que poseen, energías de enlace (que pueden dar posibles reacciones químicas), etcétera.

Por lo anterior es más fácil medir la variación de energía en un proceso de transformación concreto, sobre todo si el proceso es sólo físico. (Ejemplos: calentamiento, cambios de estado...).

Al poner en contacto dos cuerpos a distinta temperatura, el de mayor temperatura cede parte de su energía al de menos temperatura hasta que sus temperaturas se igualan. Se alcanza así lo que llamamos "equilibrio térmico".

De forma muy general podemos describir que el equilibrio térmico corresponde al estado en el que se igualan las temperaturas de dos cuerpos que inicialmente tenían diferentes temperaturas. Al igualarse las temperaturas se suspende el flujo de calor, y el sistema formados por esos cuerpos llega a su equilibrio térmico.

Por ejemplo, si pone tienes un recipiente con agua caliente, y otro con agua fría, a través de sus paredes se establecerá un flujo de energía calorífica, pasado un tiempo, la temperatura del agua en ambos recipientes se igualará (por obra de las transferencias de calor, en este caso del agua más caliente a la más fría, también por contacto con el aire del medio ambiente y por evaporación), pero el equilibrio térmico lo alcanzarán cuando ambas masas de agua estén a la misma temperatura.

La energía calorífica (calor) no pasa del cuerpo que tiene más energía al que tiene menos sino del que tiene mayor temperatura al que la tiene menor. La cantidad de calor (Q) que gana o pierde un cuerpo de masa (m) se encuentra con la fórmula:

$$Q = m \cdot C_e \cdot \Delta t$$

Donde:

- Q es la cantidad de calor (que se gana o se pierde), expresada en calorías.

- m es la masa del cuerpo en estudio. Se expresa en gramos

- C_e es el calor específico del cuerpo. Su valor se encuentra en tablas conocidas. Se expresa en cal / gr º C

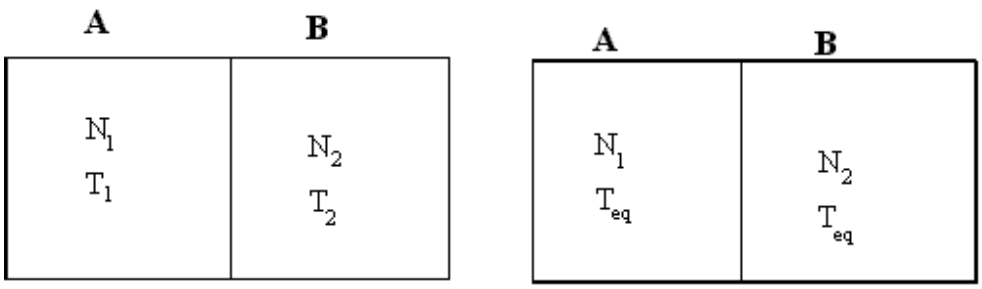
- Δt es la variación de temperatura = $T_f - T_0$. (Temperatura final (T_f) menos Temperatura inicial (T_0)) y su fórmula es:

$$\Delta t = t_f - t_0$$

Ahora bien, ahondemos un poco más en el concepto de Equilibrio Térmico. Cuando dos cuerpos a distinta temperatura (Figura 6) se ponen en contacto térmico, intercambiarán energía hasta que ambos alcancen el equilibrio térmico.

Equilibrio significa que aunque los dos cuerpos puedan intercambiar energía a nivel microscópico en ambas direcciones, no existe en promedio, ningún intercambio neto de materia en ninguna dirección.

Figura 6



Cuando un sistema de N_1 partículas que está a la temperatura T_1, se pone en contacto con otro sistema de N_2 partículas que está a la temperatura T_2, la temperatura de equilibrio se obtiene mediante la fórmula:

$$T_{eq} = \frac{N_1 T_1 + N_2 T_2}{N_1 + N_2}$$

Teniendo en cuenta que la temperatura es la energía media de cada partícula, por tanto, $N_1 * T_1$ será la energía total del subsistema A, y $N_2 \bullet T_2$ será la energía total del subsistema B. La energía media de cada partícula del sistema será la suma de las energías del subsistema A más la del subsistema B, dividido por el número total de partículas. El caso más sencillo, es aquel en el que ambos subsistemas cuentan con igual número de partículas, la temperatura de equilibrio se reduce a una media aritmética de las temperaturas iniciales de ambos.

$$T_{eq} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

El mecanismo para que se produzca la transferencia de energía del sistema de mayor al de menor temperatura no es otro que los choques entre pares de moléculas a través de la pared común. Por desconocimiento de los detalles de las moléculas intervinientes, y de los átomos mediadores de la pared, no podemos determinar los cambios de energía que experimentan las moléculas después de la interacción. Podemos suponer que la energía total inicial de ambas moléculas antes de interaccionar, se reparte al azar entre las dos moléculas después de la interacción. Esto preserva la condición de sistema asilado, y por tanto, la suma de la energía de los subsistemas interaccionantes ha de permanecer constante.

El modelo de interacción entre las partículas de ambos subsistemas es el siguiente:

- Se escogen dos moléculas al azar, una molécula i en el subsistema A, y una molécula j en el subsistema B.
- Antes del choque: la energía de cada molécula es E_i y E_j, y la energía total $E_T = E_i + E_j$.
- Después del choque la energía total E_T se reparte del siguiente modo:

$$E'_i = E_T \cdot \gamma \qquad\qquad E'_j = E_T - E'_1$$

siendo g un número aleatorio uniformemente distribuido en el intervalo [0, 1).

Por tanto, en cada choque el subsistema A cambia su energía en $E'_i - E_i$, y el subsistema B en $E'_j - E_j$, siendo ambos cambios iguales y opuestos. La energía media, es decir, la temperatura, del subsistema A y B cambian en cada choque:

$$\Delta T_1 = \frac{E_i' - E_i}{N_1} \qquad \Delta T_2 = \frac{E_j' - E_j}{N_2}$$

También hay choques entre las moléculas del propio subsistema que hacen que evolucione hacia una situación de equilibrio térmico en el cual las partículas se distribuyen entre los estados de energía accesibles de acuerdo con la ley de Boltzmann, pero en ese caso estamos hablando del equilibrio térmico alcanzado por cada subsistema individual.

1.2 Principio cero de la termodinámica

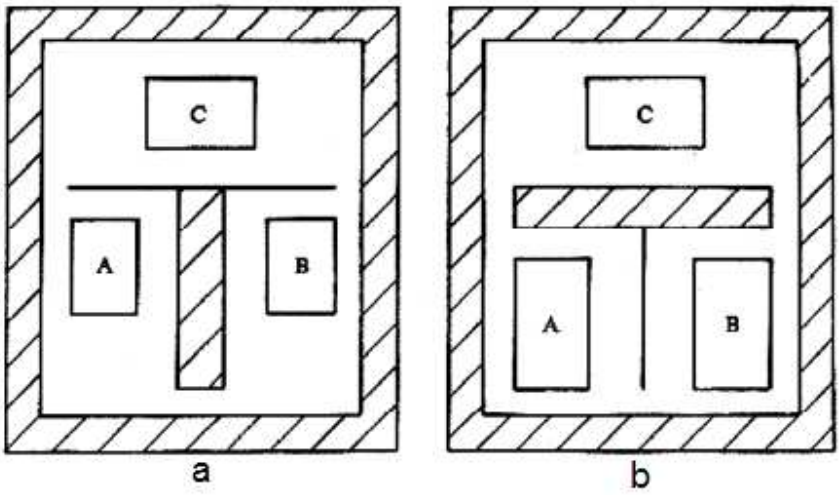
La importancia práctica de la Termodinámica radica fundamentalmente en la diversidad de fenómenos físicos que describe, y por tanto, la enorme productividad tecnológica que ha derivado de su conocimiento. Aunque en un principio los desarrollos tecnológicos, como las llamadas maquinas de vapor o los termómetros, se llevaron a cabo de manera empírica, fue hasta el siglo XIX cuando científicos como Carnot y Joule formalizaron sus resultados y determinaron las causas teóricas de su funcionamiento.

Las ideas de “caliente” y “frio” han formado parte de las experiencias sensoriales del hombre desde tiempos inmemoriales. De hecho, dos de los primeros científicos que expresaron estas ideas fueron Leonardo Da Vinci y Galileo, quienes sabían que al contacto con un tercer cuerpo, usualmente el aire, dos o más cuerpos en contacto con él “se mezclaban de una manera apropiada hasta alcanzar una misma condición”. Esta condición era alcanzada debido a la tendencia de los cuerpos calientes de difundir su energía a los cuerpos más fríos. Este flujo de energía es denominado calor. Así, podemos percibir la tendencia del calor a difundirse de cualquier cuerpo caliente hacia otros más fríos en sus alrededores, hasta que el calor se distribuye entre ellos de una manera tal que ninguno es capaz de tomar más que los restantes.

Ahora consideremos el comportamiento de dos o más sistemas constituidos de la siguiente manera.

Los sistemas A y B están separados entre sí por una pared adiabática, pero cada uno de ellos está en contacto térmico con el tercer sistema C a través de paredes diatérmicas, estando todo el conjunto rodeado por una pared adiabática. Nuestra experiencia dice que ambos sistemas alcanzaran el equilibrio térmico con el tercero y que no tendrá lugar ningún cambio posterior si la pared adiabática que separa A y B se reemplaza por una pared diatérmica en la Figura 7.

Figura 7



Ley cero de la termodinámica. a) Ay B se encuentran en equilibrio térmico con C. b) A y B se encuentran en equilibrio térmico entre sí.

Estas experiencias se pueden resumir en una ley llamada Ley Cero de la Termodinámica, que indica lo siguiente: "*Dos sistemas en equilibrio térmico con un tercero están en equilibrio entre sí*".

La Ley Cero nos permite diferenciar los cuerpos entre sí con respecto a su "grado de calentamiento". Este atributo, que es una propiedad del sistema, lo identificaremos con su temperatura, que resulta ser un concepto macroscópico (medible).

A través de estos conceptos podemos entender el funcionamiento de los dispositivos llamados termómetros, que son los aparatos que precisamente miden la propiedad temperatura de los cuerpos.

Por ejemplo, considera un cuerpo B que consiste en un tubo con un capilar conteniendo mercurio y cuyos niveles de altura sobre el capilar representan diferentes temperaturas. Ahora considera un cuerpo A, por ejemplo el cuerpo humano, si acercas el termómetro al cuerpo humano y lo dejas suficiente tiempo, el termómetro alcanzara el valor correspondiente a su temperatura, esto es, el

Termómetro y el cuerpo humano estarán en equilibrio térmico entre si y por lo tanto tendrán el mismo valor numérico para la propiedad temperatura. La forma de elegir una escala termométrica es absolutamente arbitraria y no la discutiremos aquí.

Debe destacarse que la formulación de la Ley Cero contiene tres ideas firmes:

1) La existencia de una variable de estado, llamada temperatura.

2) La igualdad de temperaturas como una condición para el equilibrio térmico entre dos sistemas, o entre partes del mismo sistema.

3) La existencia de una relación entre las variables independientes del sistema y la temperatura, llamada ecuación de estado.

Como consecuencia es importante señalar que a las propiedades que determinan el estado termodinámico de un sistema, por ejemplo: presión P y volumen V, la Ley Cero agrega la temperatura empírica θ.

Ecuación de Estado

Ahora, al reconocer el concepto subyacente a la Ley Cero: la temperatura, podemos continuar en el análisis de los sistemas en base a otras propiedades termodinámicas de interés. Consideremos nuevamente los sistemas A, B y C. En general, podemos decir que A tiene como propiedades X, A y YA, B propiedades XB y YB y el sistema C propiedades XC y YC.

Decimos entonces que están en equilibrio entre si y solo si existe una relación entre las variables de los sistemas de la forma:

$$f(XA, YA) = g(XB, YB) = h(XC, YC)$$

Esto es, los tres sistemas, a pesar de tener como propiedades de interés X Y, con valores numéricos, en general distintos, poseen un valor numérico igual para cierta propiedad (en estado de equilibrio), que como habíamos establecido corresponde a la temperatura. Este valor es denotado por θ, y es llamado temperatura empírica.

$$f(XA, YA) = g(XB, YB) = h(XC, YC) = \theta$$

Y a las ecuaciones resultantes:

$$f(XA, YA) = \theta,\ g(XB, YB) = \theta \ \text{ y } h(XC, YC) = \theta$$

Las llamaremos ecuaciones de estado de los sistemas A, B y C, respectivamente

Es importante señalar que la ecuación de estado del sistema puede depender no solo de dos variables X y Y sino de n variables independientes, de tal manera que su representación puede ser muy complicada. Sin embargo, la forma analítica de la función depende solo del sistema.

Una ecuación de estado representa las características peculiares de un sistema y se determina mediante el experimento o por una teoría molecular. Entonces su determinación resulta ser, no una parte de la Termodinámica, que es una teoría macroscópica, sino una adición a ella.

La ecuación de estado expresa los resultados de experimentos en los cuales se miden las variables termodinámicas de un sistema con la mayor precisión posible, dentro de un intervalo limitado de valores. Por lo tanto su validez está limitada al intervalo de valores medidos y, su precisión depende de la precisión experimental con que fueron determinados.

Isoterma e Isoterma correspondiente

En general, encontramos una infinidad de valores asociados a las propiedades de cada sistema, esto es existe una gran cantidad de estados termodinámicos para los cuales se cumple que dos o más sistemas se encuentran en equilibrio. Si graficamos estos estado en el espacio de estados (X, Y) para los tres sistemas, encontramos tres curvas continuas, que tienen la propiedad de que, para cada sistema, representan todos aquellos estados del sistema que se encuentran en equilibrio entre sí. A cada curva se le llama isoterma, y se dice que las isotermas que representan estados de equilibrio entre los sistemas son isotermas correspondientes.

Si asignamos un mismo parámetro θ a estas isotermas correspondientes, se sigue que:

$$f(X_A, Y_A) = g(X_B, Y_B) = h(X_C, Y_C) = \theta$$

Que ya había sido establecido.

Figura 8

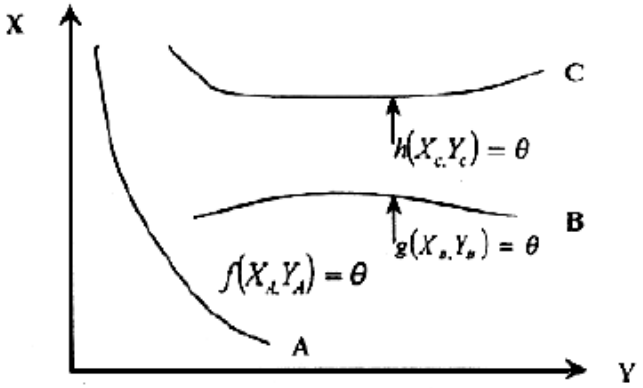


Figura 8. Isoterma (posible) de sistemas en quilibrio térmico

En la figura anterior, observamos que A, B y C son isotermas correspondientes, que implicisoa que cada estado de un sistema tiene una característica en común con el otro, esto es, se encuentran en equilibrio térmico entre sí.

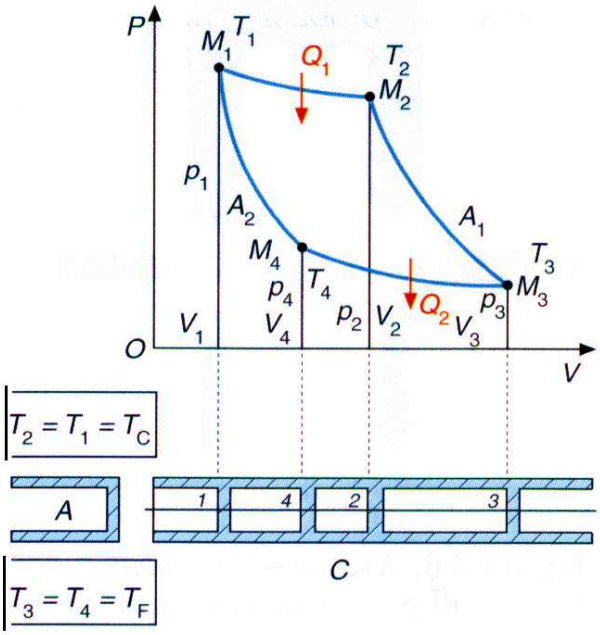
Ciclo de Carnot

Dentro de los Ciclos termodinámicos encontramos al Ciclo de Carnot, que recibe el nombre en honor a Nicolas Sadi Carnot. Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832), físico e ingeniero militar francés, nació en París y estudió en la Escuela Politécnica. En 1824 describió su concepción del motor ideal, el llamado motor de Carnot, en el que se utiliza toda la energía disponible. Descubrió que el calor no puede pasar de un cuerpo más frío a uno más caliente, y que la eficacia de un motor depende de la cantidad de calor que es capaz de utilizar. Este descubrimiento es la base de la segunda ley de la termodinámica.

Para realizar el ciclo supondremos que las sustancia que realiza el ciclo es un gas ideal que funciona entre dos focos de calor, uno frío y otro caliente. Se realiza el ciclo en cuatro tiempos o etapas. El ciclo lo consideramos reversible para así poder ver bien los estados y el proceso.

Observando la figura entenderemos mejor el proceso:

Figura 9



Ciclo de Carnot.

- Tiempo 1. Expansión isotérmica M_1 a M_2 a la T_1. El trabajo exterior realizado será el área bajo la curva. el trabajo se realiza a costa del calor absorbido del foco caliente.

- Tiempo 2. Expansión adiabática. No hay intercambio de calor.

- Tiempo 3. El gas se comprime isotérmicamente a T_4; cediendo calor Q_2.

- Tiempo 4. El gas se comprime adiabáticamente y pasa de T_4 a T_1; finalizando el ciclo.

1.3 Temperatura

La temperatura es la sensación de calor o frío al tocar una sustancia depende de la transferencia de energía, de la capacidad de la sustancia para conducir el calor y de otros factores. Aunque, si se procede con cuidado, es posible comparar las temperaturas relativas de dos sustancias mediante el tacto, es imposible evaluar la magnitud absoluta de las temperaturas a partir de reacciones subjetivas. Cuando se aporta calor a una sustancia, no sólo se eleva su temperatura, con lo que proporciona una mayor sensación de calor, sino que se producen alteraciones en varias propiedades físicas que pueden medirse con precisión. Al variar la temperatura, las sustancias se dilatan o se contraen, su resistencia eléctrica cambia, y en el caso de un gas su presión varía. La variación de

alguna de estas propiedades suele servir como base para una escala numérica precisa de temperaturas.

La temperatura depende de la energía cinética media o promedio de las moléculas de una sustancia; según la teoría cinética, la energía puede corresponder a movimientos de rotación, vibración y traslación de las partículas de una sustancia. La temperatura, sin embargo, sólo depende del movimiento de traslación de las moléculas. En teoría, las moléculas de una sustancia no presentarían actividad de traslación alguna a la temperatura denominada cero absolutos.

En la actualidad se emplean diferentes escalas de temperatura; entre ellas están la escala Celsius (centígrada), la escala Fahrenheit, la escala Kelvin, la escala Rankine o la escala termodinámica internacional.

- En la escala Celsius, el punto de congelación del agua equivale a 0 °C, y su punto de ebullición a 100 °C. Esta escala se utiliza en todo el mundo, en particular en el trabajo científico.

- La escala Fahrenheit se emplea en los países anglosajones para medidas no científicas y en ella el punto de congelación del agua se define como 32 °F y su punto de ebullición como 212 °F.

- En la escala Kelvin, la escala termodinámica de temperaturas más empleada, el cero se define como el cero absoluto de temperatura, es decir, -273,15 °C. La magnitud de su unidad, llamada kelvin y simbolizada por K, se define como igual a un grado Celsius. Otra escala que emplea el cero absoluto como punto más bajo es la escala Rankine, en la que cada grado de temperatura equivale a un grado en la escala Fahrenheit. En la escala Rankine, el punto de congelación del agua equivale a 492 °R, y su punto de ebullición a 672 °R.

En 1933, científicos de treinta y una naciones adoptaron una nueva escala internacional de temperaturas, con puntos fijos de temperatura adicionales basados en la escala Kelvin y en principios termodinámicos. La escala internacional emplea como patrón un termómetro de resistencia de platino (cable de platino) para temperaturas entre -190 °C y 660 °C. Desde los 660 °C hasta el punto de fusión del oro (1.063 °C) se emplea un termopar patrón: los termopares son dispositivos que miden la temperatura a partir de la tensión producida entre dos alambres de metales diferentes. Más allá del punto de fusión del oro las temperaturas se miden mediante el llamado pirómetro óptico, que se basa en la intensidad de la luz de una frecuencia determinada que emite un cuerpo caliente.

En criogenia, o investigación de bajas temperaturas, se han obtenido temperaturas de tan sólo 0,00001 K mediante la desmagnetización de sustancias paramagnéticas. En las explosiones nucleares se han alcanzado momentáneamente temperaturas evaluadas en más de 100 millones de kelvin.

1.3.1 Termómetros y escalas termométricas

A través del conocimiento de estos conceptos, podemos regresar al problema de los dispositivos denominados termómetros y ahondar en su funcionamiento.

Para establecer una escala de temperaturas, esto es, asignar valores numéricos a la temperatura empírica θ, debemos elegir arbitrariamente un sistema patrón descrito por coordenadas X y Y al que llamaremos termómetro.

La idea de medir temperaturas está basada en el cambio de las propiedades físicas del termómetro cuando entra en contacto con otros sistemas. Es entonces conveniente, por razones de simplicidad, escoger como termómetros a aquellos sistemas en los que una propiedad varié y la otra permanezca constante. A la propiedad variable se le llama propiedad termométrica.

Para fijar una escala termométrica elegimos un termómetro que posea una propiedad termométrica que se comporta de tal manera que la temperatura resultante sea una función simple, en general una relación lineal, esto es, de la forma:

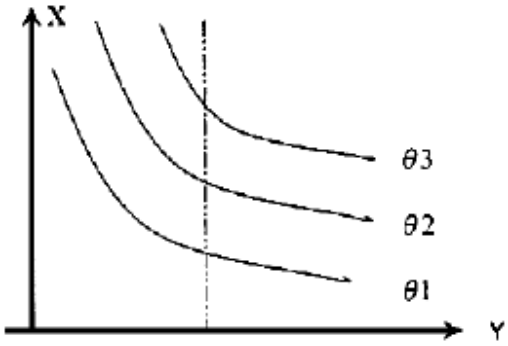
$$\phi\,(X, Y) = \theta$$

Donde podemos inferir que si Y constante

$$\theta = \alpha X = \phi\,(Y \text{ cte.}, X)$$

Donde α es una constante por determinar.

Figura 10



Propiedades termodinámicas en un sistema con dos grados de libertad, de los cuales uno es constante.

Para determinar la constante α, se procede a elegir en forma arbitraria un estado estándar fácilmente reproducible; esto es lo que en termometría se conoce como un punto dijo.

Para este estado el valor de θ se fija arbitrariamente, debido a ello se le denomina temperatura empírica. Para calibrar el termómetro se elige un fenómeno físico, por ejemplo el punto triple del agua, es decir, aquel en que coexisten en equilibrio las tres fases: solida, liquida y gaseosa a presión de 4.58 mm. De Hg, y se le asigna arbitrariamente la temperatura de 273.16°K en la llamada escala Kelvin.

Entonces:

$$\alpha = 273.16 / X t$$

Donde X t es el valor de la propiedad termométrica cuando el termómetro esta en equilibrio con el agua en su punto triple y por tanto, de la relación lineal propuesta, la temperatura θ de un cuerpo arbitrario:

$$\theta = 273.16 \frac{X}{Xt} \quad ; \quad Y = \text{constante}$$

Donde el denominador es el valor de la propiedad termométrica X cuando el sistema se encuentra en contacto térmico y en equilibrio en el punto fijo (punto triple).

Hay cinco tipos importantes de termómetros para los cuales se cumple una relación lineal entre sus variables. Sin embargo, aun después de calibrar los diferentes termómetros en el punto triple, la temperatura dada por cada uno, de ellos para un cuerpo en particular es diferente. Esto es, las escalas de temperatura definidas usando materiales o propiedades diferentes, solo coincidirán en el punto de calibración.

Sistema	Variable fija	Propiedad termométrica
Líquido en vidrio	Presión P	Longitud de la columna L
Alambre de P_t	Diferencia de potencial V	Resistencia eléctrica R
Termopar	Diferencia de potencial V	Fuerza electromotriz E
Gas en bulbo	Presión P	Volumen V
Gas en bulbo	Volumen V	Presión P

La discrepancia mínima se encuentra entre termómetros de diversos gases. En particular, los termómetros de hidrogeno y de helio de volumen constante coinciden más precisamente que los demás. Por esta razón se elige un gas como sustancia termométrica tipo. Sin embargo, la escala que se obtiene con estos termómetros presenta aun inconvenientes graves como el de depender de las propiedades mismas del gas y de ser aplicable solamente en el intervalo donde las propiedades del gas sean constantes.

Por tal causa, es conveniente definir una escala que, si no es independiente de las propiedades de la materia, lo sea al menos de las propiedades generales de estas, independientemente de la naturaleza misma de cada uno de ellos. La escala correspondiente se llama escala con respecto al gas ideal.

Supongamos que introducimos una cierta cantidad de gas en el depósito de un termómetro de gas a volumen constante, de modo que la presión Pt cuando el depósito está rodeado por agua en el punto triple, es igual a 1000 mm. De Hg. Realicemos ahora los siguientes experimentos manteniendo el volumen constante:

1. Rodeamos el depósito con vapor de agua saturado (agua en ebullición) a la presión de 1 atm.; determinamos la presión Pvap del gas y calculamos:

$$\theta\ (Pvap) = 273.16\ \frac{P}{1000}$$

2. Eliminamos algo de gas, de modo que Pt tenga un valor menor, tal como 500 mm. De Hg. Determinamos el nuevo valor de Pvap y calculamos el valor correspondiente a la temperatura:

$$\theta\ (Pvap) = 273.16\ \frac{P}{500}$$

3. Continuamos reduciendo la cantidad de gas en el depósito del termómetro de modo que Pt y Pvap tomen valores cada vez menores.

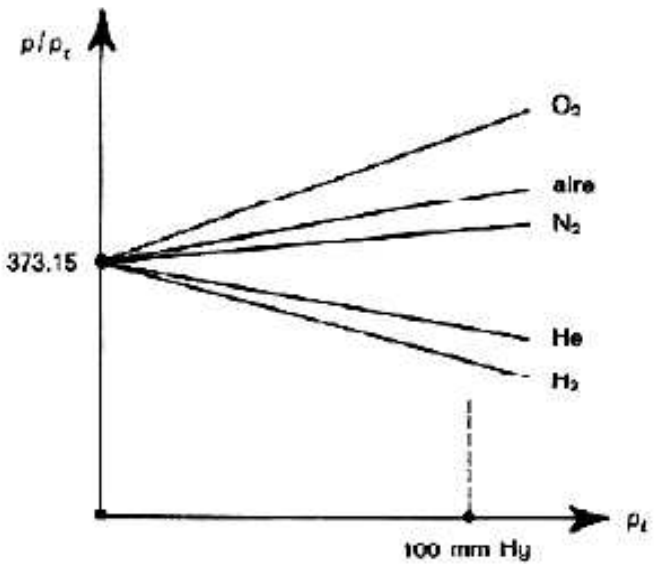
4. Graficamos θ (Pvap) en función de Pt y extrapolamos la curva resultante hacia el eje, en el cual Pt = 0.

   En la grafica de θ (p) vs. Pt:

$$\theta\ (P) = \lim\ 273.16\ \frac{p}{p_t}$$

   En la siguiente figura aparecen los resultados de una serie de experimentos de esta clase para cuatro gases distintos:

Figura 11.



Escala empírica de gas ideal.

Esto es, para el agua en su punto de ebullición: θ (P) = 373.15 K

La grafica nos conduce al resultado de que, aunque las indicaciones de un termómetro de gas a volumen constante dependen del gas para valores ordinarios de Pt, todos los gases señalan la misma temperatura cuando disminuye Pt y se hace tender a cero.

Se puede realizar una serie de experimentos análoga con un termómetro de gas a presión constante. La presión constante P, puede hacerse más y más pequeña; y para cada valor de P es posible calcular la correspondiente θ (V).

La experiencia demuestra, que todos los gases señalan el mismo valor de θ (V) cuando P tiende a cero.

Definiremos, por consiguiente, la temperatura θ en la escala de los gases ideales por cualquiera de las dos ecuaciones:

$$\theta\,(P) = \frac{lim}{Pt-0}\ 273.16\ \frac{P}{Pt} \quad : \quad V = cte.$$

$$\theta\,(V) = \frac{lim}{Pt-0}\ 273.16\ \frac{V}{Vt} \quad : \quad P = cte.$$

No toda determinación de una temperatura se lleva a cabo a través de estas ecuaciones, pues resulta demasiado complicado. Lo que se hace es determinar un reducido número de puntos fijos secundarios con respecto a los cuales se pueden calibrar otros termómetros de uso más práctico. Tales puntos están descritos en la llamada Escala Internacional de Temperaturas. Cabe hacer notar que hasta este punto, carece de sentido hablar de la temperatura 0°K ya que para ello tendríamos que conocer las propiedades de la materia a P=0.

La escala termodinámica de temperaturas, esto es, una escala libre de las propiedades de la materia se definirá posteriormente mediante la Segunda Ley.

A partir de la escala Kelvin se definen las escalas de Celsius y Fahrenheit. Para la primera tenemos:

$$t\,(^{\circ}C) = \theta\,(K) - 273.15$$

De lo que resulta que la temperatura de ebullición del agua es de 100˚C

Para la escala Fahrenheit:

$$t\,^{\circ}F = 9/5\ t^{\circ}C + 32$$

y por lo tanto:

$$T_{p\ cong.agua} = 32^{\circ}F,\ T_{eb\ agua} = 212\ ^{\circ}F$$

ESCALAS DE TEMPERATURA.

Mientras que el calor es un tipo de energía, la temperatura es una propiedad de los cuerpos que se mide con el termómetro. Aunque un cuerpo sólo tiene una temperatura, ésta se puede medir en distintas escalas, obteniendo distintos números, que representan esa única temperatura.

- CELSIUS

Empleada en España y Europa continental. También se conoce como escala centígrada. Es la escala que se emplea en España y la Europa continental para medir la temperatura. Ideada por el astrónomo sueco Anders Celsius, en esta escala el agua se congela a 0ºC y hierve a 100ºC. Como entre una cosa y la otra hay 100 divisiones, de ahí el nombre de centígrada. Es la escala más usada en el mundo.

- FAHERNHEIT

Empleada en EE.UU. y países de habla inglesa. Fue ideada por el físico alemán Gabriel Fahrenheit. Intentando evitar temperaturas negativas asignó a 0ºF la temperatura más baja que pudo alcanzar con una salmuera, una mezcla de agua y sal, y 100ºF a la temperatura de un hombre sano. Con posterioridad se redefinió la escala, asignando 32ºF a la temperatura de congelación del agua y 212ºF a su punto de ebullición. Así, donde en la escala centígrada hay 100ºC, (desde 100 a 0), en la escala Fahernheit hay 180 ºF (de 212 a 32). Por lo tanto una diferencia de 1ºF es más pequeña que 1ºC, de hecho, 1ºC son 1.8ºF.

- KELVIN

No tiene temperaturas negativas. En la escala Kelvin, ideada por el físico inglés William Thomson, Lord Kelvin, no hay temperaturas negativas, ya que en ella la temperatura más baja posible es 0K, equivalente a -273ºC. Nunca pueden existir temperaturas inferiores a ella y, por eso, en la escala absoluta todas las temperaturas son positivas. Es la escala empleada por científicos y técnicos para medir la temperatura.

Para convertir de una unidad de temperatura a otra, por ejemplo de grados Celsius (o centígrados) a Kelvin o Fahrenheit, es necesario utilizar las siguientes formulas:

De Celsius (t_C) a Kelvin (T) ó a la inversa:

$$T = t_c + 273$$

De Celsius (t_C) a Fahrenheit (t_F) ó a la inversa:

$$\frac{t_c}{100} = \frac{t_F - 32}{180}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{t_c}{5} = \frac{t_F - 32}{9}$$

De Kelvin (K) a Fahrenheit (t_F) ó a la inversa:

$$\frac{K - 273}{100} = \frac{t_F - 32}{180}$$

FÍSICA II

UNIDAD III

FUNDAMENTOS DE LA TERMODINÁMICA

1.4 Dilatación térmica

Los efectos más comunes que ocasionan las variaciones de temperatura en los cuerpos o sustancias, son los cambios de sus dimensiones y los cambios de fase. Nos referiremos a los cambios de dimensiones de los cuerpos sin que se produzcan cambios de fase.

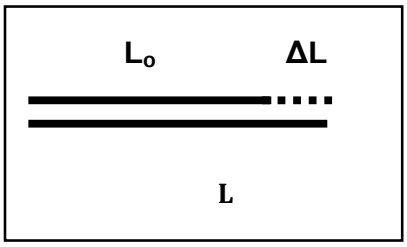
Llamamos dilatación al cambio de dimensiones que experimentan los sólidos, líquidos y gases cuando se varía la temperatura, permaneciendo la presión constante. La mayoría de los sistemas aumentan sus dimensiones cuando se aumenta la temperatura.

DILATACIÓN DE LOS SÓLIDOS

Es el cambio de cualquier dimensión lineal del sólido tal como su longitud, alto o ancho, que se produce al aumentar su temperatura. Generalmente se observa la dilatación lineal al tomar un trozo de material en forma de barra o alambre de pequeña sección, sometido a un cambio de temperatura, el aumento que experimentan las otras dimensiones son despreciables frente a la longitud. Si la longitud de esta dimensión lineal es L_o, a la temperatura t_o y se aumenta la temperatura a t, como consecuencia de este cambio de temperatura, que llamaremos Δt se aumenta la longitud de la barra o del alambre produciendo un incremento de longitud que simbolizaremos como ΔL

Experimentalmente se encuentra que el cambio de longitud es proporcional al cambio de temperatura y la longitud inicial. L_o. Podemos entonces escribir:

$\Delta L \propto L_o . \Delta t$ o bien que $\Delta L = \alpha_{ot} . L_o . \Delta t$



Donde α es un coeficiente de proporcionalidad, que denominado "coeficiente de dilatación lineal ", y que es distinto para cada material. Por ejemplo: Si consideramos que el incremento de temperatura, $\Delta t = 1^oC$ y la longitud inicial de una cierta pieza, $L_o = 1$ cm consecuentemente el alargamiento será:

$$\Delta L = \alpha . 1cm . 1^oC$$

Si efectuamos el análisis dimensional, advertimos que las unidades de α, estarán dadas por: $\alpha = cm / cm. ºC = 1/ºC$ o bien $ºC^{-1}$ (grado $^{-1)}$; luego:

$$\alpha = 1/L_0 \, (\Delta L / .\Delta t)$$

Operativamente, si designamos L_o a la longitud entre dos puntos de un cuerpo o de una barra a la temperatura de 0 ºC y L la longitud a la temperatura t ºC podemos escribir que:

$$\Delta L = L - L_o \quad y \quad \Delta t = t - 0 = t\ ºC \qquad \text{Luego } L - L_o = \alpha_{ot.} L_o\ t$$

De donde

$$\alpha_{ot} = \frac{L - L_o}{L_o} \cdot \frac{1}{t}$$

A α_{ot} se le denomina coeficiente de dilatación lineal entre las temperaturas 0 y t, su valor, como se expresó anteriormente, es característico de la naturaleza de las sustancias que forma el sólido.

La experiencia demuestra que el coeficiente de dilatación lineal depende de la temperatura. Se puede definir el coeficiente de dilatación lineal medio "α_t", como "el aumento que experimenta la unidad de longitud inicial, que se encuentra a una temperatura t cualquiera, cuando se aumenta en un grado dicha temperatura", por eso este coeficiente de dilatación medio, dependerá del incremento de temperatura. El coeficiente de dilatación lineal medio a una temperatura " t ", puede ser deducido a partir de la primera ecuación:

$$\alpha_t = \lim_{to \to t_1} 1/L_o . \Delta L / \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} 1/L_1 . \Delta L / \Delta t$$

$$\alpha_t = 1/L_t . dL / dt$$

Dónde:

$\alpha_{ot} = f(t)$ coeficiente de dilatación o expansión lineal

$\alpha_t = f(\Delta t)$ coeficiente de dilatación lineal medio a una temperatura t

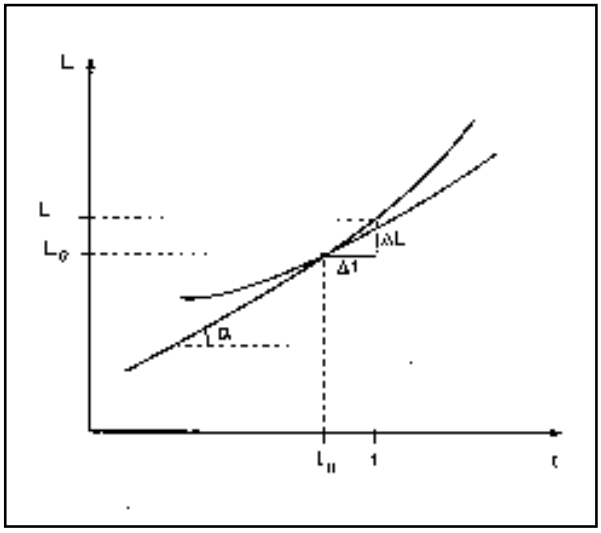
Resumiendo:

$$\alpha_{ot} = \frac{L - L_o}{L_o} \cdot \frac{1}{t_o} \quad y \quad \alpha_t = \frac{L - L_o}{L_o} \cdot \frac{1}{t} \quad \text{a presión constante}$$

En general α_t es igual al inverso de la longitud inicial por dl/dt, a presión constante. Donde el cociente diferencial dl/dt, representa la derivada de la longitud con respecto a la temperatura a P = CTE y α_t será el coeficiente de dilatación lineal real a cualquier temperatura t.

Como la longitud del sólido es función de la temperatura: representando gráficamente dicha función resulta que α_t es el coeficiente angular de la recta tangente a la curva L = f(t) en el punto de abscisa t, dividido por la longitud correspondiente a dicha temperatura, ver figura B:

Figura 12



Estrictamente hablando, como se ha visto, el valor de α depende de temperatura, sin embargo su variación es muy pequeña y ordinariamente despreciable dentro de ciertos límites de temperatura, o intervalos que para ciertos materiales no tienen mayor incidencia.

Si despejamos L de la ecuación $\alpha_{ot} = \frac{L - L_o}{L_o} \cdot \frac{1}{t}$

Nos quedaría: $L - L_o = \alpha_{ot} \cdot L_o \cdot t$

$L = L_o + \alpha_{ot} \cdot L_o \cdot t$

$L = L_o (1 + \alpha_{ot} \cdot t)$

Si la temperatura inicial fuera $t_0 \neq 0ºC$

$$L = Lo\ (1 + \alpha\ .\ \Delta t)$$

Denominándose "Binomio de dilatación lineal " al factor

$$(1 + \alpha.\Delta t)$$

Rescribiendo esta fórmula obtenemos

$$\boxed{\alpha = 1/L.(\ \Delta L\ /\Delta T)}$$

de modo que α, representa el cambio fraccional de la longitud por cada cambio de un grado en la temperatura.

Hablando rigurosamente, el valor de α depende de la, temperatura real y de la temperatura de referencia que se escoja para determinar L. Sin embargo, casi siempre se puede ignorar su variación, comparada con la precisión necesaria en las medidas de la ingeniería. Podemos, con bastante seguridad, suponerla como una constante independiente de la temperatura en un material dado. En la Tabla 1 se presenta un detalle de los valores experimentales del coeficiente de dilatación lineal promedio de sólidos comunes.

Sustancia	α $ºC^{-1}$	Sustancia	α $ºC^{-1}$
Plomo	29×10^{-6}	Aluminio	23×10^{-6}
Hielo	52×10^{-6}	Bronce	19×10^{-6}
Cuarzo	$0,6 \times 10^{-6}$	Cobre	17×10^{-6}
Hule duro	80×10^{-6}	Hierro	12×10^{-6}
Acero	12×10^{-6}	Latón	19×10^{-6}
Mercurio	182×10^{-6}	Vidrio (común)	9×10^{-6}
Oro	14×10^{-6}	Vidrio (pirex)	3.3×10^{-6}

* En el intervalo de 0ºC a 100ºC, excepto para el hielo, que es desde – 10ºC a 0ºC.

En todas las sustancias de la tabla, el cambio en el tamaño consiste en una dilatación al cambiar la temperatura, ya que α es positiva. El orden de la magnitud es alrededor de 1 milímetro por metro de longitud en un intervalo Celsius de 100 grados.

Para comprender la dilatación, es conveniente visualizar el fenómeno a nivel microscópico, la expansión térmica de un sólido sugiere un aumento en la separación promedio entre los átomos en el sólido. La curva de energía potencial de átomos contiguos en un sólido cristalino, en función de su separación internuclear, es de trazado asimétrico, como la que se indica en la Figura 13.

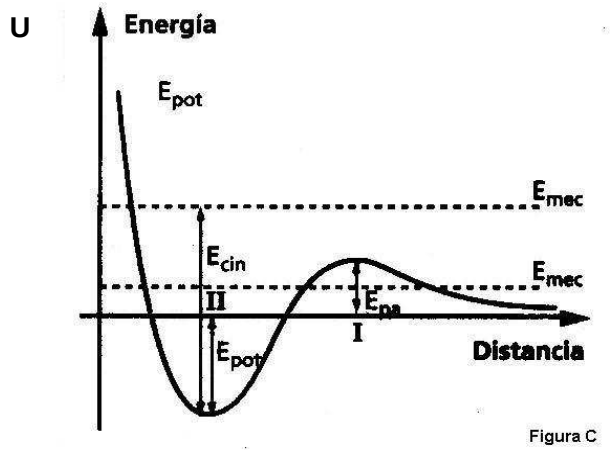
Conforme los átomos se van aproximando, su separación disminuye respecto del valor de equilibrio r_o, entonces intervienen fuerzas repulsivas intensas y la curva de potencial aumenta rápidamente, recordemos que el valor de dicha fuerza está dado por la expresión: F = - dU/dr. Conforme los átomos se alejan, sus separaciones aumentan respecto del valor de equilibrio y entonces intervienen fuerzas un tanto más débiles y la curva de potencial aumenta de una manera más lenta.

Para una energía vibracional dada, la separación de los átomos cambiará periódicamente de un valor mínimo a uno máximo y la separación promedio será mayor que la separación de equilibrio, debido a la naturaleza asimétrica de la curva de energía potencial. Cuando la energía vibracional es mayor aún, la separación promedio será también más grande. El efecto es aumentado por el hecho de que al tomar el promedio temporal del movimiento, se debe tomar en cuenta el mayor tiempo transcurrido en las separaciones extremas (en donde la rapidez vibracional es menor). Debido a que la energía vibracional aumenta conforme lo hace la temperatura, la separación promedio entre los átomos aumenta con la temperatura y el sólido como un todo se expande. Recordemos, que la energía potencial molecular, se puede expresar como la suma de las energías cinética media, rotacional y vibracional:

$$E_m = E_{kmed} + E_r + E_v,$$

Donde E_{kmed}, representa la energía cinética media, E_r, la energía rotacional, y E_v la energía vibracional.

Figura 13



Debemos hacer notar que si la curva de Energía potencial fuese simétrica en torno a la separación de equilibrio, la separación promedio correspondería a la separación de equilibrio, sin importar que tan grande fuese la amplitud de la vibración. Por lo tanto, la

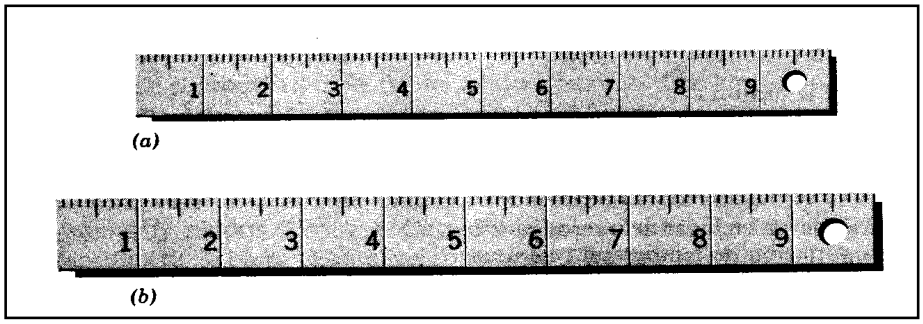
expansión térmica es una consecuencia directa de la desviación de la simetría (es decir, de la asimetría) de la curva de energía potencial característica de los sólidos.

Algunos sólidos cristalinos pueden contraerse, en ciertas regiones de temperatura, conforme la temperatura aumenta. El análisis anterior sigue siendo válido sólo si se supone que únicamente existen modos de vibración compresional, (es decir, longitudinales) y que esos modos son predominantes. Sin embargo, los sólidos pueden vibrar en modos transversales (es decir, cortantes) al igual que en modos vibracionales y esto permiten que el sólido se contraiga con los aumentos de la temperatura, disminuyendo con ello la separación promedio de los planos atómicos. En ciertos tipos de estructura cristalina, y en ciertas regiones de temperatura, estos modos transversales de vibración pueden predominar sobre los longitudinales, dando lugar a un coeficiente de expansión térmica total negativo.

Existe por lo tanto una relación directa entre las fases y la estructura molecular, o dicho de otro modo una relación directa entre el estado de agregación y la energía potencial molecular, y como consecuencia también entre la energía vibracional y la dilatación. Físicamente tiene importancia esta relación entre el coeficiente de expansión o dilatación con la estructura atómica o molecular. Debemos aclarar que los modelos microscópicos presentados son una sobre simplificación de un fenómeno mucho más complejo, que puede tratarse con mayor detalle al relacionar la termodinámica y la teoría cuántica.

El cambio porcentual de la longitud de muchos sólidos, llamados isotrópicos, asociados con un cambio dado de la temperatura, es el mismo sobre cualquier línea del sólido. La dilatación es totalmente análoga a una amplificación fotográfica, excepto en que el sólido es tridimensional. Si tenemos una lámina delgada en la que se practica un orificio, el cambio $\Delta L / L = \alpha \Delta T$ para una ΔT dada es el mismo para la longitud, el espesor, la diagonal de una cara, la diagonal del cuerpo y el diámetro del orificio. Cualquier línea, sea recta o curva, se alarga en la relación α por aumento de un grado de temperatura. Si se escribe un nombre rayando la lámina, la línea que representa dicho nombre tiene el mismo cambio fraccional de longitud que cualquier otra línea. En la Figura D se muestra la analogía con una amplificación fotográfica.

Figura 14



Si observamos la regla de acero de la Figura D, a dos temperaturas diferentes, la regla a) a una temperatura t_o y la regla b) a una temperatura t_1, tal que $t_1 > t_o$. En la dilatación, todas las dimensiones aumentan en la misma proporción: la escala, los números, el orificio y el espesor aumentan todos en el mismo factor, (la dilatación mostrada, está obviamente exagerada, ya que correspondería a un aumento imaginario de unos 100 000 ºC en la temperatura.

Teniendo en cuenta estas ideas, podríamos demostrar con un alto grado de precisión, que el cambio fraccional en el área A por cada cambio de un grado en la temperatura en un sólido isotópico es 2α, es decir:

$$\Delta A = 2\alpha.\ A.\Delta t,$$

y que el cambio fraccional en volumen V por cada cambio de un grado de temperatura en un cuerpo isotrópico es 3α, es decir,

$$\Delta V = 3\alpha.V.\Delta t$$

DILATACIÓN EN LÍQUIDOS

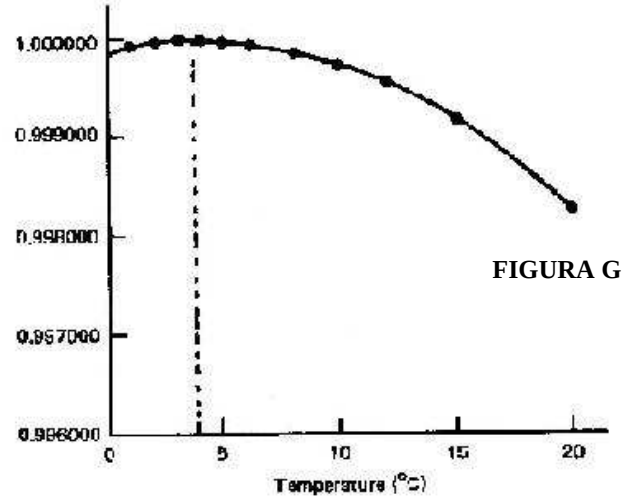
Como la forma de un fluido no está definida, solamente tiene sentido hablar del cambio del volumen con la temperatura. La respuesta de los gases a los cambios de temperatura o de presión es muy notable, en tanto que el cambio en el volumen de un líquido, para cambios en la temperatura o la presión, es muy pequeño.
β representa el coeficiente de dilatación volumétrica de un líquido,

$$\beta = 1/V.(\Delta V/\Delta t)$$

Los líquidos se caracterizan por dilatarse al aumentar la temperatura, siendo su dilatación volumétrica unas diez veces mayor que la de los sólidos.

Sin embargo, el líquido más común, el agua, no se comporta como los otros líquidos. En la figura F, se muestra la curva de dilatación del agua. Se puede notar que, entre 0 y 4ºC el agua líquida se contrae al ser calentada, y se dilata por encima de los 4ºC, aunque no linealmente. Sin embargo, si la temperatura decrece de 4 a 0ºC, el agua se dilata en lugar de contraerse. Dicha dilatación al decrecer la temperatura no se observa en ningún otro líquido común; se ha observado en ciertas sustancias del tipo de la goma y en ciertos sólidos cristalinos en intervalos de temperatura muy limitados, un fenómeno similar. La densidad del agua tiene un máximo a 4ºC, donde su valor* es de 1 000 kg/m^3. A cualquier otra temperatura su densidad es menor. Este comportamiento del agua es la razón por la que en los lagos se congela primero la superficie, y es en definitiva lo que hace posible la vida subacuática.

Figura 15



DENSIDAD DEL AGUA EN FUNCION DE LA TEMPERATURA

Esta propiedad es importante en la ingeniería, recordemos que los dos fluidos más importantes para un ingeniero son el agua y el aire, el primero prácticamente incompresible y el segundo sensiblemente compresible.

Como el líquido carece de forma propia, solo puede tener sentido hablar de dilatación cúbica, pues sus dimensiones dependen del recipiente que lo contiene, observándose un ascenso del nivel del fluido debido a que en general, los líquidos se dilatan más que los sólidas y en particular, que el vidrio.-

En consecuencia. Para determinar la dilatación absoluta o verdadera de un líquido se deberá considerar la dilatación que experimenta el recipiente que lo contiene. Si V_o es el volumen que ocupa el fluido a la temperatura de 0 ºC, es evidente que deberá ser V_o o V_{ro}, si se aumenta la temperatura en t ºC, el volumen verdadero del líquido a esa temperatura, será:

$V_t = V_o (1 + \beta_r.t)$, volumen verdadero del líquido

$V_{rt} = V_{ro} (1 + \beta_r. t)$, volumen del recipiente dilatado

$V_{rt} – V_t = V_{ro}.\beta_r. t = \Delta V_r$, diferencia de volumen

Como el volumen aparente es menor que el volumen verdadero que ocupa el líquido debido a que el recipiente se ensancha al dilatarse, por lo tanto el nivel del líquido disminuye, el volumen verdadero del líquido a temperatura t será la suma del volumen aparente medido más el aumento del volumen que experimenta el recipiente.

$$V_t = V_{ot} + \Delta V_r$$

Si reemplazo en cada término de esta igualdad, sus correspondientes expresiones equivalentes, tendremos:

$$V_o\ (\ 1 + \beta_r.t\ ) = V_{ao}\ (\ 1 + \beta_a.t\ ) + V_{ro}\ (\ 1 + \beta_r.t\ )$$

Como los volúmenes iniciales a 0 ºC son iguales al del recipiente $V_o = V_{ao} = V_{ro}$, simplificando V_o , la unidad y la temperatura, se tendrá:

$$\beta_v = \beta_a + \beta_r$$

o sea el coeficiente de dilatación cúbica absoluto o verdadero de un líquido es igual a la suma de los coeficientes aparente y del recipiente que lo contiene

- MÉTODO PARA DETERMINAR EL VALOR DE βV

Anteriormente concluimos que: $V_t = V_o\ (\ 1 + \beta.\Delta t)$, y considerando el volumen como la relación de la masa sobre la densidad $V = m / \delta$, reemplazando en la expresión anterior:

$$(m/\delta)_t = (m/\delta)_o(1 + \beta.\Delta t) \quad \Rightarrow \delta_t = \delta_o/\ (1 + \beta.\Delta t)$$

$\Rightarrow$ aplicando el principio fundamental de la hidrostática:

$$\delta t.\ h_t = \delta o.h_o \ \Rightarrow\ \beta = 1/\Delta t.(\ h_o/ht - 1\ )$$

expresión que me permite calcular el coeficiente de dilatación cúbica de un liquido independientemente de la dilatación del recipiente que lo contiene.

- GENERALIZANDO

Sea un sistema físico cualquiera, (gas, líquido o sólido), que tiene la propiedad **X** (longitud, volumen, densidad, presión, resistencia eléctrica, etc.), que varía con la temperatura, si se expresa con $\mathbf{X_o}$ a la propiedad a cierta temperatura $\mathbf{T_o}$, si ésta temperatura cambia de $\mathbf{T_o}$ a **T,** entonces tendremos que $\mathbf{\Delta T = T - T_o;}$ y cuando se produce este cambio, la propiedad $\mathbf{X_o}$ cambia a **X**, entonces tendremos,

$\Delta X = X - X_o$, entonces el coeficiente térmico κ (kappa) de la propiedad X_o a la temperatura T_o está definido como:

$$\kappa = 1/X_o . (\Delta X/\Delta T)$$

Esta expresión es válida si X = L (unidimensional), o si X = A (bidimensional), o si X = V (tridimensional), es decir sea X una longitud, una área, o un volumen.

En el primer caso $\kappa = \alpha_L = 1/L_o . (\Delta L / \Delta t)$

Recordamos nuevamente, que α_L no es constante sino que depende de la temperatura inicial t_o, por lo general este coeficiente de expansión o dilatación lineal está dado para una t_o = 0ºC

Para el caso de un gas, corresponde algunas consideraciones:

El coeficiente $\beta_v = 1/V_o.(\Delta V/\Delta T)_P = 1/T_o = 1/ 273{,}16$ K, si t_o = 0ºC, $\Rightarrow T_o = 273{,}16$ K, esto físicamente significa que a 0ºC el volumen de un gas aumenta 0,3661 % por cada grado de temperatura a presión constante.

Haciendo uso del mismo procedimiento, es fácil verificar que el coeficiente de tensión del gas a volumen constante, será:

$$\beta_\rho = 1/P_o.(\Delta P/\Delta T)_v = 1/T_o$$

β_v y β_ρ son iguales para la mayoría de los gases que toman valores muy próximos a los valores de los gases ideales, es decir aquellos en que sus fuerzas intermoleculares son despreciables, con presiones muy bajas y distancias intermoleculares muy grandes, recordemos la expresión $F = dU/dr_o$, pero si T disminuye, y la densidad aumenta, entonces el gas deja de ser ideal ya que su comportamiento no es el mismo.

Debido a que el coeficiente de dilatación α es una constante para cada material, la dilatación va a depender única y exclusivamente de Δt y L_0, $\Delta L \propto \Delta t$

Si tenemos dos barras de un mismo material, una de mayor longitud que la otra, si le aplicamos la misma Δt los ΔL van a ser distintos para cada una de las barras, siendo en la de mayor longitud el ΔL experimentado mayor.

Para la misma barra supongamos igual L_0 para distintas Δt como α es constante solo va a depender la dilatación de Δt .

Como la temperatura ambiente en los distintos puntos del planeta, sufre cambios: diurno, nocturnos, estacionales, climáticos, etc... las construcciones u obras de arte existentes en esos lugares se dilataran o se contraerán. Para evitar que estos fenómenos produzcan daños en los materiales; por ejemplo en las vías de ferrocarril, en las estructuras metálicas o en el hormigón armado, se dejan juntas de dilatación que son

simplemente espacios que permiten a las piezas desplazarse relativamente para compensar el efecto de la dilatación.

Los vidrios con α muy grandes, como es el caso del vidrio común $9.0X10^{-6}$ al sufrir una dilatación parcial, aparecen tensiones en la zona que no se dilata provocando su rompimiento, en el laboratorio se debe usar vidrio refractario por ejemplo *pirex*. vidrios con boro-silicato, que tiene un coeficiente de dilatación mucho menor que el vidrio común.

2. EL CALOR

En física, el calor es una forma de energía asociada al movimiento de los átomos, moléculas y otras partículas que forman la materia. El calor puede ser generado por reacciones químicas (como en la combustión), nucleares (como en la fusión nuclear de los átomos de hidrógeno que tienen lugar en el interior del Sol), disipación electromagnética (como en los hornos de microondas) o por disipación mecánica (fricción).

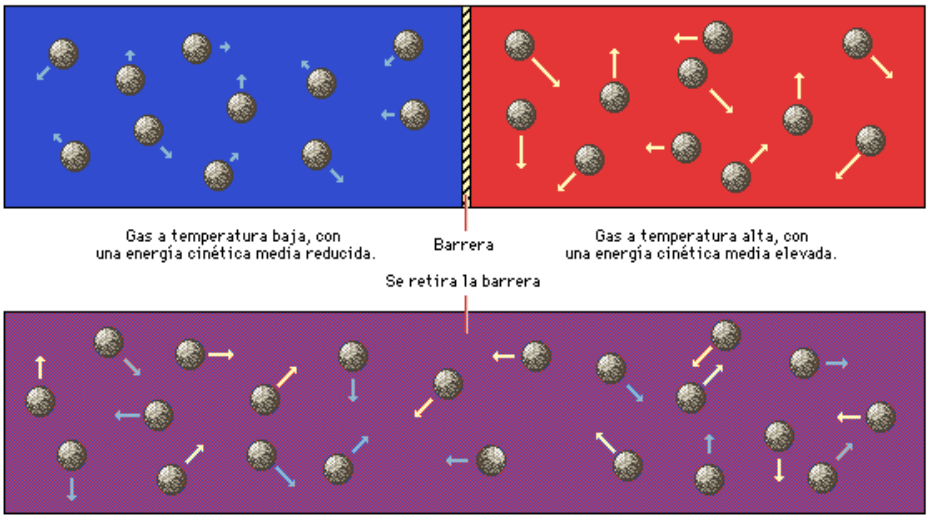
Su concepto está ligado al Principio de la Termodinámica, según el cual dos cuerpos en contacto intercambian energía hasta que su temperatura se equilibre. El calor puede ser transferido entre objetos por diferentes mecanismos, entre los que cabe reseñar la radiación, la conducción y la convección, aunque en la mayoría de los procesos reales todos los mecanismos anteriores se encuentran presentes en mayor o menor grado.

El calor que puede intercambiar un cuerpo con su entorno depende del tipo de transformación que se efectúe sobre ese cuerpo y por tanto depende del camino. Los cuerpos no tienen calor, sino energía interna. El calor es la transferencia de parte de dicha energía interna (energía térmica) de un sistema a otro, con la condición de que estén a diferente temperatura.

El calor se define como la transferencia de energía de una parte a otra de un cuerpo, o entre diferentes cuerpos, en virtud de una diferencia de temperatura. El calor es energía en tránsito; siempre fluye de una zona de mayor temperatura a una zona de menor temperatura, con lo que eleva la temperatura de la segunda y reduce la de la primera, siempre que el volumen de los cuerpos se mantenga constante. La energía no fluye desde un objeto de temperatura baja a un objeto de temperatura alta si no se realiza trabajo.

El efecto del calor sobre la temperatura de un cuerpo se explicaba postulando la existencia de una sustancia o forma de materia invisible, denominada calórico. Según la teoría del calórico, un cuerpo de temperatura alta contiene más calórico que otro de temperatura baja; el primero cede parte del calórico al segundo al ponerse en contacto ambos cuerpos, con lo que aumenta la temperatura de dicho cuerpo y disminuye la suya propia.

Figura 16



2.1 Unidades de medida del calor

Tradicionalmente, la cantidad de energía térmica intercambiada se mide en calorías, que es la cantidad de energía que hay que suministrar a un gramo de agua para elevar su temperatura de 14.5 a 15.5 grados Celsius. El múltiplo más utilizado es la kilocaloría (kcal):

$$1\,kcal = 1000\,cal$$

De aquí se puede deducir el concepto calor específico de una sustancia, que se define como la energía necesaria para elevar la temperatura de un gramo de dicha sustancia un grado Celsius, o bien el concepto capacidad calorífica, análogo al anterior pero para una masa de un mol de sustancia (en este caso es necesario conocer la estructura química de la misma).

Joule, tras múltiples experimentaciones en las que el movimiento de unas palas, impulsadas .por un juego de pesas, se movían en el interior de un recipiente con agua, estableció el equivalente mecánico del calor, determinando el incremento de temperatura que se producía en el fluido como consecuencia de los rozamientos producidos por la agitación de las palas:

$$1\,cal = 4,186\,joule$$

El joule (J) es la unidad de energía en el Sistema Internacional de Unidades, (S.I.).

El BTU, (o unidad térmica británica) es una medida para el calor muy usada en Estados Unidos y en muchos otros países de América. Se define como la cantidad de calor que se debe agregar a una libra de agua para aumentar su temperatura en un grado Fahrenheit, y equivale a 252 calorías.

2.2 Conceptos claves del calor

Es necesario definir algunos conceptos de vital importancia para comprender correctamente qué es el calor.

1.Calor latente

El cambio de temperatura de una sustancia conlleva una serie de cambios físicos. Casi todas las sustancias aumentan de volumen al calentarse y se contraen al enfriarse. El comportamiento del agua entre 0 y 4 °C constituye una importante excepción a esta regla. Se denomina fase de una sustancia a su estado, que puede ser sólido, líquido o gaseoso. Los cambios de fase en sustancias puras tienen lugar a temperaturas y presiones definidas. El paso de sólido a gas se denomina sublimación, de sólido a líquido fusión, y de líquido a vapor vaporización. Si la presión es constante, estos procesos tienen lugar a una temperatura constante.

La cantidad de calor necesaria para producir un cambio de fase se llama calor latente; existen calores latentes de sublimación, fusión y vaporización. Si se hierve agua en un recipiente abierto a la presión de 1 atmósfera, la temperatura no aumenta por encima de los 100 °C por mucho calor que se suministre. El calor que se absorbe sin cambiar la temperatura del agua es el calor latente; no se pierde, sino que se emplea en transformar el agua en vapor y se almacena como energía en el vapor. Cuando el vapor se condensa para formar agua, esta energía vuelve a liberarse. Del mismo modo, si se calienta una mezcla de hielo y agua, su temperatura no cambia hasta que se funde todo el hielo. El calor latente absorbido se emplea para vencer las fuerzas que mantienen unidas las partículas de hielo, y se almacena como energía en el agua.

2.Calor específico

En la vida cotidiana se puede observar que, si se le entrega calor a dos cuerpos de la misma masa y la misma temperatura inicial, la temperatura final será distinta. Este factor que es característico de cada sistema, depende de la naturaleza del cuerpo, se llama calor específico, denotado por c y se define como la cantidad de calor que se le debe entregar a

1 gramo de sustancia para aumentar su temperatura en 1 grado Celsius. Matemáticamente, la definición de calor específico se expresa como:

$$c = \frac{Q}{m\Delta\, t}$$

Las unidades de calor específico son:

$$[c] = \frac{J}{kgK}$$

$$[c] = \frac{cal}{gC}$$

De esta forma, y recordando la definición de caloría, se tiene que el calor específico del agua es aproximadamente:

3.Calor potencial

El cambio de temperatura de una sustancia conlleva una serie de cambios físicos. Casi todas las sustancias aumentan de volumen al calentarse y se contraen al enfriarse. El comportamiento del agua entre 0 y 4 °C constituye una importante excepción a esta regla. Se denomina fase de una sustancia a su estado, que puede ser sólido, líquido o gaseoso. Los cambios de fase en sustancias puras tienen lugar a temperaturas y presiones definidas. La cantidad de calor necesaria para producir un cambio de fase se llama calor potencial; existen calores potenciales de sublimación, fusión y vaporización.

4.Flujo calorífico

El flujo calorífico se define como la cantidad de calor que se transfiere a través de una unidad de área por unidad de tiempo. La ley de conducción del calor, determina que el tiempo que tarda un flujo de calor a través de una superficie es también proporcional a la gradiente de temperatura.

El calor siempre se transfiere entre 2 cuerpos de diferentes temperaturas y el flujo de calor siempre ocurre desde el cuerpo de mayor temperatura hacia el cuerpo de menor temperatura, ocurriendo la transferencia de calor hasta que ambos cuerpos se encuentren en equilibrio térmico, vale decir, a la misma temperatura.

$$c_{H_2O} = 1{,}000 \left[\frac{cal}{gC}\right]$$

5.Calor Específico Molar

El calor específico de una sustancia es un índice importante de su constitución molecular interna, y a menudo da información valiosa de los detalles de su ordenación molecular y de las fuerzas intermoleculares. En este sentido, con frecuencia es muy útil hablar de calor específico molar denotado por c_m, y definido como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de un mol de una sustancia en 1 grado es decir, está definida por:

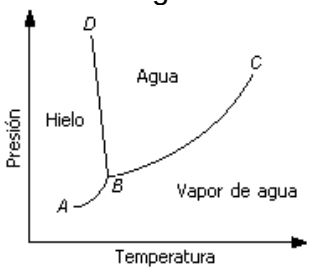
$$c_m = \frac{Q}{n\Delta t}$$

Donde n indica el la cantidad de moles en la sustancia presente.

6. Punto triple:

Condiciones de temperatura y presión a las que pueden coexistir en equilibrio las tres fases de una sustancia pura: sólida, líquida y gaseosa. Un gráfico de la presión frente a la temperatura que muestra los intervalos en los que pueden existir las distintas fases se denomina diagrama de fases. En el del agua, las líneas AB y BC representan las curvas de presión de vapor del hielo y el agua líquida respectivamente. La línea BD muestra el efecto que un aumento de la presión tiene sobre el punto de congelación. La pendiente de esa línea indica que un aumento de la presión disminuye el punto de congelación. Esto es lo contrario de lo que ocurre con la mayoría de los demás líquidos, y se debe al hecho de que el agua; a diferencia de otros líquidos; se expande al congelarse.

Figura 17



En la región ABD, el hielo es la única fase estable; en DBC y ABC, las únicas fases estables son, respectivamente, el agua y el vapor de agua. En el punto de intersección B, la temperatura es de 0,01 ºC, y tanto el hielo como el agua tienen la misma presión de vapor: 610,5 pascales. B es el punto triple del agua.

La temperatura del punto triple para cualquier sustancia pura es muy próxima a la de fusión, puesto que la variación de esta última con la presión es muy pequeña.

La termodinámica se dedica al estudio y a la explicación de las interacciones energéticas que ocurren entre sistemas.

Por lo dicho la termodinámica es el campo de la física que describe y relaciona las propiedades físicas de la materia de los sistemas macroscópicos, así como sus intercambios energéticos. Los principios de la termodinámica tienen una importancia fundamental para todas las ramas de la ciencia y la ingeniería.

Un concepto esencial de la termodinámica es el de sistema macroscópico, que se define como un conjunto de materia que se puede aislar espacialmente y que coexiste con un entorno infinito e imperturbable. El estado de un sistema macroscópico se puede describir mediante propiedades medibles como la temperatura, la presión o el volumen, que se conocen como variables de estado.

Cuando un sistema macroscópico pasa de un estado de equilibrio a otro, se dice que tiene lugar un proceso termodinámico. Las leyes o principios de la termodinámica, descubiertos en el siglo XIX, determinan la naturaleza y los límites de todos los procesos termodinámicos.

7.Absorción y Cesión de Calor

Cuando un cuerpo que está a una determinada temperatura se halla en contacto con otro cuerpo que está a otra temperatura se produce una transferencia de calor del más caliente al más frío. No es necesario que el contacto entre estos cuerpos sea un contacto físico directo.

La cantidad de calor que un cuerpo puede absorber o ceder a otro u otros depende de tres factores: la masa del cuerpo, la diferencia de temperatura entre ese cuerpo y los demás cuerpos con que está en contacto y la naturaleza del cuerpo en cuestión.

Cuando un cuerpo de masa m se calienta o se enfría, pasando de una temperatura t 1 a otra t 2, la cantidad de calor que absorbe o cede es:

$$Q = c \bullet m \bullet (t_2 - t_1)$$

El coeficiente de proporcionalidad, c, que aparece en esta igualdad se denomina calor específico, y su valor depende de la naturaleza de la sustancia.

Así, por ejemplo, un litro de agua y un litro de aceite no alcanzan la misma temperatura final cuando se les suministra la misma cantidad de calor.

De acuerdo con la expresión que hemos escrito, el calor específico de una sustancia puede definirse como la cantidad de calor necesaria para elevar un grado la temperatura de una masa unitaria de esa sustancia.

En el Sistema Internacional de unidades, el calor específico debe expresarse en J•kg-1•K-1, pero en la práctica es frecuente expresarlo en cal•g-1•°C-1.

Para los gases es muy importante distinguir entre el calor específico a presión constante (c P) y el calor específico a volumen constante (c V). Estas dos constantes son distintas, aunque existe, si se acepta un hipotético comportamiento ideal del gas, una relación aproximada entre sus valores.

8.Concepto de caloría

La caloría (símbolo, cal) se definió como la cantidad de calor que hay que suministrar a un gramo de agua para que su temperatura se eleve un grado centígrado (más concretamente, se eleve de 14,5 °C a 15,5 °C, ya que el calor específico varía algo con la temperatura). De acuerdo con esta definición, si medimos el calor en calorías, el calor específico del agua (a 14,5 °C) será la unidad. Como veremos, hoy la definición "oficial" de caloría ha cambiado formalmente.

A menudo se utiliza asimismo un múltiplo de esta unidad: la kilocaloria (símbolo, kcal), equivalente a mil calorías.

9.Equilibrio térmico

El calor fluye siempre del cuerpo que se encuentra a mayor temperatura al que se encuentra a menor temperatura, por lo tanto, un cuerpo que se halle en contacto (no hace falta que sea contacto físico directo) con otro más frío cederá calor a éste hasta que ambos estén a la misma temperatura.

El proceso se da en general entre todos los cuerpos presentes en un determinado espacio, ya que inicialmente todos ellos están a distinta temperatura y, por lo tanto, los más calientes ceden calor y los más fríos lo absorben. Al final, si no se introducen cambios desde el exterior, todos los cuerpos presentes en ese espacio tendrán la misma temperatura, es decir, se habrá alcanzado el equilibrio térmico.

Si nos limitamos al caso de dos cuerpos, uno de los cuales cede calor al otro, es fácil analizar matemáticamente el intercambio. Suponemos un cuerpo de masa m 1 y calor específico c 1 que se encuentra a una temperatura t 1 y se pone en contacto con un cuerpo de masa m 2 y calor específico c 2 que está a una temperatura t 2, que, para fijar ideas, suponemos menor que t 1. Nos planteamos hallar la temperatura final t a que se hallarán ambos cuerpos.

Igualamos el calor cedido por el cuerpo inicialmente más caliente con el calor absorbido por el cuerpo inicialmente más frío:

$$c_1 \bullet m_1 \bullet (t_1 - t) = c_2 \bullet m_2 \bullet (t - t_2)$$

Y resolviendo se llega a:

$$t = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2}$$

10. Calorímetros

Para determinar el calor específico de una sustancia debe usarse un calorímetro. Los calorímetros son aparatos que permiten medir la cantidad de calor absorbida o cedida por un cuerpo. Básicamente, pueden ser de tres tipos: de mezclas, de cambios de estado y eléctricos.

En esencia, el calorímetro más común está constituido por una vasija totalmente aislada del exterior y llena de agua, en la que se introduce la sustancia cuyo calor específico se investiga. El aparato va provisto de un termómetro y de un agitador para asegurar una buena mezcla. Lo que se mide es la temperatura del agua una vez alcanzado el equilibrio térmico. Hay que tener en cuenta que una parte del calor cedido por la sustancia no ha servido para calentar el agua, sino el agitador, el termómetro y la propia vasija, de manera que es preciso que el aparato esté perfectamente calibrado para asegurar un uso fiable.

2.3 Transmisión del calor.

Cuando se ponen juntos dos cuerpos a distinta temperatura, tras un tiempo, el más caliente se enfría y el más frío se calienta, de forma que pasa calor del que tiene una temperatura mayor al que la tiene menor y, al final, los dos acaban a la misma temperatura. El calor puede pasar de un cuerpo a otro de varias formas, estas son:

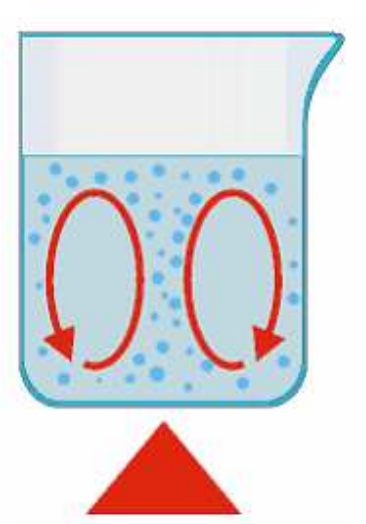
➢ CONVECCIÓN

Lleva el calor entre líquidos y gases. Si observas una llama observarás como los humos y vapores que desprenden suben. Eso suele ocurrir con el aire o el agua, al calentarse se dilatan y tienden a subir.

El aire caliente que sube es sustituido por aire frío, que se calienta y asciende. Al subir, el aire caliente se enfría y, al bajar de temperatura, también baja su altura y cae al

nivel del suelo. Se forman unas corrientes circulares en las que el aire se calienta, sube, se enfría y baja, son las corrientes de convección y permiten el paso del calor desde el suelo hacia el techo. Los calefactores que mueven el aire favorecen las corrientes de convección y caldean las habitaciones más rápidamente que los simples radiadores porque el aire es aislante y no conduce bien el calor.

Figura 18

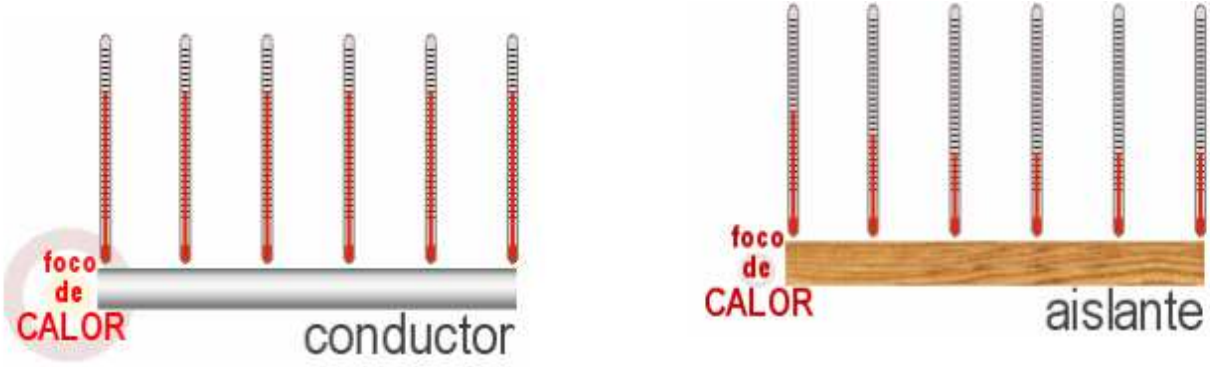


- CONDUCCIÓN

Se produce entre sólidos. Si dos cuerpos están en contacto, el calor pasa de uno a otro fácilmente, de las moléculas de uno a otro. Se trata de conducción. Pero no los cuerpos permiten que el calor pase por ellos de igual forma. Por unos cuerpos el calor pasa rápidamente, y se llaman conductores, y por otros lentamente, y reciben el nombre de aislantes.

Si tocas la madera del pupitre y su pata metálica creerás que la madera tiene más temperatura que la madera. Pero las dos están a la misma temperatura, a la temperatura de la clase. Cuando tocas el metal, tu temperatura es mayor que la suya, el calor pasa de tu mano al metal. Como es un buen conductor, y por eso los utensilios que sirven para cocinar son de metal, esa pérdida de calor la notas como una sensación de frío. La madera o el plástico son aislantes, por eso los mangos de los útiles de cocina suelen ser plásticos. Cuando los tocas el calor pasa también de tu mano a la madera, pero pasa muy poco calor, porque es aislante, de forma que no sientes frío.

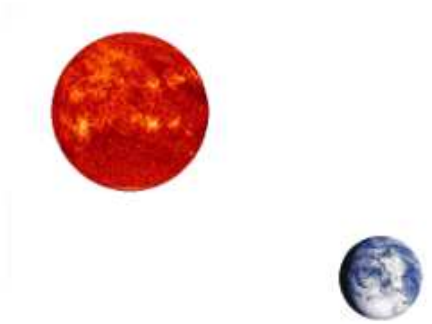
Figura 18



➢ RADIACIÓN.

Permite que el calor atraviese incluso el vacío. El Sol emite luz y calor que llega a la Tierra, pero entre el Sol y la Tierra no hay nada, el calor y la luz no pueden llegar por conducción ni por convección, llega por radiación. El calor es una forma de luz invisible que irradian los cuerpos más calientes y absorben los cuerpos más fríos. Cuanto un cuerpo está suficientemente caliente puede llegar a emitir radiación visible. Por eso al calentar un metal en principio si acercas la mano notarás el calor, sin llegar a tocarlo, cuando se calienta más se pone rojo, porque emite el calor en forma de luz roja, más caliente va cambiando de color: amarillo - rojizo, amarillo, blanco - azulado hasta blanco.

Figura 19



La radiación a la transmisión de calor entre dos cuerpos los cuales, en un instante dado, tienen temperaturas distintas, sin que entre ellos exista contacto ni conexión por otro sólido conductor. Es una forma de emisión de ondas electromagnéticas (asociaciones de campos eléctricos y magnéticos que se propagan a la velocidad de la luz) que emana todo cuerpo que esté a mayor temperatura que el cero absoluto. El ejemplo perfecto de este fenómeno es el planeta Tierra. Los rayos solares atraviesan la atmósfera sin calentarla y

se transforman en calor en el momento en que entran en contacto con la tierra.

Radiación térmica:

La radiación térmica tiene básicamente tres propiedades:

- Radiación absorbida. La cantidad de radiación que incide en un cuerpo y queda retenida en él, como energía interna, se denomina radiación absorbida. Aquellos cuerpos que absorben toda la energía incidente de la radiación térmica, se denominan cuerpos negros.

- Radiación reflejada. Es la radiación reflejada por un cuerpo gris.

- Radiación transmitida**.** La fracción de la energía radiante incidente que atraviesa un cuerpo se llama radiación transmitida

La asociación mutua de los procesos de emisión, absorción, reflexión y transmisión de energía radiante por diferentes sistemas de cuerpos se conoce como intercambio de energía radiante.

El aire, por lo tanto, en los sistemas de transmisión de calor, es un elemento totalmente pasivo, que no ejerce ninguna función fundamental en los resultados térmicos de un local.

Calentar objetos, personas, paredes, suelos, etc. sin calentar el aire fundamentalmente es el proceso térmico que genera una instalación radiante, obteniendo beneficios sustanciales en cuanto a la mejora de confort, modificación de la humedad ambiental y consumo.

Aplicación real en la construcción de la radiación térmica.

Si queremos aprovechar las características propias de la radiación térmica, estamos obligados a crear nuevos aparatos, a replantear los espacios que emiten calor de una manera diferente, en definitiva, a modificar el concepto convencional que solo se ocupa de incorporar a los locales un elemento capaz de convertir el aire frío en caliente, esté colocado en una u otra parte del local y con más o menos potencia instalada.

Por ello será importante analizar en los siguientes capítulos todas las variantes que puedan influir en una calefacción por radiación para obtener unos resultados óptimos.

2.4 Naturaleza del calor

La verdadera naturaleza del calor ha sido ignorada por los científicos durante miles de años y sólo hasta la época de Joseph Black se intentó algo constructivo para hacer averiguaciones acerca de la naturaleza de esta forma tan común de energía. Durante muchos años se consideró el calor como de naturaleza material, o una forma de materia que podía pasar de los cuerpos calientes a los más fríos. El término *calórico* fue usado para designar un fluido peculiar que no era ni pesado ni visible.

Black, también conocido por sus trabajos en química fue el primero en distinguir entre *intensidad* de calor (la cantidad que medimos con el termómetro) y *cantidad* de calor (la cantidad de energía calorífica contenida en el interior de un cuerpo de una sustancia dada). También observó que una cantidad definida de calor desaparece cuando se producen ciertos cambios de estado de la materia y reaparece cuando se produce el cambio de estado opuesto. A este calor le asigno el término de *calor latente.*

James Watt aplicó este descubrimiento en su máquina de vapor, aprovechando la ventaja de las grandes cantidades de energía del calor latente absorbidas por el agua cuando se vaporiza.

La creencia de que el calor era un fluido persistió hasta mediados del siglo pasado, a pesar de la gran cantidad de pruebas que había de lo contrario. Benjamín Thompson probó que la materia debía contener una cantidad inagotable de calórico o ninguna. Descubrió esto mientras manufacturaban un cañón en Baviera, al observar que el calor era producido por el frotamiento entre el taladro y la pared del hueco del cañón. Aun cuando la herramienta estuviese embotada y no pudiese cortar, el calor se producía.

Cuando al fin quedó establecida la idea de que la energía calorífica podía resultar de un movimiento mecánico (fricción), Joule pudo determinar el *equivalente mecánico del calor.* Calculó su valor midiendo la cantidad de *trabajo* que era preciso realizar por un dispositivo mecánico para producir determinada cantidad de energía calorífica. Encontró que en cualquier caso por una cantidad definida de trabajo realizado resultaba una cantidad definida de calor: 4180 julios de trabajo producen una caloría de calor.

Estos resultados condujeron a la idea de que la energía puede convertirse de una forma a otra sin ganar ni perder energía en el proceso. Esta es la ley o *principio de conservación de la energía o primer principio de termodinámica.* El honor del descubrimiento de este concepto puede distribuirse entre tres hombres: Joule, Helmholtz y Mayer.

En los años 1860 Maxwell y Boltzmann dejaron finalmente en el olvido el término *calórico* como anticuado. Demostraron ambos, independientemente, que la energía cinética de un gas estaba directamente relacionada con la temperatura de sus moléculas. Esta relación entre el movimiento molecular y la energía calorífica evitaba la necesidad de usar aquel término.

Durante este período se adquirió mucho conocimiento en el campo de la luz y de las energías electromagnéticas. Hubo indicios de que ahí podía hallarse un segmento invisible del universo que necesitase detección e investigación. Los rayos infrarrojos y ultravioletas, por ejemplo, estaban localizados justamente a continuación de los extremos del rojo y el violeta del espectro de la luz visible. A comienzos del siglo xx otros descubrimientos similares y alarmantes se produjeron en el mundo científico

2.5 Calor específico

En un día de verano, el sol calienta la arena de las playas y todo lo que sobre ella se encuentra. Suponga que sobre la arena hay tres objetos distintos: una toalla, una botella de plástico y un vaso de metal, los tres objetos están expuestos al calor del sol la misma cantidad de tiempo. Pasado un cierto tiempo podemos concluir que cada objeto habrá absorbido una cantidad distinta de calor. En otras palabras podemos decir que cada material tiene una capacidad de almacenar calor de manera diferente, esta capacidad depende de la naturaleza y composición del mismo. Esta situación que entendemos y que nos resulta familiar como experiencia de vida, nos va a llevar a la definición de Capacidad Calorífica.

La capacidad calorífica se puede expresar como la cantidad de calor requerida para elevar en 1ºC, la temperatura de una determinada cantidad de sustancia. Cuanto mayor sea la capacidad calorífica de una sustancia, mayor será la cantidad de calor entregada a ella para subir su temperatura. Por ejemplo, no es lo mismo calentar el agua de un vaso que el agua de toda una piscina: requerimos mayor calor para calentar el agua de toda una piscina puesto que su capacidad calorífica es mucho mayor.

La capacidad calorífica (C) (propiedad extensiva), se expresa como "calor" sobre "grados centígrados" y, por tanto, tiene las siguientes unidades:

$$C = \frac{J}{ºC}$$

El calor específico (c) (propiedad intensiva) tiene las siguientes unidades:

$$c = \frac{J}{g\,^0C}$$

El calor específico es una propiedad intensiva, no depende de la materia, y es un valor fijo para cada sustancia. Así, el agua tiene un valor fijo de calor específico, el cual debemos entenderlo como la cantidad de calor que puede absorber una sustancia: cuanto mayor sea el calor específico, mayor cantidad de calor podrá absorber esa sustancia sin calentarse significativamente.

La capacidad calorífica molar, se expresa de la siguiente manera:

Tenga en cuenta que la C de capacidad Calorífica está en mayúsculas:

$$\bar{C} = \frac{J}{mol\ ^0C}$$

Cuando se añade o disminuye calor a un sistema, se produce una variación de temperatura en el sistema.

$$q = mc\Delta T$$

Donde:

m = masa, gramos
c = calor específico, J/g °C

Capacidad Calorífica de los gases

Para los gases ideales, si se determina la capacidad calorífica molar para un mismo gas a:

- volumen constante se denomina, C_V
- presión constante se denomina, C_P
- La relación existente entre ellas está determinada por la expresión siguiente:

$$C_P - C_V = R$$

Donde:

R es la constante de los gases ideales expresada en unidades de energía:

R = 8,314 J/mol-K R = 1,989 cal/mol-K

La capacidad calorífica de los gases ideales varía, si se trata de gases monoatómicos, diatómicos y triatómicos.

En la tabla siguiente se muestran los valores de capacidad calorífica a volumen constante (C_V) y a presión constante (C_P) para gases ideales monoatómicos, diatómicos y triatómicos.

Gas	C_v	C_p
Monoatómico (ejm. He,Ne)	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
Diatómico (ejm. H_2, CO)	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$
Triatómico (ejm. NO_2,SO_2)	$\frac{7}{2}R$	$\frac{9}{2}R$

Si el sistema involucra a los gases ideales podemos expresar el calor a presión constante (q_P), como:

$$q_P = \Delta H = nC_P\Delta T$$

Recuerden que el calor a presión contante, se conoce como Entalpía (H)

2.6 Conducción del calor

La conducción del calor es el mecanismo de transferencia de calor de escala atómica a través de la materia por actividad molecular, por el choque de unas moléculas con otras, donde las partículas más energéticas le entregan energía a las menos energéticas, produciéndose un flujo de calor desde las temperaturas más altas a las más bajas. Los mejores conductores de calor son los metales. El aire es un mal conductor del calor. Los objetos malos conductores como el aire o plásticos se llaman aislantes.

La conducción de calor solo ocurre si hay diferencias de temperaturas entre dos partes del medio conductor. Para un volumen de espesor Δx, con área de sección transversal A y cuyas caras opuestas se encuentran a diferentes T_1 y T_2, con $T_2 > T_1$, se encuentra que el calor ΔQ transferido en un tiempo Δt fluye del extremo caliente al frío. Si se llama H (en Watts) al calor obtenido por unidad de tiempo, la rapidez de transferencia de calor $H = \Delta Q / \Delta t$, está dada por la ley de la conducción del calor de Fourier:

$$H = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx}$$

donde dT/dx se llama gradiente de temperatura, y k es una constante de proporcionalidad llamada conductividad térmica. Se escoge la dirección del flujo de calor en la dirección de las x crecientes; como el calor fluye en la dirección de la T decreciente, se introduce un signo menos en la ecuación (esto es, se desea que dQ/dt sea positiva cuando dT/dx sea negativa).

Una sustancia que tiene gran conductividad térmica k es un buen conductor de calor. El valor k depende de la temperatura, aumentando ligeramente al elevarse la temperatura, pero k puede considerarse prácticamente constante en toda la extensión de una sustancia si la diferencia de temperaturas entre sus partes no es demasiado grande.

Aplíquese la primera ecuación a una varilla de longitud de L y sección transversal constante A, en la cual se ha llegado a un estado de régimen estable. En un estado de régimen estable, la temperatura en cada punto es constante en el transcurso del tiempo.

Por consiguiente dQ/dt es el mismo para todas las secciones. Pero $dQ/dt = -kA(dT/dx)$, de manera que, para valores constantes de k y de A, el gradiente de dT/dx es el mismo en todas las secciones. Por consiguiente, T disminuye linealmente a lo largo de la varilla, de modo que $-dT/dx = (T_2 - T_1)/L$. Así pues, el calor ΔQ transmitido en el tiempo Δt es:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{(T_2 - T_1)}{L}$$

El fenómeno de la conducción del calor muestra también que los conceptos de calor y temperatura son netamente diferentes. Diferentes varillas, que tengan la misma diferencia de temperatura entre sus extremos, pueden transmitir cantidades totalmente diferentes de calor en el mismo tiempo.

2.7 Primera ley de la termodinámica

La primera ley de la termodinámica o Primer Principio de la termodinámica es una aplicación de la ley universal de conservación de la energía a la termodinámica y, a su vez, identifica el calor como una transferencia de energía. Uno de los enunciados de la primera ley de la termodinámica es el siguiente:

El incremento de la energía interna de un sistema termodinámico es igual a la diferencia entre la cantidad de calor transferida a un sistema y el trabajo realizado por el sistema a sus alrededores

- Conservación de la energía

La ley de la conservación de la energía constituye el primer principio de la termodinámica y afirma que la cantidad total de energía en cualquier sistema aislado (sin interacción con ningún otro sistema) permanece invariable con el tiempo, aunque dicha energía puede transformarse en otra forma de energía. En resumen, la ley de la conservación de la energía afirma que la energía no puede crearse ni destruirse, sólo se puede cambiar de una forma a otra, por ejemplo, cuando la energía eléctrica se transforma en energía calorífica en un calentador.

➢ Aplicaciones de la Primera Ley

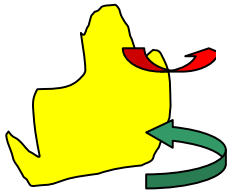
1. Sistemas cerrados:

Un sistema cerrado es uno que no tiene entrada ni salida de masa. El sistema cerrado tiene interacciones de trabajo y calor con sus alrededores, así como puede realizar trabajo de frontera.

La ecuación general para un sistema cerrado (despreciando energía cinética y potencial) es:

$$Q - W = \Delta U$$

Donde Q es la cantidad total de transferencia de calor hacia o desde el sistema (positiva cuando entra al sistema y negativa cuando sale de éste), W es el trabajo total (negativo cuando entra al sistema y positivo cuando sale de éste) e incluye trabajo eléctrico, mecánico y de frontera; y U es la energía interna del sistema.



2. Sistemas abiertos

Un sistema abierto es aquel que tiene entrada y/o salida de masa, así como interacciones de trabajo y calor con sus alrededores, también puede realizar trabajo de frontera.

La ecuación general para un sistema abierto es:

$$Q - W + \sum_{in} m_{in}(h + \frac{1}{2}V^2 + gz)_{in} - \sum_{out} m_{out}(h + \frac{1}{2}V^2 + gz)_{out} = \Delta E_{sistema}$$

O igualmente:

$$Q - W + \sum_{in} m_{in}\theta_{in} - \sum_{out} m_{out}\theta_{out} = \Delta E_{sistema}$$

Donde in representa todas las entradas de masa al sistema; out representa todas las salidas de masa desde el sistema; y θ es la energía por unidad de masa del flujo y comprende entalpía, energía potencial y energía cinética, $\theta = h + \frac{1}{2}V^2 + gz$.

La energía del sistema es $E_{sistema} = U + \frac{1}{2}mV^2 + mgz$

3. Sistemas abiertos en estado estacionario

El balance de energía se simplifica considerablemente para sistemas en estado estacionario (también conocido como estado estable). En estado estacionario se tiene $\Delta E_{sistema} = 0$, por lo que el balance de energía queda:

$$Q - W + \sum_{in} m_{in}(h + \frac{1}{2}V^2 + gz)_{in} - \sum_{out} m_{out}(h + \frac{1}{2}V^2 + gz)_{out} = 0$$

4. Sistema Aislado

Es aquel sistema en el cual no hay intercambio ni de masa ni de energía con el exterior.