RAMO: ESTADÍSTICA

IPLACEX
instituto profesional

UNIDAD I

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

CLASE 01

1. INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

La palabra Estadística proviene del latín "status", que significa estado, posición o situación; para responder a las necesidades que el Estado Romano tenía con respecto a la obtención de información. Por Estadística entendemos la colección de los datos que caracterizan las condiciones predominantes en un estado o nación: por ejemplo, el número de nacimientos y muertes, las cosechas, el comercio exterior, etc.

La palabra "estadística" suele utilizarse bajo dos significados distintos, a saber:

Como colección de datos numéricos, esto es el significado más vulgar de la palabra Estadística. Se sobrentiende que dichos datos numéricos han de estar presentados de manera ordenada y sistemática. Una información numérica cualquiera puede no constituir una estadística, para merecer este apelativo, los datos han de constituir un conjunto coherente, establecido de forma sistemática y siguiendo un criterio de ordenación. Como por ejemplo: El Anuario Estadístico publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos, El Anuario de Estadísticas del Trabajo, etc.

Como ciencia, en este significado, la Estadística estudia el comportamiento de los fenómenos de masas. Como todas las ciencias, busca las características generales de un colectivo y prescinde de las particulares de cada elemento. Así por ejemplo, al investigar el sexo de los nacimientos, iniciaremos el trabajo tomando un grupo numeroso de nacimientos, y posteriormente, obtendremos la proporción de varones o de mujeres.

Es muy frecuente, enfrentarnos con fenómenos en los que es muy difícil predecir el resultado; así, no podemos dar una lista, con las personas que van a morir con una cierta edad, o el sexo de un nuevo ser hasta que transcurra un determinado tiempo de embarazo.

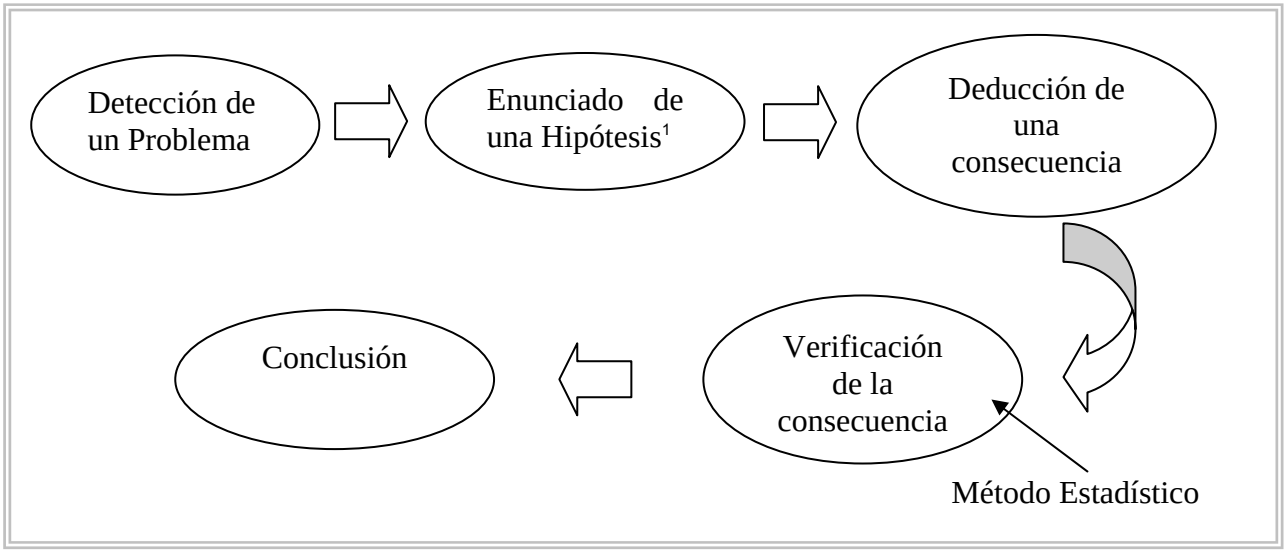
Como la definición oficial de Estadísticas, entendemos que es el conjunto de datos publicados por los organismos públicos o agencias del gobierno, en forma de información o de prospectos, una ciencia que estudia conjuntos de datos cualitativos y su interpretación en términos matemáticos, estableciendo métodos para la obtención de las medidas que lo describen, así como para el análisis de las conclusiones, con especial referencia a la teoría de la probabilidad, considerada también como ciencia de base matemática para la toma de decisiones en presencia de la incertidumbre, es decir, un cuerpo de conocimientos basados en una teoría propia.

A continuación, se presenta la definición de estadística a utilizar en este material de estudio:

> La Estadística es un conjunto de teorías y métodos para tratar la recolección, descripción y análisis de datos muestrales, con el fin de extraer conclusiones útiles.

En otras palabras, la Estadística es la ciencia de la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre y como tal, forma parte del método científico. En la siguiente figura, podemos observar como el método estadístico se encuentra inmerso en el método científico.

Figura Nº 1: Método Científico



Conceptos a utilizar en el estudio de la estadística

Antes de continuar, es necesario introducir al alumno en los conceptos centrales y de uso común, en el estudio de la Estadística, con el fin de facilitar su compresión y análisis.

Todo estudio estadístico ha de estar referido a un conjunto o colección de personas o cosas. Este conjunto de personas o cosas es lo que se denomina población.

Las personas o cosas que forman parte de la población se denominan elementos.

En un sentido estadístico, un elemento puede ser algo con existencia real, como un automóvil o una casa, o algo más abstracto como la temperatura, un voto, o un intervalo de tiempo. A su vez, cada elemento de la población tiene una serie de características que

pueden ser objeto del estudio estadístico. Así, por ejemplo si consideramos como elemento a una persona, podemos distinguir en ella las siguientes cualidades o caracteres: Sexo, Edad, Nivel de estudios, Profesión, Peso, Altura, Color de pelo, etc.

La población puede ser, según su tamaño, de dos tipos:

a) Población finita: cuando el número de elementos que la forman es finito, por ejemplo, el número de alumnos de un colegio, o un curso o clase.

b) Población infinita: cuando el número de elementos que la forman es infinito, o tan grande que pueden considerarse como infinitos. Por ejemplo, si se realizase un estudio sobre los productos que hay en el mercado. Hay tantos y de tantas calidades que esta población podría considerarse infinita.

Normalmente, en un estudio estadístico, no se puede trabajar con todos los elementos de la población (por falta de tiempo, recursos o de escasez en la información), sino que se realiza sobre un subconjunto de la misma.

El subconjunto de la población puede ser una muestra, cuando se toman un determinado número de elementos de la población, sin que en principio tengan nada en común; o una subpoblación, que es el subconjunto de la población formado por los elementos de la población que comparten una determinada característica, por ejemplo, la población son todos los alumnos del Liceo A-8 y la subpoblación esta formada por los alumnos de 3º Medio A, o la subpoblación de los varones del Liceo.

Ahora, en el caso que se observen todos los elementos de la población, se dice que se está realizando un Censo de la población.

Además de las definiciones entregadas, es importante, que el alumno comprenda la diferencia que existe entre dato, información y conocimiento. En una conversación informal, los tres términos suelen utilizarse indistintamente y esto puede llevar a una interpretación libre del concepto de conocimiento. Quizás, la forma más sencilla de diferenciar dichos términos, sea pensar que los datos están localizados en el mundo y el conocimiento está localizado en agentes de cualquier tipo, mientras que la información adopta un papel mediador entre ambos.

Un dato es un conjunto discreto de factores objetivos sobre un hecho real, es decir, éste no dice nada sobre el porqué de las cosas, y por sí mismo tiene poca o ninguna relevancia o propósito. Por ejemplo, un dato puede ser la edad de una alumna de quinto básico – Colegio XX.

Se definirá información como un mensaje, normalmente, bajo la forma de un documento o algún tipo de comunicación audible o visible. Como cualquier mensaje, tiene un emisor y un receptor. La palabra “informar” significa “dar forma a”, por lo tanto, la información es capaz de formar a la persona que la consigue, proporcionándole ciertas diferencias en su interior o exterior.

Para Davenport y Prusak (1999), el conocimiento “es una mezcla de experiencia, valores, información y saber hacer, que sirve como marco para la incorporación de nuevas experiencias e información, y es útil para la acción”.

Para concluir, se puede declarar que, el conocimiento se deriva de la información, así como la información se deriva de los datos. En estadística, se recolectan los datos, se analizan, y se elabora la información.

CLASE 02

1.1 Método Estadístico

En la etapa del método científico llamada “verificación de la consecuencia” es en donde se utiliza el método estadístico, es decir, se busca verificar la hipótesis planteada, investigando si las consecuencias deducidas se cumplen o no.

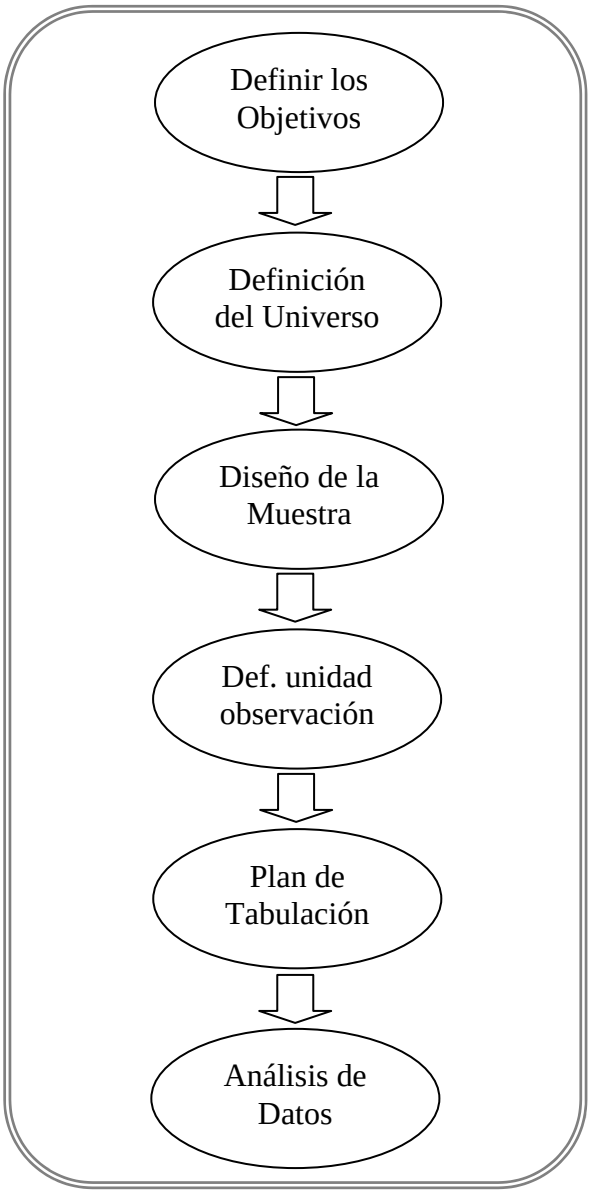
Por ejemplo, si se tiene la siguiente hipótesis “el 60% de las mujeres mayores de 30 años están casadas”; es en esta etapa donde se verifica si esta hipótesis es cierta o falsa, a través de la recolección y análisis de los datos.

Por lo tanto, el método estadístico nos proporciona las técnicas necesarias para recolectar y analizar la información requerida, en la que se puede distinguir dos etapas:

a) Planificación

Los pasos que conforman esta etapa pueden ser representados a través del esquema que se presenta a continuación (representado en la Figura Nº 2).

Figura Nº 2 Etapas Proceso de la Planificación del Método Científico



A continuación, se explicará cada una de las etapas involucradas en el proceso de planificación del método estadístico, de manera de contextualizar cada uno de éstos.

- Definición de Objetivos: corresponde a la descripción del problema que da origen a la investigación. Es en este momento, donde se debe señalar detalladamente, qué se pretende investigar, cómo, cuándo, dónde y por qué.

- Definición del universo: corresponde a la definición sobre la que se extraerá la información y a la cual se generalizarán los resultados.

- Diseño de la Muestra: la teoría del Muestreo o del diseño de experimentos, según el caso, pueden garantizarnos que la información que generemos nos permita sacar conclusiones válidas para la población de interés.

- Definición de las unidades de observación, escalas de clasificación y unidades de medida: en una misma investigación pueden haber varios objetivos parciales que requieran estudiar unidades de observación distintas. Por ejemplo, en un estudio sobre los hábitos de consumo, el análisis se puede realizar a nivel individual o a nivel familiar -como unidad de observación-, la escala de clasificación puede ser de intervalos y se debe elegir apropiadamente la unidad de medida (en una encuesta).

- Preparación del plan de tabulación y análisis de datos: aquí se deben considerar diversas alternativas de análisis, como la estadística descriptiva -que es materia de estudio-.

La tabulación es la organización y presentación en tablas de los datos recogidos, para que su análisis e interpretación sean rápidos y útiles. Por ejemplo, para estudiar e interpretar la distribución de las notas de un examen en una clase con treinta alumnos, primero se ordenan las notas en orden creciente, luego, se hace un conteo de la clase de nota obtenida y se organiza en una Tabla (presentación resumida).

b) Ejecución

La etapa de ejecución contempla los siguientes pasos:

i) Recopilación de los datos,
ii) Elaboración de la información: que consiste en tabular, graficar y resumir la información; y
iii) Análisis de resultados.

Temas que serán abordados en el transcurso de esta unidad.

1.2 Funciones de la Estadística

Las funciones de la Estadística son dos, y éstas dan origen a dos categorías de estadísticas: la Estadística Descriptiva y a la Estadística Inferencia o Inductiva.

A) Estadística Descriptiva: comprende el tratamiento y análisis de los datos, con el fin de resumir y describir los hechos, que nos ha proporcionado la información

recolectada. Por lo general, toman la forma de tablas, gráficas, índices y un conjunto de medidas que permiten resumir la información.

La estadística descriptiva es una ciencia que analiza series de datos (por ejemplo, edad de una población, altura de los estudiantes de una escuela, temperatura en los meses de verano, etc.) y trata de extraer conclusiones sobre el comportamiento de estas variables.

Cabe señalar, que el análisis se limita a los datos recolectados y en ningún caso se pretende hacer generalizaciones a poblaciones o a conjunto de datos distintos a los tratados.

De este modo, si se recolectan datos de mujeres que pertenecen a un hogar de beneficencia, su análisis arrojaría características determinantes sólo para este grupo de mujeres.

La estadística descriptiva, sirve como método para organizar datos y poner de manifiesto sus características esenciales con el propósito de llegar a conclusiones. El campo de la estadística descriptiva no tiene que ver con las implicaciones o conclusiones que se puedan deducir del conjunto de datos.

B) Estadística Inferencial: es un conjunto de métodos que permiten sacar conclusiones válidas con respecto a características de una población, en base a información limitada. Es decir, la inferencia estadística se basa en las conclusiones a la que se llega por la ciencia experimental basándose en información incompleta.

En la terminología estadística, el procedimiento inductivo implica el hacer inferencias acerca de una población adecuada o universo a la luz de lo averiguado en un subconjunto aparte o muestra. La inferencia estadística se refiere a los procedimientos mediante los cuales se pueden hacer tales generalizaciones o inducciones.

Por ejemplo, si se toma una muestra de 30 alumnos (al azar) de un colegio, del análisis de los datos recogidos se obtienen conclusiones para el colegio en su conjunto.

El proceso de inferencia científica implica el grado mas elevado de cooperación entre la estadística y el estudio experimental. En este sentido, la estadística descriptiva, muchas veces no es más que una etapa preliminar para la realización de inferencias estadísticas.

Realice ejercicios Nº 1 al 2

CLASE 03

1.3 Las Variables y su Clasificación

En Estadística Descriptiva nos ocuparemos, principalmente, de los siguientes puntos:

1. Organizar los datos en Tablas Estadísticas.
2. Graficar los datos para hacer una representación visual de éstos.
3. Calcular Medidas de Resumen[1], para mostrar características destacadas de los datos.

Para poder realizar adecuadamente estas tres tareas, se debe tener en cuenta el tipo de datos con el que se trabaja, es decir, el tipo de tabla, gráfico y medida de resumen que se utilizarán; lo cual depende del tipo de variable que se está analizando estadísticamente.

Dado lo anterior, lo principal será definir los tipos de variables que existen y sus principales características.

¿Qué es una variable estadística?

Se entiende por variable estadística al conjunto de los distintos valores numéricos, que adopta una cualidad o carácter cuantitativo.

De esta definición, se desprende la primera clasificación de variable, que las divide en Cuantitativas (intercalares) o Cualitativas (categóricas), dependiendo de si los valores presentados tienen o no un orden de magnitud natural, es decir, son susceptibles a ser contados; o simplemente es un atributo que no puede ser sometido a una cuantificación.

Un atributo corresponde al valor específico de una variable, por ejemplo, en el caso de la variable sexo, esta posee dos atributos “hombre o mujer”. Por lo tanto, podemos decir que se trata de una variable cualitativa.

Las variables pueden ser clasificadas según el tamaño del recorrido y la escala de medición, de la variable en cuestión. Lo que nos permite encontrar el método correcto para tratar los datos recolectados.

[1] Las Medidas de Resumen es un valor representativo o típico ce los datos observados, que es fijo para cada población, y que recibe el nombre de estadístico.

a) Tamaño del Recorrido: como su nombre lo indica, en este caso las variables son clasificadas de acuerdo al número de valores que éstas puedan tomar. Las que se pueden dividir en:

1. Variable Binaria o Dicotómica: estas variables sólo pueden tomar dos valores, es decir, los elementos pueden ser clasificados en dos categorías mutuamente excluyentes y exhaustivas (el valor completo de la variable), como por ejemplo: sexo (masculino / femenino), chilenos/extranjeros, etc.

2. Variable Discreta: son las variables que pueden tomar un número finito o infinito numerable de valores, es decir, puede tomar cualquier valor entero, por ejemplo: número de hijos en una familia, número de alumnos en un curso, número de asignaturas en la carrera, etc.

3. Variable Continua: son aquellas variables que pueden tomar cualquier valor, de hecho su recorrido es infinito. Es decir, entre dos valores cualquiera podemos, potencialmente, observar un tercero, por ejemplo: entre el 0 y 1, existe un número infinito de números. Como ejemplos de estas variables encontramos el ingreso, el valor de los aranceles universitarios, consumo de electricidad, edad, estatura, peso, etc.

Muchas veces, una variable continua se trabaja como variable discreta, para propósitos del análisis. Por ejemplo, es posible trabajar la variable continua "edad" como variable discreta al hablar de "años cumplidos", es así como, el ingreso también puede ser trabajado como variable discreta al subdividirlo en categorías que suelen ser referidas como estratos socio-económicos.

b) Escala de Medición: de acuerdo a este criterio, las variables se clasifican según el tipo de medición que es posible aplicar a los datos. Entre los tipos de escala, podemos hacer mención en:

1. Escala nominal: en donde las observaciones para una variable sólo pueden ser clasificadas en "una" de varias clases mutuamente excluyente y exhaustivas.

Una clase se define como el rango en intervalos, en la que se debe agrupar una variable con un elevado número de valores. Las clases se pueden identificar mediante diversos símbolos como letras, números, etc. Ahora, se denomina *marca de clase* al valor central de cada intervalo.

2. Escala ordinaria (ordinal): en donde los sujetos u objetos (observaciones) que pertenecen a una determinada clase, no sólo difieren de los que pertenecen a otra, sino que, además existe una relación de orden entre las clases. Es decir, las observaciones son susceptibles a ser ordenadas.

Algunos ejemplos son: jerarquía de la iglesia, estructura jerárquica de la empresa, jerarquía en la carrera militar, etc.

3. Escala de intervalos: este tipo de escala es propiamente numérica, la cual además de poseer las características de la escala ordinal, también nos permite conocer la distancia entre dos puntos. Con esta escala es posible medir variables como: la temperatura (en grados Celsius o en grados Fahrenheit), la altura sobre el nivel del mar, años calendarios, etc. En estos casos, el cero es un cero arbitrario y no un cero absoluto, ya que el cero no indica ausencia de temperatura o de altura.

4. Escala de razón: este tipo de escala posee todas las características de la escala de intervalos y además un cero absoluto, que indica la ausencia de la característica en cuestión. Algunos ejemplos de variables a ser medidas con estas escalas, son: la edad, ingresos, estatura, consumo de electricidad, y temperatura medida en grados kelvin (en ésta, el cero efectivamente representa no temperatura).

Realice ejercicio Nº 3

En síntesis, se puede concluir que:

Las variables pueden ser de dos tipos:

Variables cualitativas o atributos: no se pueden medir numéricamente (por ejemplo: nacionalidad, color de la piel, sexo).

Variables cuantitativas: tienen valor numérico (edad, precio de un producto, ingresos anuales).

Clasificación de variables

Cuantitativas (intervalares)	
Continuas Ej. Presión arterial, peso, edad, talla, etc.	Discretas Ej.Número de hijos, episodios de infección urinaria, etc.
Cualitativas (categóricas)	
Ordinales Ej.Etapificación tumores, Jerarquía Profesores Universitarios, etc.	Nominales -Dicotómicas : Ej vivo/muerto, sexo -Policotómicas : Ej. Grupo sanguíneo, raza, etc.

Las variables también se pueden clasificar en:

Variables unidimensionales: sólo recogen información sobre una característica (por ejemplo: edad de los alumnos de una clase).

Variables bidimensionales: recogen información sobre dos características de la población (por ejemplo: edad y altura de los alumnos de una clase).

Variables pluridimensionales: recogen información sobre tres o más características (por ejemplo: edad, altura y peso de los alumnos de una clase).

CLASE 04

2. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

El estudio de la estadística se divide clásicamente en dos, la estadística descriptiva y la estadística inferencial. Antes de seguir avanzando en nuestro estudio, es necesario reforzar la diferencia (señalada en el punto 1.2) entre estadística descriptiva e inferencia estadística.

La estadística inferencial o inductiva sirve para extrapolar los resultados obtenidos en el análisis de los datos y a partir de ello predecir acerca de la población, con un margen de confianza[1] conocido.

La estadística descriptiva o deductiva se construye a partir de los datos y la inferencia sobre la población no se puede realizar, al menos con una confianza determinada, la representación de la información obtenida de los datos se representa mediante el uso de unos cuantos parámetros y algunas gráficas planteadas de tal forma que den importancia a los mismos datos.

Como podemos observar, la definición de estadística descriptiva nos permite descubrir las técnicas utilizadas para resumir y comprender la información entregada por los datos. La estadística descriptiva formula reglas y procedimientos para la presentación de una serie de datos en una forma más útil y significativa.

La estadística descriptiva se construye a partir de los datos recolectados, los cuales pueden ser resumidos y presentados para su análisis usando técnicas de presentación como: Presentación Tabular, Gráfica y Numérica (Estadísticos Básicos).

Siempre que se va a realizar un análisis estadístico de una serie de datos, es aconsejable previamente hacer una Estadística Descriptiva, para obtener información de las variables a analizar o simplemente para chequear posibles errores en los datos.

En los siguientes apartados veremos como se puede llevar a cabo la Estadística Descriptiva, utilizando cada una de las técnicas mencionadas anteriormente.

2.1 Tablas de Frecuencia

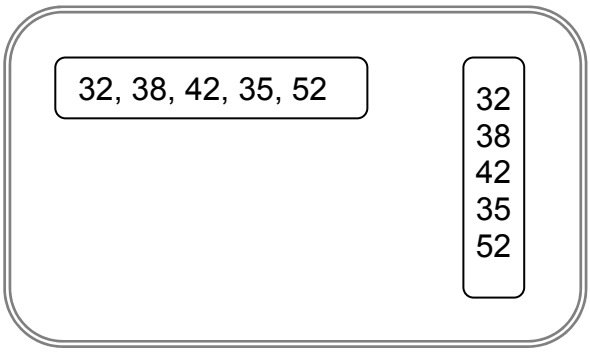
El manejo de la información requiere de la ordenación de datos, de tal forma que, permita la obtención -más fácil- de conclusiones acerca de la muestra. Una primera ordenación se realiza mediante el manejo de tablas, en las que se ordenan los datos de acuerdo a ciertas características de éstos.

2.1.1 Tipos de Tablas (Univariantes)

a) Tipo I: cuando el tamaño de la muestra y el recorrido de la variable son pequeños, por ejemplo, si tenemos una muestra de las edades de 5 personas, por lo que no hay que hacer nada especial, simplemente, anotarlas de manera ordenada en filas o columnas.

Por ejemplo: edades de 5 funcionarios del Departamento de Administración.

Tabla Nº 1 Tipo Tablas I



b) Tipo II: cuando el tamaño de la muestra es grande y el recorrido de la variable es pequeño, por lo que hay valores de la variable que se repiten.

Por ejemplo, si preguntamos el número de estudiantes que hay en 50 familias, vemos que este número varía entre 1 a 4 estudiantes por familia, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla Nº 2: Tipo Tablas II

2	1	2	2	1	2	4	2	1	1
2	3	2	1	1	1	3	4	2	2
2	2	1	2	1	1	1	3	2	2
3	2	3	1	2	4	2	1	4	1
1	3	4	3	2	2	2	1	3	3

Como se dijo anteriormente, en la tabla Nº2, podemos observar que la variable toma valores que van desde el 1 al 4, por lo que es posible resumir estos datos en una Tabla de Frecuencia:

Tabla Nº3 Tabla de Frecuencia

Cantidad de Estudiantes	Frecuencia (Número de Familias con esa cantidad de estudiantes)
1	16
2	20
3	9
4	5
Total	50

Tablas de Distribución de Frecuencia: el propósito de estas tablas es resumir la información registrada en una variable (cantidad de estudiantes por familia), además en ellas se anotan la Frecuencia, es decir, el número de veces con que ocurren los distintos valores observados de la variable de interés (número de familias con una determinada cantidad de estudiante determinada).

c) Tipo III: cuando el tamaño de la muestra y el recorrido de la variable son grandes, es necesario agrupar en intervalos los valores de la variable. Por ejemplo, si a un grupo de 30 alumnos les preguntamos el dinero que en ese momento tenían, nos encontramos con los siguientes datos:

Tabla Nº4 Tipo Tablas III

450	1152	250	300	175	80	25	2680	605	785
1595	2300	5000	1200	100	5	180	200	675	500
375	1500	205	985	185	125	315	425	560	1100

Como podemos observar, la variable “pesos” tiene un recorrido muy grande, por lo que si queremos resumir estos datos en una Tabla de Frecuencia debemos recurrir a los Intervalos.

Intervalos: el propósito de este instrumento estadístico es resumir los datos de variables con un recorrido muy amplio. Para decidir la amplitud del intervalo debemos determinar con cuántos intervalos queremos trabajar. Normalmente, se suele trabajar con no más de 10 a 12 intervalos.

Nota: en este momento sólo presentaremos el tipo de tabla, más adelante abordaremos los pasos a seguir para la construcción de intervalos.

Tabla Nº 5: Tabla de Frecuencia con Intervalos

Intervalos (Cantidad de dinero)	Frecuencia (Número de alumnos con esa cantidad de dinero)
0 - 500	16
500 - 1000	6
1000 - 1500	3
1500 - 2000	2
2000 - 2500	1
2500 - 3000	1
3000 - 3500	0
3500 - 4000	0
4000 - 4500	0
4500 - 5000	0
5000 - 5500	1

2.1.2 Construcción de una Tabla de Frecuencia

Una vez presentados los tipos de tablas, es posible ahondar en el tópico de Tablas de Frecuencias, comenzando desde su construcción hasta su análisis.

Figura Nº 3: Presentación de una Tabla de Frecuencia

Título de la Tabla

Nombre de la Variable	Tipo de Frecuencia
. . . Categorías de la variables	. . . Frecuencias observadas . . .

En la figura Nº 3, podemos observar los elementos que componen la construcción de una tabla de frecuencia, los que se describen a continuación:

a) Título de la Tabla

Este elemento debe indicar qué información se presenta, dónde y cuándo se obtuvieron los datos que se resumen en la tabla de frecuencia.

b) Nombre de la variable

En este se debe indicar cuál es la variable y la unidad de medición de la misma. Es decir, si la variable es la edad de los funcionarios de un departamento, la unidad de medición pueden ser los años.

c) Categoría de la variable

Para una variable cuyo nivel de medición es nominal, entonces las categorías de la variable se colocan en forma arbitraria (no importa el orden que se le de). Ejemplo: la categoría de la variable "estado civil de las personas" de una muestra pueden ser soltero(a), casado(a), viudo(a) o separado(a). Luego, se asignan números a estas categorías -no importando el orden-, donde soltero puede ser el número 1 ó 2 ó 3 ó 4.

Para los otros tipos de variables, de escala de medición ordinales, los valores de estas se deben anotar respetando el orden implícito (mayor o menor). Por ejemplo, al estudiar el estatus socio-económico de una muestra de familias la variable puede tomar las categorías de bajo, medio o alto. Luego, se asignan números a las categorías respetando su orden, bajo es 1, medio es 2 y alto es 3.

En el caso que las categorías de variable sean muchas, entonces se deben agrupar los datos en intervalos, para formar categorías que respeten el orden implícito, de ser necesario. Ejemplo, es la variable "cantidad de hijos por familia", donde la variable puede tomar las siguientes categorías 0, 1, 2, 3, …, n. Por lo que es necesario agrupar las categorías en intervalos.

d) Tipo de Frecuencias

Frecuencia Absoluta o Frecuencia: que se denota con la letra "n" y el subíndice i, es decir, "n_i". La cual representa, el número de veces que se repite el i-ésimo valor de la variable.

Frecuencia Relativa: es una proporción que se denota con la letra p y el subíndice i, es decir, "p_i". Ésta representa la proporción con que ocurre el i-ésimo valor de la variable, respecto del total de observaciones n.

$$p_i = \frac{n_i}{n}$$

Frecuencias Acumuladas (Absolutas y Relativas): las que se denotan por N_i y P_i, respectivamente, y representan las frecuencias acumuladas hasta el i-ésimo valor de la variable. Cabe destacar, que las frecuencias acumuladas sólo tienen sentido calcularlas para variables cuyo nivel de medición es ordinal o superior (ordinal, intercalar, razón), pero en ningún caso para la escala nominal.

Donde algebraicamente:

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j \qquad P_i = \sum_{j=1}^{i} p_j = \sum_{j=1}^{i} \frac{n_i}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n} = N_i$$

Frecuencia Relativa Porcentual: este tipo frecuencia representa una alternativa a la presentación de las frecuencias relativas, pues se presentan éstas pero en porcentaje.

Realice ejercicios Nº 4 al 8

Ejemplo Nº 1

Como una forma de integrar estos conceptos, se presenta el siguiente ejemplo para una variable nominal discreta, como el número de alumnos por carrera de un Centro de Formación Técnica para el primer semestre del 2005.

Tabla Nº 4: Matrícula por Carrera Centro de Formación Técnica

Primer Semestre 2005

Carrera	n_i	p_i	N_i	P_i	100* p_i
Administración	300	0.3	-	-	30 %
Contabilidad	200	0.2	-	-	20 %
Publicidad	250	0.25	-	-	25 %
Finanzas	150	0.15	-	-	15 %
Dibujo Técnico	100	0.1	-	-	10 %
Total	1000	1			100 %

Ejemplo Nº 2

Para una variable ordinal discreta, en el caso de la jerarquía académica de los profesores perteneciente al departamento de estadísticas - Universidad UU.

Tabla Nº 5: "Distribución de los Profesores por jerarquía académica, Departamento de Estadística – Universidad UU"

Primer semestre 2005

Jerarquía Académica	n_i	p_i	N_i	P_i	100* p_i
Titular	8	0.142	8	0.142	14,2 %
Asociado	16	0.285	24	0.427	28,5 %
Asistente	24	0.428	48	0.855	42,8 %
Instructor	6	0.107	54	0.962	10,7 %
Ayudante	2	0.035	56	1	3,5 %
Total	56	1			100 %

Recordemos:

Frecuencia Relativa
0.107 que representa la proporción con que ocurre la jerarquía de instructor. Cálculo n_i / n (6/56)

Frecuencia Acumulada Absoluta
48 que representa la cantidad acumulada de profesores con jerarquía de titular, asociado y asistente (8+16+24).

Ejemplo Nº 3

Para una variable de razón continua, en el caso de la distribución de nota en la asignatura de Estadística I, para el instituto profesional IPLACEX, primer semestre del 2005.

Tabla Nº 6: Distribución de las Notas en Estadística I, Instituto Profesional IPLACEX

Primer semestre 2005

Notas (Intervalos)	n_i	p_i	N_i	P_i	100* p_i
1,0 - 3,0 *	5	0.1	5	0.1	10 %
3,0 - 4,0	15	0.3	20	0.4	30 %
4,0 - 5,0	20	0.4	40	0.8	40 %
5,0 - 6,0	6	0.12	46	0.92	12 %
6,0 - 7,0	4	0.08	50	1	8 %
Total	50	1			100 %

(*) El primer intervalo tiene una amplitud mayor, a necesidad del análisis, a razón de la cantidad de alumnos con nota inferior a 3,0.

CLASE 05

2.1.3 Método de Construcción de una Tabla, para Variables Discretas o Continuas

El método de construcción de una tabla de frecuencia, para una variable discreta o continua, implica la construcción de intervalos en el caso que la variable tome muchos valores y esté definida con una escala de medición de intervalos o de razón.

Para este efecto, debemos considerar los siguientes pasos:

A) Determinar el número de intervalos "k"

En este punto, se debe tener en cuenta algunas consideraciones prácticas, como:

- Es recomendable, que el número de intervalos "k" no sea inferior a 5 ni superior a 20. Cuando la cantidad de intervalo es inferior a 5, es posible que se oculte información importante por la acumulación de datos. En caso contrario, cuando la cantidad de intervalos es superior a 20 o mayor a los necesarios para la variable de interés, algunos podrían quedar vacíos, lo que hace perder sentido a la distribución de frecuencia.
- Mientras más datos se tengan, mayor será la cantidad de intervalos "k" que deberán considerarse.
- Se recomienda, en muchos casos, utilizar una regla común para determinar el número de intervalos "k", que se representa en la siguiente formula:

$$k = 1 + 3.3 \text{ Log } n$$

Donde, n representa el número datos observados de la variable de interés.

Ahora, el número de intervalos a considerar, nos deriva en la cantidad de clases en las cuales se agruparán los datos observados de la variable de interés.

Clase, se conoce como clase a los valores representativos (inferior y superior) de todos los valores incluidos en el intervalo respectivo. En el Ejemplo Nº3, para el primer intervalo la clase inferior es 1,0 y la superior es 3,0.

B) Determinar la amplitud de los intervalos

La amplitud del intervalo se refiere a determinar la extensión de éste, entre la cual se agrupará una cantidad definida de datos observados.

Sea R, el recorrido de la variable que estamos analizando, en donde $X_{máx.}$ representa el valor máximo que puede tomar la variable de interés y $X_{mín.}$ representa el valor mínimo que puede observarse en la variable de interés.

Dado lo anterior, podemos expresar el recorrido "R" de la variable en términos de los valores máximos y mínimos que ésta alcanza, a saber:

$$R = X_{máx} - X_{mín}$$

Luego, la amplitud de los intervalos va a ser igual a:

$$\text{Amplitud de k (a)} = \frac{R}{k}$$

Donde:

k : es el número de intervalos

C) Determinar los límites de los intervalos

El límite inferior del primer intervalo se escoge de una forma muy sencilla, ya que éste representa, habitualmente, al $X_{mín}$, aunque puede ser también un valor inferior a éste. Los límites inferiores de las restantes clases, se obtienen sumando la amplitud del intervalo al límite inferior de la clase o intervalo anterior.

Los límites superiores se obtienen restando media (1/2) unidad de medida, de la variable de interés, al límite inferior de la clase que sigue a la clase considerada. (Ver ejemplo Nº 4)

D) Asignación de las observaciones a las clases formadas

Dependiendo del valor observado para la variable, las observaciones se van asignado a una y sólo una clase de intervalos. En el caso que existan clases vacías, estas se deben juntar con una de las clases contiguas.

Los límites contraídos de la manera propuesta, se denominan "límites aparentes".

Los "límites reales" de los intervalos se forman promediando el límite inferior y superior de clases contiguas. Es decir, el límite inferior real de la clase n, se obtiene sumando el límite superior de la clase n – 1 y el límite inferior de la clase n, el resultado se divide por 2.

Ejemplo Nº 4

Supóngase que ustedes, como estudiantes de estadísticas, investigan los precios de cierto artículo en 50 almacenes, en donde se recolectan los siguientes precios del artículo:

165	163	165	163	169	167	153	158	160	161
164	165	164	172	168	166	155	157	160	162
164	165	164	171	168	166	156	159	161	162
163	165	163	170	167	166	157	159	161	162
164	164	163	169	167	166	158	160	161	162

Se pide:

a) Calcular el número de intervalos de clase, aplicando la regla $K = 1 + 3.3 \log n$.
b) Determine la amplitud de los intervalos.
c) Construya una tabla de distribución de frecuencia.

a) Para determinar el número de intervalos, con un n=50 (total de datos)

$$K = 1 + 3.3 \log n$$

$$K = 1 + 3.3 \log 50$$

$$K = 1 + 3.3\,(1.698970004)$$

$$K = 6.6066 \quad \text{aprox.}$$

Este valor se aproxima al entero más cercano, luego $K = 7$

b) Amplitud de los intervalos

$$R = X_{máx} - X_{mín}$$
$$= 172 - 153 = 19 \text{ pesos}$$

$$\text{Amplitud (a)} = R / K$$

$$a = 19 / 7 = 2.714 \text{ aprox.}$$

Este valor se aproxima al entero más cercano, luego a = 3, de esta forma no se dejará alguna observación, fuera de la tabulación.

c) Construcción Tabla de Frecuencia

Tabla Nº 7: Distribución de los Precios de un Artículo x, en 50 Almacenes

Precios (Intervalos) Limites Aparentes	Precios (Intervalos) Limites Reales	n_i Frec. Absoluta	p_i Frec. Relativa	N_i Frec. Absoluta Acumulada	P_i Frec. Relativa Acumulada	100* p_i
153 - 155	152.5 - 155.5	2	0.04	2	0.04	4 %
156 - 158	155.5 - 158.5	5	0.1	7	0.14	10 %
159 - 161	158.5 - 161.5	9	0.18	16	0.32	18 %
162 - 164	161.5 - 164.5	15	0.3	31	0.62	30 %
165 - 167	164.5 - 167.5	12	0.24	43	0.86	24 %
168 - 170	167.5 - 170.5	5	0.1	48	0.96	10 %
171 - 172	170.5 - 172.5	2	0.04	50	1	4 %

Límite Real

$$170.5 = \frac{(170 + 171)}{2}$$

Límites

2.2 Tablas Multidimensionales (Bivariantes)

El propósito de este tipo de tablas es clasificar cada unidad de observación de acuerdo a los valores observados para dos o más variables; o de clasificar cada unidad

de observación de acuerdo a los valores observados para una única variable en varios grupos o muestras.

Por ejemplo, si se tiene la variable A con valores o categorías A_1 , A_2 , A_3, …… A_k , y la variable B, con valores o categorías B_1 , B_2 , B_3, …… B_c, entonces, el formato de una Tabla de Frecuencias Bidimensional será el siguiente:

B / A	B_1 , B_2 , B_3, …… B_c	Frecuencia Marginal Fila
A_1 A_2 A_3 . . . B_k	FRECUENCIAS CONJUNTAS n_{ij} p_{ij} $100 * p_{ij}$	n_i p_i $100 * p_i$
Frecuencia Marginal Columna	n_j , p_j , $100 * p_j$	Total (n)

Donde:

i = 1, … k
j = 1, … c

Cuando queremos describir conjuntamente dos variables, el primer paso al igual que en el caso univariante será la representación de los datos en una tabla de frecuencia.

a) Frecuencia Absoluta Conjunta (n_{ij}): Se refiere al número de veces que se presenta en la muestra el valor Ai, de la variable A, con el valor de Bj de la variable B.

b) Frecuencia Relativa Conjunta (f_{ij}): Es la proporción del número de veces que se presenta en la muestra el valor Ai, de la variable A, con el valor de Bj, de la variable B.

c) Frecuencia Relativa en porcentaje ($100 * p_{ij}$): Es el porcentaje del número de veces que se presenta en la muestra el valor Ai, de la variable A, con el valor de Bj, de la variable B.

d) Frecuencia Marginal: Es la frecuencia que corresponde a cada categoría de una variable y se denomina frecuencia marginal de fila o columna, porque se obtiene sumando las frecuencias conjuntas de la fila o columna respectiva.

Para integrar estos conceptos, retomemos el ejemplo 1 sobre la distribución de matriculas por carrera de un centro de formación técnica, incorporando la variable sexo a este análisis.

Ejemplo Nº 5

Tabla Nº 8: Distribución de la Matricula por Carrera y Sexo, para un Centro Formación Técnica

Primer semestre 2005

Sexo / Carrera	Hombres	Mujeres	$n_{i.}$
Administración	-	300	300
Contabilidad	120	80	200
Publicidad	100	50	150
Finanzas	90	10	100
Dibujo Técnico	150	100	250
$n_{.j}$	460	540	1000

La distribución de frecuencias marginales puede colocarse en una tabla separadamente, pero si deseamos tener toda la información en una misma tabla (como se muestra en el ejemplo 5) se suele colocar:

- En la última columna de la tabla conjunta, las frecuencias marginales de A, es decir, ni., añadiendo tantas columnas como otros tipos de frecuencia marginales se deseen añadir.

- En la última fila de la tabla conjunta, las frecuencias marginales de B, es decir, n.j, añadiendo tantas columnas como otros tipos de frecuencias marginales se deseen añadir.

A partir de la distribución de frecuencias conjuntas, podemos definir otro tipo de distribuciones unidimensionales, tanto para A como para B. Estas distribuciones se obtendrán al fijar el valor de una de las variables y reciben en nombre de distribuciones condicionadas.

a) Frecuencia Absoluta Condicionada para A = ai dado que B = bj es el número de veces que se repite el valor ai teniendo en cuenta sólo aquellos valores en que B = bj; así es: ni(j) = nij "i=1,...,k.

b) Frecuencia Absoluta condicionada para B = bj dado que A = ai es el número de veces que se repite el valor bj teniendo en cuenta sólo aquellos valores en que A = ai; así es: n(i)j = nij "j=1,...,c.

En las distribuciones condicionadas, no se utilizan las distribuciones absolutas, puesto que, como sabemos, estas dependen del número de datos y el número de datos será diferente para cada distribución, pues dependerá de la frecuencia del valor que fijamos para la otra variable.

Son mucho más útiles las frecuencias condicionadas que se definen:

a) Frecuencia Relativa Condicionada para A dado que:

B = bj ⟶ es fi(j) = nij/n.j

b) Frecuencia Relativa Condicionada para B dado que:

A = ai es f(i)j = nij/ni.

Ejemplo Nº 6

Distribuciones de frecuencia de A condicionada a B=1, es decir, la distribución de la matrícula por carrera de un centro de formación técnica para la variable sexo "hombre".

Tabla Nº 9: Distribución de las Matrículas por Carrera – Sexo Hombre

Sexo / Carrera	Hombres	n_i	p_i
Administración	-	-	-
Contabilidad	120	120	0.26
Publicidad	100	220	0.47
Finanzas	90	310	0.67
Dibujo Técnico	150	460	1

Nota: Si la tabla resulta muy grande deberemos agrupar una o las dos variables en intervalos de clase, del mismo modo que se ha señalado anteriormente (construcción de intervalos).

Realice ejercicios Nº 9 al 11

CLASE 06

3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Una forma de resumir los datos es por medio de las Tablas, sin embargo, la estadística descriptiva también nos permite resumir los datos a través de la Representación Gráfica. Este instrumento, es un complemento a las Tablas Estadísticas, que buscan dar una impresión global, en forma visual y de rápida comprensión, de la información obtenida.

La representación gráfica de la información nos permite, representar las conclusiones más relevantes que hemos obtenido mediante el uso de las tablas de frecuencias. Pero ¿hay alguna forma de presentar los datos de manera que las principales características de éstos sean visibles de una manera sencilla? Obviamente, la respuesta es sí. Como habrán observado, fundamentalmente, en los medios de comunicación, los datos suelen presentarse a través de gráficos, que resultan más atractivos a la vista que una tabla de frecuencias, además de que permiten una interpretación más sencilla de los datos de los que disponemos.

En esta sección vamos a intentar conocer la mayoría de los gráficos, y vamos a hacer especial hincapié en lo importante que es elegir el tipo adecuado de gráfico, según los datos con los que trabajemos. Los gráficos más comunes son los de “Barras Separadas”, “Barras Agrupadas”, “Barras Divididas”, “Sectoríales”, “Histogramas”, “Pictogramas”, y de “Ojivas”.

3.1 Gráficos de Barras

El primer tipo de gráfico que veremos son los diagramas de barras o representaciones gráficas de barras. Éste es un gráfico que se usa tanto para variables cualitativas como para variables discretas no agrupadas por intervalos. Estas representaciones gráficas adoptan distintas formas, entre las cuales abordaremos las más utilizadas:

a) Gráfico de Barras Separadas

Este tipo de gráfico se utiliza, preferentemente, para representar la distribución de frecuencias de variables discretas. En donde, cada valor de la variable se representa por una Barra cuyo largo indica la frecuencia relativa, para cada valor respectivo.

Ejemplo Nº 7

Supóngase, que poseemos información sobre la cantidad de hermanos (variable discreta) de un total de 40 encuestados de la comuna de San Clemente. Veamos cómo se construye un diagrama de barras separadas utilizando estos datos.

Tabla Nº 11: Distribución de la Cantidad de Hermanos - Comuna de San Clemente

Enero 2005

Cantidad Hermanos	n_i	p_i	N_i	P_i	100* p_i
0 - 2	18	0.45	18	0.45	45 %
3 - 5	11	0.275	29	0.725	27,5%
6 - 8	8	0.2	37	0.925	20 %
9 - o más	3	0.075	40	1	7,5%
Total	40	1			100 %

En el eje de abscisas (el eje OX) colocamos las modalidades si la variable es cualitativa o los valores en caso de que la variable sea discreta, en nuestro caso, los valores (por intervalo) 0 – 2, 3 - 5, 6 – 8, 9 – o más. Sobre cada uno de estos valores se levanta una barra (o rectángulo) de igual base (que no se solapen entre ellos), cuya altura sea proporcional a la frecuencia. En nuestro caso, quedaría más o menos de la siguiente manera:

Gráfico Nº 1: Barras Separadas – Variable Discreta – Frecuencia Absoluta

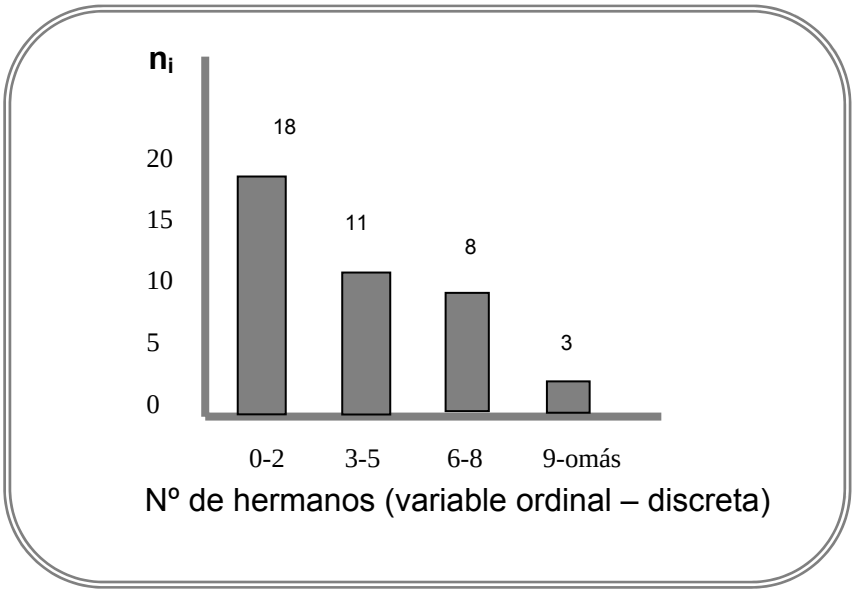
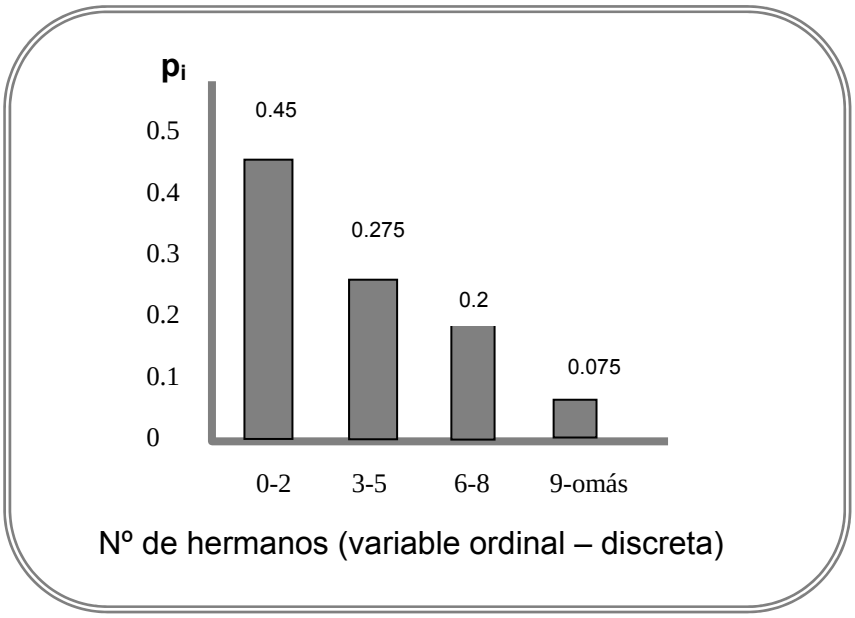


Gráfico Nº 2: Barras Separadas – Variable Discreta – Frecuencia Relativa



b) Gráfico de Barras Agrupadas

Este tipo de gráfico se utiliza para mostrar la posible asociación entre dos o más variables discretas, en especial las variables de escala nominal u ordinal. Este gráfico presenta barras que se agrupan de acuerdo a una cierta clasificación general, determinada por el usuario.

Ejemplo Nº 8

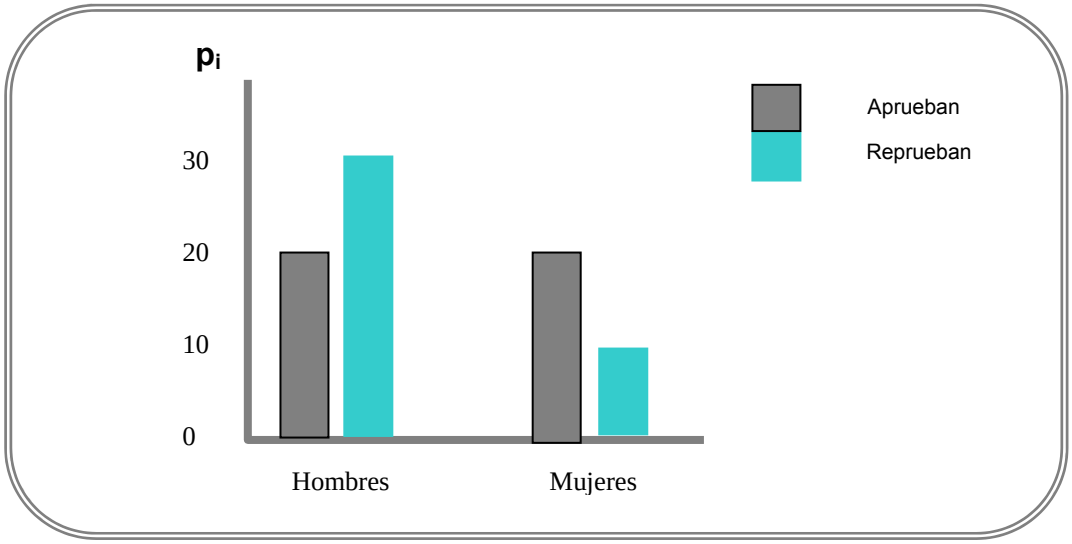
A continuación se presenta una Tabla Multidimensional de Frecuencia, que muestra la distribución de los estudiantes según la aprobación y sexo, del curso de Estadística I, para el primer semestre de 2005. Veamos cómo se construye un diagrama de barras agrupadas utilizando estos datos.

Tabla Nº 12: Distribución de los Estudiantes según Aprobación en Estadística I – Ambos Sexos

Primer Semestre 2005

Aprobación / Sexo	Aprueba	Reprueba	$n_{i.}$
Hombres	20	30	50
Mujeres	20	10	30
$n_{.j}$	40	40	80

Gráfico Nº 3: Barras Agrupadas – Asociación Variables Discretas



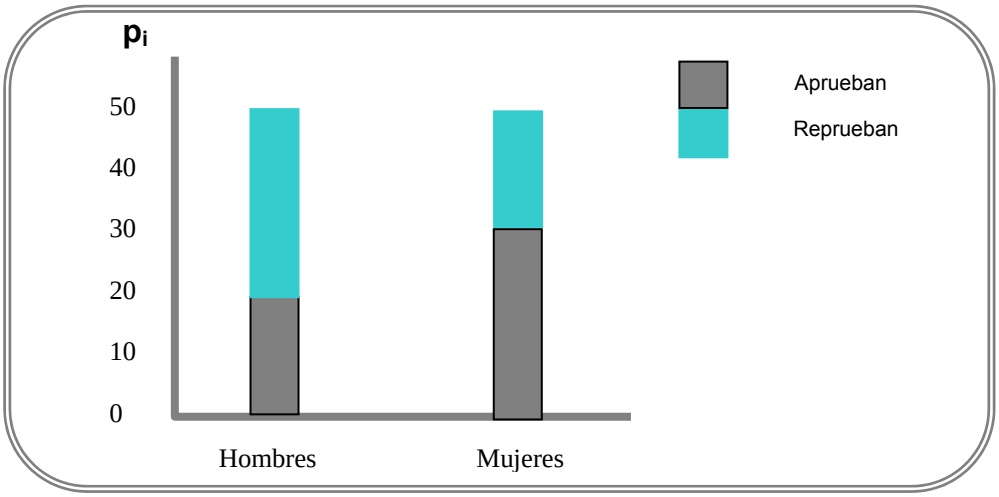
c) Gráfico de Barras Divididas

Este tipo de gráfico cumple el mismo propósito que el de barras agrupadas. Es especialmente adecuado, cuando existen observaciones de una variable que no se dan, en las mismas categorías o clases, que para la otra variable.

Ejemplo Nº 9

Para ilustrar este tipo de gráfico, se utiliza el mismo ejemplo que muestra la distribución de los estudiantes según la aprobación y sexo, del curso de Estadística I, para el primer semestre de 2005. Veamos cómo se construye un diagrama de barras divididas utilizando estos datos.

Gráfico Nº 4: Barras Divididas – Asociación Variables Discretas



3.2 Gráficos Sectoriales

En más de una oportunidad, has leído un reportaje económico del diario "El Mercurio", el cual presenta un diagrama o gráfico de sectores o de torta. En él, a cada valor o categoría de la variable se le asigna un sector circular de área proporcional a la figura que representan. Este gráfico se utiliza para variables cualitativas o para variables discretas sin agrupar.

Estos gráficos nos permiten ver la distribución interna de los datos que representan una variable, en forma de porcentajes sobre un total. Se suele separar el sector correspondiente al mayor o menor valor, según lo que se desee destacar. Se pueden presentar en dos o tres dimensiones.

Gráfico Sectorial en dos dimensiones

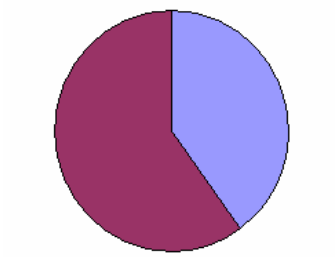
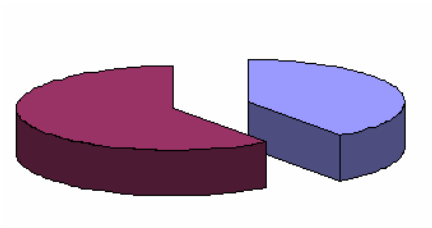


Gráfico Sectorial en tres dimensiones



Ejemplo Nº 10

Retomemos el ejemplo Nº 8, para poder hacer la ilustración del gráfico sectorial. A continuación, se presenta el gráfico sectorial (en tres dimensiones) de la aprobación en porcentaje según sexo del alumno, para el curso de Estadística I.

Tabla Nº 13: Distribución de los Estudiantes según Aprobación en Estadística I – Ambos Sexos

Primer Semestre 2005

Aprobación / Sexo	Aprueba	Reprueba	$n_{i.}$
Hombres	20	30	50
Mujeres	20	10	30
$n_{.j}$	40	40	80

Gráfico Nº 5: Gráfico Sectorial – Tres Dimensiones

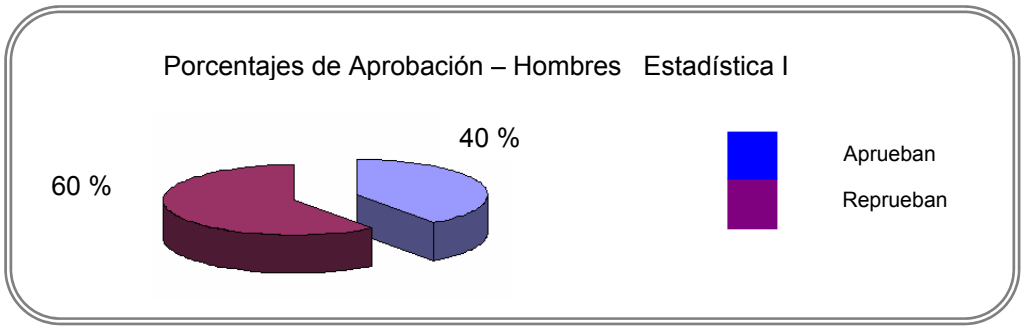
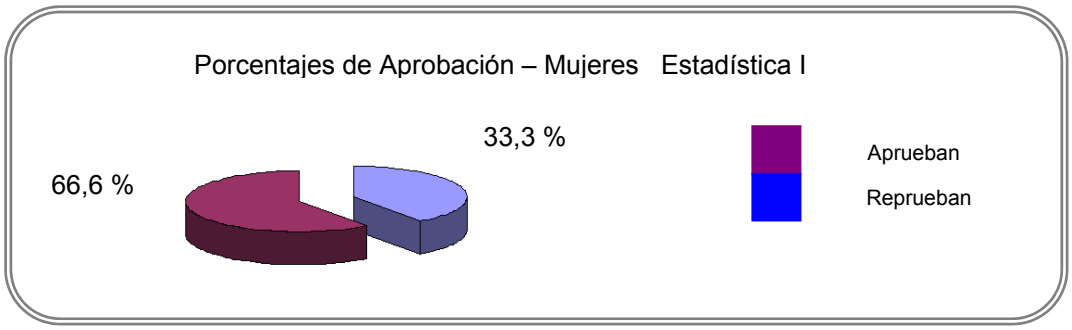


Gráfico Nº 6: Gráfico Sectorial – Tres Dimensiones



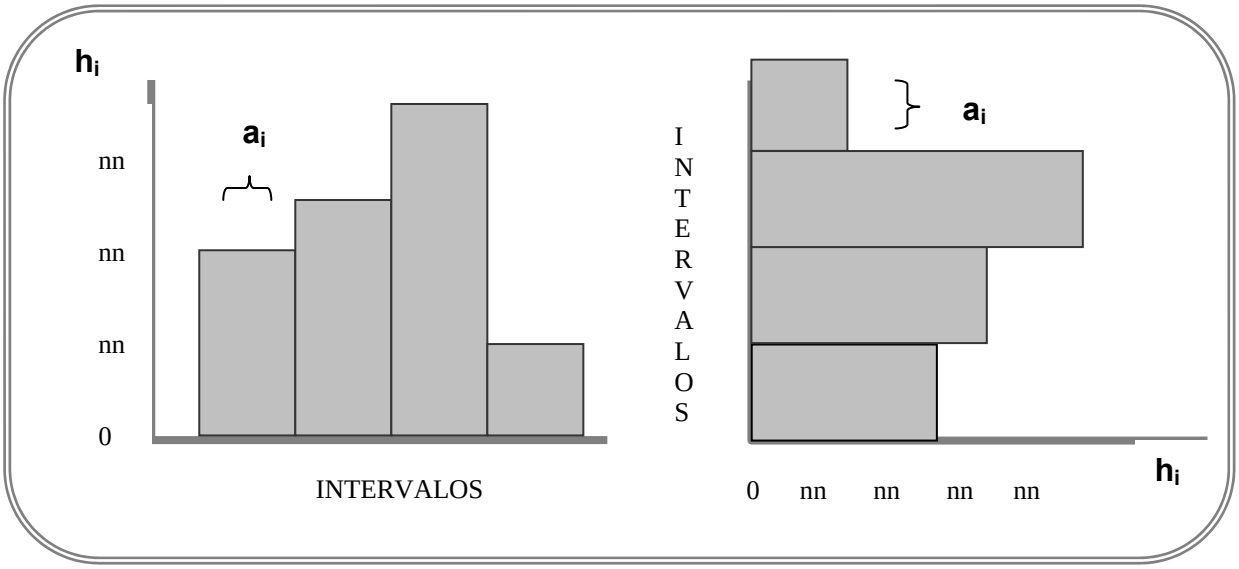
CLASE 07

3.3 Histogramas

El histograma es un gráfico muy similar al gráfico de barras, pero es el diagrama o representación gráfica que se utiliza para variables agrupadas por intervalos. Es decir, con los Histogramas podemos representar variables continuas o discretas, pero con muchos valores observados y cuyo nivel de medición sea al menos de intervalos (es decir, de intervalos y razón).

Su construcción es similar a los Gráficos de Barras, sobre ejes cartesianos, representando en el eje OX los intervalos; se levantan rectángulos que tienen como base la amplitud de los distintos intervalos y una altura tal que el área del rectángulo sea proporcional a la frecuencia correspondiente al intervalo. También es posible, representar los Histogramas con los rectángulos en horizontal.

Gráfico Nº 7: Histograma (vertical y horizontal)



En este tipo de gráfico son muy importantes las áreas de los rectángulos, porque no representamos una barra correspondiente a un punto, sino que el ancho de la barra representa a nuestro intervalo. Así, si los intervalos son de la misma amplitud, la altura suele corresponder a la frecuencia, pero si no es así, hay que modificar la altura para mantener la proporción entre la frecuencia y el área.

Por lo tanto, si la amplitud del i-ésimo intervalo es "a_i" y la frecuencia es "n_i", la barra deberá tener una altura "h_i", que satisface la siguiente relación de proporcionalidad:

Superficie	$a_i * h_i = K n_i$	$_i = 1,2,3, \ldots\ldots K$
Altura	$h_i = \dfrac{Kn_i}{a_i}$	

Donde k es una constante cualquiera, pero la misma para todos los intervalos. Es posible, que ésta se elija arbitrariamente por conveniencia de cálculo.

Ejemplo Nº 11

Retomemos el ejemplo Nº 3, en donde se utiliza una variable de razón continua, con muchas observaciones, que es el caso de la distribución de nota en la asignatura de Estadística I, para el instituto profesional IPLACEX, primer semestre del 2005.

Tabla Nº 14: Distribución de las Notas en Estadística I, Instituto Profesional IPLACEX

Primer semestre 2005

Amplitud Intervalos a_i	Notas (Intervalos)	n_i	p_i	N_i	$h_i = Kn_i / a_i$
2	1,0 - 3,0 *	5	0.1	5	2,5
1	3,0 - 4,0	15	0.3	20	15
1	4,0 - 5,0	20	0.4	40	20
1	5,0 - 6,0	6	0.12	46	6
1	6,0 - 7,0	4	0.08	50	4
	Total	50	1		

$h_i = \frac{1*5}{2}$

$h_i = \frac{1*20}{1}$

(*) El primer intervalo tiene una amplitud mayor, a necesidad del análisis, debido a la baja cantidad de alumnos con nota inferior a 3,0.

En este ejemplo, k es el valor de la amplitud de intervalo que es más frecuente, es decir, k = 1.

3.4 Pictogramas

Los pictogramas son gráficos similares a los gráficos de barras, pero con la diferencia que en estos diagramas se emplea un dibujo en una determinada escala para expresar la unidad de medida de los datos. Generalmente, este dibujo debe cortarse para representar los datos.

Es común ver gráficos de barras, donde las barras se reemplazan por dibujos a diferentes escalas, con el único fin de hacer más ilustrativo el gráfico, estos tipos de gráficos no constituyen un pictograma.

Para una mejor comprensión de esta representación gráfica, retomemos el Ejemplo Nº 7, utilizando la Tabla de Frecuencia que nos muestra la distribución de la cantidad de hermanos (de un total de 40 encuestados) de la comuna de San Clemente.

Ejemplo Nº 12

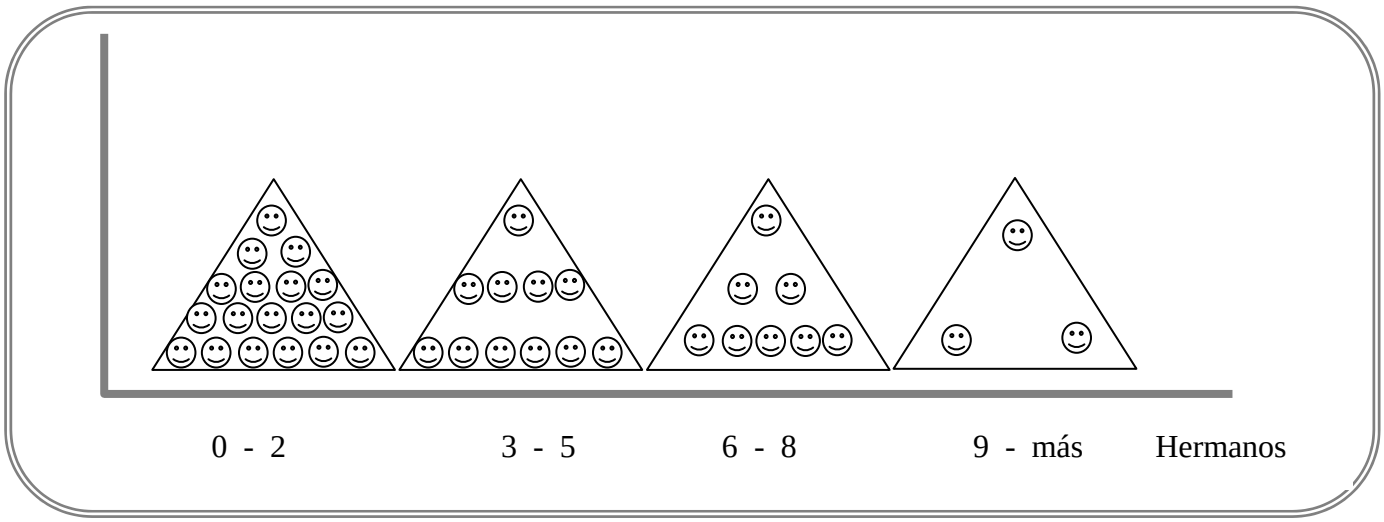
Veamos cómo se construye un pictograma utilizando estos datos.

Tabla Nº 15: Distribución de la Cantidad de Hermanos - Comuna de San Clemente

Enero 2005

Cantidad Hermanos	n_i	p_i	N_i	P_i	100* p_i
0 - 2	18	0.45	18	0.45	45 %
3 - 5	11	0.275	29	0.725	27,5%
6 - 8	8	0.2	37	0.925	20 %
9 - o más	3	0.075	40	1	7,5%
Total	40	1			100 %

Gráfico Nº 8: Pictograma - Distribución de Frecuencia



3.5 Ojivas

Este tipo de representación gráfica se construye a partir de las frecuencias acumuladas (absolutas o relativas) para variables continuas o discretas, con muchos valores observados de la variable y cuyo nivel de medición sea al menos de intervalos (es decir, de intervalos y razón).

La Ojiva permite representar las frecuencias absolutas, relativas y porcentajes acumulados, para ello se toman los límites superiores de cada intervalo y luego se grafican las frecuencias acumuladas.

Consideremos nuevamente la información del Ejemplo Nº 3, en donde se utiliza una variable de razón continua, con muchas observaciones, que es el caso de la distribución de nota en la asignatura de Estadística I, para el instituto profesional IPLACEX, primer semestre del 2005.

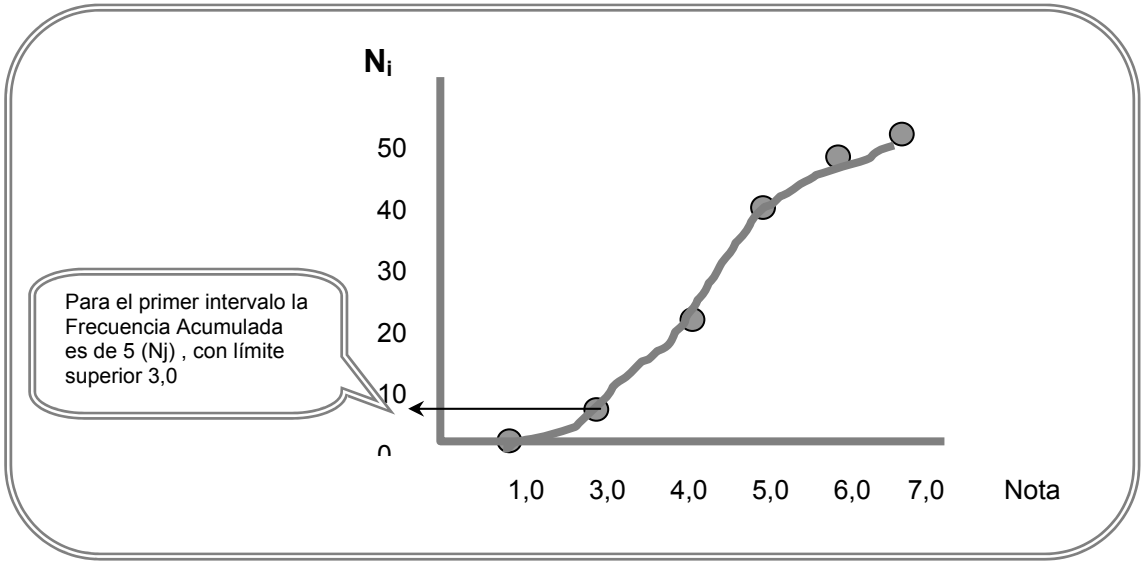
Ejemplo Nº13

Tabla Nº 16: Distribución de las Notas en Estadística I, Instituto Profesional IPLACEX

Primer Semestre 2005

Notas (Intervalos)	n_i	p_i	N_i	P_i	100* p_i
1,0 - 3,0 *	5	0.1	5	0.1	10 %
3,0 - 4,0	15	0.3	20	0.4	30 %
4,0 - 5,0	20	0.4	40	0.8	40 %
5,0 - 6,0	6	0.12	46	0.92	12 %
6,0 - 7,0	4	0.08	50	1	8 %
Total	50	1			100 %

Gráfico Nº 9: Ojiva - Distribución de Frecuencia Acumulada



Si en la representación gráfica anterior, la ojiva de la frecuencia acumulada de las notas del curso de Estadística I, se desea conocer cuántos alumnos tienen una nota inferior a 4,5, se debe trazar una recta vertical a partir de la nota 4,5 hasta la ojiva, y desde este punto una recta horizontal hasta la frecuencia acumulada o porcentaje. La lectura de ese valor nos da la frecuencia o porcentaje acumulado, que corresponde a los alumnos con notas inferiores a 4,5.

Es importante mencionar que, una ojiva puede construirse sin importar que los intervalos sean de amplitud desigual, no ocurre lo mismo con el histograma.

3.6 Gráficos de Tallo y Hoja

Una alternativa para representar las frecuencias de variables discretas y con un nivel de medición de intervalos, es usar un gráfico de tallo y hoja que permite graficar (a modo de tabulación) la información, pero manteniendo el detalle original de los datos.

Este tipo de gráficos, de tallo y hoja, son la primera aproximación a las representaciones gráfica de la información generada por los datos, además de es fácil de utilizar.

Para ordenar los datos se hace la separación de los dígitos iniciales (tallo) y el último dígito (hoja). En el ejemplo anterior, donde se mide la estatura de 20 funcionarios, los dos dígitos iniciales pueden ser los dos primeros que se denominan tallos y el tercero se conoce como hoja. En la primera se ubican los dígitos iniciales y en la segunda el tercero.

Realice ejercicios Nº 12 al 18

Ejemplo Nº 14

Supóngase que se tiene la estatura de 20 funcionarios de una empresa, medido en centímetros.

151	141	166	172	155	160	162	163	171	149
155	165	164	157	178	150	153	159	161	165

Gráfico Nº 10: Gráfico de Tallo y Hoja - Distribución de los Funcionarios del Dpto. de Finanzas, según Estatura

Tallo	Hoja							
14 *	1	9						
15 *	0	1	3	5	5	7	9	
16 *	0	1	2	3	4	5	5	6
17 *	1	2	8					

3.7 Diagrama de Dispersión

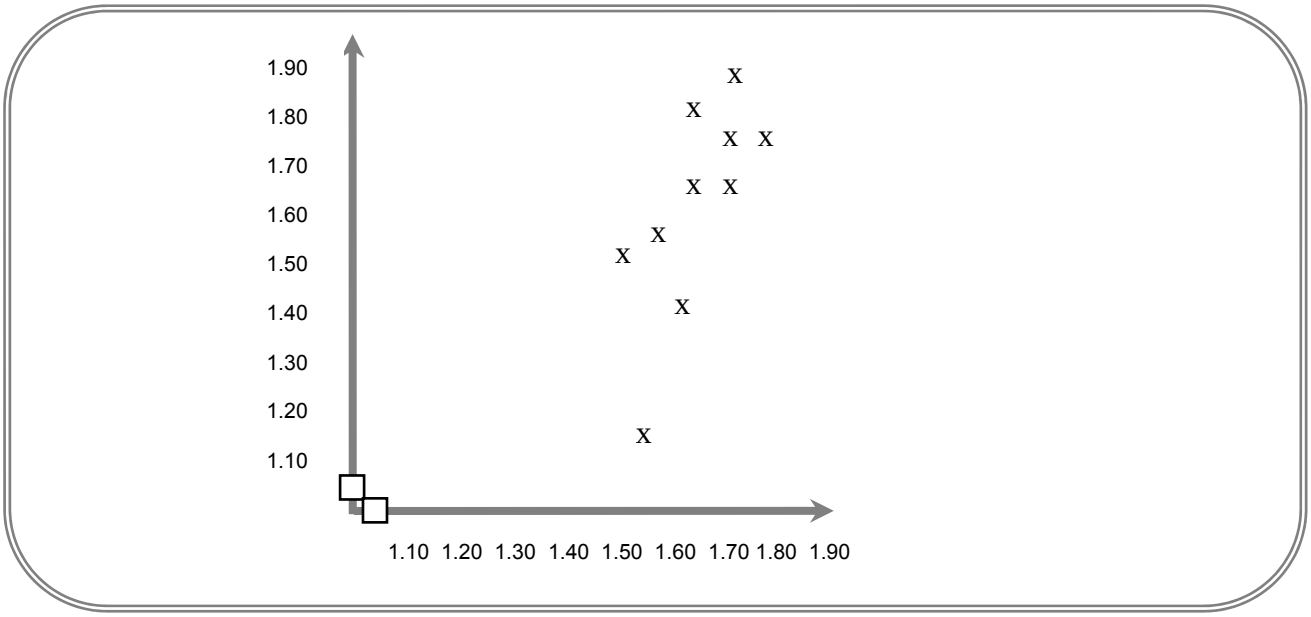
Esta representación gráfica se usa para estudiar la posible asociación entre dos variables discretas o continuas, cuyo nivel de medición es de al menos de intervalo (intervalo y razón, no se utiliza para variables nominales u ordinales). En este tipo de gráfico las observaciones se representan en coordenadas cartesianas, obteniéndose una "nube de puntos" en el plano, denominado diagrama de dispersión o gráfico de correlación.

Ejemplo Nº 15

Se dispone de la siguiente información sobre la estatura (en centímetros) de 10 pares de familiares.

X(Estatura del Padre)	1.56	1.75	1.80	1.75	1.65	1.70	1.60	1.55	1.70	1.50
Y(Estatura hijo mayor)	1.16	1.80	1.70	1.70	1.65	1.75	1.40	1.55	1.65	1.50

Gráfico Nº 11: Diagrama de Dispersión - Asociación entre la Variable Estatura de Padres e Hijos



CLASE 08

4. MEDIDAS DE RESUMEN

Como su nombre lo indican, las “medidas de resumen”, en estadística descriptiva, buscan resumir la información contenida en una distribución de frecuencias en un único valor. Las medidas de resumen, se pueden clasificar en tres grandes grupos:

- Medidas de Posición
- Medidas de Dispersión
- Medidas de Forma

4.1 Medidas de Posición

Este tipo de medidas de resumen tienen por finalidad resumir toda la información en “un solo valor”, que representa una posición determinada dentro de la distribución que esta siendo analizada.

Las medidas de posición a su vez se pueden dividir en 2 subgrupos:

- Las medidas de tendencia central.
- Las medidas que no son de tendencia central.

4.1.1 Medidas de Tendencia Central

Este primer tipo de medida, como se anticipo, corresponde a una medida de posición, a la que también se le denomina promedios.

La naturaleza de este tipo de medidas es tal que, si hubiese que representar la serie estadística o población por un único indicador, las medidas de posición, en particular, las de Tendencia Central son los indicadores más adecuados para ello, ya que son los que proporcionan un máximo de información.

Las Medidas de Tendencia Central buscan el centro de la distribución, es decir la posición central de los datos. Existen diferentes medidas de tendencia central o promedios, atendiendo todos ellos a una misma filosofía, pero con diferentes sistemas de aplicación, entre los más utilizados se encuentran la “media aritmética simple” que, generalmente, se denomina “media”, la “mediana” y la “moda”. Existen otras, como la media geométrica y la media armónica, pero son de uso más especializado, por lo que no serán abordados en nuestro estudio.

A) Media Aritmética Simple ($\bar{x}$)

Sea x una variable secreta o continua, cuyo nivel de medición es al menos de intervalos (escala de medición de intervalo o razón), y sean x_1 , x_2 , x_3 , …… x_n ; donde n es el número total de valores de la variable, es decir, una muestra de tamaño n.

Entonces, la media aritmética simple se define por "la suma de todos los datos observados dividida por el número total de valores de la variable (n)".

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Donde:

$\bar{X}$: es la media aritmética simple o media.
$\sum$: es el signo de sumatoria, simboliza la suma de toda una serie de números, en este caso todos los valores que se observan de la variable.
X : indica el valor de cada uno de los datos de la variable.
n : el número de datos total que contempla la medición.

La definición anterior, se refiere al cálculo de la media a partir de los datos originales. Sin embargo, los datos a veces se encuentran tabulados (agrupados en una tabla de distribución de frecuencias). En este caso, la media se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \cdot x_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i$$

Donde:

X_i : es el valor de la variable, si ésta es discreta, o marca de clase (punto medio del intervalo), si la variable es continua y se encuentra agrupada en intervalos.
n_i : es la frecuencia absoluta correspondiente a X_i
k : es el número de valores diferentes de la variable discreta o número de intervalos en que ha sido agrupada una variable continua.

Ejemplo Nº 16

Retomemos el ejemplo Nº 3, en donde se utiliza una variable de razón continua, con muchas observaciones, que es el caso de la distribución de nota en la asignatura de Estadística I, para el instituto profesional IPLACEX, primer semestre del 2005.

Tabla Nº 17: Distribución de las Notas en Estadística I, Instituto Profesional IPLACEX

Primer semestre 2005

Notas (Intervalos)	n_i	x_i Marca de Clase
1,0 - 3,0 *	5	2
3,0 - 4,0	15	3,5
4,0 - 5,0	20	4,5
5,0 - 6,0	6	5,5
6,0 - 7,0	4	6,5
Total	50	

$$\frac{3{,}0 + 4{,}0}{2} = 3{,}5$$

$$\overline{X} = \frac{5 \cdot 2 + 15 \cdot 3.5 + 20 \cdot 4.5 + 6 \cdot 5.5 + 4 \cdot 6.5}{50}$$

$\overline{X}$ = 4,23 puntos de nota

Por lo tanto la media es 4,2.

- Propiedades de la Media Aritmética

i) La suma algebraica de las desviaciones, de un conjunto de números, de su media aritmética es cero.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X} \right) = 0$$

ii) Si una cantidad de números (f_1) tiene una media m_1, otra cantidad de números (f_2) tiene una media m_2, ..., así sucesivamente. Entonces, la media de todos los conjuntos de números es:

$$\overline{X} = \frac{f_1 \cdot m_1 + f_2 \cdot m_2 + f_3 \cdot m_3 + f_4 \cdot m_4 + \ldots + f_n \cdot m_n}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n}$$

iii) Sea $Y_i = a + b\,x_i$ donde i recorre desde el 1 al n, tal que "a" y "b" son constantes. Entonces, la función se puede expresar en términos de su media.

$$\overline{Y} = a + b\,\overline{X}$$

iv) La media aritmética siempre se encontrará entre el valor más pequeño y el más grande.

$$X_{mín} \leq \overline{x} \leq X_{máx}$$

B) Media Aritmética Ponderada

En el cálculo de la media aritmética simple cada observación tiene la misma ponderación, ahora bien, en ocasiones nos interesa dar una ponderación distinta a cada observación, debido a que se les atribuye una importancia diferente a cada dato.

Luego, la media aritmética ponderada se define como:

$$\overline{X_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i}{\sum w_i} \qquad w_i \geq 0$$

Donde:

X_i : es el valor de la variable, si ésta es discreta; o marca de clase (punto medio del intervalo), si la variables es continua y se encuentra agrupada en intervalos.
w_i : es la ponderación correspondiente a X_i, que debe ser mayor que cero.

n : es el número de valores diferentes de la variable discreta o número de intervalos en que ha sido agrupada una variable continua.

Ejemplo Nº 17

Supóngase, que un alumno del Instituto IPLACEX ha rendido 3 pruebas parciales en el curso de Estadística, cada una con distintas ponderaciones.

Prueba	Parcial 1	Parcial 2	Examen
Ponderación	30%	30%	40%
Nota	4,0	5,0	6,0

La nota final se obtiene ponderando las notas respectivas por su valor en porcentaje, lo que se conoce como media aritmética ponderada.

$$\overline{X}_p = \frac{4{,}0*30 + 5*30 + 6{,}0*40}{100} = 5.1$$

Por lo tanto la nota final es 5,1.

Ejemplo Nº 18

El cálculo del Índice de Precios al Consumidor (IPC), es un ejemplo práctico para entender la media o promedio ponderado, como el IPC busca representar el “costo de la vida” se estima que los bienes de consumo masivo, deben tener una gratificación diferente, desde el punto de vista del presupuesto familiar. Por ello se asigna una ponderación mayor a bienes como el pan, la locomoción, artículos escolares, etc. Mientras que los bienes de consumo no masivo o suntuarios tienen una ponderación menor, pues se consumen menos.

Por lo tanto, el IPC se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$IPC = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i}{\sum w_i} \qquad w_i \geq 0$$

Donde:

X_i : es el precio del bien i.
w_i : es la ponderación asignada al bien i.
n : es el número de bienes de la "canasta" (consumo familiar).

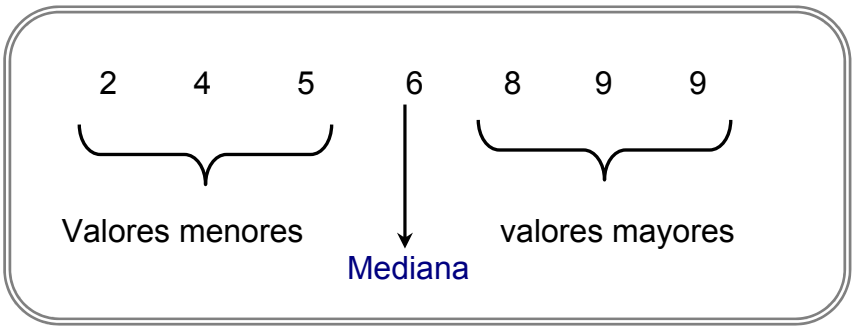
CLASE 09

C) Mediana (M_e)

Este tipo de medida de tendencia central se puede calcular para todo tipo de variables excepto las nominales. Es así, como en una serie estadística de una variable cuantitativa, cuyos resultados están ordenados en forma creciente, se llama mediana a aquel valor de la variable que tiene igual número de resultados menor y mayores que él.

Es decir, sea x una variable con nivel de medición al menos ordinal (ordinal, intervalo y razón) y sean x_1 , x_2 , x_3 , …… x_n ; n observaciones de x, la mediana se define como aquel valor de la variable que supera a no más del 50% de las observaciones y es superada por no más del 50% de las observaciones, cuando éstas han sido ordenadas según su magnitud.

Por ejemplo, en la serie de valores



Existen dos métodos para calcular la mediana según la presentación de los datos, los que serán abordados a continuación.

i) Cálculo de la mediana para datos no agrupados[2]

Para las observaciones que se encuentran ordenadas en forma ascendente, es decir, para $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots\ldots \leq x_n$; podemos determinar que la observación $x_{(n+1)/2}$ es la observación que se encuentra en la posición:

$$\frac{(n+1)}{2}$$

Dado lo anterior, es posible expresar el cálculo de la mediana de la forma que sigue:

$$M_e = \begin{cases} x_{\frac{(n+1)}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejemplo Nº 19

Supóngase que se tienen los siguientes datos sobre la temperatura (en grados Celsius) máxima en la ciudad de Rancagua, durante la primera semana de enero de 2005.

20,3	18,9	21,3	19,2	18,0	22,5	19,5

Calcular la Mediana

Primero, se deben ordenar los datos:

	18	18,9	19,2	19,5	20,3	21,3	22,5
n =	1	2	3	4	5	6	7

[2] Datos no agrupados: no se presentan tabulados con intervalos.

Segundo, n es impar, por lo tanto:

$$M_e = X_{\frac{(n+1)}{2}} = X_{\frac{(7+1)}{2}} = X_4 = 19.5$$

¿Que pasa si disponemos de la temperatura de un día más?

Se tiene:

20,3	18,9	21,3	19,2	18,0	22,5	19,5	19.8

Calcular la Mediana

Primero, se deben ordenar los datos:

n =								
	18	18,9	19,2	19,5	19,8	20,3	21,3	22,5
	1	2	3	4	5	6	7	8

Segundo, n es par, por lo tanto:

$$M_e = \frac{X_{\frac{n}{2}} = X_{\frac{(n)}{2}+1}}{2} = \frac{X_4 + X_5}{2} = \frac{39.3}{2} = 19.65$$

Cabe señalar que cuando "a" es par, cualquier valor comprendido entre $X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{(n)}{2}+1}$, satisface la definición de la mediana.

Ejemplo Nº 20

Realicemos un ejemplo con una variable ordinal, supongamos que tenemos la jerarquía de 7 profesores del departamento de Estadística:

Profesor 1	Asistente
Profesor 2	Asociado
Profesor 3	Asociado
Profesor 4	Asistente
Profesor 5	Titular
Profesor 6	Asociado
Profesor 7	Titular

Primero, se deben ordenar los datos de la variable ordinal "jerarquía", de acuerdo a grado jerárquico de mayor a menor.

Profesor 1	Asistente
Profesor 2	Asistente
Profesor 3	Asociado
Profesor 4	Asociado → M_e
Profesor 5	Asociado
Profesor 6	Titular
Profesor 7	Titular

ii) Cálculo de la mediana para datos agrupados[3]

En el caso de variables continuas, en donde los datos observados se encuentran agrupados en una tabla de distribución de frecuencias, entonces para calcular la M_e, primero se debe determinar el intervalo en que ésta se encuentra y después se ubica la M_e dentro del intervalo, para lo cual se utiliza un procedimiento de interpolación lineal.

Sea entonces X_{i-1} - X_i el intervalo que contiene la mediana, para lo que debe cumplir la siguiente condición:

$$N_{i-1} \leq \frac{n}{2} \leq N_i$$

La fórmula del cálculo de la mediana para datos agrupados, puede ser expresada en términos de frecuencia relativa, a saber:

$$M_e = x_{i-1} + \frac{1/2 - (N_{i-1})/n}{n_i / n} \bullet a_i$$

Donde:

X_{i-1} : es el límite inferior del intervalo que contiene a la mediana.

n : número de observaciones de la variable.

[3] Datos Agrupados: cuando los datos se presentan tabulados en intervalos.

n_i : frecuencia observada del intervalo que contiene a la mediana.

N_{i-1} : frecuencia acumulada observada del intervalo anterior al intervalo que contiene a la mediana.

a_i : es la amplitud del intervalo que contienen la mediana.

Ejemplo Nº 21

Retomemos el Ejemplo Nº 3, en donde se utiliza una variable de razón continua, con muchas observaciones, que es el caso de la distribución de nota en la asignatura de Estadística I, para el instituto profesional IPLACEX, primer semestre del 2005.

Tabla Nº 18: Distribución de las Notas en Estadística I, Instituto Profesional IPLACEX

Primer semestre 2005

Intervalo que contiene a la mediana.
n = 50 por lo tanto
n / 2 = 25
Es en este intervalo donde se encuentra el dato observado número 25.

Notas (Intervalos)	n_i Frec. Relativa	N_i Frec. Relativa Acumulada
1,0 - 3,0 *	5	5
3,0 - 4,0	15	20
4,0 - 5,0	20	40
5,0 - 6,0	6	46
6,0 - 7,0	4	50
Total	50	

N_{i-1}
N_i
n_i

$$M_e = x_{i-1} + \frac{\frac{1}{2} - (N_{i-1})/n}{n_i / n} \bullet a_i$$

La amplitud del intervalo que contiene la medina es 1

Se reemplazan los datos en la fórmula:

$$M_e = 4 + \frac{\frac{1}{2} - 20 / 50}{20 / 50} \bullet 1$$

$$M_e = 4 + \frac{0.5 - 0.4}{0.4} \bullet 1$$

$$M_e = 4 + \frac{0.1}{0.4} \bullet 1$$

$$M_e = 4 + 0.25 = 4.25$$

CLASE 10

D) La Moda (M_o)

La moda se define como aquel valor de la variable que ocurre con más frecuencia. Esta medida de tendencia central se puede calcular para cualquier tipo de variable, de hecho es la única medida de tendencia central que se puede calcular para variables nominales.

En el caso que los datos se encuentren agrupados en tablas de distribución de frecuencias y los intervalos construidos son de igual amplitud entonces, la moda se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$M_0 = x_{i-1} + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} \bullet a_i$$

Donde:

X_{i-1} : es el límite inferior del intervalo que contiene a la moda.

$\Delta 1$: diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia del intervalo anterior al modal.

$\Delta 2$: diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia del intervalo siguiente al modal.

a_i : es la amplitud del intervalo modal, es igual para todos los intervalos.

Ejemplo Nº 22

Las cuotas mensuales de 20 financieras para un crédito de $100.000, a pagar en un plazo de 12 meses, son las siguientes:

12.000	13.200	12.000	11.800	13.000	13.500	14.200	13.200	13.500	12.500
12.000	11.900	13.100	12.600	12.300	14.000	13.500	12.000	13.200	14.000

Se pide:

a) Calcular la Moda de los datos no agrupados
b) Calcular la Moda para los datos agrupados

Para los datos no agrupados, la moda es el valor de la variable que más se repite.

$M_o = 12.000$

Como se ha mencionado anterior, cuando los datos se encuentran agrupados, la moda se calcula utilizando la siguiente formula:

$$M_0 = x_{i-1} + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} \bullet a_i$$

Tabla Nº 19: Distribución de las Cuotas, Préstamo de $100.000 por un Año

Santiago, 2005

Cuotas (Intervalos)	n_i	N_i
11.800 – 12.200	6	6
12.200 – 12.600	3	9
12.600 – 13.000	1	10
13.000 – 13.400	4	14
13.400 – 13.800	3	17
13.800 – 14.200	3	20

Es la diferencia entre la frecuencia (n_i) modal y la frecuencia del intervalo anterior al modal. (6-0 = 6)

Intervalo Modal

$$M_0 = 11.800 + \frac{6}{6+3} \bullet 400$$

Es la diferencia entre la frecuencia (n_i) modal y la frecuencia del intervalo siguiente al modal. (6-3 = 3)

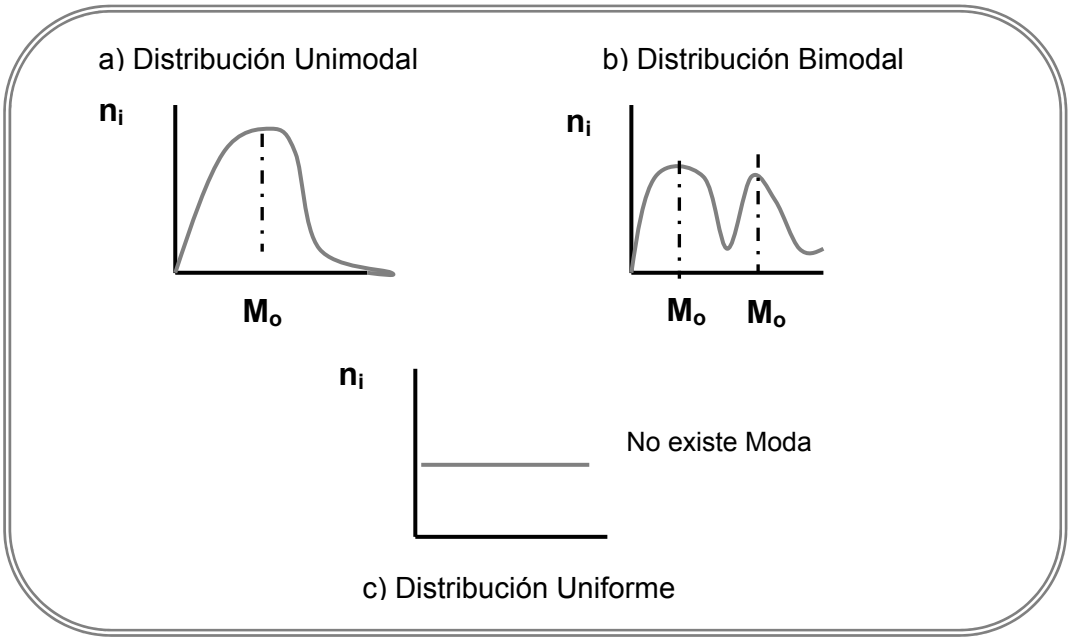
$M_o = 11.800 + 0.66666 \bullet 400$

$M_o = 11.800 + 266.66666$

$M_o = 12.066$ aprox.

Cabe señalar, que esta medida de tendencia central presenta el inconveniente de que no siempre existe o bien que puede existir más de una moda, como se muestra en los siguientes gráficos de distribución de datos:

Gráfico Nº 12: Gráficos de Distribución Unimodal, Bimodal y Uniforme



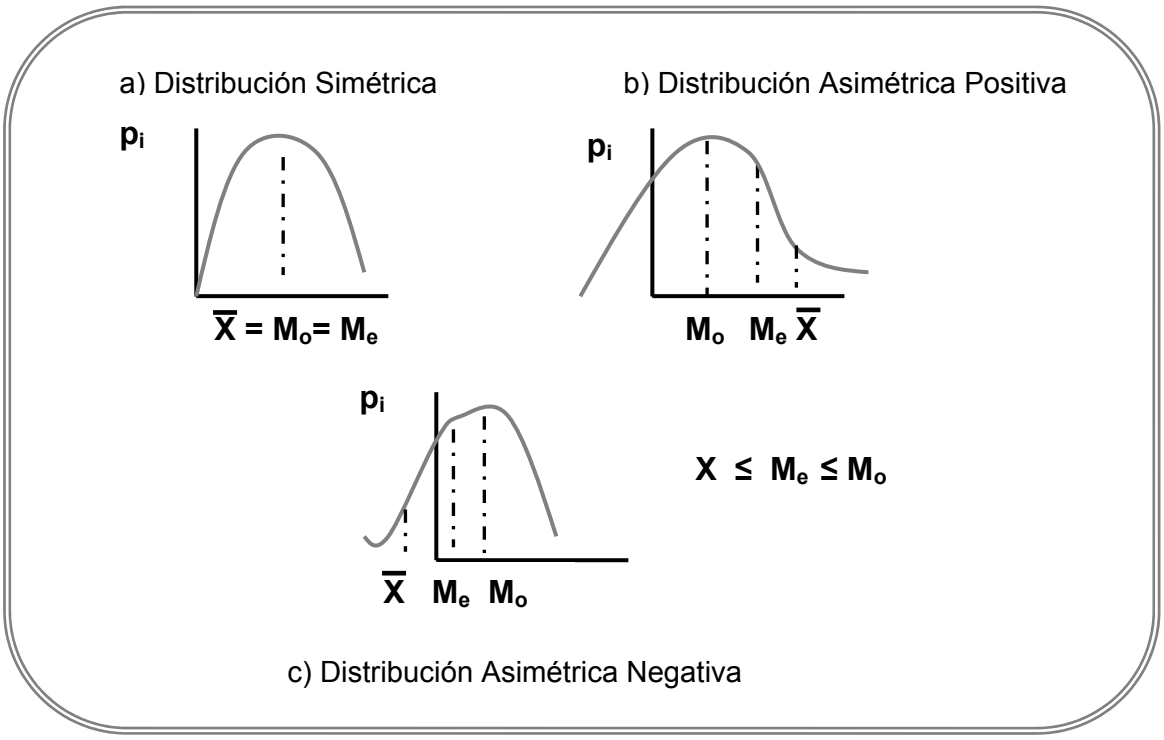
Realice ejercicios Nº 19 al 25

- Comparación entre la Media, Mediana y Moda

La comparación entre las tres medidas de tendencia central permite estudiar la existencia de una posible asimetría en una distribución de los datos. Dado lo anterior, observe la relación que se presenta entre estas medidas en los siguientes gráficos.

La ilustración del Gráfico Nº 13, nos muestra la inconveniencia de usar la media ($\overline{X}$) como medida de tendencia central cuando la distribución presenta mucha asimetría. Esto se debe a que la media se puede ver fuertemente influenciada por unos pocos valores extremos.

Gráfico Nº 13: Comparación Medidas de Tendencia Central



4.1.2 Medidas de Posición y no de Tendencia Central

Las medidas de posición que no son de tendencia central, son conocidas también como Medidas de Orden, las cuales pueden ser calculadas para todo tipo de variable, excepto las nominales.

Cuando los diferentes valores que puede tomar una variable son medidas con al menos una escala ordinal (ordinal, intervalo y de razón) y la mediana del conjunto de datos observados es el centro de la distribución de frecuencias acumuladas correspondiente; es posible calcular estas medidas de posición o de orden.

i) Percentiles

Sea x una variable, cuyo nivel de medición es al menos ordinal entonces el percentil p, que se denotará como P_p, se define como aquel valor de la variable que supera a no más del p% de las observaciones y es superado por no más del (100 – p)% de las observaciones, cuando estos han sido ordenados según magnitud.

Si la variable es continua y los datos están agrupados, entonces, mediante un procedimiento análogo al utilizado en el cálculo de la mediana, se llega a la siguiente fórmula:

$$P_p = x_{i-1} + \frac{(pn)/100 - (N_{i-1})}{n_i} \bullet a_i$$

O su equivalente:

$$P_p = x_{i-1} + \frac{(p)/100 - (P_{i-1})}{P_i} \bullet a_i$$

Donde:

X_{i-1} : es el límite inferior del intervalo que contiene al percentil.

n : número de observaciones de la variable.

n_i : frecuencia observada del intervalo que contiene al percentil.

p_i : frecuencia relativa observada del intervalo que contiene al percentil.

N_{i-1} : frecuencia acumulada observada del intervalo anterior al intervalo que contiene al percentil.

P_{i-1} : frecuencia relativa acumulada observada del intervalo anterior al intervalo que contiene al percentil.

a_i : es la amplitud del intervalo que contienen al percentil.

Ejemplo Nº 23

Dada la siguiente serie de valores:

7	9	11	12	13	15	18	20	21	24	25	27	28

Se pide:

a) Determinar el percentil 55 P_{55}
b) Determinar el percentil 30 P_{30}

Percentil 50 es aquel valor de la variable que supera a no más del 55% de las observaciones y es superado por no más del 45% (100 – p) de las observaciones. Es decir:

$P_{50} = 20$

7	9	11	12	13	15	18	20	21	24	25	27	28

55% 45%

A modo de ejercicio, determine el percentil 30 ($P_{30} = 13$)

ii) Cuartiles

Los cuartiles no son más que los percentiles 25, 50 y 75, que reciben el nombre de cuartiles 1, 2 y 3.

A continuación, se presenta su denotación:

$Q_1 = P_{25}$ $Q_2 = P_{50} = M_e$ $Q_3 = P_{75}$

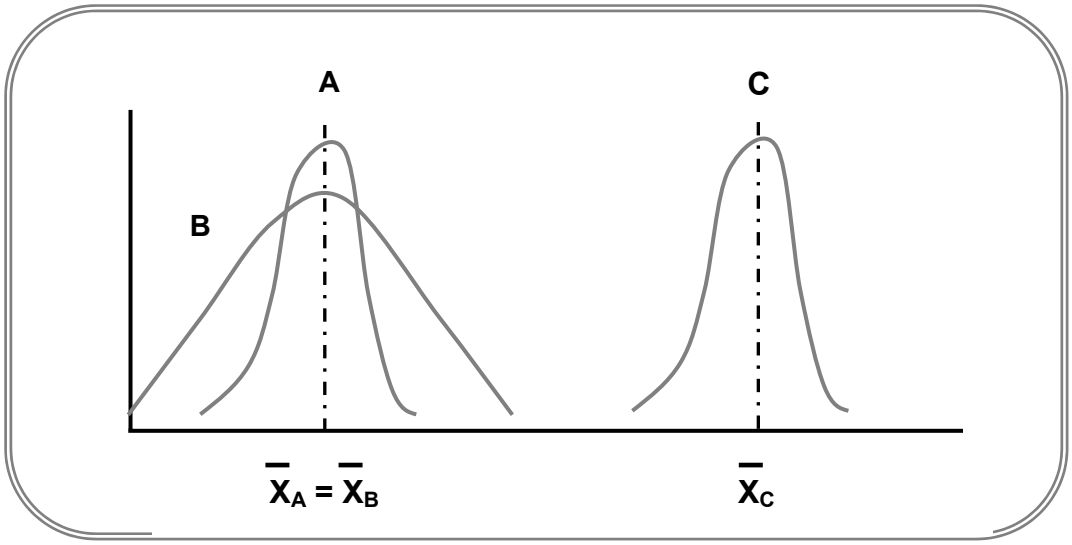
CLASE 11

4.2 Medidas de Dispersión

Buscan resumir la información contenida en una tabla, pero a diferencia de posición en general, que buscan una determinada posición en la distribución, las medidas de dispersión buscan complementar la información aportada por otras medidas de dispersión para dar cuenta de la variabilidad o dispersión, existente en los datos.

Esta variabilidad no es discernible a través del cálculo de alguna medida de posición, de hecho como se aprecia en el grafico Nº 14, no es posible comparar o describir distribuciones en base a una medida de posición solamente.

Gráfico Nº 14: Gráficos Comparativos de Medidas de Tendencia Central



En el Gráfico Nº 14, podemos observar claramente que las distribuciones de las frecuencias A y B tienen igual media, pero B presenta mayor dispersión de los datos que A. Por otra parte, las distribuciones A y C presentan igual dispersión[4] de los datos, pero difieren en la media, mediana y moda.

Entre las medidas de dispersión que abordaremos en nuestro estudio se encuentra: el rango, la amplitud intercuartílica, la desviación estándar, la varianza, el coeficiente de variación y la razón intercuantílica.

i) El Rango o Recorrido

Aunque, es una medida imperfecta de la dispersión de los datos, se reconoce como la diferencia entre el mayor y el menor de los valores de la variable. En efecto, si se acepta una distribución uniforme para dichos valores parece una medida razonable.

Sea x una variable de nivel de intervalo o superior (intervalar o de razón), para datos no agrupados, el rango se define como "la diferencia entre el valor máximo **($X_{máx}$)** y el valor mínimo de la variable ($X_{mín}$).

$$\text{RANGO (X)} = X_{máx} - X_{mín}$$

[4] La Dispersión de los datos es la variabilidad, disparidad o esparcimiento mutuo de los datos observados.

En el caso de datos agrupados, el rango se define como "el límite inferior del primer intervalo (X_0) y el límite superior del último intervalo (X_k). Donde K es el número de intervalos.

$$\text{RANGO (X)} = X_K - X_0$$

A pesar de la sencillez utilizada en el cálculo de esta medida de dispersión, se debe señalar, que no es una medida muy confiable, ya que se basa sólo en dos valores.

Los principales defectos de esta medida de dispersión son:

a) Posee una total dependencia de los valores extremos de la serie, siendo por tanto, muy sensible a las variaciones que se producen en los datos de una muestra a otra.

b) Al no tener en cuenta los valores intermedios de la variable, el recorrido dice poco acerca de la dispersión de ellos, pues no es fácil aceptar que los datos se distribuyan uniformemente entre los valores extremos.

c) No es posible su aplicación en los casos en que alguno de los valores, máximo o mínimo, como ocurre en ocasiones, quede indeterminado. Por ejemplo, en el estudio de la variable "cantidad de hijos por familia" el último intervalo puede estar definido por 12 o más, es este caso el límite superior del último intervalo no está definido.

Estos inconvenientes, ponen de manifiesto la necesidad de considerar otras medidas de dispersión de los datos que estamos analizando.

Ejemplo Nº 24

Retomando el ejemplo anterior, que expone una serie de valores:

7	9	11	12	13	15	18	20	21	24	25	27	28

Se pide:

a) Determinar el Rango

En el ejemplo, los datos no se encuentran agrupados, por lo que utilizamos la fórmula:

$$\text{RANGO (X)} = X_{máx} - X_{mín}$$

$$= 28 - 7 = 21$$

El rango de esta serie de datos es 21, es decir, los datos se encuentran dispersos en 21 unidades de medida.

ii) La Amplitud Intercuantílica

Cuando los valores próximos al máximo y al mínimo de los datos de una variable observada, están excesivamente alejados del resto, la consideración de un recorrido más corto, prescindiendo de un determinado porcentaje de los datos más alejados, puede dar una idea de la dispersión de los datos más acorde con la realidad que si se emplea la determinación del recorrido como la expuesta anteriormente.

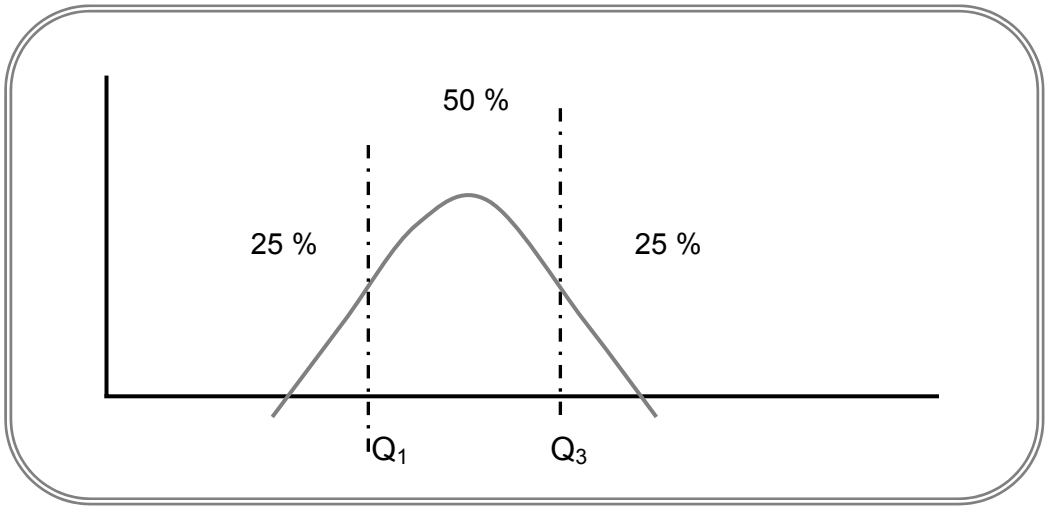
Esta idea conduce a la noción de recorrido intercuantílico, que se define como la diferencia entre dos cuantiles simétricos en la serie ordenada de los valores de la variable.

Sea x una variable con un nivel de medición a lo menos de intervalo (intervalar o de razón), para la cual la amplitud intercuantílica, que se denota como AI, se define como "la diferencia entre el tercer cuartel y el primero, y se presenta en la siguiente fórmula:

$$AI\ (X) = Q_3 - Q_1$$

Gráficamente se puede presentar esta medida de dispersión, como sigue:

Gráfico Nº 15: Amplitud Intercuantílica



Se recomienda usar la amplitud intercuantílica como medida de dispersión por sobre otras medidas de dispersión, cuando se ha usado la mediana como medida de tendencia central, ya que cuando los valores máximo y mínimo de los datos de una serie

están excesivamente alejados del resto, es mejor utilizar un recorrido más corto, prescindiendo de un determinado porcentaje de los datos más alejados; lo que permite entregar una idea de dispersión del conjunto más acorde con la realidad.

Ejemplo Nº 25

Retomando el ejemplo anterior, que expone una serie de valores:

7	9	11	12	13	15	18	20	21	24	25	27	28

Se pide:

b) Determinar la amplitud intercuantílica

En el ejemplo, los datos no se encuentran agrupados, por lo que utilizamos la fórmula:

$$AI(X) = Q_3 - Q_1$$
$$P_{75} - Q_{25}$$
$$24 - 12$$

La amplitud intercuantílica de esta serie de datos es 12, es decir, los datos se encuentran dispersos entre los cuantíles 3 y 1 en 12 unidades de medida.

iii) La Varianza y la Desviación Estándar

La varianza es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los datos respectos a la media. Se denota por S^2 y se encuentra definida por:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{X}^2}{n}$$

Esta definición de varianza es para una variable cuyo nivel de medición es al menos de intervalo (intervalo y de razón), de datos no agrupados, y con n observaciones de la variable.

Cabe señalar, que es posible que algunos autores agreguen al divisor de esta expresión: el menos 1, es decir, en vez de n aparece como un (n-1). Lo anterior, corresponde al procedimiento de ajustar la muestra a la población.

En el caso de que los datos se encuentren agrupados en k intervalos, entonces la varianza se define:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{X}\right)^2 \bullet n_i}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \bullet n_i\right)}{n} - \overline{X}^2$$

O su equivalente:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2 \bullet p_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \bullet p_i\right) - \overline{X}^2$$

Donde:

X_i : es el punto medio (marca de clase) del i-ésimo intervalo.

n_i : es la frecuencia absoluta del i-ésimo intervalo.

p_i : es la frecuencia relativa del i-ésimo intervalo.

La varianza es, como resulta de su definición, un número no negativo, y es nula cuando y sólo cuando $(X_i - \overline{X}) = 0$ para i = 1,2,3,…,k; es decir, cuando todos los valores de la variable (X_i) son iguales entre sí.

En el caso de una serie de datos observados que se representan como una constante (b) multiplicada por la variable x, es decir, $b * X_i$, la varianza de define como $b * S^2$.

$$S^2(Y) = b^2 (S^2(x))$$

Debido a la forma en que se define la varianza (S^2), la unidad de medida de ésta, es la unidad de medida de la variable x al cuadrado. Es decir, La varianza no viene expresada en las mismas unidades de medida que la de los datos, salvo que se extraiga su raíz cuadrada, $\sqrt{(S^2)}$, obteniendo así la más utilizada de las medidas de dispersión, llamada Desviación Estándar, que se define como:

$$S(X) = \sqrt{(S^2(x))}$$

La desviación estándar posee la misma unidad de medida, que la variable x. Para lo cual se recomienda utilizar esta medida de dispersión de los datos, cuando se utilice de la media ($\overline{X}$) como medida de tendencia central.

iv) El Coeficiente de Variación (CV)

Las medidas de dispersión abordadas anteriormente, no pueden ser utilizadas para comparar la variabilidad de los datos de variables con diferentes unidades de medida. En estos casos, para comparar las dispersiones de dos grupos de observaciones, se necesitan medidas que resulten independientes (relativas) de la unidad con que se miden los valores de cada variable.

Estas medidas de dispersión que, como hemos anticipado anteriormente, se denominan relativas, se definen, en general, como el coeficiente entre una medida de dispersión absoluta (a excepción de la varianza) y una medida de tendencia central, que generalmente es la media o la mediana.

El coeficiente de variación es una medida relativa de dispersión de los datos, con respecto a la media, y no depende de la unidad de medida de la variable x. Se define como:

$$CV(x) = \frac{S(x)}{\overline{X}}$$

v) La Razón Intercuartílica

Esta medida relativa de dispersión de los datos se conoce como Intervalo intercuartílico relativo o razón intercuartil, se denota como RI (X) y se define como el cociente entre el recorrido intercuartílico y la mediana.

$$RI(x) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} = \frac{AI(x)}{M_e}$$

CLASE 12

4.3 Medidas de Forma

La primera información acerca de las peculiaridades de forma de una distribución nos la proporciona la observación del diagrama de barras o del histograma, según se trate de una variable discreta o continua, la mera observación gráfica de estas distribuciones pone de manifiesto diferentes aspectos globales de las distribuciones. Por ejemplo, cuando en el gráfico hay un único valor de la variable, al que corresponde una altura máxima, se trata de una distribución unimodal.

Las medidas de forma, como su nombre lo dice, tiene por objeto caracterizar una distribución a través de la forma que ésta tiene. Hay dos tipos de medidas de forma, las medidas de asimetría, que buscan determinar si la distribución es simétrica o no; y las medidas de curtosis o apuntamiento, que buscan medir el grado de apuntamiento o achatamiento de la distribución.

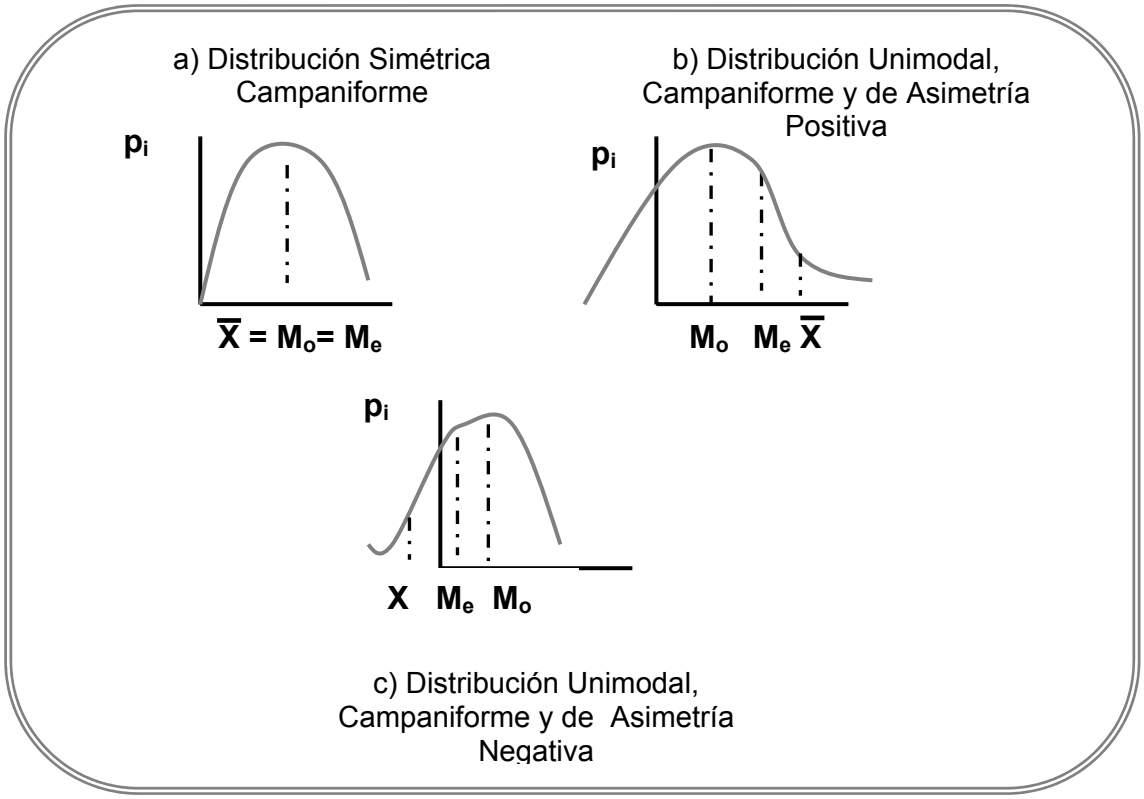
4.3.1 Medidas de Asimetría

Una distribución es simétrica si tienen igual frecuencia los valores que están a igual distancia de un punto fijo del recorrido de la variable. Este punto fijo no es otro que la media. Cuando la distribución es simétrica, la media deja por delante la misma cantidad de observaciones que detrás de ella. Por tanto, en estos casos la media coincide con la mediana. Además, cuando la distribución es unimodal, las tres medidas de posición, media, mediana y moda, coinciden.

En las distribuciones simétricas, las desviaciones de los valores a la izquierda de la media son igualmente frecuentes que la de los valores a la derecha y, en consecuencia, no sólo el momento de primer orden, sino todos los momentos centrales de orden impar son nulos.

En el Gráfico Nº 16, se presentan los diferentes tipos de asimetría de la distribución de los datos.

Gráfico Nº 16: Distribuciones Simétricas y Asimétricas



La falta de asimetría origina que las medidas de tendencia central vengan situadas en posiciones diferentes. Distingamos los dos casos siguientes:

a) Los valores bajos de la variable son más frecuentes. En este caso, la correspondiente representación gráfica representa una "cola" alargada hacia la derecha, diciéndose, entonces, que la asimetría es positiva o que la distribución está sesgada a la derecha (ver gráfico Nº 16 b).

b) Los valores más frecuentes son los mayores de la variable. En este caso, la correspondiente representación gráfica representa una "cola" alargada hacia la izquierda, diciéndose, entonces, que la asimetría es negativa o que la distribución está sesgada a la izquierda (ver gráfico Nº 16 c).

i) Asimetría de PEARSON

Un criterio para determinar la simetría de una distribución es la medida de asimetría de PEARSON, la que se denota como A_s y se define:

$$A_s = \frac{\overline{X} - M_o}{S(x)}$$

Donde:

$\overline{X}$: media de x

M_o : moda de x

S (X) : desviación estándar de x

Esta medida sólo se puede calcular para variables de nivel de intervalo y razón. Ahora bien, si la medida de asimetría de pearson es cero o aproximada a cero ($A_s = 0$), la distribución es simétrica. Para el caso, que la $A_s > 0$, la distribución de los datos presenta asimetría positiva; caso contrario, donde la $A_s < 0$, la distribución de los datos presenta asimetría negativa.

Cabe señalar, que esta medida no depende de la unidad de medición de la variable original.

ii) Coeficiente de Sesgo

Es otra medida de asimetría, que para el caso de datos no agrupados, se define como:

$$a_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^3 / n}{\left(\sqrt{\sum (X_i - X)^2 / n}\right)^3}$$

Para el caso de datos agrupados en k intervalos, entonces el coeficiente de sesgo se define como sigue:

$$a_s = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i (X_i - \overline{X})^3 / n}{\left(\sqrt{\sum n_i (X_i - X)^2 / n}\right)^3}$$

Donde:

X_i : es el punto medio del intervalo o marca de clase.

K : el número de intervalos.

n_i : es la frecuencia absoluta del i-ésimo intervalo.

Las consideraciones realizadas para la medida de asimetría de PEARSON, son válidas para el coeficiente de sesgo.

4.3.2 Medidas de Curtosis o Apuntamiento

El apuntamiento o curtosis es el grado de achatamiento o afilamiento del polígono o curva de frecuencias de una distribución unimodal, es decir, la mayor o menor inclinación de la curva de distribución para valores próximos a la moda.

En otras palabras, la curtosis es un coeficiente que mide el apuntamiento de una distribución de frecuencia. Para datos no agrupados, se define como:

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^4 / n}{\left(\sqrt{\sum (X_i - X)^2 / n}\right)^2}$$

Para el caso de datos agrupados en k intervalos, entonces el grado de curtosis se define como sigue:

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i (X_i - \overline{X})^4 / n}{\left(\sqrt{\sum n_i (X_i - X)^2 / n}\right)^2}$$

Donde:

X_i : es el punto medio del intervalo o marca de clase.

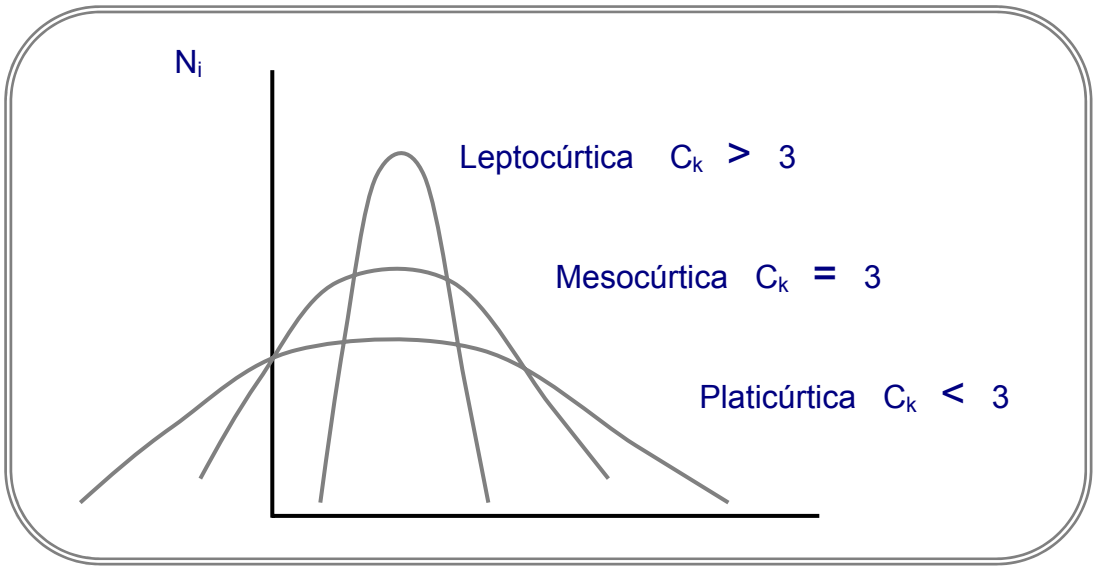
K : el número de intervalos.

n_i : es la frecuencia absoluta del i-ésimo intervalo.

Esta medida sólo se puede calcular para variables de nivel de intervalo y razón. El grado de curtosis, se define usando como referencia el valor que se obtiene para C_k en el caso de una distribución normal, que es igual a 3.

Dado lo anterior, si la medida de curtosis es igual a tres o aproximada a tres ($C_k = 3$), la distribución es MESOCÚRTICA (curtosis intermedia). Para el caso, que la $C_k > 3$, se dice que la distribución de los datos es LEPTOCÚRTICA (curtosis puntiaguda); caso contrario, donde la $C_k < 3$, la distribución de los datos es PLATICÚRTICA (curtosis aplanada).

Gráfico Nº 17: Distribuciones con Grado de Curtosis



Cabe señalar, que esta medida no depende de la unidad de medición de la variable original, es decir, es totalmente independiente de la unidad de medida de la variable observada.

Realice ejercicios Nº 26 al 30

RAMO: ESTADÍSTICA

IPLACEX
instituto profesional

UNIDAD II

NÚMEROS ÍNDICES Y PROBABILIDAD

CLASE 01

1. NÚMEROS ÍNDICES

Uno de los problemas que plantea el análisis estadístico descriptivo de la evolución temporal o espacial[1] de ciertos fenómenos, generalmente, relativos a magnitudes económicas, sociológicas o demográficas, consiste en determinar la medida de los cambios que se producen en sus resultados a lo largo de las observaciones.

Al igual que en las demás medidas estadísticas, se debe permitir efectuar comparaciones significativas, bien sea entre los propios resultados o bien con los de otros fenómenos observados en el mismo ámbito espacial o período temporal.

Ejemplo Nº 1

Supongamos, que en cada situación i, en donde i = 1, 2, …, n; designamos con x_i el valor que toma una variable X, cualquiera sea ésta. Una medida de la variación de X al pasar de cada observación j a la j + 1 es el cociente entre:

$$\frac{x_{j+1}}{x_j}$$

Sin embargo, estos cocientes no facilitan una comparación global de los valores de la variable. La forma frecuente de obviar este inconveniente es referir todas las observaciones a una situación que se toma como base. Así, si x_b es el valor correspondiente a la situación base, por lo tanto, la sucesión de cocientes es:

$$\frac{x_1}{x_b}, \quad \frac{x_2}{x_b}, \ldots, \frac{x_n}{x_b}$$

Esta sucesión indica la variación de los valores de la variable X respecto a dicha situación, la que constituye una medida relativa de las observaciones y permiten comparar la intensidad del fenómeno descrito por la variable X en su propia evolución, o con la de otros fenómenos observados, en similares contextos temporales o espaciales.

[1] La evolución temporal o espacial, hace referencia a poder realizar estadísticas descriptivas que nos permita modelizar un fenómeno durante su evolución, tanto espacial, como en el tiempo (evolución temporal).

Por ejemplo, si queremos determinar la evolución de las cantidades producidas por una empresa cualquiera, tomaremos como el año base el 1999 (cantidad producida para ese año), de forma de realizar la comparación relativa con los años en análisis.

Año Análisis	2000	2001	2002	…….	2005
Año Base	1999	1999	1999	1999	1999

Los cocientes presentados en el ejemplo Nº1, que se expresan habitualmente en tantos por ciento, reciben el nombre de números índices simples o índices simples.

Ahora bien, existen diferentes tipos de índices, dependiendo de:

- La finalidad o uso al que se le destine, en estos encontramos a los índices de precios, cantidad, de valor, etc.

- El tipo de promedio empleado en su elaboración, es decir, según el tipo de estadístico descriptivo utilizado como la media aritmética ($\bar{X}$), geométrica, armónica y agregativa (que será explicada, conforme se avance en el estudio), ya sean estos promedios simples o ponderados.

- Si se trata de una sola variable (índice simple o elemental) o son varias variables las que ocurren en el fenómeno que se analiza (índices complejos), etc. En los índices complejos, las variables que intervienen deben recoger la evolución de los factores que verdaderamente influyen en el fenómeno, si se quiere que los índices reflejen el movimiento real de éste. Por ejemplo, si se desea analizar la evolución de la demanda, se deben identificar los factores que intervienen, tales como el ingreso, los gustos y preferencias, los precios de los bienes sustitutos, etc.. Puesto que, frecuentemente, debido a diversas causas socioeconómicas, los datos sobre los que se elaboran los índices necesiten ser actualizados[2], éstos están abocados a una vigencia temporal limitada a un período, que generalmente, es corto.

Las principales aplicaciones de los números índices se refieren a magnitudes económicas. Los índices elaborados por organismos estatales u oficiales, como los índices de producción, de valores mobiliarios, de precios al por mayor y al por menor, el de precios al consumo, etc., son periódicamente revisados y actualizados por dicho organismo.

[2] Dicha actualización se refiere no solo al tipo de variable, sino también a la situación o período base y a los pesos o ponderaciones utilizadas en la elaboración de los índices.

En este material de estudio, las variables sobre las que estudiaremos los índices serán, generalmente, series temporales[3], fundamentalmente de magnitudes económicas, y los índices se referirán con frecuencia a precios, cantidades y valores. Lo anterior, debido a que el estudio de estos índices económicos es esencial en la formación profesional, que deseamos entregar.

1.1 Número Índices Simples

El porcentaje de variación, de cada intensidad con que se presenta un fenómeno, respecto al que éste posee en cierto momento o lugar, y que se toma como referencia y se denomina base, da lugar a una descripción cuantitativa de dicho fenómeno, que facilita el manejo y posibles comparaciones de la variable estudiada.

Ejemplo Nº 2

Supóngase que la producción de petróleo en Arabia Saudí y en Irán, en miles de toneladas métricas, durante los años 1965 -1969 viene expresada por la Tabla Nº1 a), la simple observación de la evolución de las producciones nos indica que en los países ha habido un incremento, pero para poder comparar las velocidades de crecimiento de ambos países debemos relativizar los valores de cada serie.

Para ello, tomamos como base de producción para cada una el año 1965, dividimos todos los valores de la primera serie por 100.500 y los de la segunda por 93.540, y multiplicamos los resultados obtenidos por 100. De esta forma se obtienen las series de números Índices, que podemos observar en la Tabla Nº1 b), en donde, para el año 1965 de referencia, el valor es 100 para ambas.

El trabajar con números índices facilita la comparación de las producciones. Puede observarse, por ejemplo, que mientras la de Arabia Saudí aumento en un 47,8% en el período 1965 – 1969, Irán tuvo un incremento de un 78,40%; que la producción de Arabia Saudí para el año 1967 aumentó el 28,28%, con respecto a la del año 1965; que en 1960 se produjo en Irán el 50,22% más que en el año base, etc.

[3] Series Temporales, es un conjunto ordenado de datos estadísticos obtenidos de una sucesión temporal de observaciones de un fenómeno.

Tabla Nº 1: Construcción de Números Índices Simples

a) Producción de petróleo en toneladas

Años	Arabia Saudí	Irán
1965	100,500	93,540
1966	118,752	101,892
1967	128,920	128,760
1968	140,844	140,520
1969	148,536	166,872

b) Serie de Números Índices

Años	Arabia Saudí	Irán
1965	100,00	100,00
1966	118,16	108,93
1967	128,28	137,65
1968	140,14	150,22
1969	147,80	178,40

Fuente: INE, Anuario 1971.

Número Índice Año 1966 Arabia

$$\frac{\text{Producción año}}{\text{Producción año base}} = \frac{118.752}{100.500} * 100$$

Las series expresadas en la tabla Nº 1 b) constituyen ejemplos de números índices simples o elementales.

A modo de ejercicio, construya el número índice simple, para la producción de petróleo, para el año 1968 de Irán, en base a la producción del año 1966.

En general, dado un conjunto de valores relativos a un fenómeno estadístico x_1, x_2, …,x_n , la proporción de variación de un valor del conjunto respecto a otro x_b, del fenómeno de estudio, denominado base o valor de referencia, se llama número índice simple o índice simple, calculándose mediante la siguiente fórmula:

$$I_b = \frac{x_i}{x_b} \times 100 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Donde:

I_b : Número Índice Simple con base b

x_i : Valor observado de la variable x, en el momento i

x_b : Valor observado de la variable x, en el momento base

Se debe señalar, que el valor base x_b puede ser cualquiera del fenómeno en estudio, ya sea del conjunto dado, para el que queremos hallar los índices, o bien cualquier otro del fenómeno en una situación anterior.

Ejemplo Nº 3

Tomemos, por ejemplo, que en Arabia Saudí la producción del petróleo en el año 1960 fue de 52.320 toneladas métricas, y queremos hacer una comparación o referencia de los datos del período 1965 – 1669 a ese año, los índices simples resultantes son:

Tabla Nº2 : Año Base 1960 = 100

Años	Arabia Saudí	Índices $X_b = x_{1960}$
1965	100.500	192,09
1966	118.752	226,97
1967	128.920	246,41
1968	140.844	269,20
1969	148.536	283,90

- Construcción número índice año 1965, para Arabia en base al año 1960

$$\frac{\text{Producción año 1965}}{\text{Producción año base}} * 100 = \frac{100.500}{52.320} * 100 = 192,09$$

CLASE 02

1.1.1 Tipos de Índices Simples

Los valores del conjunto x_1, x_2, x_3,…, x_n, para el que desea obtener los números índices, pueden haber sido recogidos en distintos períodos de tiempo y bajo un mismo criterio (por ejemplo, salario de un determinado grupo de obreros, a lo largo de una serie de años), o en el mismo período de tiempo y en diferentes campos (como empresas, países o cualquiera otra característica).

En cuanto al valor de base o referencia, podremos elegir uno fijo que permanecerá constante a lo largo de la vida del índice, obteniendo así un índice de base fija, o tomar como base, para el cálculo de cada número índice, el valor del período anterior, llamándose entonces, índice de cadena.

Por ejemplo, si x_1, x_2,…, x_n, son valores que describen la evolución de un fenómeno en los momentos 1, 2,…, n, y elegimos, como base para todos los demás, uno cualquiera x_b de dicho fenómeno (no necesariamente del conjunto dado), los índices de base fija resultantes son:

$$I_{1,b},\ I_{2.b},\ldots,\ I_{n,b}$$

Se suele elegir, como base, un período en el que los valores de la variable no sufran oscilaciones, atribuidas a situaciones especiales, que desvirtúen el significado relativo de los índices. Incluso en ocasiones, para eliminar las fluctuaciones esporádicas, se recurre a tomar como valor de referencia un promedio de aquellos valores.

Es decir, si tomamos como base la media aritmética $\bar{(X)}$ de las dos primeras observaciones, $x_{i0} = (x_1 + x_2) / 2$, los índices obtenidos son:

$$I_{3,b} = \frac{x_3}{x_{ib}} \times 100\ ,\ I_{4,b} = \frac{x_3}{x_{ib}} \times 100\ ,\ldots,\ I_{n,b} = \frac{x_n}{xb} \times 100$$

La serie de índices en cadena, relativos a la sucesión de observaciones x_1, x_2, x_3,…, x_n, es:

$$I_{2,1} = \frac{x_2}{x_1} \times 100, I_{3,2} = \frac{x_3}{x_2} \times 100, I_{n,n-1} = \frac{x_n}{x_{n-1}} \times 100$$

Ejemplo Nº 4

En la Tabla Nº3, en la que se presentan los precios en dólares del kilo de pan en distintos países en cierto año, respecto del precio del kilo de pan en un país determinado en ese mismo año. Los campos de donde se han recogido los precios a comparar son los países A, B, C Y D.

Tabla Nº 3: Índices Simples en Base al país B = 100

Países	Precio kilo de pan en dólares (año 1985)	Índices
A	0,71	102,89
B	0,69	100,00
C	0,66	95,65
D	0,74	107,25

Cálculo Índice para el país B

$$\frac{0.69}{0.69} * 100 = 100$$

- Construcción índice en base al valor observado en un momento dado o lugar, en este caso se utiliza el precio del kilo de pan, en dólares, para el país B como base (U$ 0,69)

  Para el país A

  $$\frac{\text{Precio kilo pan país i}}{\text{Precio kilo pan país base}} * 100 = \frac{0,71}{0,69} * 100 = 102,90$$

- Complete la construcción de los siguientes índices:

  Para el país C

  $$\frac{\text{Precio kilo pan país i}}{\text{Precio kilo pan país base}} * 100 = \frac{XX}{0,69} * 100 = 95,65$$

  Para el país D

  $$\frac{\text{Precio kilo pan país i}}{\text{Precio kilo pan país base}} * 100 = \frac{0,74}{XX} * 100 = XX$$

1.1.2 Propiedades de los Índices Simples

Para la utilidad de cualquier índice, aparte de los problemas previos que conlleva su elaboración, o los relativos a su actualización, y que en definitiva redundan en su grado de representatividad de la situación que se analiza, es preciso que verifique determinadas propiedades.

a) Propiedad de Existencia e Inalterabilidad del Índice

La que hace referencia a, como el índice ha de poderse calcular para cualquier valor de la variable (propiedad de existencia) y no ha de variar al modificar las unidades de medida de las observaciones (propiedad de inalterabilidad).

Además, el índice simple, por su propia definición, reúne las siguientes propiedades:

b) Propiedad de Identidad

Nos dice, que el índice que corresponde al período o valor de base es igual a 100.

$$I_{i,} = \frac{x_b}{x_b} = 1 * 100 = 100$$

c) Propiedad de Inversión

El índice relativo al período de comparación i y período base b, y el relativo al período de comparación b y período base i, tienen valores recíprocos. Es decir, el $I_{i,b} = 1 / I_{b,i}$ (no porcentual) , como se muestra en la siguiente identidad:

$$I_{i,b} = \frac{x_i}{x_b} = \frac{1}{\frac{x_b}{x_i}} = \frac{1}{I_{b,i}}$$

Ejemplo Nº 5

Retomando el ejemplo Nº 4, donde se presenta la Tabla Nº3, donde podemos observar los precios en dólares del kilo de pan en distintos países en cierto año. Los campos de donde se han recogido los precios a comparar son los países A, B, C Y D.

Tabla Nº3: Precio del Kilo de Pan (en U$)

Países	Precio kilo de pan en dólares (año 1985)
A	0,71
B	0,69
C	0,66
D	0,74

Se pide:

- Calcular el índice simple del país A, en base al país B.
- Calcular el índice simple del país B, en base al país A.

- Construcción índice en base al valor observado en un momento dado o lugar, en este caso se utiliza el precio del kilo de pan, en dólares, para el país B como base (U$ 0,69)

Para el país A

$$\frac{\text{Precio kilo pan país i}}{\text{Precio kilo pan país base}} = \frac{0{,}71}{0{,}69} = 1{,}0290$$

- Construcción índice en base al valor observado en un momento dado o lugar, en este caso se utiliza el precio del kilo de pan, en dólares, para el país A como base (U$ 0,71)

Para el país B

$$\frac{\text{Precio kilo pan país i}}{\text{Precio kilo pan país base}} = \frac{0.69}{0{,}71} = 0{,}9718$$

Ahora, verifiquemos la propiedad de inversión de los índices simples:

$$I_{i,b} = \frac{1}{I_{b,i}} \Rightarrow 1{,}0290 = \frac{1}{0{,}9718} = 1{,}0290$$

d) Propiedad de Proporcionalidad Constante

Los números índices son proporcionalmente independientes de la base. Con ello quiere expresarse que el cociente entre un índice relativo al período de comparación t y el relativo a un periodo de comparación s, ambos respecto a un mismo período base, es igual al índice relativo al período de comparación t y período base s:

Sabemos que:

$$I_{t,b} = \frac{X_t}{X_b} \qquad I_{s,b} = \frac{X_s}{X_b}$$

Entonces, podemos simplificar la expresión:

$$\frac{I_{t,b}}{I_{s,b}} = \frac{\frac{X_t}{X_b}}{\frac{X_s}{X_b}} = \frac{X_t}{\cancel{X_b}} * \frac{\cancel{X_b}}{X_s}$$

Como resultado, se obtiene:

$$\frac{I_{t,b}}{I_{s,b}} = \frac{X_t}{X_s} = I_{t,s}$$

Con esta propiedad podemos pasar de una serie de índices de base fija, $I_{1,b}$, $I_{2,b}$,…,$I_{n,b}$, a una encadenada:

$$\frac{I_{2,b}}{I_{1,b}} = I_{2,1} \; ; \; \frac{I_{3,b}}{I_{2,b}} = I_{3,2} \; ; \; \ldots ; \; \frac{I_{n,b}}{I_{n-1,b}} = I_{n,n-1}$$

Asimismo, la Proporcionalidad constante nos faculta para expresar una serie de índices simples referidos a una base t, $I_{1,t}$, $I_{2,t}$,…,$I_{n,t}$, en otra de índices referidos a una base s, $I_{1,s}$, $I_{2,s}$,…, $I_{n,s}$, y recíprocamente.

Ejemplo Nº 6

Para una mejor comprensión de esta propiedad, tomando como base los datos expuesto del ejemplo Nº 4, comprobaremos la veracidad de la identidad propuesta.

Tabla Nº3: Precio del Kilo de Pan (en U$)

Países	Precio kilo de pan en dólares (año 1985)
A	0,71
B	0,69
C	0,66
D	0,74

Tomando los datos de la Tabla Nº 3, se calculan los siguientes índices simples:

$$I_{A,B} = \frac{X_a}{X_b} \qquad I_{C,B} = \frac{X_c}{X_b}$$

$$I_{A,B} = 1{,}0290 \qquad I_{C,B} = 0{,}9565$$

Entonces, podemos simplificar la expresión:

$$\frac{I_{A,B}}{I_{C,B}} = \frac{1{,}0290}{0{,}9565} = 1{,}0758$$

Como resultado, se obtiene:

$$\frac{I_{A,B}}{I_{A,B}} = \frac{X_A}{X_C} = \frac{0.71}{0.66} = 1.0758 = I_{t,s}$$

e) Propiedad Circular

Es decir, el producto de una sucesión de índices, tales que la base del primero sea el valor para el que se calcula el segundo, y la base del segundo el valor para el que se calcula tercero, etc., de forma que la base del último número índice coincida con el valor para el que se calcula el primero. Esta propiedad es una consecuencia de la propiedad de proporcionalidad constante y nos permite pasar de índices en cadena a índices de base fija.

$$\frac{X_t}{X_a} * \frac{X_a}{X_b} * \frac{X_b}{X_c} * \frac{X_c}{X_d} \cdots \frac{X_m}{X_t} = 1$$

Donde:

x_i : es la variable observada, que va desde a, b, … , m.

Por lo tanto, si la expresión anterior se representa por sus respectivos números índices, tenemos que la multiplicación de los índices circulares es igual a 1, como podemos observar:

$$I_{t,a} * I_{a,b} * I_{b,c} * I_{c,d} \ldots I_{m,t} = 1$$

CLASE 03

1.2 Números Índices Complejos No Ponderados

Hasta ahora los índices que hemos estudiado, denominados simples, expresaban las fluctuaciones de una variable respecto a un valor base de la misma. Pero, que ocurre cuando estamos interesados en estudiar la evolución de una variación (de una variable) a lo largo de t períodos o campos de observación.

En este caso, concurren n variables X_i, i =1, 2, 3,…, n, como se puede observar en la Tabla Nº4. En donde, para cada una de ellas formamos una serie de índices simples con el mismo período base. Lo anterior, a razón que con frecuencia interesa resumir en una nueva serie de índices, construida a partir de la serie anterior, la variación conjunta de todas las variables que ocurren en dicha magnitud.

Los índices que constituyen la nueva serie reciben el nombre de índices complejos, denominándose, además, no ponderados, cuando no atribuimos más importancia a una variable que a otra cualquiera.

Tabla Nº4: Serie de Índices Simples de Varias Variables

Períodos o Campos	X_1	X_2	X_3	X_n
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	…	$X_{1,n}$
2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	…	$X_{2,n}$
…	…	…	…	…
t	$X_{t,1}$	$X_{t,2}$	…	$X_{t,n}$

Para el cálculo de los índices complejos, cuya técnica general consiste en promediar todas las series de números índices elementales ($X_{1,1}$; $X_{1,2}$; … ; $X_{t,n}$), procede según si las medidas en que son expresadas las variables son homogéneas o no.

En el primer caso se utiliza el método de la media agregativa simple, también llamado sumativo, y en el segundo el método de los promedios.

1.2.1 Método de la Media Agregativa Simple

Este método es abordado por algunos autores como el método o índice de Bradstreet y Dûtot, en tributo a quienes lo crearon.

El método de la Media Agregativa Simple consiste en comparar las medias de los valores de las variables en cada período o campo i= 1, 2, …, t con la media $\bar{x}_{ib}\cdot$ de dichas variables en base al campo o período i_b.

Donde la media de los valores de las variables en cada campo, se construye con la siguiente fórmula:

$$\bar{x}_{i}\cdot = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{n}$$

La media de los valores en base a un período, se obtiene de manera similar, utilizando la siguiente fórmula:

$$\bar{x}_{ib} := \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ib}}{n}$$

De esta forma, podemos construir el índice complejo de Bradstreet, o también conocido como la Media Agregativa Simple, al comparar estas medias utilizando la siguiente fórmula:

$$I_{i,b}^{B} = \frac{x_{i\cdot}}{x_{i_b\cdot}} \times 100 = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{\sum_{j=1} x_{i_b j}} \times 100, \qquad i = 1, 2, \ldots, t$$

Donde:

$x_{i\cdot}$: es la media de los valores observados para distintas variables.

$x_{i_b\cdot}$: es la media de los valores observados para distintas variables en una año base.

$I_{i,b}^{B}$: Índice Complejo No Ponderado o de Bradstreet y Dûtot, calculado usando el método de la media agregativa.

Ejemplo Nº 7

Calculemos la serie de índices $I_{i,b}^{B}$ para los datos de la Tabla Nº 5, en donde se recoge la producción de leche de vaca, oveja y cabra, durante los años 1965 -1969, expresada en millones de litros.

Tabla Nº 5: Producción de Leche en Millones de Litros

Años	De vaca	De oveja	De cabra	Total
1965	3.277	391	325	3.993
1966	3.709	491	352	4.552
1967	2.923	186	247	3.356
1968	3.272	174	236	3.682
1969	3.540	182	246	3.968

Sin distinguir la clase de leche producida (por ejemplo, sin tener en cuenta su precio, calidad, etc.), los índices de variación de la producción láctea respecto del año 1965, calculados mediante el método de la media agregativa, se indican en la Tabla Nº 6. Puede apreciarse en ella, por ejemplo, que en 1966 ha habido un incremento en la producción de leche del 13,99% respecto a la producción de 1965, o que, respecto a este mismo año, el volumen de producción de leche ha disminuido un 15,95% en 1967 (100 - 84.05).

Tabla Nº6: Índices Complejos No Ponderados (método media agregativa) y Medias de la Variación de la Producción

Años	Total	Medias	Índices
1965	3.993	1.331,00	100,00
1966	4.552	1.517,33	113,99
1967	3.356	1.118,67	84,05
1968	3.682	1.227,33	92,21
1969	3.968	1.322,67	99,37

Las Medias se calcula, sumando la producción de cada variable y luego dividiendo, este resultado, por la cantidad de variables (n).

Media año 1967 = 3.356 / 3 = 1.118,67

Cálculo índice complejo no ponderado, por el método de la media agregativa, en base a la media de la producción del año 1965.

Para el año 1965

$$I_{i,b}^{B} = \frac{x_{i.}}{x_{i_{b.}}} \times 100 = \frac{1.331,00}{1.331,00} \times 100 = 100,00$$

Donde:

$x_{i.}$: es la media de los valores observados para distintas variables.

$x_{i_{b.}}$: es la media de los valores observados para distintas variables en un año base.

$I_{i,b}^{B}$: Índice Complejo No Ponderado o de Bradstreet y Dûtot, calculado usando el método de la media agregativa.

Para el año 1966

$$I_{i,b}^{B} = \frac{x_{i.}}{x_{i_{b.}}} \times 100 = \frac{1.517,33}{1.331,00} \times 100 = 113,99$$

Para el año 1967

$$I_{i,b}^{B} = \frac{x_{i.}}{x_{i_{b.}}} \times 100 = \frac{1.118,67}{1.331,00} \times 100 = 84,05$$

A modo de ejercicio, calcule los índices complejos no ponderados, usando el método de la media agregativa, para los años 1968 y 1969.

CLASE 04

1.2.2 Método de los Promedios

Cuando las variables X_1, X_2, …,X_n, no son homogéneas, es decir, no usan la misma unidad de medida, el método de la media agregativa, anteriormente expuesto, no resulta apropiado para el cálculo de los ídices complejos no ponderados. Puesto que, no tendría sentido hallar la media aritmética por período, de unos valores que no han sido expresados en las mismas unidades.

Para lo cual, el método de los promedios subsana el problema de la falta de homogeneidad, relacionando cada período de observación con el de base, no mediante las medidas aritméticas de los valores de las variables, sino promediando los índices simples de dichos valores, ya que todo índice carece de unidad de medida.

El procedimiento de este método, es calcular, para cada variable, la serie de índices simples relativos a un período base común, y se promedian éstos para cada período o campo. Según el promedio utilizado, es decir, ya sea la medida aritmética, la geometría, la armónica, etc., resultan los índices complejos aritméticos, geométricos, armónico, respectivamente.

Tabla Nº7: Índices Complejos No Ponderados (método de los promedios)

Periodos o Campos	Índices simples de X_1 (Base: X_{ib})	Índices simples de X_2 (Base X_{ib2})		Índices simples de X_n (Base: X_{ibn})
1	$I_{1,b}^{(1}$ = X_{11} / X_{ib1}	$I_{1,b}^{(2}$ =X_{12} / $X_{ib}2$	…	$I_{1,b}^{n}$ = X_{1n} / X_{ibn}
2	$I_{2,b}^{(1}$ = X_{21} / X_{ib1}	$I_{2,b}^{(2}$ = X_{22} / X_{ib2}	…	$I_{2,b}^{(n}$ = X_{2n} / X_{ibn}
…	…	…	…	…
T	$I_{t,b}^{(1}$ = X_{t1} / X_{ib1}	$I_{t,b}^{(2}$ = X_{12} / X_{ib2}	…	$I_{t,b}^{(n}$ = X_{tn} / X_{ibn}

En la Tabla Nº7 se expresan las series de índices simples $I^{(i}_{i,b}$ = X_{ij} / X_{ibj}, correspondiente a la evolución de cada una de las variables X_j (j= 1,2,…,n) de la Tabla Nº4. En la notación anterior; el subíndice i hace referencia al período o campo de observación y el i_b indica el período base común.

Para determinar, los índices complejos, se emplea uno de los siguientes promedios de los índices simples de cada una de las variables por período:

a) Media Aritmética (Índice de Sauerbeck): se calcula desarrollando la sumatoria de todos los índices simple (en base a un período común) para un período o campo definido de

diferentes variables -por ejemplo: la producción de leche para el año 1965 de vaca, oveja y cabra-, dividido para la cantidad total de variables observadas n. Lo que se denota con la siguiente fórmula:

$$I_{i,b}^{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} I_{i,b}^{(j}}{n}, i = 1,2,...,t$$

Donde:

$I_{i,b}^{(j}$: representa el índice simple, en base a b, del período i, de la variable j.

$I_{i,b}^{\bar{x}}$: Índice de Sauerbeck.

Las variables observadas van de j = 1, 2, … , n.

Los campos observados son i = 1, 2, … , t.

b) Media Armónica (Índices Armónicos): para construir el índice complejo armónico, por el método de los promedios -con la media armónica-, se emplea la fórmula:

$$I_{i,b}^{Ar} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{I_{i,b}^{(j}}}, \quad I = 1, 2,\ldots,t$$

Que significa, la división entre la cantidad total de variables observadas n por la sumatoria de los índices simples inversos (en base a un periodo común) para un período o campo definido de diferentes variables -por ejemplo: la producción de leche para el año 1965 de vaca, oveja y cabra-.
Donde:

$I_{i,b}^{(j}$: representa el índice simple, en base a b, del período i, de la variable j.

$I_{i,b}^{Ar}$: Índices Armónicos.

Las variables observadas van de j = 1, 2, … , n.

Los campos observados son i = 1, 2, … , t.

c) Media Geométrica (Índice Geométrico): el índice complejo geométrico, que se basa en la media geométrica, se calcula al desarrollar la raíz n (cantidad total de las variables observadas) de la multiplicación de los índices simples (en base a un período común) para un período o campo definido de diferentes variables -por ejemplo: la producción de leche para el año 1965 de vaca, oveja y cabra-, que se resume en la siguiente fórmula:

$$I_{i,b}^{MG} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} I_{i,b}^{(j}, i} \quad , \quad I = 1, 2, \ldots, t$$

Donde:

$I_{i,b}^{(j}$: representa el índice simple, en base a b, del período i, de la variable j.

$I_{i,b}^{Ar}$: Índice Geométrico.

$\prod_{j=1}^{n} I_{i,b}^{(j}$: significa la multiplicación de los índices simples, en base a un período b, de las variables observadas.

Las variables observadas van de j = 1, 2, … , n.

Los campos observados son i = 1, 2, … , t.

d) Media (Índice Mediano): para usar este promedio hay que ordenar los índices por período. El índice mediano, que denotamos con $I_{i,b}^{Me}, i = 1,2,...,t,$ debe obtenerse de la misma forma que la construcción de la mediana. Es decir, una vez ordenados todos los índices simples de menor a mayor, se determina el valor central -conocido como la mediana-, en donde existen tantos índices por encima de él como por debajo del mismo.

Teniendo en cuenta que cada índice complejo, descrito y estudiado por el método de los promedios, es un promedio de la distribución de valores observados de las variables en análisis:

$$I_{i,b}^{(1}, I_{i,b}^{(2}, \ldots, I_{i,b}^{(n}$$

La elección del promedio adecuado, sigue las mismas recomendaciones que las estipuladas para la elección del estadístico de tendencia central[4], de modo que si los índices varían notablemente entre sí, no será aconsejable usar la media aritmética ni la armónica, siendo preferible la geométrica, que amortigua los valores extremos; pero si lo que se quiere es resaltar los valores pequeños, entonces la armónica será apropiada.

La mediana no debe emplearse cuando el número de variables es pequeño y los valores correspondientes de los índices no están homogéneamente distribuidos. Cuando no necesitemos resaltar o aminorar ningún valor de la serie, debe usarse la media aritmética por la sencillez de su cálculo.

Ejemplo Nº 8

A modo de explicar de forma práctica la construcción de los índices complejos –método de los promedios-, retomaremos el ejemplo de la producción láctea según la clase de leche de vacas, ovejas y cabras, de esta forma desarrollaremos cada uno de los índices complejos utilizando los promedios.

Para lo anterior, se han tomado los datos presentados en la "Tabla Nº5 Producción de Leche en Millones de Litros", pero en donde se han precisado las producciones y expresados en unidades diferentes (como podemos observar en la Tabla Nº8). Lo que nos permitirá aplicar, a modo de ejemplo, el método de los promedios a los datos que se presentan en la siguiente Tabla:

Tabla Nº8: Variabilidad en la Producción de Leche, Según Clase de Leche

Años	De vaca (x 103 kilómetros)	De oveja (kilolitros)	De cabra (hectolitros)
1965	3.277	391.123	32.552
1966	3.709	491.240	35.277
1967	2.923	186.301	24.763
1968	3.272	174.426	23.648
1969	3.540	182.177	24.615

[4] Abordado en la unidad anterior de Estadística Descriptiva.

Tomando las producciones del año 1965 como valores de referencia, resultan los índices simples (estudiados en el punto 1.1 “números índices simples”), indicados en la Tabla Nº9:

Tabla Nº 9: Índices Simples para Variables - Producción de Leche

Años	X1: leche de vaca (período base 1965)	X2: leche de oveja (período base 1965)	X3: leche de cabra (período base 1965)
1965	$I^{(1}_{1965,1965} = 100,00$	$I^{(2}_{1965,1965} = 100,00$	$I^{(3}_{1965,1965} = 100,00$
1966	$I^{(1}_{1966,1965} = 113,18$	$I^{(2}_{1966,1965} = 125,60$	$I^{(3}_{1966,1965} = 108,37$
1967	$I^{(1}_{1967,1965} = 89,20$	$I^{(2}_{1967,1965} = 47,63$	$I^{(3}_{1967,1965} = 76,07$
1968	$I^{(1}_{1968,1965} = 99,85$	$I^{(2}_{1968,1965} = 44,60$	$I^{(3}_{1968,1965} = 72,65$
1969	$I^{(1}_{1969,1965} = 108,03$	$I^{(2}_{1969,1965} = 46,58$	$I^{(3}_{1969,1965} = 75,62$

Cálculo índice complejo no ponderado, por el método de los promedios, en base al índice simple de producción del año 1965.

Índice de Sauerbeck, para el año 1965:

$$I^{\bar{x}}_{i,b} = \frac{\sum_{j=1}^{n} I^{(j}_{i,b}}{n}$$

$I^{(j}_{i,b}$: representa el índice simple, en base a b, del período i, de la variable j.

$$I^{\bar{x}}_{i,b} = \frac{\sum_{j=1}^{n} 100,00 + 100,00 + 100,00}{3} = 100,00$$

Índice de Sauerbeck, para el año 1966:

$$I^{\bar{x}}_{i,b} = \frac{\sum_{j=1}^{n} 113,18 + 125,60 + 108,37}{3} = 115,72$$

Índice de Sauerbeck, para el año 1967:

$$I_{i,b}^{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} 89{,}20 + 47{,}63 + 76{,}07}{3} = 70{,}97$$

Calcule el índice de Sauerbeck, para los años 1968 y 1969:

$$I_{i,b}^{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{n} =$$

$$I_{i,b}^{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{n} =$$

Cálculo índice complejo no ponderado, por el método de los promedios, en base al índice simple de producción del año 1965.

Índice Armónico, para el año 1965:

$$I_{i,b}^{Ar} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{I_{i,b}^{(j}}}$$

$I_{i,b}^{(j}$: representa el índice simple, en base a b, del período i, de la variable j.

$$\mathrm{I}_{\mathrm{i,b}}^{\mathrm{Ar}} = \frac{3}{\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{100{,}00} + \frac{1}{100{,}00} + \frac{1}{100{,}00}} = 100{,}00$$

Índice Armónico, para el año 1966:

$$I_{i,b}^{Ar} = \frac{3}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{113{,}18} + \frac{1}{125{,}60} + \frac{1}{108{,}37}} = 115{,}27$$

Índice Armónico, para el año 1967:

$$I_{i,b}^{Ar} = \frac{3}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{89,20} + \frac{1}{47,63} + \frac{1}{76,07}} = 66,15$$

Calcule el Índice Armónico, para los años 1968 y 1969:

$$I_{i,b}^{Ar} = \frac{\cdots\cdots}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cdots\cdots} + \frac{1}{\cdots\cdots\cdots} + \frac{1}{\cdots\cdots\cdots}} =$$

$$I_{i,b}^{Ar} = \frac{\cdots\cdots}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cdots\cdots} + \frac{1}{\cdots\cdots\cdots} + \frac{1}{\cdots\cdots\cdots}} =$$

Cálculo índice complejo no ponderado, por el método de los promedios, en base al índice simple de producción del año 1965.

Índice Geométrico, para el año 1965:

$$I_{i,b}^{MG} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} I_{i,b}^{(j}}$$

$I_{i,b}^{(j}$: representa el índice simple, en base a b, del período i, de la variable j.

$$I_{i,b}^{MG} = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} 100,00 * 100,00 * 100,00} = 100,00$$

Índice Geométrico, para el año 1966:

$$I_{i,b}^{MG} = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} 113,18 * 125,60 * 108,37} = 115,49$$

Índice Geométrico, para el año 1967:

$$I_{i,b}^{MG} = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} 89{,}20 * 47{,}63 * 76{,}07} = 68{,}63$$

Índice Geométrico, para los años 1968 y 1969:

$$I_{i,b}^{MG} = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} 9{,}85 * 446 * 72{,}65} = 68{,}65$$

$$I_{i,b}^{MG} = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} .108{,}05 * 46{,}58 * 75{,}62} = 72{,}46$$

Cálculo índice complejo no ponderado, por el método de los promedios, en base al índice simple de producción del año 1965. Para el ejemplo propuesto, el índice mediano, no tiene sentido calcularlo, pues es un n de 3 índices simples observados. No obstante, para la mejor comprensión del alumno hemos decidido determinarlo.

Índice Mediano, para el año 1965:

Se ordena de menor a mayor los índices simples obtenidos para las diferentes variables, en un año determinado.

100,00 100, 00 100,00

$I^{Me}_{i,b}$ = 100,00

Índice Mediano, para el año 1966:

108,37 113, 18 125,60

$I^{Me}_{i,b}$ = 113,18

Índice Mediano, para el año 1967:

47,63 76,07 89,20

$I^{Me}_{i,b}$ = 76,07

Calcule el Índice Mediano, para los años 1968 y 1969:

….. ….. …..

$I^{Me}_{i,b}$ =

…… ……. ……

$I^{Me}_{i,b}$ =

De los resultados encontrados, se obtienen, utilizando el método de los promedios, los índices complejos que se presentan en la Tabla Nº 10.

Tabla Nº 10: Método de los Promedios

(Índices complejos de los datos de la Tabla Nº 8 con base = 1965)

Años	$\bar{I}^{x}_{i,b}$	$I^{Ar}_{i,b}$	$I^{MG}_{i,b}$	$I^{Me}_{i,b}$
1965	100,00	100,00	100,00	100,00
1966	115,72	115,27	115,49	113,18
1967	70,97	66,15	68,63	76,07
1968	72,36	64,93	68,65	72,65
169	76,74	68,26	72,46	75,76

CLASE 05

1.2.3 Propiedades de los Índices Complejos No Ponderados

En este apartado, cabe mencionar que los índices compuestos por el método agregativo verifican las mismas propiedades que los índices simples, por lo que no serán reiterados nuevamente.

Ahora, es necesario estudiar las propiedades que cumplen los índices complejos, calculados mediante el método de promedios:

a) Propiedad de Identidad

Los índices calculados, utilizando cualquiera de los cuatro promedios anteriores, cumplen la propiedad de la identidad, la cual nos dice que:

Índice de Sauerbeck $$I_{i,i}^{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} I_{i,i}^{(j}}{n} = \frac{I_{i,i}^{(1} + \ldots + I_{i,i}^{(n}}{n} = \frac{n \cdot 1}{n} = 1$$

Índice Armónico $$I_{i,i}^{Ar} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{I_{i,i}^{(1}}} = \frac{n}{\frac{1}{I_{i,i}^{(1}} + \ldots + \frac{1}{I_{i,i}^{(n}}} = \frac{n}{\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}} = \frac{n}{n} = 1$$

Índice Geométrico $$I_{i,i}^{MG} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} I_{i,i}^{(j}} = \sqrt[n]{I_{i,i}^{(1} \cdot \ldots \cdot I_{i,i}^{(n}} = \sqrt[n]{1 \times 1 \times \ldots \times 1} = 1$$

Mención aparte, debe recibir el Índice Mediano ($I_{i,i}^{Me}$ = 1), pues la mediana de la serie:

$I_{i,i}^{(1} = 1, I_{i,i}^{(2} = 1, \ldots, I_{i,i}^{(n} = 1$, vale la unidad.

b) Propiedad de Inversión

La propiedad de inversión sólo la cumplen los índices calculados mediante la media geométrica ($I_{i,b}^{MG}$) y la mediana ($I_{i,i}^{Me}$). Para los primeros:

$$I_{i,b}^{MG} \cdot I_{b,i}^{MG} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} I_{i,b}^{(j} \cdot \prod_{j=1}^{n} I_{b,i}^{(j}} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \left[I_{i,b}^{(j} \cdot I_{b,i}^{(j} \right]} = \sqrt{\prod_{j=1}^{n} 1} = 1$$

En cuanto a los índices calculados empleando la mediana, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la serie $I_{i,0}^{(j}, j = 1,2,...,n,$ está ordenada y el índice mediano es:

$$I_{i,b}^{Me} \cdot Me\left(I_{b,i}^{(1}, I_{i,b}^{(2}, ..., I_{i,b}^{(n} \right) = I_{i,b}^{(p} \quad , \quad \text{con p} = \frac{(n+1)}{2}$$

Es decir, la mediana es el índice simple[5] de rango p. Y puesto que en los índices simples se verifica:

$$I_{i,b}^{(j} = 1 \div I_{b,i}^{(j}$$

La serie $I_{b,i}^{(j} = 1,2,...,n,$ también estará ordenada, de forma, que si una es creciente, la otra será decreciente, verificándose que el índice mediano en la serie $I_{b,i}^{(j}, j = 1,2,...,n$, será también de rango p:

$$I_{0,i}^{Me} = Me\left(I_{i,0}^{(1}, I_{i,0}^{(2}, ..., I_{i,0}^{(n} \right) = I_{i,0}^{(p} \quad , \quad \text{con p} = \frac{(n+1)}{2}$$

[5] Estamos admitiendo implícitamente que el número n de variables de la magnitud compleja es impar, Cuando n es par, $I^{(p}_{i,0}$ no es ninguno de los índices del conjunto $\{I^{(1}_{i,b}, I^{(2}_{i,b}, \ldots, I^{(n}_{i,b}\}$. Pero, al igual que el estudio de la mediana de las variables discretas, se decide tomar como índice mediano, $I^{(p}_{i,b}$ la media aritmética de los dos índices simples centrales.

Luego:

$$I_{i,b}^{Me} \cdot I_{b,ii}^{Me} = I_{i,b}^{(p} \cdot I_{b,i}^{(p} = 1$$

c) Propiedad de Proporcionalidad Constante

Sólo se cumple cuando se emplea la media geométrica, por lo que únicamente en este caso podremos pasar series de índices de base fija a series encadenadas, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\frac{I_{r,b}^{Mg}}{I_{s,b}^{Mg}} = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} I_{r,b}^{(j}}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} I_{s,b}^{(j}}} = \sqrt[n]{\frac{I_{r,b}^{(1} \cdot I_{r,b}^{(2} \cdot \ldots \cdot I_{r,b}^{(n}}{I_{s,b}^{(1} \cdot I_{s,b}^{(2} \cdot \ldots \cdot I_{s,b}^{(n}}} = \sqrt[n]{I_{r,s}^{(1} \cdot I_{r,s}^{(2} \cdot \ldots \cdot I_{r,s}^{(n} = I_{r,s}^{Mg}}$$

Ejemplo Nº 9

Como una forma de verificar que no se cumple la independencia de base cuando elegimos la mediana, tomemos como ejemplo la Tabla Nº 9, eligiendo como base el año 1969, y calculemos los índices complejos mediante la mediana.

Estos índices se presentan en la Tabla Nº 11:

Tabla Nº 11: Índices Medianos de los Datos de la Tabla Nº 8 (base = año 1969)

Años	X1: leche de vaca	X2: leche de oveja	X3: leche de cabra	IMei,69
1965	$I^{(1}_{65,69}$ = 92,57	$I^{(2}_{65,69}$ = 214,69	$I^{(3}_{65,69}$ = 132,24	$I^{Me}_{65,69}$ = 132,24
1966	$I^{(1}_{66,69}$ = 104,77	$I^{(2}_{66,69}$ = 269,65	$I^{(3}_{66,69}$ = 143,32	$I^{Me}_{66,69}$ =143,32
1967	$I^{(1}_{67,69}$ = 82,57	$I^{(2}_{67,69}$ = 102,26	$I^{(3}_{67,69}$ = 100,60	$I^{Me}_{67,69}$ = 100,60
1968	$I^{(1}_{68,69}$ = 92,43	$I^{(2}_{68,69}$ = 95,75	$I^{(3}_{68,69}$ = 96,07	$I^{Me}_{68,69}$ =95,75
1969	$I^{(1}_{65,69}$ = 100,00	$I^{(2}_{69,69}$ = 100,00	$I^{(3}_{69,69}$ = 100,00	$I^{Me}_{69,69}$ = 100,00

En este ejercicio práctico podemos observar que la división entre los Índices Medianos del año 1968 y 1969 (para lo cual podemos revisar la Tabla Nº9, en donde el Índice Mediano para el año 1968 en base al año 1965 es la cantidad que está en el medio para la producción de leche de los distintos animales, es decir, 72,65; para el índice mediano del año 1969 en base al año 1965, es 75,62) , en base al año 1965, no es lo mismo que el Índice Mediano del año 1968 en base al año 1969 (ver tabla Nº11).

$$\frac{I^{Me}_{1968,1965}}{I^{Me}_{1969,1965}} = \frac{72,65}{75,62} = 96,07 \neq 95,75 = I^{Me}_{1968,1969}$$

El incumplimiento de esta propiedad impide pasar de base fija a encadenada y el cambio de base. Por otra parte, la propiedad de circularidad, por ser una consecuencia de la de proporcionalidad constante, sólo se cumple cuando se emplean la media geométrica.

Realice ejercicios Nº1 al 7

2. ÍNDICES DE PRECIOS, CANTIDAD Y VALOR

También podemos utilizar los números índice para describir cambios en cantidades y en valores. Es decir, en tiempos de inflación, un índice de cantidad proporciona una medida más confiable de la producción real de materias primas y bienes terminados que el correspondiente índice de valores.

De manera parecida, la producción agrícola se mide mejor si se utiliza un índice de cantidad, debido a que éste elimina los efectos engañosos producidos por la fluctuación de precios. A menudo usamos un índice de cantidad para medir mercancías que están sujetas a una variación considerable de precios.

Cualquiera de los métodos analizados para determinar números índices simples y/o complejos, puede utilizarse para calcular índices de precios, cantidad y valor. Por ejemplo, cuando deseamos calcular índices de precios, usamos cantidades o valores, ahora cuando se desea calcular índices de cantidad, utilizamos precios o valores.

Un índice de valor mide cambios generales en el valor total de alguna variable. Como el valor está determinado tanto por el precio como por la calidad, un índice de valor realmente mide los efectos combinados de los cambios de precios y cantidad. La principal

desventaja del índice de valor es que no hace diferencia alguna entre los efectos de un uno o más componentes.

Sin embargo, un índice de valor resulta útil al medir cambios globales.

CLASE 06

2.1 Índices Simples

Consideremos la serie de precios p_{ji} de un conjunto de j bienes, donde j = 1, 2, …, n, a lo largo de los períodos i = 1, 2,…, t. El Índice Simple de Precio es:

Es la variación del precio relativo del bien j en el momento i (p_{ji}), respecto del precio de este bien en otro momento i_b (p_{jb}), y se denota como:

$$I_{i,b}^{(j}(p) = \frac{p_{ji}}{p_{jb}} \times 100$$

Donde:

p_{ji} : es el precio relativo del bien j en el período i.

p_{jb} : es el precio relativo del bien j en el período de base b.

$I_{i,b}^{(j}(p)$: es el índice simple de precio del bien j para el período i, en base al período b.

Del mismo modo, si q_{ji} representan las cantidades consumidas, producidas o existentes de los bienes j = 1, 2, …, n en los períodos i = 1, 2, …, t. El Índice Simple de Cantidad es:

Es la variación de la cantidad relativa del bien j en el período i (q_{ji}), respecto a la cantidad de ese bien en el período i_b (q_{jb}), será el índice:

$$I_{i,b}^{(j}(q) = \frac{q_{ji}}{q_{jb}} \times 100$$

Donde:

q_{ji} : es la cantidad relativa del bien j en el período i.

q_{jb} : es la cantidad relativa del bien j en el período de base b.

$I_{i,b}^{(j}(q)$: es el índice simple de la cantidad del bien j para el período i, en base al período b.

Por otro lado, dado el supuesto que el valor o gasto empleado en adquirir el bien j, en el período i. De modo que el Índice Simple del Valor o Gasto de un artículo j en el momento i es:

El producto del precio de artículo por la cantidad adquirida de él, es decir, es la variación de este producto en comparación con un período base:

$$V_{ji} = p_{ji} \cdot q_{ji} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n, \; i = 1, 2, \ldots, t.$$

De modo que el índice simple del valor o gasto de un artículo j en el momento i (V_{ji}), respecto a su valor en el período i_0 (V_{j0}), se denota:

$$I_{i,b}^{(j}(v) = \frac{v_{ji}}{v_{jb}} \times 100 = \frac{p_{ji} \cdot q_{ji}}{p_{jb} \cdot q_{jb}} \times 100$$

Donde:

v_{ji} : es el producto entre el precio relativo y la cantidad relativa del bien j en el período i.

v_{jb} : es el producto entre el precio relativo y la cantidad relativa del bien j en el período de base b.

$I_{i,b}^{(j}(v)$: es el índice simple del valor del bien j para el período i, en base al período b.

Ejemplo Nº 10

Los precios y las cantidades de cuatro artículos, que puede ser A, B, C y D, en los años 1992 y 1993, son los datos que se presentan en la siguiente Tabla:

Tabla Nº 12: Precios y Cantidades para los artículos A, B, C y D (1992 y 1993)

Artículo	Precios 1992	Precios 1993	Cantidad 1992	Cantidad 1993
A	5	6	4	3
B	4	7	3	2
C	6	8	3	3
D	3	5	4	3

Se pide calcular los índices de precio, cantidad y valor para los artículos A y B:

- Índice de Precios para el artículo A, para el año 1993 en base al año 1992:

$$I_{i,b}^{(j}(p) = \frac{p_{ji}}{p_{jb}} \times 100$$

$$I_{i,b}^{(j}(p) = \frac{6}{5} \times 100 = 120\%$$

La interpretación de este índice, se puede expresar como "el precio relativo del artículo A experimentó una variación positiva del 20% para el año 1993, en comparación con el año 1992.

- Índice de Precio para el artículo B, para el año 1993 en base al año 1992:

$$I_{i,b}^{(j}(p) = \frac{p_{ji}}{p_{jb}} \times 100$$

$$I_{i,b}^{(j}(p) = \frac{7}{4} \times 100 = 175\%$$

La interpretación de este índice, se puede expresar como “el precio relativo del artículo B experimentó una variación positiva del 75% para el año 1993, en comparación con el año 1992.

- Índice de Cantidad para el artículo A, para el año 1993 en base al año 1992:

$$I_{i,b}^{(j}(q) = \frac{q_{ji}}{q_{jb}} \times 100$$

$$I_{i,b}^{(j}(q) = \frac{3}{4} \times 100 = 75\%$$

La interpretación de este índice, se puede expresar como “la cantidad relativa del artículo A experimentó una variación negativa del 25% (100 - 75) para el año 1993, en comparación con el año 1992.

- Índice de Cantidad para el artículo B, para el año 1993 en base al año 1992:

$$I_{i,b}^{(j}(q) = \frac{q_{ji}}{q_{jb}} \times 100$$

$$I_{i,b}^{(j}(q) = \frac{2}{3} \times 100 = 66{,}66\%$$

La interpretación de este índice, se puede expresar como “la cantidad relativa del artículo B experimentó una variación negativa del 33,33% (100 - 66,66) para el año 1993, en comparación con el año 1992.

- Índice de Valor para el artículo A, para el año 1993 en base al año 1992:

$$I_{i,b}^{(j}(v) = \frac{v_{ji}}{v_{jb}} \times 100 = \frac{p_{ji} \cdot q_{ji}}{p_{jb} \cdot q_{jb}} \times 100$$

$$I_{i,b}^{(j}(v) = \frac{6*3}{5*4} \times 100 = \frac{18}{20} \times 100 = 90\%$$

La interpretación de este índice, se puede expresar como “el valor relativo del artículo A experimentó una variación negativa del 10% (100 - 90) para el año 1993, en comparación con el año 1992.

- Índice de Valor para el artículo b, para el año 1993 en base al año 1992:

$$I_{i,b}^{(j}(v) = \frac{v_{ji}}{v_{jb}} \times 100 = \frac{p_{ji} \cdot q_{ji}}{p_{jb} \cdot q_{jb}} \times 100$$

$$I_{i,b}^{(j}(v) = \frac{7*2}{4*3} \times 100 = \frac{14}{12} \times 100 = 116{,}66\%$$

La interpretación de este índice, se puede expresar como "el valor relativo del artículo B experimentó una variación positiva del 16,66% para el año 1993, en comparación con el año 1992.

Es necesario verificar, en relación con los índices simples de precios, cantidades y de valor, si estos índices son compatibles con la relación conceptual de [precio] x [cantidad] = [valor]. Pues bien, para los índices simples anteriormente expuestos se cumple dicha relación, ya que, con respecto al período base i_b, se tiene para cada bien j y período i:

$$I_{i,b}^{(j}(v) = I_{i,b}^{(j}(p) \cdot I_{i,b}^{(j}(q).$$

Sin embargo, en cada período i, la suma de los índices simples del valor de los n bienes:

$$\sum_{j=1}^{n} I_{i,b}^{(j}(v) = \sum_{j=1}^{n} I_{i,b}^{(j}(p) \cdot I_{i,b}^{(j}(q)$$

No coincide con el índice del valor total en ese período:

$$I_{i,b}(v) = \frac{\sum_{j=1}^{n} v_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} v_{jb}}$$

2.2 Índices Complejos

En el estudio de los índices complejos de precio, cantidad y valor; se debe abordar separadamente cada uno de estos tópicos, pues presentan métodos de cálculo diferente.

2.2.1 Índices Complejos de Precios

Si lo que se pretende es expresar la variación de precios de n artículos a los que asignamos distinta importancia ω_i, se debe utilizar un promedio ponderado de los índices de cada artículo.

Cuando el promedio elegido es la media aritmética, el resultado se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$IP_{i,b}^{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \omega_j \cdot \frac{p_{ji}}{p_{jb}}}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j} \qquad i=1, 2,\ldots, t$$

Donde:

ω_j : es la ponderación asignada al precio del artículo j.

p_{ji} : es el precio relativo del bien j en el período i.

p_{jb} : es el precio relativo del bien j en el período de base b.

$\sum_{j=1}^{n} \omega_j$: corresponde a la sumatoria de todas las ponderaciones o importancia asignada a los precios de n artículos.

$IP_{i,b}^{\bar{x}}$: es el índice complejo de precio del bien j para el período i, en base al período b, en base a la media aritmética.

La elección de las ponderaciones ω_i da lugar a diferentes índices, siendo el más utilizado el de Laspeyres y el de Paasche. El primero elige el valor del período de referencia, es decir, $\omega_j = p_{jb}$, y el segundo toma como ponderación asignada $\omega_j = p_{jb} \cdot q_{ji}$.

a) Índice de Precios de Laspeyres o Método del Año Base

El índice de precios de Laspeyres es una suma ponderada de los índices elementales de precios. Es decir, podemos expresarla como:

$$L_{i,b}(p) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{jb} \cdot I_{i,b}^{(j}(p)}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{jb}} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\omega_j}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j} \cdot I_{i,b}^{(j}(p) \right] = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot I_{i,b}^{(j}(p)$$

En donde:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\omega_j}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j} \right] = \sum_{j=1}^{n} a_j = 1$$

Por lo tanto, el Índice de precio de Laspeyres se define como el "Índice de precios por agregación ponderada con la cantidad en el año base" y se denota:

$$\bar{L}_{i,b}(p) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{jb} \cdot \frac{p_{ji}}{p_{jb}}}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{jb}} \times 100 = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{ji} \cdot q_{jb}}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{jb}} \times 100$$

Donde:

p_{ji} : es el precio relativo del bien j en el período i.

p_{jb} : es el precio relativo del bien j en el período de base b.

q_{jb} : es la cantidad relativa del bien j en el período de base b.

$\bar{L}_{i,b}(p)$: el Índice de precio de Laspeyres.

b) Índice de Precios de Paasche o Método del Año Dado

El índice de Paasche es, también una suma ponderada de índices elementales de precios:

$$P_{i,b}(p) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji} \cdot I_{i,b}^{j}(p)}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji}} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\omega_j}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j} \cdot I_{i,b}^{(j}(p) \right] = \sum_{j=1}^{n} \acute{a}_j \cdot I_{i,b}^{(j}(p)$$

En donde:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\omega_j}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j} \right]$$

Por lo tanto, el índice de precio de Paasche se define como el "Índice de precios por agregación ponderada con la cantidad en el año dado" y queda expresado con la siguiente fórmula:

$$P_{i,b}(p) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji} \cdot \frac{p_{ji}}{p_{jb}}}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot qji} \times 100 = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{ji} \cdot q_{ji} \times 100}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji}}$$

Donde:

p_{ji} : es el precio relativo del bien j en el período i.

p_{jb} : es el precio relativo del bien j en el período de base b.

q_{ji} : es la cantidad relativa del bien j en el período i.

$P_{i,b}(p)$: es el Índice de precio de Paasche.

CLASE 07

2.2.2 Índices Complejos de Cantidad

De forma análoga a como se han establecido los índices complejos de precios para n bienes, se obtienen los índices de cantidades aplicando la media aritmética de los índices simples de cantidades. Según se pondere con:

$$\omega_j = p_{ji} \cdot q_{jb} \quad \text{o} \quad \omega_j = p_{ji} \cdot q_{jb}$$

Resultan los índices de Laspeyres o de Passche de cantidades, respectivamente.

Los índices de Paasche y Laspeyres son utilizados frecuentemente para el cálculo del Índice de cantidades, por lo general, ofrecen diferentes resultados, esto se debe a la diferencia en los pesos. No se puede decir que fórmula es precisa o mejor; cada una de ella es significativa, ya que tiene una interpretación simple.

Si, por ejemplo, el índice de cantidad calculado por un método es 110 y por otro método es 130, podemos decir entonces que la variación de cantidad ha cambiado de 100 a entre 110 y 130.

a) Índice de Cantidades de Laspeyres o Método del Año Base

Podemos definir este índice como el "Índice de cantidad por agregación ponderada con la cantidad en el año base". Para su cálculo, se utiliza la ponderación $\omega_j = p_{j0} \cdot q_{ji}$, y se emplea la media armónica, por medio de la siguiente fórmula:

$$I_{i,b}(q) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji} \cdot \frac{q_{jb}}{q_{ji}}} \times 100 = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{jb}} \times 100$$

Donde:

p_{ji} : es el precio relativo del bien j en el período i.

p_{jb} : es el precio relativo del bien j en el período de base b.

q_{jb} : es la cantidad relativa del bien j en el período de base b.

q_{ji} : es la cantidad relativa del bien j en el período i.

$I_{i,b}(q)$: el Índice de cantidad de Laspeyre.

b) Índice de Cantidades de Paasche o Método del Año Dado

Se define como el "Índice de cantidad por agregación ponderada con la cantidad en el año dado". Para su cálculo se usa la ponderación $\omega_j = p_{ji}\, q_{ji}$, y la media armónica, lo que se expresa como:

$$P_{i,b}(q) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{ji} \cdot q_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji} \cdot \frac{q_{jb}}{q_{ji}}} \times 100 = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{ji} \times 100}{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{jb}}$$

Donde:

p_{ji} : es el precio relativo del bien j en el período i.

p_{jb} : es el precio relativo del bien j en el período de base b.

q_{jb} : es la cantidad relativa del bien j en el período de base b.

q_{ji} : es la cantidad relativa del bien j en el período i.

$P_{i,b}(q)$: el Índice de cantidad de Paasche.

Los índices de cantidades de Laspeyres también pueden ser expresados como sumas de índices elementales:

$$L_{i,b}(q) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{jb} \cdot q_{jb} \cdot I_{i,b}^{(i}(q)}{\sum p_{jb} \cdot q_{jb}} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\omega_j}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j} \cdot I_{i,b}^{(j}(q) \right] = \sum_{J=1}^{n} a_j \cdot I_{i,b}^{(j}(q)$$

2.2.3 Otros Índices Complejos de Precios y Cantidades

Los índices de Lasperyes y Paasche son aproximaciones del valor o gasto total, es decir, su metodología se basa en el calculo del Índice de Valor, que es el producto del precio relativo con la cantidad relativa para un período i, en base a un período base, ya que para el índice de precios de Laspeyres toma las cantidades q_{j0} del período base, constantes a lo largo de todos los períodos, y el de Paasche lo hace con las cantidades q_{ji} del período para el que se calcula el índice. Lo mismo pasa con los índices de cantidades de Laspayres y de Paasche.

En la práctica, el índice mas utilizado es el de Laspeyres, pues sólo exige el conocimiento de las cantidades en el período base.

$$I_{i,0}(V) = \frac{\sum_{j=1}^{n} v_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} v_{j0}}$$

Puesto que los índices de Laspeyres y Paasche son aproximaciones del gasto total, podrían aproximarse para aminorar las diferencias. El índice de precios de Sidgwch consiste precisamente en la media aritmética de los índices de precios de Laspeyres y Paasche.

Otro promedio de estos últimos, es el índice de precios de Edgeworth, que toma la media de los índices simples ponderándolos con la media aritmética de las cantidades del período base y del período de observación:

$$E_{i,b}(p) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{q_{jb}+q_{ji}}{2} \cdot \frac{p_{ji}}{p_{jb}}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{q_{jb}+q_{ji}}{2}} \times 100 = \frac{\sum_{j=1}^{n} (q_{jb}+q_{ji}) p_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} (q_{jb}+q_{ji}) p_{jb}} \times 100$$

Algunos autores, presentan el índice de precios de Fischer que se obtiene a partir de los índices de Laspeyres y Paasche, y que se define como el índice Ideal de Fisher:

Este índice de precios es la media geométrica de los números índices de Laspeyres y de Paasche. El índice ideal de Fisher satisface los criterios de inversión temporal y de inversión de factores, lo que confiere una cierta ventaja teórica sobre otros números índice.

Se denota:

$$F_{i,b}(p) = \sqrt{L_{i,b} \cdot p_{i,b}(p)}$$

Realice ejercicios Nº 8 al 10

3. EL ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMO

El principal objetivo del índice de precios al consumo (IPC) es cuantificar la evolución del nivel de precios de los bienes y servicios de consumo adquiridos por las familias, así como su utilización como indicador económico de la inflación. De ahí sus múltiples aplicaciones en los campos económicos, jurídico, social, etc.

En Chile el índice de precios al consumo (IPC), es un indicador clave en la economía, que permite seguir mes a mes la evolución de inflación, motivo por el cual es ampliamente utilizado por el Estado y el sector privado, los bancos y universidades para sus análisis económicos, y por los medios de comunicación para informar a la sociedad. Su principal objetivo es cuantificar la variación media de los precios de una canasta que corresponde a la estructura preferencial de consumo de bienes y servicios de un hogar medio.

La construcción de la canasta de bienes y servicios es uno de los factores claves de la calidad y representatividad del IPC. Este proceso supone seleccionar los productos de acuerdo a criterios adecuados. La fuente de información para realizar este proceso es la "Encuesta de Presupuestos Familiares", que cuantifica todos y cada uno de los gastos realizados por las familias.

Esta encuesta se realizó entre agosto de 1996 y julio de 1997 y permitió detectar el consumo de aproximadamente 1.500 productos (bienes y servicios) de 8.445 hogares del Gran Santiago. Del conjunto declarado por los hogares, se escogió un número más reducido

de artículos representativos de las mayores proporciones de gasto para elaborar la canasta para el cálculo mensual del IPC.

La estructura del gasto, permite establecer los pesos o ponderaciones de cada artículo en el IPC. La canasta del IPC, quedó conformada por 483 productos y 157 artículos, representando, prácticamente, el cien por ciento del gasto de los hogares.

Actualmente, la metodología empleada para la determinación de estos índices ha sufrido modificaciones, como una forma de homogeneizarla con la aplicada en el resto de los países de la Comunidad Europea.

La fórmula usada para calcular los índices es la de Laspeyres, la misma que se emplea en los sistemas anteriores y en la mayoría de los países, utilizándose ponderaciones que habrán de permanecer fijas durante todo el período de vigencia del sistema:

$$L_{i,b}(p) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \cdot I_{i,b}^{(j}$$

Donde:

$L_{i,b}(p)$: El Índice de precio de Laspeyre, con base al año b.

ω_j : Gasto en el artículo dividido por el gasto total, es decir, es la ponderación que recibe el artículo j, sobre el gasto total.

$I_{i,b}^{(j}$: Es el índice simple de la cantidad del bien j para el período i, en base al período b.

Esta fórmula plantea, por una parte, el problema de la delimitación de los bienes y servicios cuyos precios han de intervenir en la elaboración de los índices y, por otra, el de la determinación de las ponderaciones.

Dentro del campo del consumo, se incluyen aquellos bienes y servicios de consumo que se pagan realmente durante el período de referencia, es decir, exceptuando los bienes recibidos en especie, alquileres imputados en la vivienda en la que se reside, etc.

La canasta de productos del IPC, como ya se señaló anteriormente, se construye a partir de la encuesta de presupuesto familiar que realiza el INE cada 10 años

aproximadamente. A partir de ella se determinan qué productos entran en la canasta y cuál es la ponderación o peso relativo que va tener cada producto en dicha canasta[6].

El Cuadro Nº 1 resume los ponderadores de los 8 grupos de la nueva canasta del IPC, la cual rige desde diciembre de 1998.

Cuadro Nº1: Ponderaciones del IPC – Chile

Grupo	Ponderación
Alimentación	0.27
Vivienda	0.20
Equipamiento de Vivienda	0.08
Vestuario	0.08
Transporte	0.12
Salud	0.09
Educación y Recreación	0.11
Otros	0.04
Total	1 (100 %)

Fuente: INE

Estos ponderadores reflejan el porcentaje del gasto total que las familias realizan en cada uno de estos grupos. Los ponderadores son los mismos durante todo el período en que rige la canasta, hasta que se realiza la siguiente encuesta de presupuestos familiares.

Los artículos se seleccionan teniendo en cuenta:

- Que sean artículos de consumo habitual.
- Que ofrezcan garantías de permanencia en el mercado.
- Que los precios sean fácilmente observables.

Las ponderaciones no varían mensualmente, excepto en el caso de los artículos estacionales (frutas, hortalizas, etc.). Existen artículos con tratamiento especial, como los estacionales y otros no estacionales, cuyos precios requieren autorización administrativa y están sujetos a tarifas publicadas. Entre estos se encuentran: el teléfono, la luz, el agua, los carburantes, el gas ciudad, el transporte urbano y colectivo.

Los precios para calcular el IPC se recogen de una muestra de establecimientos que va a representar al resto del mercado de abastecimiento del país, en cuanto a la evolución de

[6] Para que el producto sea incluido dentro de la canasta, éste tiene que cumplir con ciertos requisitos, uno de ellos es representar más del 0.025% del gasto y ser consumido por una cantidad razonable de gente, según fuente INE, 1999.

los precios de sus artículos. Dichos establecimientos han de ser de tipo medio o del tipo más frecuente o accesible para la población, y de éstos se debe seleccionar el de mayor volumen de ventas o, en su defecto, el de mayor afluencia de clientes, siendo necesario ofrecer garantía de continuidad en la venta de los artículos seleccionados.

La recogida de datos se realizará mediante visitas mensuales (método de entrevista), y los precios serán los efectivos de venta al público con pago al contado, aunque existen excepciones en la recogida para algunos artículos.

El INE publica los coeficientes de enlace que perpetúan la cantidad de las series de los distintos sistemas de índices de precios al consumo que han tenido vigencia en Chile, permitiendo obtener tasas de variaciones que pueden ser aplicadas a cuestiones contractuales (convenios laborales, alquileres de vivienda, etc.), y realizar predicciones y estudios sobre la evolución histórica de los precios.

3.1 Cálculo de la Variación del Índice

La variación del índice, es el porcentaje de aumento o disminución que experimenta el índice entre dos fechas determinadas. Las tasas de inflación acumulada siempre son referidas a dos períodos, por lo tanto, se comparan los índices de precios de ambos períodos, por ejemplo, si se quiere calcular la tasa acumulada en 12 meses, se comparan los índices del mes actual, respecto al índice de igual mes del año anterior, y con ellos se calcula la variación porcentual.

El índice de Precios al Consumidor (IPC) se calcula en forma mensual y, por lo tanto, no está referido a un día determinado.

Como los índices corresponden a meses, se utiliza la siguiente regla para identificar los niveles del índice a utilizar en los cálculos de las variaciones:

- En el caso de referencia mes.
- En el caso de referencia día determinado.

En el caso de mes, se calcula de la siguiente manera:

$$\left[\frac{\textit{Índice de precios del mes actual}}{\textit{Índice del mes anterior al antiguo}} \times 100\right] - 100 \;=\; \textit{Variación Porcentual}$$

Ejemplo Nº 11

¿Cuál es la variación porcentual de IPC entre enero 2000 respecto a diciembre 2000?, el índice de diciembre de 2000 fue de 106,94 y el índice de Diciembre de 1999 de 102,31

Cálculo:

$$\left(\frac{106{,}94}{102{,}31} \times 100\right) - 100 = 4{,}5\ \%$$

La variación fue de 4,5 %.

En caso de fechas determinadas, se procede de la siguiente manera:

- Si la fecha corresponde a un día de la primera quincena inclusive, se utiliza el índice del mes anterior al mes de la fecha; por ejemplo, si la fecha es 5 de enero de 1989, se utiliza el índice del mes de diciembre de 1988, para el cálculo.

- Si la fecha corresponde a un día de la segunda quincena (16 en adelante) se utiliza el índice del mes de referencia, por ejemplo si la fecha es 17 de octubre de 1997, se utiliza el índice del mes de octubre de 1997, para el cálculo.

Ejemplo Nº 12

¿Cuál es la variación porcentual del IPC entre el 1 de abril de 1984 respecto al 31 de enero de 1999?, Índice de enero de 1999 es de 99,66764 y el Índice de marzo de 1984 fue de 12,66957.

Cálculo:

$$\left(\frac{99.66764}{12.66957} \times 100\right) - 100 = 686{,}7\ \%$$

La variación es de 686,7%

CLASE 08

3.2 Cálculo de la Reajustabilidad de Valores Usando la Variación del IPC

Para calcular el reajuste y mantener el poder adquisitivo de una cantidad de dinero entre dos fechas determinadas se procede, utilizando la variación del IPC, a través del siguiente método, el cual permite utilizar una de las fórmulas que se presentan a continuación:

$$\frac{\text{(Valor a reajustar x variación IPC)}}{100} + \text{Valor a Reajustar} = \text{Valor Reajustado}$$

$$\frac{\text{(100 + IPC) x Valor}}{100} = \text{Valor Reajustado}$$

Ejemplo Nº 13

¿Cuál es el reajuste de $ 23.250 entre el 1º de abril de 1984 respecto al 31 de enero de 1999, siendo la variación del IPC porcentual de 686,7%?

Utilizando la primera fórmula, podemos expresar el ejemplo como:

$$\frac{\text{(Valor a reajustar x variación IPC)}}{100} + \text{Valor a Reajustar} = \text{Valor Reajustado}$$

$$23.250 \times 686,7 + 23.250 = 182.908$$

Utilizando la segunda fórmula, nos queda:

$$\frac{\text{(100 + IPC) x Valor}}{100} = \text{Valor Reajustado}$$

$$\frac{(100 + 686,7) \times 23.250}{100} = 182.908$$

Donde el reajuste es el mismo obtenido con la fórmula anterior. El reajuste es de $182.908

Realice ejercicios Nº 11 al 13

4. PROBABILIDADES

En estadística se emplea la palabra experimento para designar todo acto que proporciona datos, es decir, se denomina experimento a una operación destinada a provocar un fenómeno (ejemplo: lanzamiento de un dado), pero, también a una observación de un fenómeno real (ejemplo: medir la estatura de un individuo).

En algunas situaciones, la realización sucesiva de un experimento, en las mismas condiciones, produce el mismo resultado, son los conocidos Experimentos Deterministas. A los fenómenos que se manifiestan en dichos experimentos los llamaremos Fenómenos Deterministas, como ejemplo de éstos tenemos: la caída libre de los cuerpos (ley de gravedad) o la formación de agua a partir de oxígeno e hidrogeno bajo ciertas condiciones.

Pero existen situaciones en las que la realización sucesiva de un experimento, en las mismas condiciones, produce resultados distintos, son los llamados Experimentos Aleatorios. A los fenómenos que se manifiestan en dichos experimentos, los denominaremos Fenómenos aleatorios. Son fenómenos de este tipo: el lanzamiento de un dado, la duración de la vida de una persona o el rendimiento de una semilla.

En muchas investigaciones científicas, se realizan experimentos que tienen un elemento de incertidumbre o cuyos resultados no pueden predecirse con exactitud -Experimento Aleatorio-, un ejemplo sería tratar de predecir si el próximo niño que nazca en Talca será mujer u hombre.

Ejemplo Nº 14

Para hacer más practico el aprendizaje, para posteriores definiciones se aplicarán en base a los siguientes ejemplos de experimentos aleatorios:

e. a. 1	Lanzar una moneda al aire y observar el resultado.
e. a. 2	Lanzar un dado al aire y observar el resultado.
e. a. 3	El número de ampolletas defectuosas que se producen en 24 horas en una fábrica.
e. a. 4	El número de accidentes de tránsito que ocurren en un día, en un lugar determinado.
e. a. 5	El número de clientes que llegan a un banco entre las 11:00 y las 13:00 horas.

Donde:

e.a. n : significa el experimento aleatorio 1, 2, 3, 4, ó 5

Podemos decir que un cierto fenómeno corresponde a un experimento aleatorio si se verifican las siguientes condiciones:

- Antes de realizar el experimento se conocen todos sus posibles resultados. Aunque en general no podemos establecer un resultado particular del experimento aleatorio, si podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles.
- El resultado concreto de una realización del experimento no es predecible (este hecho los distingue de los experimentos deterministas).
- Posee la propiedad denominada regularidad estadística, esto es un comportamiento predecible a largo plazo. Es decir, los resultados individuales de un experimento aleatorio que se realizan repetidamente, parecen ocurrir en forma aleatoria o al azar. Sin embargo, si un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, aparece un patrón de seguridad.
- Cada experimento puede ser (en general) repetido indefinidamente, bajo esencialmente[1] las mismas condiciones.

Por ejemplo: Si se lanza una moneda un gran número de veces, observaremos que, aproximadamente, la mitad de las veces aparece cara y esto a pesar que cada resultado individual parece ocurrir de una manera arbitraria e imposible de predecir. Esta regularidad es la que hace posible construir un Modelo Probabilístico para analizar un experimento aleatorio.

4.1 Conceptos Básicos

Dado un experimento aleatorio, se denominará Espacio Muestral al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Es decir, para cada experimento aleatorio definiremos un espacio muestral asociado, que es el conjunto de resultados posibles del experimento aleatorio.

[1] Esencialmente no quiere decir igual.

Ejemplo Nº 15

Para los ejemplos anteriores de experimentos aleatorios, presentados en el ejemplo Nº 14, los Espacios Maestrales serían:

e. a. 1	Espacio Muestral 1 $S_1 = \{c,s\}$ c: cara , s: sello
e. a. 2	Espacio Muestral 2 $S_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$
e. a. 3	Espacio Muestral 3 $S_3 = \{0,1,2,\ldots\ldots\ldots n\}$ Donde n es el número máximo de ampolletas que se pueden producir en 24 horas.
e. a. 4	Espacio Muestral 4 $S_4 = \{0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,n\}$ Donde n es el número máximo de vehículos que circulan en un día.
e. a. 5	Espacio Muestral 5 $S_5 = \{0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..,n\}$ Es el número máximo de clientes del banco.

Al asignar a un experimento aleatorio un espacio muestral hacemos una idealización o simplificación, prescindiendo de resultados raros, como por ejemplo que el dado caiga apoyado en una arista o en un vértice.

Cada elemento del espacio muestral, de un experimento aleatorio definido, es un suceso elemental o punto muestral.

Llamamos Suceso a todo subconjunto de elementos muestrales, que denotaremos como A, del espacio muestral.

Un evento o Suceso Compuesto A, con respecto a un espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio, es simplemente un subconjunto de S (Espacio Muestral). Por lo tanto S (Espacio Muestral) también es un evento y también lo es el conjunto vacio Ø. En donde el conjunto Ø será un suceso imposible porque nunca ocurre y S será un suceso seguro porque siempre ocurre.

Ejemplo Nº 16

Experimento	Suceso Elemental	Suceso Compuesto
e. a. 1	$S_e = \{c\}$ Cae en cara	$S_c = \{c,s\}$ Cae cara o sello
e. a. 2	$S_e = \{1\}$ Obtener un as (1)	$S_c = \{1,3,5\}$ Obtener impar
e. a. 3	$S_e = \{10\}$ Producir 10 ampolletas	$S_c = \{5,10,15\}$ Producir 5, 10 ó 15 ampolletas
e. a. 4	$S_e = \{1\}$ Que circule sólo un auto	$S_c = \{3,5\}$ Que circulen 3 ó 5 autos
e. a. 5	$S_e = \{3\}$ Que lleguen sólo tres clientes entre el horario definido.	$S_c = \{2,4,6,8\ldots\}$ Que la cantidad de clientes en el banco a esa hora sea par.

Además, que se dice que el suceso S definido, ha ocurrido, si se observa la ocurrencia de una (cualquiera) de sus miembros. Luego si se obtienen un tres al lanzar un dado, se dirá que el suceso ocurrió.

CLASE 09

4.2 Reglas de Enumeración

Para poder determinar el número de elementos en un espacio muestral es necesario contar con técnicas que permitan enumerar estos elementos, con lo que se definen las Reglas de Enumeración.

i) Regla de la Multiplicación

Si tenemos A_1, A_2, A_3,……,A_n acciones o procedimientos distintos que pueden ser ejecutados de K_1, K_2, …….,K_n de manera distintas, respectivamente. Entonces el número total de maneras en que se pueden efectuar A_1 seguido de A_2, seguido de A_3…….., seguido de A_n, Esta dado por:

$$K_1 * K_2 * K_3 * \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots * K_n$$

Ejemplo Nº 17

Supóngase que se desea viajar a Roma pasando por Santiago, Buenos Aires, y el destino final Roma. Si estos viajes se pueden hacer de las siguientes formas.

A1 Talca / Santiago;	Bus, Auto, Tren
A2 Santiago / Buenos Aires;	Bus, Auto, Avión
A3 Buenos Aires / Roma;	Avión, Barco

Utilizando la regla de la multiplicación, para enumerar los elementos o sucesos elementales de este espacio muestral, tenemos que las maneras distintas de hacer el viaje Talca / Roma serían:

A1 Talca / Santiago;	3 Formas
A2 Santiago / Buenos Aires;	3 Formas
A3 Buenos Aires / Roma;	2 Formas

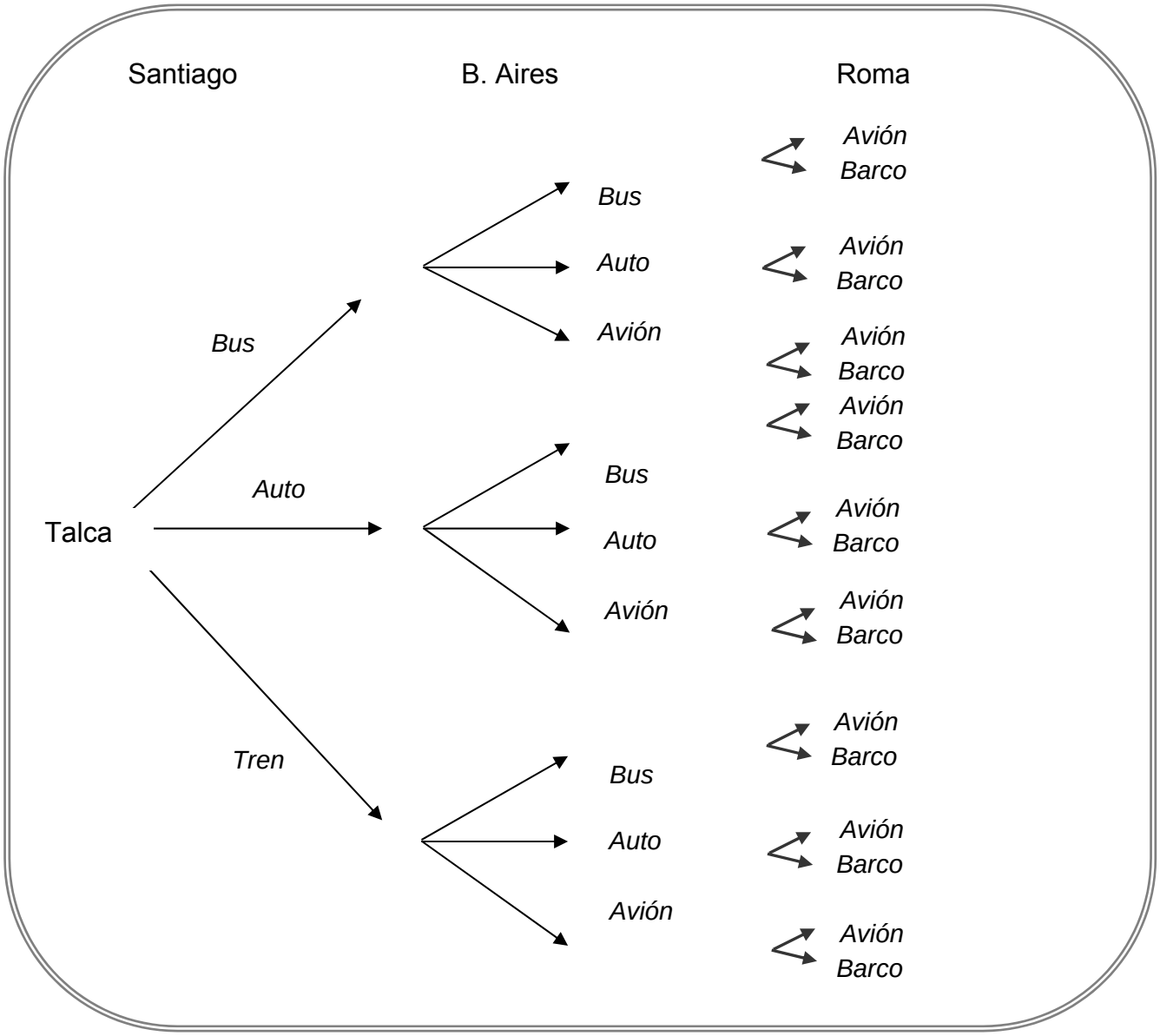
Por lo tanto:

$$3 * 3 * 2 = 18$$

Existen 18 formas distintas de hacer el viaje, es decir, 18 elementos muestrales.

La regla de la multiplicación puede ser presentada por medio de un árbol de Decisiones. En la figura Nº1 se observa el árbol de decisiones para el ejemplo anterior.

Figura Nº1: Árbol de Decisiones para el Viaje Talca – Roma



Ejemplo Nº18

Si se lanza un dado, el nº de resultados posibles del lanzamiento del dado es 6. Supóngase ahora que el experimento consiste en lanzar el dado 10 veces, entonces el nº de resultados posibles se obtiene usando la regla de la multiplicación, ya que tenemos 10 acciones cada una de ella se ejecuta de 6 maneras diferentes:

$$\underbrace{6 * 6 * 6 * \ldots\ldots x6}_{10} = 6^{10}$$

Luego el número de maneras diferentes de completar estas acciones (número de resultados posibles) al lanzar un dado 10 veces, es simplemente 6^{10}. Algunos de estos resultados serían por ejemplo:

(1,1,1,1,…….,1) ; (2,1,1,1,……,1) ; etc.

ii) Regla de la Adición

Supóngase que se obtienen n acciones o procedimientos A_1, A_2, ...,A_n que pueden ser ejecutadas de K_i maneras distintas cada una. Entonces el número de maneras en que pueden ser ejecutada la acción A1 o la acción A2 o la acción A_n está dado por $K_1 + K_2 + \ldots\ldots + K_n$

Ejemplo Nº 19

Supóngase que se desea hacer un viaje de Santiago a Buenos Aires y debemos decidir entre ir en tren, bus, auto o avión. Si hay una ruta de tren, dos rutas de buses, tres de autos y una de avión, entonces el número de rutas disponibles para hacer el viaje es:

1 de Tren
2 de Bus
3 de Auto
1 de Avión

$1 + 2 + 3 + 1 = 7$

Existen 7 rutas posibles para el viaje de Santiago a Buenos Aires.

iii) Permutaciones[2] y Variaciones[3]

Supóngase que se tiene n objetos diferentes ¿de cuántas maneras pueden estos objetos ser ordenado? Por ejemplo, si tenemos 3 letras (a, b, c) estas pueden ser ordenados de las siguientes maneras:

(a,b,c) (a,c,b) (c,b,a) (c,a,b) (b,a,c) (b,c,a)

$n! = 3! = 1.2.3 = 6$

Dado lo anterior, podemos decir que la respuesta es 6.

En general podemos considerar el siguiente esquema: primero se debe ordenar los n objetos, que es equivalente a ponerlos en una caja con n comportamientos, en un orden específico.

1	2	3	.	.	.	.	.	n

El 1er casillero puede ser llenado de n maneras diferentes, quedando n – 1 objetos para llenar los n -1 casilleros restantes. El 2do casillero puede ser llenado de n -1 maneras $\neq$ y, así sucesivamente, hasta que el último casillero puede ser llenado de 1 manera.

Así mismo, el número de maneras distintas en que se pueden llenar los n casilleros es de acuerdo con la regla de la multiplicación, que se expresa de la siguiente forma:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots\ldots \times 1 = n!$$

a) Variaciones: considérese nuevamente n objetos diferentes; Pero esta vez, deseamos elegir r elementos de estos objetos ($o \leq r \leq n$). Para determinar ese número, usaremos el mismo esquema anterior, pero esta vez nos detendremos cuando el r-ésimo compartimiento ha sido llenado. Igual que el caso anterior, el 1er casillero se puede llenar de n maneras distintas, el 2do casillero se puede llenar de n – 1 maneras distintas, el 3er de n – 2 maneras distintas, el r^{o} ésimo casillero se puede llenar de $n - (r^{o} - 1) = n - r^{o} + 1$.

[2] ¿De cuántas Maneras se pueden ordenar n objetos?
[3] ¿De cuántas maneras podemos elegir y ordenar $o < r < n$?

Luego usando la regla de la multiplicación tenemos que el procedimiento puede ser completado en n (n – 1) (n – 2)……(n – rº +1) maneras, o bien:

$$\frac{n!}{(n - r^{o})!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n - r^{o} + 1)(n - r^{o})(n - r^{o} - 1)\ldots(1)}{(n - r)(n - r^{o} - 1)\ldots\ldots\ldots\ldots 1}$$

Ejemplo Nº 20

Supóngase que hay 5 candidatos para ocupar 3 puestos en la federación de estudiantes, estos cargos son Presidente, Secretario y Tesorero. De cuántas maneras se pueden ocupar estos 3 cargos.

$$\frac{5!}{(5-3)} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

iv) Combinaciones[7]

Considérense n objetos diferentes, esta vez, nos interesa contar el número de maneras en que podemos elegir r números, de los n objetos, sin considerar el orden, por ejemplo, si tenemos tres letras (a, b, c) y deseamos elegir dos, entonces (r número = 2) estas combinaciones serían:

(a,b); (a,c) y (b,c)

Nótese que no contamos el par (b, a) como posible combinación, ya que esta el par (a, b), en donde sólo el orden difiere, pero no las letras. Para obtener una fórmula general, recordemos que el número de maneras de elegir r objetos de n y permutarlos (ordenarlos) es:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

[7] ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar (sin repetir el orden) r objetos de un total de n?

Sea C el número de maneras de elegir r objetos de n sin considerar el orden. Entonces, podemos observar que una vez que los r objetos fueron seleccionados hay r! maneras de ordenarlos. Luego si aplicamos la regla de la multiplicación tenemos que:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = C \times r$$

Luego,

$$C = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Por lo tanto, el número de maneras de seleccionar r objetos de un total de n, sin importar el orden es:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)r!}$$

Ejemplo Nº 21

Supóngase que hay 5 postulantes para llenar 3 cargos de profesor de estadísticas ¿De cuántas maneras puede llenar estos cargos?

Cálculos

$$\frac{5}{3} = \frac{5!}{3!(2!)} = \frac{\cancel{1.2.3}.4.5}{\cancel{1.2.3}.1.2} = 10 \qquad \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!(2!)} = 10$$

v) Permutaciones

Esta regla de enumeración, se utiliza cuando no todos los objetos son diferentes. Por ejemplo, supóngase que tenemos un total de n objetos, tal que n_1, son del tipo 1; n_2, son del tipo 2; ……; n_k, son del tipo K.

Luego $n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_k$. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar n objetos? Para resolver esta pregunta se debe utilizar la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n\ \ n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{n_k}{n_k}$$

$$\frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}}\quad\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\ .\ \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{n_3!\,\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}}\ .\ \frac{\cancel{n_k!}}{\cancel{n_k!}\ 0!}$$

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n_k!}$$

$$\frac{n!}{n1!\ n2!} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

Donde:

n1 : r

n2 : n - r

La demostración anterior, quiere decir que las permutaciones son una generalización de las variaciones, lo que demuestra que hay simetría y no importa el orden en que se coloquen los objetos.

Ejemplo Nº 22

Se tiene:

3	Fichas rojas
5	Fichas blancas
7	Fichas negras

¿De cuántas maneras podemos permutar estas fichas?

Cálculos

n1 = 3
n2 = 5
n3 = 7

n = 15

$$\left[\frac{15}{3}\right]\left[\frac{12}{5}\right]\left[\frac{7}{7}\right] = \frac{15}{3!\,5!\,7!} =$$

$$\frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12*13*14*15}{3!\ 5!\ 7!}$$

Lo que equivale a 7!, por lo tanto, la expresión puede quedar reducida en:

$$\frac{\cancel{7!} * 8*9*10*11*12*13*14*15}{3!\ 5!\ \cancel{7!}}$$

$$\frac{259459200}{(6)\ (120)} = 360.360$$

Podemos presentar estas fichas de 360.360 maneras diferentes.

Realice ejercicios Nº 14 al 19

CLASE 10

4.3 Definición Axiomática de Probabilidad

Históricamente, el concepto de probabilidad se introdujo a partir de el concepto de Frecuencia, recordemos dicha definición:

Realizando el experimento n veces, llamamos Frecuencia absoluta del suceso A al número de veces que éste se presenta, y lo denotamos por n_A. Denominamos Frecuencia relativa de dicho suceso al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de experimentos. La frecuencia relativa no es más que la medida relativa y empírica de la ocurrencia de un suceso; relativa en cuanto a que viene dada por una porción, y empírica en cuanto a que contabiliza hechos ya acontecidos.

Esta definición, hoy en desuso, no es operativa ni congruente con el concepto matemático de límite (no es posible lanzar una moneda una infinidad de veces, el límite no es calculable analíticamente, y ningún límite se puede calcular experimentalmente), pero consigue dar una idea intuitiva de lo que se pretende al definir la probabilidad de un suceso.

A continuación, se presenta la definición axiomática de probabilidad, que introdujo el matemático ruso Kolmogorov en 1933, con la que se trata de dar una medida relativa y teórica de la ocurrencia de un suceso.

Sea un espacio probabilizable S_α. Se conocerá como probabilidad sobre α a una aplicación p, de α en los números reales.

La definición anterior, verifica las siguientes propiedades:

1. $p(A) \geq 0$ para todo $A \in \alpha$.

2. $p(S) = 1$, que se denomina suceso seguro.

3. $p(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$ para toda la colección infinita numerable de sucesos A_i de α . Si los sucesos son mutuamente excluyentes.

Por dicha aplicación, la definición de probabilidad puede resumirse en:

$$p : \alpha \longrightarrow \mathbb{R}$$

Asociamos a todo suceso A un número real, p(A), que es la probabilidad de dicho suceso.

De manera de clarificar aún más esta definición, se definirán algunos conceptos abordados en las propiedades de probabilidad, los que incluyen conceptos de matemática elemental.

a) Sucesos Mutuamente Excluyentes

Dado dos sucesos A y B de un espacio muestral S, éstos son mutuamente excluyentes:

Si y sólo si $A \cap B = \emptyset$ ($\emptyset$ conjunto vacio)

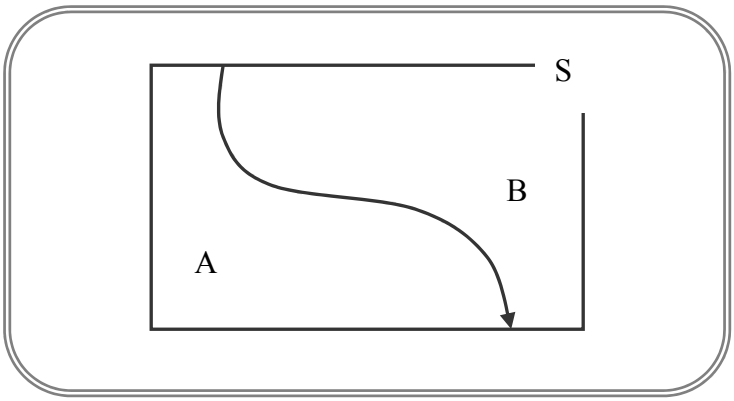
Es decir, la intercepción ($\cap$) entre estos dos espacios maestrales es vacía.

b) Sucesos Mutuamente Excluyentes y Exhaustivos

Dos Sucesos A y B son mutuamente excluyentes y exhaustivos:

Si y sólo si

i) $A \cap B = \emptyset$ (Excluyentes)
ii) $A \cup S = S$ (Exhaustivos)



A continuación, se presenta la demostración de las propiedades explicadas anteriormente, que son abordados por los matemáticos como Teoremas de Probabilidad.

- Teorema 1: si Ø es el conjunto vacio, entonces P(Ø) = 0

Demostración:

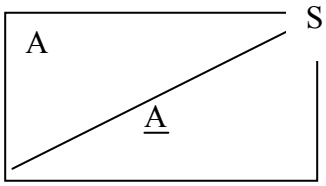
Sea A un evento cualquiera en un espacio muestral S. Luego A y Ø son excluyentes (A ∩ Ø = Ø), por lo tanto, A = A U Ø y en consecuencia por la propiedad número 3 tenemos que la probabilidad del suceso A:

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \quad \Rightarrow \quad P(\emptyset) = 0$$

Nota: si P(A) = 0 no podemos, en general, concluir que A = Ø, ya que es posible asignar una probabilidad cero o aproximadamente cero a un evento que puede ocurrir aunque sea muy poco probable. Además, vale la pena recordar que el conjunto vacio representa un suceso imposible.

- Teorema 2: si Ā es el complemento de A, entonces P(Ā) = 1 – P (A)

Demostración:



S = A U Ā (A y Ā son excluyentes y exhaustivos)
A ∩ Ā = Ø
A U Ā = S
P(S) = P(A U Ā)

Por la propiedad número 2, se tiene que P (S) = 1, conocido como el suceso seguro, y por la propiedad número 3, tenemos que:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

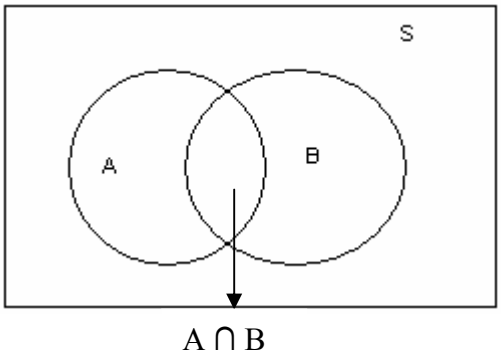
Luego,

$$P(S) = 1 = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- Teorema 3: si A y B son dos eventos cualesquiera (no necesariamente excluyentes), entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración:



$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$

Luego ** $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$, que resulta de la propiedad número 3. Pero $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ que son conjuntos excluyentes, entonces:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \quad , \qquad y$$

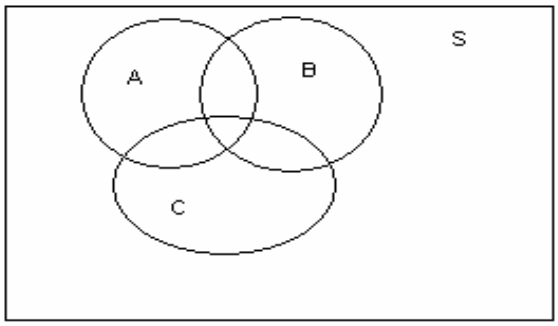
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Por lo tanto, reemplazando este último resultado por la ecuación **, se tiene:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ilustremos este teorema por medio de un ejemplo, para 3 eventos cualesquiera A, B y C, tenemos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

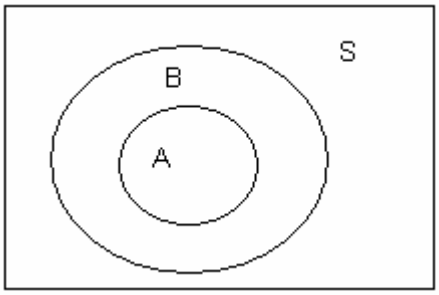


Sea A´ = A U B, Luego P (A U B U C) = P (A` U C) y por el Teorema 3,

= P (A)` + P (C) – P(A` ∩ C)
= P (A U B) + P(C) –P((A U B) ∩ C)
= P(A) + P(B) + P(C) – P(A ∩ B) – P((A U B) ∩ C)
=> P((A ∩ C) U (B ∩ C)
=> (P(A ∩ C) + P(B ∩ C) – P(A ∩ B ∩ C)
= P(A) + P (B) + P(C) – P(A ∩ B) – P(A ∩ C) - P(B ∩ C) + P(A ∩ B ∩ C)

- Teorema 4: si A ^{c} B, es decir, el suceso A es complemento del suceso B, entonces P(A) ≤ P(B)

Demostración:



B =A U (B ∩ Ā), con A y B ∩ Ā excluyentes

P(B) = P(A U (B ∩ Ā))= P(A) + P(B ∩ Ā)

Donde:

P(B ∩ Ā) ≥ 0 , por lo tanto:

P(A) + P(B ∩ Ā) ≥ P(A)

CLASE 11

5. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

La definición que hemos dado de probabilidad nos da ciertas reglas que debe cumplir la asignación de probabilidades, pero nos dice como asignarlas a distintos eventos, para ello debemos aclarar el concepto de probabilidad e indicar de antemano que no existe un significado único y que diversas interpretaciones son apropiadas para distintas circunstancias.

A continuación, se discutirán las formas de asignar probabilidades:

i) Probabilidad Subjetiva: en este caso, se habla del grado de credibilidad que una persona pone en la ocurrencia de un determinado suceso, lo que constituye una evolución subjetiva. De esta forma, por ejemplo, si se considera equitativo aportar m pesos contra n pesos a un cierto suceso A, entonces se le está asignando una probabilidad de:

$$\frac{m}{m+n}$$

Ejemplo Nº 23

Si apostamos $ 800 contra $ 200 a que A le gana B entonces:

$$P(A \text{ gana a } B) = \frac{800}{800 + 200} = 0{,}8$$

ii) Probabilidad como Frecuencia Relativa: en este caso, la probabilidad de un evento, se define como la proporción de veces que ocurre el evento en una larga serie de experimentos que se repiten, esencialmente, bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, al decir que la probabilidad de un cierto artículo resulte ser defectuoso es 0,05; significa que dentro de un gran número de artículos producidos un 5% son defectuosos.

iii) Principio de los Sucesos Igualmente Probables: el criterio más común para asignar probabilidad se basa en el principio de los sucesos igualmente probables, según el cual, cada punto muestral en su espacio S tiene igual probabilidad de ocurrir. Así, para asignar probabilidades seguimos el siguiente procedimiento.

a) Reconocer el espacio muestral: debemos determinar el espacio muestral S o el conjunto de resultados posibles del experimento aleatorio. Para ello puede ser preciso usar las reglas de enumeración, ya abordadas. Por ejemplo, para el experimento aleatorio de lanzar una moneda 3 veces tenemos el siguiente conjunto de resultados o espacio muestral:

$$S = \{ccc, ccs, csc, scc, ssc, scs, css, sss\}$$

En este caso, el número de puntos muestrales en S se puede calcular usando la regla de la multiplicación. Al lanzar la moneda tiene dos posibles resultados, por lo tanto:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

b) Definir el suceso: el paso siguiente, consiste en definir el suceso al que queremos calcular la probabilidad. Por ejemplo, definamos bajo la consideración del evento A, que al menos dos caras resultan al lanzar las 3 monedas (o una moneda tres veces)

A: {ccc, ccs, csc, scc}

Luego, como podemos observar existen cuatro puntos muestrales en A.

c) Calcular la probabilidad del suceso: como suponemos que los puntos muestrales son equiprobables (o sea igualmente probables), entonces la probabilidad del suceso A, P(A), es:

$$P(A) = \frac{\text{nº de puntos muestrales en A}}{\text{nº de puntos muestrales en S}}$$

$$= \frac{\text{nº de casos favorables a A}}{\text{nº de casos posibles}}$$

Para el ejemplo, tenemos:

$$P(A) = 4 \ / \ 8 = 1 \ / \ 2 = 0.5$$

$$P(A) = \frac{\text{nºs. de casos favorables a A}}{\text{nºs. de casos en S}}$$

Ejemplo Nº 24

Se tiene un grupo de 7 hombres y 8 mujeres ¿cuál es la probabilidad de elegir?

a) A 2 hombres y a 2 mujeres,
b) A 2 hombres o a 2 mujeres,
c) A 4 personas del mismo sexo.

a) A: se eligen 2 hombres y 2 mujeres de entre 7 hombres y 8 mujeres.

$$p(A)=\frac{n^\circ\ de\ casos\ en\ A}{n^\circ\ de\ casos\ en\ S}=\frac{\left[\frac{7}{2}\right]\left[\frac{8}{2}\right]}{\left[\frac{15}{4}\right]}=\frac{\frac{7!}{2!\,5!}\times\frac{8}{2!\,6!}}{\frac{15!}{4!\,11!}}=\frac{588}{1365}=0.43$$

La probabilidad es de un 43%.

b) B: se eligen 2 hombres o 2 mujeres de entre 7 hombres y 8 mujeres.

$$P(\mathrm{B})=\frac{\mathrm{n}^\circ\text{ de casos en B}}{\mathrm{n}^\circ\text{ de casos en S}}=\frac{\left[\frac{8}{2}\right]\left[\frac{7}{2}\right]}{\left[\frac{15}{2}\right]}=\frac{\frac{8!}{2!\,6!}+\frac{7!}{2!\,5!}}{\frac{15!}{2!\,13!}}=\frac{49}{105}=0.46$$

La probabilidad es de un 46%.

c) C: se eligen 4 personas del mismo sexo de entre 8 mujeres y 7 hombres.

$$P(C)=\frac{\mathrm{n}^\circ\text{ de casos en C}}{\mathrm{n}^\circ\text{ de casos en S}}=\frac{\left[\frac{7}{4}\right]\left[\frac{8}{4}\right]}{\left[\frac{15}{4}\right]}=\frac{\frac{7!}{4!\,4!}}{\frac{15!}{4!\,11!}}=\frac{105}{1365}=0.0769$$

La probabilidad es de un 7%.

Nota: recuerde, que en el caso a se pide la probabilidad de elegir 2 hombres y 2 mujeres, por lo tanto, la unión de conjuntos se multiplican los números de casos. Para, los casos b y c, se trata de intercepciones representadas por la letra o, ya sea de 2 hombres o 2 mujeres, y 4 personas del mismo sexo (ya sean 4 hombres o 4 mujeres); en estos casos los números de casos posibles se suman.

Realice ejercicios Nº 20 al 26

5.1 Probabilidad Condicional

Para una mejor comprensión de este tópico, desarrollemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo Nº 25

Supóngase que en una fabrica se produce un lote de 100 artículos, de los cuales 20 están fallados y 80 se encuentran sin fallas. Un supervisor de calidad elige 2 artículos de este lote, de dos maneras distintas:

a) Con reposición
b) Sin reposición

Definamos los siguientes eventos,

A: {1^{er} artículo fallado}
B: {2^{do} artículo fallado}

En el caso, que se eligen los artículos con reposición entonces, la probabilidad que ocurra el suceso A es:

$$P(A) = \frac{\left[\frac{20}{1}\right]}{\left[\frac{100}{1}\right]} = \frac{\frac{20!}{1!\,19!}}{\frac{100}{1!\,99!}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

La probabilidad que ocurra el suceso A es de un 20%.

$$P(B) = \frac{\left[\frac{1}{20}\right]}{\left[\frac{100}{1}\right]} = \frac{\frac{20!}{1!\,19!}}{\frac{100}{1!\;99!}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

La probabilidad que ocurra el suceso B es de un 20%, igual que la p(A), porque es con reposición, por lo tanto, lo tomo y luego lo devuelvo al lote.

En el caso contrario, que se elige sin reposición, entonces:

P(A) = 0,2
P(B) = ? ¿Cuál es la probabilidad de B?

Para calcular la probabilidad de B, debemos conocer la composición del lote al momento de elegir el 2do artículo. Esto es, debemos saber si A ocurrió o no.

Si llamamos A y B a dos eventos asociados con algún experimento aleatorio, entonces denotaremos por P(B/A) a la probabilidad condicional del evento B dado el evento A.

La probabilidad condicional quiere decir que, dado que el evento A ocurrió, cuál es la probabilidad de que ocurra el evento B.

Ejemplo Nº 26

Para explicar cómo desarrollar la probabilidad condicional, continuaremos con el ejemplo anterior:

Cálculos:

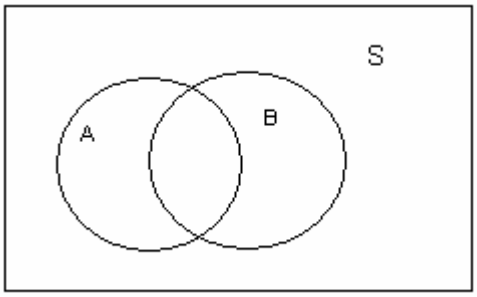
$$P(B/A) = \frac{19!}{99!} = \frac{\frac{19!}{1!\;18!}}{\frac{99!}{1!\;98!}} = \frac{19}{99} = 0.191191$$

La probabilidad de que ocurra el suceso B es de 19,2%, dado el evento A.

Como se puede observar, ya que si A ocurrió quedan solamente 19 artículos defectuosos de un total de 99 artículos.

Toda vez que se calcula la probabilidad condicional de P(B/A), esencialmente, se está calculando la probabilidad de ocurrencia del suceso o evento B, P(B), pero con respecto al espacio muestral reducido A, en vez de considerar el espacio muestral original S.

Lo anterior, se puede visualizar por medio de un diagrama de Venn:



Cuando se calcula la probabilidad de B, P(B), estamos preguntando cuán probable es que ocurra el suceso B sabiendo que estamos en S, y cuando calculamos la P(B/A), nos preguntamos cuán probable es que ocurra en B, sabiendo que ocurrió A, es decir, el espacio muestral original S, se redujo a A.

Entonces, si se resume la definición de eventos equiprobables, se tiene que la probabilidad de un evento cualquiera C, es:

$$P(C) = \frac{n_c}{n} = \frac{\text{nºs de casos en C}}{\text{nºs de casos en S}}$$

Si volvemos al diagrama de Venn, tenemos que refiriéndonos al espacio muestral reducido a A:

$$P(B/A) = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{n_{A \cap B}/n}{n_A/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Este resultado intuitivo motiva la siguiente definición:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \quad \text{si } P(A) > 0$$

Para calcular P(A/B), podemos utilizar dos métodos:

a) Directamente considerando la probabilidad de B con respecto al espacio muestral reducido, A, o
b) Usando la definición, donde P(A) y P(A ∩ B) han sido calculados con respecto al espacio muestral original S.

CLASE 12

5.2 Regla de Multiplicación de Probabilidades

A partir de la definición de probabilidad condicional, surge un nuevo concepto estadístico, que se basa en la regla de multiplicación de probabilidades, denominado Partición.

Recordemos que:

$P(A \cap B) = P(A/B)\ P(B)$, o

$P(A \cap B) = P(B/A)\ P(A)$

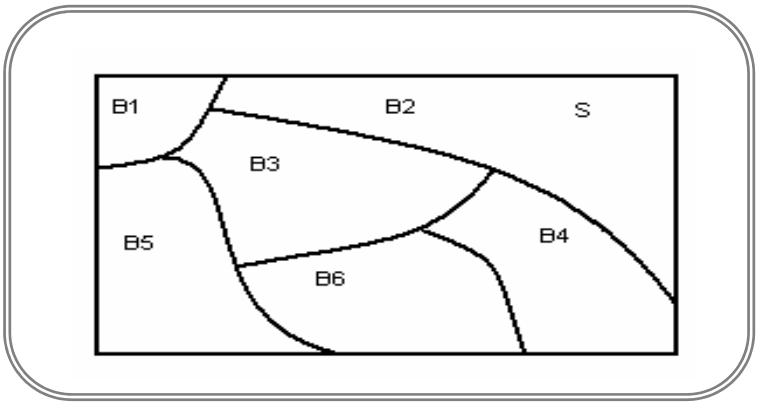
Definición de una Partición: se dice que los eventos $B_1, B_2, \ldots\ldots\ldots\ldots B_k$ representan una partición de un espacio muestral S, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $B_i \cap B_j = \emptyset \qquad \forall\ i \neq j$ (para todo i distinto de j)

b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup B_k = S$

c) $P(B) > 0 \qquad \forall_i$ (para todo i)

Lo que se representa en el siguiente diagrama de Venn:



5.3 Teorema de la Probabilidad Total

Sea A un evento cualquiera con respecto a un espacio muestral S y sea B_1, B_2,…….B_k una partición de S, entonces podemos decir que:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A \cap B_k)$$

Uno de estos puede ser Ø

Podemos tener algunos conjuntos $A \cap B_i = \emptyset$, esto no invalida el resultado. Lo importante, es que todo estos eventos $A \cap B_1$ $A \cap B_2$ ……., $A \cap B_k$ son mutuamente excluyentes, por lo que podemos escribir:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (P(A \cap B_k)$$

Pero, cada término es igual a $P(A \cap B_i) = P(A / B_i)\, P(B_i)$, entonces al reemplazar queda:

$$P(A) = P(A/B_1)\, P(B_1) + P(A/B_2)\, P(B_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(A/B_k)\, P(B_k)$$

Ejemplo Nº 27

Retomando el ejemplo de la fábrica que produce 100 artículos por lote, de los cuales 20 artículos salen fallados y 80 sin fallos.

Sea: A = {1^{er} artículo fallado}, y
B = {2^{do} artículo fallado}

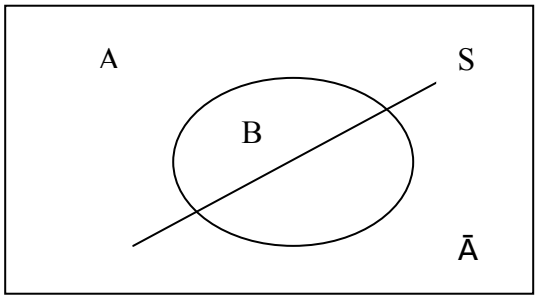
Cálculo:

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \qquad P(\bar{A}) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

Donde:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{19}{99} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = ?$$



$A \cap \bar{A} = \emptyset$
$A \cup \bar{A} = S$
$P(A)$ y $P(\bar{A}) > 0$

Por lo tanto:

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(B/A)\,P(A) + P(B/\bar{A})\,P(\bar{A})$$

$$= \frac{19}{99} \times \frac{20}{100} + \frac{20}{99} \times \frac{4}{5} = \frac{19}{495} + \frac{80}{495} \Rightarrow \frac{99}{495} \Rightarrow 0.2 = 20\%$$

5.4 Teorema de Bayes

Sea B_1, B_2,…….., B_k una partición de un espacio muestral S, supóngase que se desea calcular $P(B_i/A)$, para cualquier B_i y cualquier evento A en S el Teorema de Bayes establece que:

$$P(Bi/A) = \frac{P(A/B_i)\,P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A/B_j)\,P(B_j)}$$

Demostración:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \quad , \; i= 1,2,\ldots..k$$

$$= \frac{P(A/B_i)\,P(B_i)}{P(A)}$$

Como B_1,B_2,……B_k es una partición de S y A es un evento o suceso en S;

$$A=(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\cup (A \cap B_k)$$

Y por teorema de probabilidad total

$$P(A) = P(A/B_i)\,P(B_1)+\ldots\ldots\ldots..P(A/B_k)\,P(B_k) \underset{j=1}{\overset{k}{=}} \sum P(A/B_j)\,P(B_j)$$

Luego:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)\,P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A/B_j)\,P(B_j)}$$

Ejemplo Nº 28

Supóngase que un fabricante tiene 3 máquinas X, Y y Z que producen tornillos. Se sabe que el 5% de los tornillos producidos por la máquina X son defectuosos y que la máquina Y y Z producen un 10% y un 15% de tornillos defectuosos, respectivamente. Los productos de las tres máquinas se mezclan de manera que no es posible distinguir de qué máquina provienen los tornillos, pero se sabe que las 3 máquinas tienen igual capacidad y funcionan al mismo ritmo de producción. Al tomar un tornillo al azar, se encuentra que éste es defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina Y?

Se tiene que:

X: {artículo proviene de la máquina X}
Y: {artículo proviene de la máquina Y}
Z: {artículo proviene de la máquina Z}
D: {tornillo defectuoso}

Se busca: P = (Y/D) = ?, ahora sabemos que P(X) = P(Y) = P(Z) = 1 /3, pues tienen igual capacidad y ritmo productivo.

Además, conocemos las probabilidades de:

P(D/Y) = 0,1 (probabilidad de que la máquina Y produzca un tornillo defectuoso)
P(D/X) = 0,05 (probabilidad de que la máquina X produzca un tornillo defectuoso)
P(D/Z) = 0,15 (probabilidad de que la máquina Z produzca un tornillo defectuoso)

Por lo tanto:

$$P(Y/D) = \frac{P(Y \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(D/Y)\,P(Y)}{P(D/X)\,P(X) + P(D/Y)\,P(Y) + P(D/Z)\,P(Z)}$$

$$\frac{0{,}1 \times 0{,}3}{0{,}05 \times 0{,}3 + 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}15 \times 0{,}3} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad que el tornillo provenga de la máquina Y es de 33%.

$$P(Y/D) = 1 - P(Y/D) = 1 - (1/3) = 2/3$$

Representa la probabilidad de que el tornillo defectuoso no provenga de la máquina Y.

Realice ejercicios Nº 27 al 30

RAMO: ESTADÍSTICA

IPLACEX
instituto profesional

UNIDAD III

VARIABLES ALEATORIAS Y MODELOS ESTOCÁSTICOS

CLASE 01

1. VARIABLES ALEATORIAS

En unidades anteriores, se analizó un modelo mediante el concepto matemático de probabilidad, con el fin de describir las regularidades estadísticas de los fenómenos o experimentos aleatorios. Siguiendo en la misma línea de modelización de comportamiento de estos fenómenos, se expresan sus posibilidades o resultados en forma numérica.

En la mayoría de los casos, resulta natural atribuir un número a cada resultado de un experimento. Por ejemplo, si este consiste en lanzar al aire un dado ordinario, al suceso "*sale 1*" le asignamos el número 1; si el resultado "*sale 2*" le asignamos el número 2, y así, sucesivamente.

En otros casos, la forma de atribuir números a los sucesos de un experimento es convencional. Por ejemplo, al observar el sexo de un recién nacido, podemos asignar un número "*a*" cualquiera al resultado masculino y otro "*b*" (donde $b \neq a$), al resultado femenino. Sin embargo, en este tipo de experimentos, por razones de simplicidad, conviene asignar a estos resultados los valores que respondan de la forma más simple al análisis de dichos experimentos. Así, en el ejemplo anterior, asignaremos a los resultados masculinos y femeninos los valores 0 y 1, respectivamente.

Cada vez que atribuimos a los resultados de un experimento números reales, lo que hacemos es considerar una función cuyo dominio es el espacio muestral y cuya imagen es un determinado subconjunto de la recta real (si se pone atención, nos damos cuenta que estamos utilizando conceptos matemáticos).

Esta función es una variable aleatoria o variante. Así pues, una variable aleatoria relativa a un experimento es una función que asigna a cada suceso elemental un punto de la recta real.

Aunque, si el experimento es compuesto, es posible asignar más de un número a cada uno de los resultados posibles, con lo anterior, nos referimos en lo sucesivo al caso particular de que cada resultado venga expresado exclusivamente a las variables aleatorias unidimensionales.

La noción de variable aleatoria que acabamos de introducir necesita ser precisada, para que matemáticamente proporcione una herramienta útil en las aplicaciones estadísticas a abordar.

Se debe señalar, que cada variable aleatoria asociada a un experimento, toma cada uno de sus valores con una probabilidad inducida por la aleatoriedad del fenómeno a que hace referencia. Esto quiere decir, que la probabilidad de un suceso debe tener la adecuada

trascripción al campo numérico que contiene la imagen[1] de la variable. Cuando el espacio muestral es finito o infinito numerable, dicha trascripción es posible sin más que exigir que la pre-imagen de cualquiera de los valores que toma la variable.

Ocurre que son frecuentes también los fenómenos cuyos sucesos elementales no son numerables, como sucede, por ejemplo, al medir la longitud de un determinado tipo de tornillo. En estos casos, el interés se centra no en el valor exacto del resultado, sino en que este se encuentre o no comprendido entre dos números fijados de antemano.

Para el ejemplo anterior, lo útil en la práctica es poder determinar con que frecuencia o con que probabilidad la longitud X del tornillo verifica o no una relación del tipo:

$$a < X \leq b, \qquad \text{o bien} \qquad X \in \,]a, b]$$

En donde a y b son dos números reales prefijados. Para transcribir las probabilidades de los sucesos en el caso de un espacio muestral no numerable, debe exigirse igualmente a la variable que la pre-imagen de cualquier intervalo]a ; b] sea un suceso del experimento que describe.

Puesto que cualquier intervalo de]a, b] puede ser expresado como:

$$]\,a, b] = \,]-\infty, b], \cap \,]-\infty, a]^c$$

Éste indica el conjunto complementario respecto de R del intervalo]-∞, a], es suficiente imponer a la variable el que la pre-imagen de cualquier intervalo del tipo (-∞, x] sea un suceso.

Es posible generalizar, la anterior noción de variable aleatoria, como sigue:

Sea (Ω, α) un espacio probabilizable, en donde α es un álgebra (de sucesos) del subconjunto de Ω (espacio muestral). Una aplicación $X: \Omega \longrightarrow R$ es una variable aleatoria[1] si para todo número real x, se tiene:

$$X^{-1}\,]-\infty, x] \in \alpha$$

[1] Imagen de la variable es lo que se proyecta en el eje y, y la pre-imagen es lo que se proyecta en el eje x.

[2] En general, se define la variable aleatoria como una aplicación medible de (Ω, α) en (R, β), siendo α una σ-álgebra de sucesos (cerrada para la unión numerable), R el conjunto de los números reales y β la σ-álgebra generada por complementación y reunión numerables de los intervalos reales]-∞,b] (σ-álgebra de Borel).

Ejemplo Nº 1

Consideremos, el espacio muestral relativo al experimento de lanzar al aire un dado ordinario, y el álgebra α formada por los sucesos:

a) Imposible (Ø)
b) Seguro (Ω)
c) "sale par"
d) "sale impar"

Lo que se denota como:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; Espacio muestral

$\alpha = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$ Álgebra de sucesos

La aplicación de Ω (espacio muestral) en R, que se denota como X (variable aleatoria), tal que:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = 2, 4, 6 \\ 1 & \text{si } \omega = 1, 3, 5 \end{cases}$$

Es una variable aleatoria, pues $X^{-1}\,]-\infty, x] = \emptyset \in \alpha$, si $x < 0$; $X^{-1}\,]-\infty, x] = \{2, 4, 6\} \in \alpha$, si $0 \leq x < 1$, y $X^{-1}\,]-\infty, x] = \Omega \in \alpha$, si $x \geq 1$.

Sin embargo, la aplicación de Ω en R, X, tal que $X(\omega) = \omega$, $\omega = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{6\}$, no es una variable aleatoria sobre (Ω, α), ya que, por ejemplo, $X^{-1}\,]-\infty, 4] = \{1, 2, 3, 4] = \{1, 2, 3, 4\} \notin \alpha$.

Cuando $\alpha = P(\Omega)$, toda aplicación de Ω en R, será una variable aleatoria, pues para toda x, $X^{-1}\,]-\infty, x]$ es siempre un subconjunto de Ω (espacio muestral), es decir, un elemento (suceso) de $P(\Omega)$ (probabilidad de estar en el espacio muestral).

1.1 Propiedades de la Variable Aleatoria

Para que X sea una variable aleatoria, se debe verificar que cumpla con las siguientes propiedades:

a. La pre-imagen por X del conjunto vacío es el suceso imposible. Esto se denota como:

$$X^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

b. La pre-imagen por X de R es el suceso Seguro, lo que se denota como:

$$X^{-1}(R) = \Omega.$$

c. La pre-imagen por X del intervalo I (en el ejemplo nº 1 "sale par") es el suceso A; entonces, la pre-imagen del intervalo I^c (complemento del intervalo I, en el ejemplo nº1 "sale impar") es el suceso contrario de A.

d. La pre-imagen por X de la unión de intervalos es la unión de los sucesos que son pre-imagen de cada uno de dichos intervalos. Entonces:

$$x^{-1}(I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n) = \left[X^{-1}(I_1)\right] \cup \left[X^{-1}(I_2)\right] \cup \ldots \cup \left[X^{-1}(I_n)\right] = \\ = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

CLASE 02

1.2 Ley de Probabilidad de una Variable Aleatoria

Una variable aleatoria es un número que depende del resultado de un experimento aleatorio. Lo que está en juego es la *localización* de este número: determinar cuales son las posibilidades de caer en tal o tal parte de R. Esta localización conduce a asociar a toda variable aleatoria una *ley de probabilidad* sobre R.

Se llama ley de la variable aleatoria X a la ley de probabilidad P_x sobre R, definida para todo conjunto A de R por:

$$P_x(A) = P(X \in A)$$

En la práctica nos olvidamos de la codificación inicial en eventos y la ley de probabilidad P sobre Ω, para quedarnos finalmente con la ley P_x sobre R. Si solamente observamos una variable aleatoria X, podremos considerar que los eventos son los valores reales que ella puede tomar y dotar a este conjunto de la ley de X.

Por razones de modelado y también por comodidad matemática, consideramos dos tipos de variables aleatorias: las variables aleatorias *discretas*, que solamente toman un número finito o numerable de valores (en general valores enteros) y las variables aleatorias *continuas* que pueden tomar, a priori, cualquier valor en un intervalo de número reales. Esta diferenciación corresponde, por supuesto, a la que ya se consideró para las leyes de probabilidad.

Sea X la variable aleatoria que describe al experimento E, y sea Ω el espacio muestral relativo a E. Para cada Subconjunto A =]-∞, x], de R, se tiene que:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

Es un suceso del experimento

Por tanto, la probabilidad P establecida en P(Ω) puede ser transcrita a la clase β generada por la reunión (finita o numerable) y la complementación de intervalos del tipo] -∞,x], definiendo en β la probabilidad siguiente:

$$P_X(A) = P\{X(\omega) \in A\} = P\{X^{-1}(A)\}$$

Para cada x ∈ R, la probabilidad $P_X(-\infty, x] = P_X\{X(\omega) \leq x\}$ suele expresarse, por un abuso del lenguaje, como:

$P\{X(\omega) \leq x\}$ o, brevemente, como $P(X \leq x)$

Esta probabilidad es una función de x, F(x), llamada función de distribución de la variable X:

$$F(x) = p(X \leq x)$$

Ejemplo Nº 2

Suponga que se realiza un experimento, que consiste en señalar al azar un punto del segmento [0, 1], donde β es la clase de subconjuntos antes descrita. La variable aleatoria X: [0, 1] →R, tal que X tiene como función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \leq 0 \\ x & si \;\; 0 < x < 1 \\ 1 & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

En este punto, podemos hacer el siguiente análisis: del mismo modo que las probabilidades de los sucesos de un experimento constituyen el modelo teórico de las correspondientes frecuencias relativas, y la variable aleatoria el de la variable estadísticas, la función de distribución lo es de las frecuencias relativas acumuladas (Observe Cuadro Nº 1).

Cuadro Nº 1: Comparación Función de Probabilidad – Variable Aleatoria

Variables Aleatorias		Teoría de Probabilidad
Variable Aleatoria	X : x_1 , x_2 , x_3, … x_n	Variables Estadística
Probabilidad de un suceso	P_x (A) = P (X ϵ A)	Frecuencia Relativa
Función de Distribución	F(x) = P (X ≤ x)	Frecuencias Acumulada

La función de distribución determina la ley de probabilidad de la variable aleatoria, pues si se conoce F(x) pueden hallarse las probabilidades de que X tome valores entre dos números reales x_1, y x_2 ($x_1 < x_2$) cualesquiera. En efecto, los sucesos ($X \leq x_1$) y ($x_1 < X \leq x_2$) son mutuamente excluyentes y tales que ($X \leq x_1$) U (la unión) ($x_1 < X \leq x_2$) = ($X \leq x_2$), por tanto:

$$P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2)$$

En donde:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

1.3 Propiedades de la Función de Distribución

La función de distribución, F(x), de una variable aleatoria tiene las siguientes propiedades esenciales:

a. F(x) es no decreciente. Para cada par de números reales x1, x2 tales que x1 < x2, se tiene que F(x2) – F(x1) = P(x1 < X ≤ x2] ≥ 0, esto es, F(x1) ≤ F(x2).

b. F(x) es no negativa y lím $_{x\to-\infty}$ F(x) = 0, lím $_{x\to-\infty}$ F(x) = 1. F(x) es no negativa pues representa una probabilidad. Por otra parte, como admitimos que X(ω) < ∞, cualquiera que sea ω ∈ Ω (espacio muestral), lím $_{x\to-\infty}$ F(x) y lím $_{x\to+\infty}$ F(x), expresan la probabilidad de que X no tome ningún valor finito y que tome cualquier valor finito, respectivamente, verificándose entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = p(\varnothing) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = F(+\infty) = p(\Omega) = 1$$

c. F(x) es continua por la derecha. La continuidad de F(x) por la derecha se deduce de que, siendo F(x +ε) – F(x) = P(x< X ≤ x + ε), se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[F(x+\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x) + P(x < X \leq x+\varepsilon)\} = P(X \leq x) + P(X = x) = F(x)$$

Sin embargo, F(x) no siempre es continua por la izquierda. En efecto, ya que F(x) – F(x – ε) = p(x – ε < X ≤ x) para todo número real ε > 0, se tiene tomando Límites:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[F(x-\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x) - P(x-\varepsilon < X \leq x)\} = P(X \leq x) - P(X = x) = F(x) - P(X = x)$$

Con lo que F(x) es discontinua por la izquierda si $P(X = x) > 0$, presentando la función un salto de longitud $p(X = x)$. Recíprocamente. Si F(x) es continua en $x = x_0$, entonces, $P(X = x_0) = 0$.

CLASE 03

2. TIPOS DE VARIABLES

A modo de reforzar el concepto de variable aleatoria, retomaremos este tópico con un ejemplo.

Ejemplo Nº 3

Supongamos un experimento aleatorio, que consiste en lanzar, de manera ordenada, tres monedas al aire, para observar el número de caras (c) y sello (s) que se obtienen, el espacio muestral asociado (Ω) a dicho experimento aleatorio sería:

$$\Omega = (ccc, css, scs, ssc, ccs, scc, csc, sss)$$

Podemos observar, que en este espacio muestral los resultados posibles no son numéricos. Sin embargo, en estadística resulta más fácil utilizar valores numéricos en lugar de trabajar directamente con los elementos del espacio muestral.

De esta forma, se identifican los posibles sucesos:

- "una cara obtenida al realizar el experimento" (suceso A)
- "tres caras obtenidas al realizar el experimento" (suceso B)
- "dos caras obtenidas al realizar el experimento" (suceso C)
- "cero cara obtenida al realizar el experimento" (suceso D)

De este modo aparece el concepto de *Variable Aleatoria*, que se denota como:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow R \\ A &\longmapsto X(A) = x_A \\ B &\longmapsto X(B) = x_B \\ C &\longmapsto X(C) = x_C \\ D &\longmapsto X(D) = x_D \end{aligned}$$

En donde se le atribuye un único número real (x_A) a cada suceso elemental (A), del espacio muestral (Ω) definido para la variable aleatoria en estudio.

Por lo tanto, para nuestro ejemplo se define la variable aleatoria como:

X : número de caras obtenidas al realizar el experimento

Definiendo un número a cada posible suceso, se tiene:

Suceso A :	X(css) = X(scs) = X(ssc)	=	1
Suceso B :	X(ccc)	=	3
Suceso C :	X(ccs) = X(scc) = X(csc)	=	2
Suceso D :	X(sss)	=	0

Una vez que el alumno ha comprendido el concepto de variable aleatoria, a continuación, se segregará en dos tipos de variables aleatorias, las cuales serán abordadas en forma separada.

2.1 Variable Aleatoria Discreta

La variable aleatoria discreta es aquella que solo puede tomar un número finito o infinito numerable de valores. Es decir, sea (Ω, α , p) un espacio probabilístico y X una variable aleatoria definida en él, decimos que ésta es una *variable aleatoria discreta* si el conjunto:

$$X(\Omega) = \{ X(\omega), \text{ para todo } \omega \in \Omega \}$$

Es finito o infinito numerable

Las características de este tipo de variables nos van a permitir definir una nueva función más operativa que la función de distribución.

Sea X una variable aleatoria discreta, donde su función de probabilidad es una aplicación de:

$$f_X : R \longrightarrow R \quad \text{, definida como}$$

$$f_X(x) = p(X = x) \qquad \text{para todo } x \in R$$

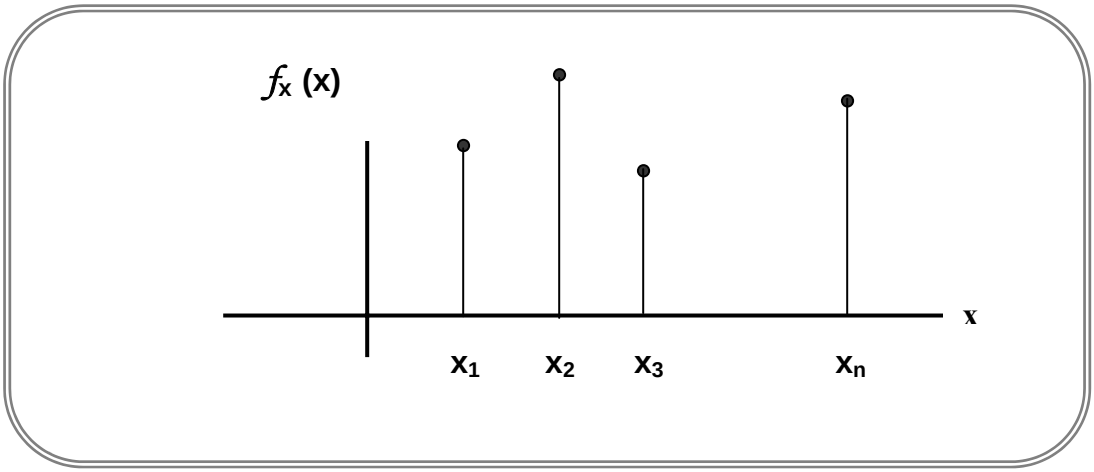
Podemos observar, que si X(Ω) es el conjunto $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, la función de probabilidad toma los valores:

$$f_X(x_i) = p(X = x_i) \quad \text{para } i = 1,2,3,\ldots n.$$

y es igual a cero para el resto de los número reales

Buscando una mejor visualización de la distribución, la representación de la función de probabilidad se realiza sólo para los puntos en los que toma los valores no nulos. Lo que se presenta en el cuadro Nº 2.

Cuadro Nº 2: Función de Distribución de Probabilidad Para una Variable Aleatoria



La función de probabilidad (f_X (x)), en cuya notación omitiremos el subíndice $_X$, es decir, por abuso de lenguaje se denota como f (x); permite calcular las probabilidades para una variable aleatoria discreta.

Ejemplo Nº 4

Un fabricante de tornillos afirma que el 5% de éstos son defectuosos. Supongamos, que disponemos de una caja de 100 unidades, estudiamos la variable aleatoria X: número de extracciones hasta encontrar el primer tornillo defectuoso.

Clave: es evidente que debemos recordar, que los resultados dependerán de que devolvamos, o no, a la caja el tornillo extraído.

Caso: las extracciones se realizan con reemplazo.

X = *sacar el tornillo defectuoso* (X =1)

D_1 = *es la probabilidad de que el tornillo que salga sea defectuoso* (0.05)

D_K = *es la probabilidad de que el tornillo que salga no sea defectuoso* (0.95)

La variable aleatoria toma como valores posibles todos los números naturales, con la siguiente función de probabilidad:

$$f(1) = p\,(X = 1) = p\,(D_1) = 0.05$$

En el segundo suceso, resulta que el primer tornillo no sale defectuoso con una probabilidad de 0.95 (que resulta por complemento de la probabilidad de que si salga defectuoso). Por lo tanto, la función de probabilidad se denota como:

$$f(2) = p\,(X = 2) = p\,(D_1D_2) = 0.95*0.05$$

De esta forma, podemos expresar la función de probabilidad, donde D_i indica el suceso de obtener un tornillo defectuoso en la extracción i-ésima, y en general:

$$f(k) = p\,(X = k) = p\,(D_1D_2\ldots D_{K-1}\,D_k) = \underbrace{0.95*0.95*\ldots.0.95*0.95}*\,0.05$$

$$f(k) = p\,(X = k) = p\,(D_1D_2\ldots D_{K-1}\,D_k) = 0.95^{k-1}\,0.05$$

Comprobemos que f es una función de probabilidad. Obviamente, $0 \leq f(k) \leq 1$ y, además:

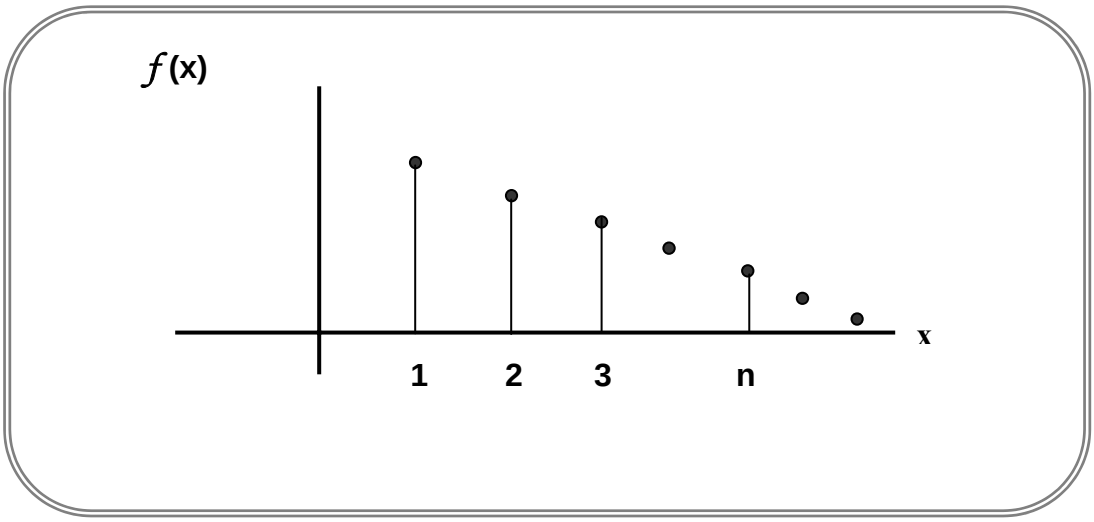
$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0.05 * 0.95^{k-1}$$

$$= 0.05 \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{0.95^{k-1}}$$

$$= 0.05 * \frac{1}{1 - 095} = 1$$

Al extraer los términos fijos de la sumatoria, fuera de ésta, es posible simplicar nuestra expresión y demostrar que equivale a 1.

Cuadro Nº 3: Representación gráfica función de Distribución de Probabilidad – Ejemplo Nº4



Caso: las extracciones se realizan sin reemplazo.

X = *sacar el tornillo defectuoso* (X =1)

D_1 = *es la probabilidad de que el tornillo que salga sea defectuoso* (5 / 100)

D_K = *es la probabilidad de que el tornillo que salga no sea defectuoso* (95/100)

La variable aleatoria discreta, ahora, toma únicamente los valores 1,2,3,…96, nos preguntamos ¿Por qué la variable puede tomar hasta el 96? Sabemos que son 100 tornillos, pero la probabilidad de que salga defectuoso el tornillo es de 5%, por lo tanto de los 100 tornillo "5" serán defectuosos y la variable x: "sacar el (primer) tornillo defectuoso" puede ocurrir en el suceso 96. Con la siguiente función de probabilidad:

$$f(1) = p\,(X = 1) = p\,(D_1) = 5 / 100$$

En el segundo suceso, resulta que el primer tornillo no sale defectuoso con una probabilidad de 0.95 (que resulta por complemento de la probabilidad de que si salga defectuoso), pero en este caso al elegir el segundo tornillo nos quedan sólo 99 posibles a elegir. Por lo tanto, la función de probabilidad se denota como:

$$f(2) = p\,(X = 2) = p\,(D_1D_2) = 95 / 100 \;*\; 5 / 99$$

Y, en general:

$$f(k) = p(X = k) = \frac{95}{100} * \frac{94}{99} * \frac{95 - (k-2)}{100 - (k-2)} * \frac{5}{100 - (k-1)}$$

2.2. Variable Aleatoria Continua

El segundo tipo de variables aleatorias de tratamiento aceptablemente sencillo es el que se presenta con el nombre de variables absolutamente continuas, y que se denominan, simplemente, continuas.

Sea X una variable aleatoria y F (x) es su función de distribución. Decimos que X es una variable aleatoria continua, si y sólo si:

- F (x) es una función continua
- Su derivada, F `(x), existe y es continua, a excepción en un número finito de puntos.

Las variables aleatorias continuas aparecen cuando se estudian características numéricas que pueden tomar una infinidad no numerable de valores. En ellas, pequeñas variaciones de x producen pequeñas variaciones de F(x), de forma que la probabilidad se acumula suavemente a lo largo de todo el campo de variación y no sólo en unos cuantos puntos.

Al igual que para las variables discretas existe una nueva función que va a facilitar el cálculo de las probabilidades en X. En donde esta variable puede tomar un número infinito o no numerable de valores.

Sea X una variable aleatoria continúa, su función de densidad es una aplicación de:

$$f(x) = R \rightarrow R$$

La que se define como:

$$f(x) = F`(x) = \frac{d\,F'(x)}{dx}$$

Donde F`(x) es la función de distribución de X.

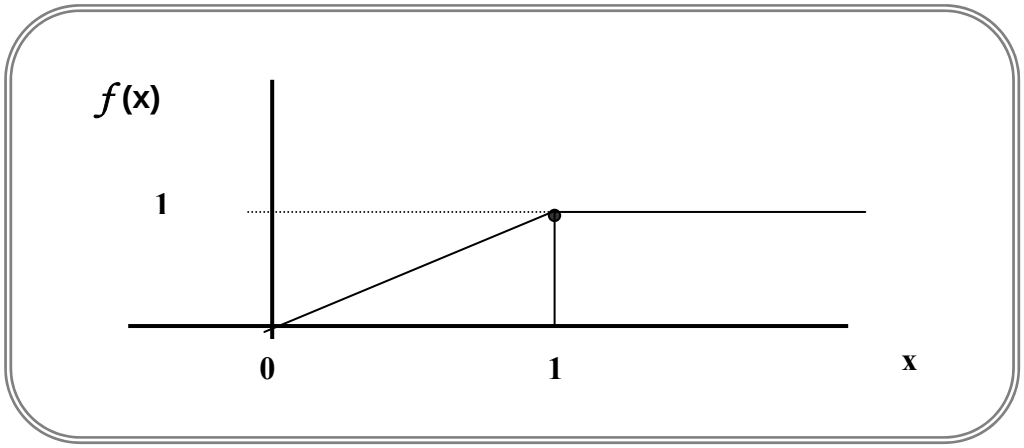
Ejemplo Nº 5

Se considera una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

La representación gráfica, de esta distribución, se presenta en el cuadro Nº4.

Cuadro Nº 4: Representación Gráfica Función de Distribución Variable Continua



En la representación gráfica, podemos observar que esta distribución es plana antes del 0 y después del 1, es decir, no hay a portes a la probabilidad; en el resto de la distribución (entre el cero y el uno) su crecimiento es constante, es decir, podemos decir que todos los puntos aportan cantidades insignificativas, pero iguales, de probabilidad.

Podemos decir, además, que en la función de densidad de X, F(x) es continua y derivable, salvo en x = 0 y x = 1, y su derivada es continua[2]. En efecto:

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Resumiendo, en 0 y 1, F no es derivable. Debido a lo siguiente: en x = 0, la derivada por la izquierda vale cero, y la derivada por la derecha uno. En x = 1, la derivada por la izquierda de F vale uno y por la derecha cero. Por lo tanto, no cumple con los requisitos de continuidad.

Conocida la función de densidad, se agilizan los cálculos de las probabilidades de los sucesos que vengan expresados en términos de la variable aleatoria.

Así, la probabilidad de que X tome valores superiores a 0.25 es:

$$p\,(X > 0.25) = \int_{0.25}^{1} 1 \; dx = 0.75$$

Recordemos que, por un lado, el cálculo de probabilidades para una variable aleatoria continua se realiza integrando la función de densidad y, por otro lado, una integral no varía si el integrado se cambia en un número finito de puntos (e, incluso, en un conjunto infinito numerable de puntos). Por lo tanto, se puede definir la función de densidad como se desee en los puntos en que no exista (que son una cantidad finita); ni las probabilidades, ni la función de distribución se modificarán.

Realice ejercicios Nº 1 al 4

[2] Una función es continua cuando la derivada por la derecha y la izquierda, arroja un mismo resultado y éste existe.

CLASE 04

3. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD Y FUNCIÓN DE DENSIDAD

Para el estudio de este punto, es necesario hacer la separación entre variables aleatorias *discretas y continuas.* Como ya sabemos, las variables aleatorias discretas toman valores aislados con una determinada *probabilidad* para cada valor, y las continuas toman ininterrumpidamente los valores de un intervalo real con una determinada *densidad* de probabilidad.

Según se trate de una variable discreta o continua, la correspondiente función de distribución permite considerar una nueva función asociada a la variable, que caracteriza a ésta, se conocen con el nombre de *función de probabilidad* en el caso discreto, y *función de densidad* en el continuo, como veremos a continuación.

a) *Función de probabilidad o cuantía*: sea X una variable aleatoria discreta, x_1, x_2, … son sus valores posibles, y $p(X = x_1) = p(X \leq x_1) = F(x_1) = p_1$; $p(X = x_2) = F(x_2)-F(x_1) = p_2$, etc., las probabilidades (no nulas) con que toma dichos valores. Esta función se presenta de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{si } x = x_i \quad {}_i = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{si } x \neq x_i \quad {}_i = 1,2,\ldots \end{cases}$$

La función que asigna una probabilidad no nula a cada valor posible se llama *función de cuantía o función de probabilidad* de la variable. Dicha función, de una variable discreta, verifica, obviamente, las propiedades:

- $0 \leq f(x) \leq 1$, que su función de distribución se encuentra entre el cero y el uno.

- $\sum_i f(x_i) = 1$, la sumatoria de la función de distribución, para todos los x_i, es igual a uno.

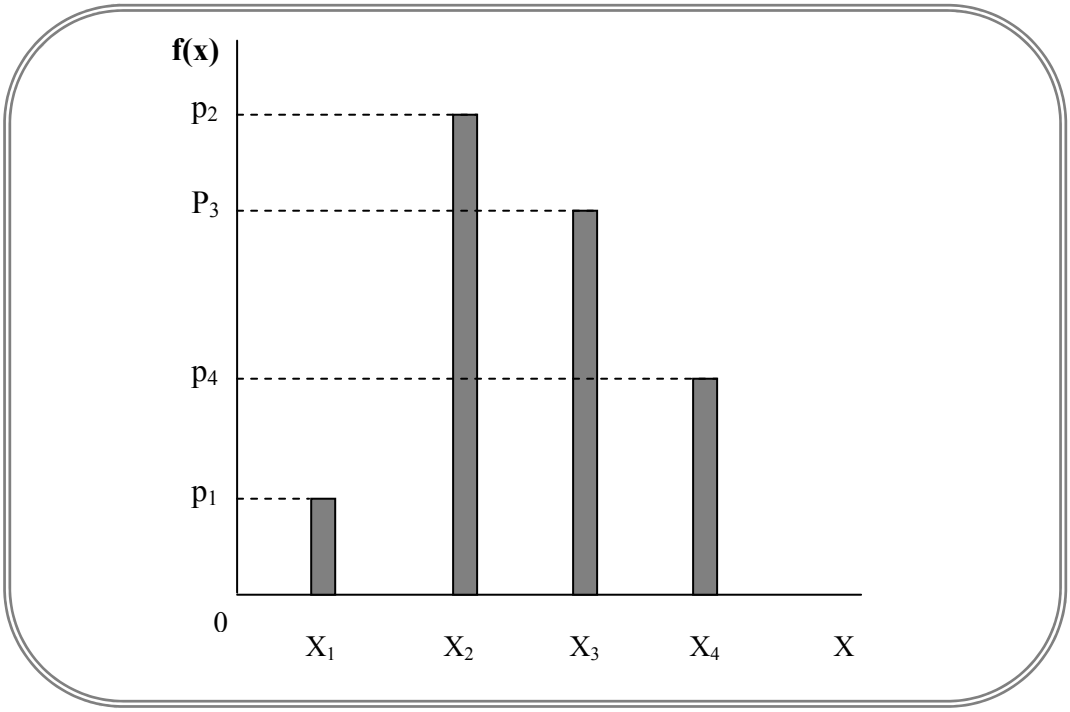
La función de distribución de una variable aleatoria discreta viene dada, entonces, por:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$$

Esta función toma el mismo valor, $F(x) = p_{i+1}$, para todo $x \in (x_i, x_{i+1}]$, i = 1, 2,…, y es discontinua para $x = x_i$, i= 1, 2,…; por lo tanto, es una función escalonada.

La representación gráfica de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta o *diagrama de probabilidades* se realiza levantando en cada valor x_i una barra de longitud igual a pi, i= 1,2, … (observe el cuadro Nº 5, el cual presenta un diagrama en escalera).

Cuadro Nº 5: Diagrama de Probabilidades de una Variable Aleatoria Discreta



b) *Funcion de densidad*: sea X una variable aleatoria continua, es decir, es aquella cuyos valores llenan ininterunpidamente un intervalo real con una determinada densidad de probabilidad. Para precisar esta idea, observemos, en primer lugar, que el conjunto de valores que toma una variable continua es no numerable. Ello quiere decir que la probabilidad de que la variable tome un valor aislado cualquiera es cero, salvo, a lo sumo, en un conjunto numerable de valores.

En efecto, sea A un conjunto finito de valores x_j, j= 1, 2, 3, …, n; si la variable X toma cada valor de A con la misma probabilidad, $p(X = x_j) = r$,j = 1, 2, …, n, se tendría que:

$$p(A) = \sum_{j=1}^{n} p(X = Xj) = n * r$$

Esta función superaría la unidad, es decir, no cumple la propiedad que la sumatoria de la distribución es igual a uno, cuando el número de valores n fuera tal que n > 1/r, lo que va en contra del concepto de probabilidad. Sin embargo, el que la variable pueda tomar valores aislados con probabilidad no nula, para un conjunto numerable (finito o no) de ellos es excepcional, y el modelo de variable tendría muy escasa aplicación práctica.

Cabe señalar, que el interés, en el caso continuo, se centra en determinar las probabilidades de que la variable tome valores entre dos números dados de antemano. Ahora bien, estas probabilidades se calculan a partir de la función de distribución de la variable.

Por tanto, en el caso continuo, impondremos la condición de que la probabilidad de que la variable X tome un valor "aislado x cualquiera" sea igual a cero. Entonces:

$$p(X \leq x) = p(X < x) + p(X = x) = p(X < x)$$

La probabilidad p(x < X< x + h) = F(x + h) - F(x) representa, cuando h es infinitesimal, un elemento de probabilidad o probabilidad elemental, y el cociente entre:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Es la densidad media de probabilidad en el intervalo (x, x + h). Ahora, se debe admitir que F(x) puede ser derivada y que ésta es continua en cada intervalo. Al utilizar límites, cuando h→ 0, se tiene:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F(x)$$

La función f(x) = F(x) se llama función de densidad de la variable aleatoria X. La función de densidad caracteriza, al igual que la de distribución, la varible continua, y tiene

una expresión matemática particular para cada variable. La Probabilidad de que la variable continua X tome un valor del intervalo (a,b) se halla sumado las infinitas probabilidades elementales entre a y b, es decir, mediante la correspondiente *integral definida*:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

La probabilidad de que X tome un valor del intervalo (a , b) puede verse como el área entre el eje *OX*, entre las ordenadas x = a, x = b y la gráfica de la función de densidad de X.

La función de distribución F(x) se expresa, en las condiciones de continuidad antes mencionadas, en la forma:

$$F(c) = p(x \leq x) = \lim_{a \to \infty} \int_a^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

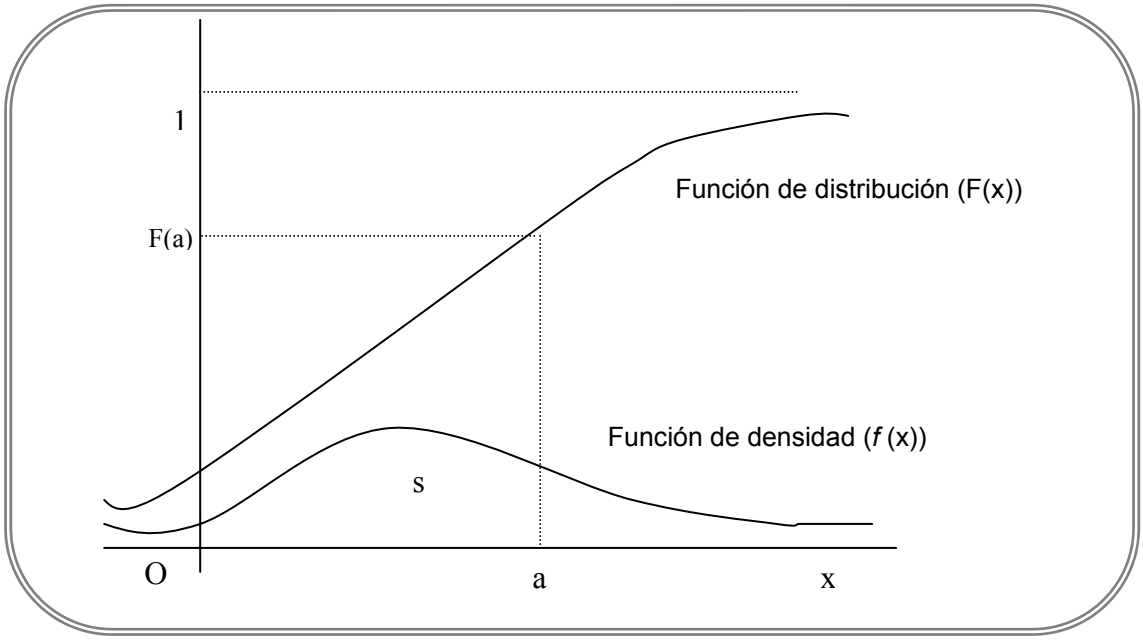
Algunas propiedades esenciales de la función de densidad de una variable aleatoria continua son:

a) f es no negativa. Ello resulta evidente del hecho de que f(x) es la derivada de una función (la función de distribución de la variable X) que es no decreciente.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, la integral definida de la función de distribución de X es igual a uno.

Al igual que ocurría con las variables estadísticas, en las que la ordenada (eje x) en cada punto del diagrama de frecuencia acumulada, significaba el área tras dicha ordenada del histograma correspondiente, la ordenada en x = a de la grafica de la función de distribución, llamada curva de distribución, representa el área entre esa ordenada, la porción (-∞, a) del eje *OX* y la gráfica de la función de densidad. (Observe el cuadro Nº 6)

Cuadro Nº 6: Funciones de Densidad y Distribución de unaVariable Aleatoria Continua



A continuación, se presentan algunas observaciones que se deben considerar al momento de realizar el análisis estadístico de una variable aleatoria discreta o una continua.

a) Aunque se utilice la misma notación para designar a ambas, existe una diferencia esencial entre la *función de probabilidad* de una variable discreta y la función de densidad de una variable continua, mientras que la primera es una probabilidad, la función de densidad en un punto no lo es (incluso puede tomar valores mayores que uno).

b) Puesto que los puntos tienen probabilidad cero, la probabilidad de un intervalo es la misma, tanto si contiene a uno o a los dos extremos, como si no contiene a ninguno de ellos.

c) Según hemos visto, la función de densidad en un punto x no es la probabilidad de dicho punto; entonces ¿qué expresa realmente dicha función? La función expresa la densidad de probabilidad *en torno al punto*.

Realice ejercicios Nº 5 al 8

CLASE 05

4. ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

En las variables estadísticas se buscaron números (promedios, medidas de dispersión, etc.) que resumían de forma representativa la información que se extraía de las muestras tomadas de dichas variables. De igual modo, en el modelo teórico de las variables aleatorias, se determinan valores que resumen significativamente la información que dichas variables contienen acerca de la población.

Los valores representativos de las muestras se llaman *estadísticos,* y los representativos de la población, *parámetros.* A continuación, se estudiarán la *Esperanza Matemática*, la *Varianza* y, en general, los *Momentos* de la variables aleatorias, que son los parámetros relativos a la media, varianza y los momentos muestrales, respectivamente. Es decir, los estadísticos proporcionados por las variables estadísticas.

4.1 Esperanza Matemática

Sea X una variable aleatoria discreta, x_1, x_2, …, x_n los valores que toma, y $p(X = x_i) = p_i$, i=1, 2, …,n, su función de probabilidad. Se conoce como *Esperanza Matemática* o *Valor Medio* (valor esperado) de X a la suma de los productos de los valores de la variable por sus probabilidades respectivas[2]: Lo que se denota como:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Es importante destacar que, la expresión anterior no es más que la generalización de la media de los valores observados en una muestra, sin más que sustituir fi / N, "frecuencia relativa de aparición del valor x_i", por su probabilidad de ocurrencia.

Dado lo anterior, la esperanza matemática de una variable tiene el siguiente sentido probabilístico:

[2] .Si el conjunto de valores que toma la variable es infinito numerable, la suma da lugar a una serie, exigiéndose que ésta sea absolutamente convergente.

La esperanza matemática de X está tanto más cerca de la media aritmética de los valores observados de X, cuanto mayor es el número de dichos valores. Es decir, si Y = aX + b, se tiene que:

$$E(Y) = E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

En efecto:

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) \cdot p_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i = aE(X) + b$$

Sea X una variable aleatoria continua y f(x) su función de densidad, que se sabe continua. Si X toma únicamente valores en el intervalo real I = [a, b] y dividimos I en n partes mediante los puntos $c_0 = a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$, la probabilidad de que X tome un valor arbitrario $x_i \in (c_{i-1}, c_i) = \Delta x_i$, i = 1, 2, …,n, es aproximadamente $F(x_i) * \Delta x_i$.

Por similitud con el caso discreto, la esperanza matemática de X será:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i * f(x_i) * \Delta x_i$$

Si los posibles valores de X son todos los números reales, la esperanza matemática se define como:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Para que la integral impropia expresada anteriormente exista, se impone la condición de que la integral entre, el valor absoluto de x y la función de densidad de x, exista. Es decir, que dicha integral sea convergente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx \quad \text{Exista}$$

4.2 Varianza y Momentos

Se definen los *momentos de orden r respecto al origen* de la variable aleatoria X como:

El valor esperado de la potencia X^r, es decir:

$$\alpha_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \cdot p_i$$

En particular, cuando r = 1, tenemos que:

$$\alpha_1 = E(X) = \mu$$

Donde:

α_1 : se define como Momento 1
E(X) : es la esperanza de x
μ : es la media poblacional

Los momentos respecto al valor medio de X o *momentos centrales de orden r* se definen como la esperanza matemática de la potencia $(X - \mu)^r$, es decir como la suma:

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^r \cdot p_i$$

Si desarrollamos esta expresión para r = 1,2,..,n, podemos obtener los respectivos momentos:

Momento	Se denota	Expresión
Momento 1	M1	$M_1 = E(X - \mu) = E(X) - \mu$ Sabemos que $\alpha_r = E(X^r)$, por lo tanto, reemplazamos: $M_1 = \alpha_1 - \mu$ $M_1 \longrightarrow \alpha_1 = E(X) = \mu$
Momento 2	M2	$M_2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$ $= E(X)^2 - 2\mu E(X) + \mu^2$ Sabemos que $\alpha_r = E(X^r)$ y $E(X) = \mu$; por lo tanto, reemplazamos: $M_2 = \alpha_2 - 2\mu * \mu + \mu^2$ $M_2 \longrightarrow \alpha_2 = \mu^2$
Momento 3	M3	$M_2 = E(X - \mu)^3 = E(X^3 - 3\mu X^2 + 3\mu^2 X - \mu^3)$ $= E(X)^3 - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - \mu^3$ Sabemos que $\alpha_r = E(X^r)$ y $E(X) = \mu$; por lo tanto,

		reemplazamos: $M_3 = \alpha_3 - 3\mu\alpha_2 + 3\mu^2 * \mu - \mu^3$ $M_2 \longrightarrow \alpha_3 = 3\mu\alpha - 2\mu^3$
Así, en adelante	* *	* *

Como podemos observar en estas expresiones obtenidas, el momento 2 representa la varianza estadística, descrita en unidades anteriores, por lo que, podemos decir que:

El momento central de segundo orden $\mu_2 = E(X-\mu)^2$ se denomina *varianza*, y a su raíz cuadrada $\sigma = \sqrt{\mu_2}$, desviación estándar o típica.

La Varianza tiene una gran importancia en el modelo teórico de las variables aleatorias. Sus propiedades son, entre otras, las siguientes:

i) $\mu_2 \geq 0.$ Propiedad que es relativamente simple de comprobar, pues es evidente, ya que si se tiene en cuenta que éste representa el valor medio de números reales no negativos, de la forma $(x_i - \mu)^2$.

ii) La varianza hace mínima la esperanza: $E(X - x)^2$. Para comprobar esta propiedad se puede simplemente observar que la $E(X - x)^2 \geq E(X - \mu)^2$, para todo x. Desarrollamos la expresión a modo de comprobación:

$$E(X-x)^2 = E\left[(X-\mu)+(\mu-x)\right]^2 = E(X-\mu)^2 + 2(\mu-x)E(X-\mu) + (\mu-x)^2$$
$$= \mu_2 + (\mu-x)^2 > \mu_2$$

Consideremos ahora un número positivo cualquiera λ, y X una variable aleatoria que toma los valores X_1, x_2, …,x_n. Supongamos que los valores x_i tales que $(x_i - \mu)^2 < \lambda$, son los j primeros del conjunto de los n posibles, de modo que para los n – j restantes se tendrá $(x_i - \mu)^2 \geq \lambda$. Entonces:

$$E(X-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot p_i = \sum_{i=1}^{j}(x_i-\mu)^2\cdot p_i + \sum_{i=j+1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot p_i \geq$$

$$\geq \sum_{i=j+1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot p_i \geq \lambda\cdot\sum_{i=j+1}^{n}p_i = \lambda\cdot p\left[(X-\mu)^2 \geq \lambda\right]$$

Donde

$$p\left[(X-\mu)^2 \geq \lambda\right] \leq \frac{\mu_2}{\lambda}$$

Si en esta desigualdad se despeja como $\lambda = k^2\cdot\mu_2, k<0$, obtenemos:

$$p\left[(X-\mu)^2 \geq k^2\cdot\mu_2\right] \leq \frac{\mu_2}{k^2\mu_2}$$

Por último, se obtiene:

$$p\left(|X-\mu| \geq k\cdot\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *Desigualdad de Tchebycheff,* la que informa lo escasa que es la probabilidad, que tiene una variable cualquiera, de tomar un valor fuera del intervalo ($\mu-\kappa\sigma, \mu+\kappa\sigma$), cuando k es grande.

Análogamente al caso de las variables aleatorias discretas, se definen para el caso continuo *los momentos de orden r respecto al origen* y *los momentos centrales de orden r*, como: la esperanza matemática de X^r y como la esperanza matemática de $(X - \mu)^r$, respectivamente , esto es:

$$\alpha_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}(X-\mu)^r f(x)dx$$

Para los momentos 1 y 2 (momento central), se definen como:

Esperanza Matemática M_1 $\mu = \alpha_1$

Varianza M_2 $\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx$

Estos momentos, tienen en las variables continuas, las mismas propiedades que las establecidas para el caso discreto.

Realice ejercicios Nº 9 al 18

CLASE 06

5. VECTORES ALEATORIOS

Como ya sabemos, la variable aleatoria es una característica numérica probabilizable de los resultados simples de un experimento aleatorio, por ejemplo, el número de caras que se obtienen en tres lanzamientos de una moneda.

Ahora bien, resulta interesante estudiar dos o más características ligadas a un experimento aleatorio, de manera de intentar explicar la posible relación existente entre las mismas, o de prever una de ellas a partir de la otra. De esta forma, nos puede interesar, por ejemplo, estudiar la altura y el peso de una persona.

Lo anterior, se resume en tratar de probabilizar dos o más características numéricas de los individuos de una población o espacio muestral, a partir de la probabilidad definida en dicho espacio muestral. Para lo cual, se amplían los conceptos unidimensionales de variables aleatorias, funciones de probabilidad, densidad y distribución, medidas que ayudan a describir una variable aleatoria, para abordar el estudio de *Variables Aleatorias n-dimensionales* o, también conocidos como, *Vectores Aleatorios*.

Vectores Aleatorios:

Que consiste en estudiar varias mediciones simultáneas sobre el resultado de un experimento aleatorio. De esta forma, obtenemos vectores cuyos componentes son variables aleatorias como las ya consideradas.

.

Ejemplo Nº 6

A continuación, se exponen ejemplos de vectores aleatorios:

a) Al lanzar n dados de igual probabilidad, se puede considerar la variable X como "el número obtenido en el dado i", el vector (X1, X2,..., Xn) es un vector aleatorio o variable aleatoria n-dimensional, que representa el número obtenido en cada uno de los n dados.

b) En un proceso de control de calidad, puede interesarnos el estudio conjunto de la variable que indica el número de artículos defectuosos y el tiempo de producción. Presentándose un caso bidimensional con una variable discreta y otra continua, con lo que se determina el vector (X,Y).

c) En un laboratorio se realiza un diseño de experimentos para medir la resistencia de un material, de forma aleatoria se obtienen los valores de las variables temperatura, tiempo y proporción de diluyente, presentándose una variable aleatoria de la siguiente forma vector (X, Y, Z).

Para simplificar el análisis, sólo trataremos vectores bidimensionales, es decir, la relación entre dos variables aleatorias.

Vector Aleatorio Bidimensional:

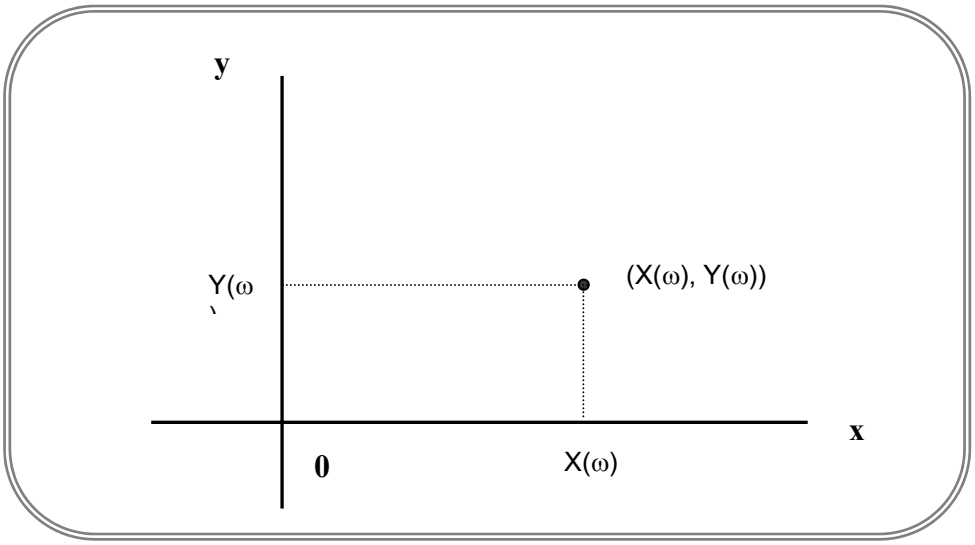
Se define como un par de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio muestral. Lo que se denota:

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow R^2$$

Que aplica cada punto (ω) del Ω (espacio muestral), en un punto del plano ($X(\omega)$, $Y(\omega)$).

Dada esta definición, podemos observar que un vector aleatorio o variable aleatoria bidimensional (X,Y) asociada a cada resultado posible del experimento, ω un punto del plano R^2 , que se denota como ($X(\omega)$, $Y(\omega)$). La abscisa del punto ($X(\omega)$), es el valor que toma la primera variable, X; y su ordenada ($Y(\omega)$), es el valor de la segunda, Y. Es decir, a cada resultado del espacio muestral (Ω) se le asigna un par de valores, que corresponden a las dos características numéricas a estudiar. (Ver cuadro Nº 7)

Cuadro Nº 7: Plano de una Variable Aleatoria Bidimensional Vector Aleatorio (X,Y)



5.1 Función de Distribución de un Vector Aleatorio

Si en el caso unidimensional se expresaba que la probabilidad inducida por una variable aleatoria es de difícil manejo, esta afirmación es tanto o más oportuna cuando la variable aleatoria es de dimensión mayor a la unidad (para nuestro estudio bidimensional). Resulta de interés definir, una función numérica, denominada función de distribución, que permita calcular la probabilidad asociada a una variable aleatoria bidimensional (vector aleatorio) y, en consecuencia, estudiar el comportamiento probabilístico de la misma.

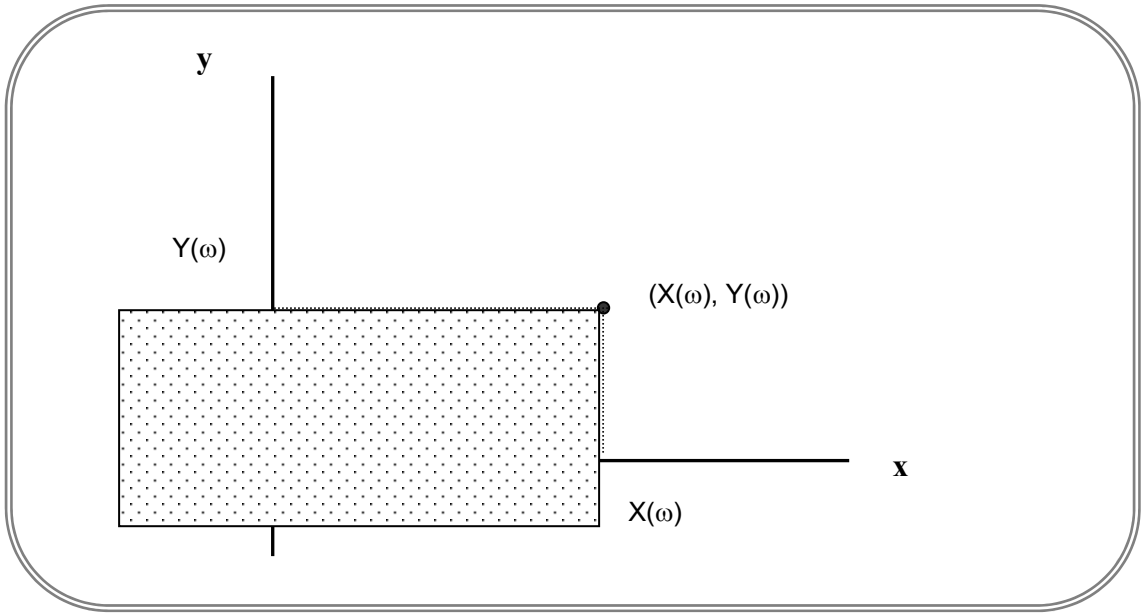
Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico y que (X,Y) una variable aleatoria bidimensional sobre Ω. Se denomina *función de distribución* del vector aleatorio (*X*, *Y*):

$$F: \quad R^2 \longrightarrow R$$
$$(x, y) \longrightarrow F_{(x,y)} = P(X \leq x, Y \leq y)$$

para todo (x,y) є R^2.

Por tanto, $F_{(x,y)}$ (x,y) es la probabilidad inducida por (X,Y) en el rectángulo (-∞, x) por (-∞, y), es decir, la probabilidad inducida hasta el punto (x,y).

Cuadro Nº 8: Función de Distribución Vector Aleatorio (X,Y)



Ejemplo Nº 7

Se lanzan al aire dos monedas cargadas, la primera sale cara y la segunda sello; la probabilidad de obtener cara es 0.8 para la primera moneda y 0.4 para la segunda.

X : variable aleatoria, número de caras obtenidas con la primera moneda.

Y : variable aleatoria, número de caras obtenidas con la segunda moneda.

Nuestro espacio muestral (Ω) es:

$$\Omega = [(c_1, c_2), (c_1, s_2), (s_1, c_2), (s_1, s_2)]$$

Donde c_i y s_i representan los resultados de obtener cara y sello, respectivamente, como la moneda i. El cálculo de probabilidades en Ω no representa dificultad, así por ejemplo:

$$p[(c_1, c_2)] = p(c_1)* p(c_2) = 0.8*0.4 = 0.32$$

Ya que se conocen las probabilidades de los dos sucesos elementales, es posible determinar la aplicación de Ω en R^2, de esta variable aleatoria bidimensional, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lccc} (X,Y): & \Omega & \longrightarrow & R^2 \\ & (c_1, c_2) & \longrightarrow & (1,1) \\ & (c_1, s_2) & \longrightarrow & (1,0) \\ & (s_1, c_2) & \longrightarrow & (0,1) \\ & (s_1, s_2) & \longrightarrow & (0,0) \end{array}$$

Ahora, podemos calcular su función de distribución para un par de número real (x,y). Por ejemplo: (-1,-2)

$$F_{(x,y)} = p(X \leq x, Y \leq y)$$
$$F_{(-1,-2)} = p(X \leq -1, Y \leq -2)$$
$$p(\Phi) = 0$$

En este caso, el lanzar la primera moneda tiene dos posibles resultados 1 ó 0, lo mismo para la segunda moneda, por lo tanto, no existe la probabilidad que X o Y tome valores menores que cero.

Que pasa con el par (1.5, 0.3):

$$F_{(x,y)} = p(X \leq x, Y \leq y)$$
$$F_{(1.5,0.3)} = p(X \leq 1.5, Y \leq 0.3)$$
$$p(X = 0, Y = 0) \cup p(X = 1, Y = 0)$$

Reemplazamos estas probabilidades, de acuerdo a su aplicación en R^2, nos queda:

$$p(s_1, s_2) + p(c_1, s_2)$$

Ahora, debemos calcular estas dos probabilidades a partir de los valores probabilísticos de los dos sucesos elementales:

$p(s_1) = 0.2$ (complemento de 0.8, probabilidad que salga cara)
$p(s_2) = 0.6$ (complemento de 0.4, probabilidad que salga cara)

Por lo tanto:

$$p(s_1, s_2) = p(s_1) * p(s_2) = 0.2*0.6 = 0.12$$

Luego;

$p(c_1) = 0.8$ (probabilidad que salga cara)
$p(s_2) = 0.6$ (complemento de 0.4, probabilidad que salga cara)

Por lo tanto:

$$p(c_1, s_2) = p(c_1) * p(s_2) = 0.8*0.6 = 0.48$$

Determinadas estas probabilidades, podemos calcular:

$$p(s_1, s_2) + p(c_1, s_2) = 0.12 + 0.48 = 0.6$$

En conclusión, decimos que la probabilidad del vector (1.5, 0.3) es de un 60%.

La función de distribución de cualquier vector aleatorio verifica las siguientes propiedades, que derivan de las ya conocidas para una variable aleatoria, a saber:

a) $0 \leq F_{(x,y)} \leq 1$ para todo $(x,y) \in R^2$ (como ya sabemos se trata de una función de probabilidad, por lo tanto, describe la acumulación de probabilidad a medida que vamos avanzando en el plano, tanto hacia la derecha, como si lo hacemos hacia arriba).

b) F es monótona creciente en cada variable, es decir:

si $x_1 < x_2$, entonces, $F_{(x1,y)} \leq F_{(x2,y)}$ para todo $y \in R$

si $y_1 < y_2$, entonces, $F_{(x,y1)} \leq F_{(x,y2)}$ para todo $x \in R$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F_{(x,y)} = 1$, para todo $(x,y) \in R^2$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F_{(x,y)} = 0 \quad , \text{ para todo } (x,y) \in R^2$$

d) $\lim_{x \to \infty} F_{(x,y)} = F_y(y)$, para todo $y \in R$

$\lim_{y \to \infty} F_{(x,y)} = F_x(x)$, para todo $x \in R$

e) F es continua por la derecha en cada variable, para todo $(x,y) \in R^2$

Tras definir la función de distribución y estudiar sus propiedades de forma general, trataremos los conceptos fundamentales de vectores aleatorios separando los casos discretos y continuos, que por lo demás sólo se distinguirán en las sumatorias frente a las integrales y las probabilidades frente a las densidades.

CLASE 07

5.2 Vectores Aleatorios Discretos

Un vector aleatorio (X, Y) se dice discreto si X e Y son discretas. En ese caso, suponemos que X toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_r$ e Y toma los valores $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Entonces el vector (X, Y) tomará los valores (x_i, y_j), que van entre:

$$1 \le i \le r \quad ; \quad 1 \le j \le s$$

Con probabilidades $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Estas probabilidades se denominan como *Distribución de Probabilidad Conjunta* del vector aleatorio (*X*, *Y*).

Los cálculos de probabilidad en variables aleatorias bidimensionales o vectores aleatorios de la forma (X,Y), especialmente cuando los dos componentes, x e y, toman un número finito de valores (son variables discretas), se pueden realizar con comodidad trabajando de forma análoga a como se hizo con las variables estadísticas, es decir, a partir de una tabla de doble entrada en cuyas casillas aparecen los valores de la función de probabilidad en lugar de las frecuencias.

De esta forma se construye la *Tabla de Distribución de Probabilidad Conjunta*, que podemos observar en el Cuadro Nº 9.

Cuadro Nº 9: Tabla de Distribución de Probabilidad Conjunta Vector Aleatorio (X,Y)

X \ Y	y_1	…	y_j	…	Y_m	…	
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	…	p_{1m}	…	p_{1*}
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	…	p_{im}	…	p_{i*}
…	…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	…	p_{nj}	…	p_{nm}	…	p_{n*}
…	…	…	…	…	…	…	…
	p_{*1}	…	p_{*j}	…	p_{*m}	…	1

Nótese que a esta tabla le hemos añadido una última columna a la derecha y una última fila en la base. Representan las *Distribuciones Marginales* de las variables X e Y, respectivamente.

La distribución marginal de X es la distribución de probabilidad que tiene la variable X sin tener en cuenta la variable Y. Por eso se obtiene de sumar la fila correspondiente.

$$p_{i*} = p(X = x_i) = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}$$

Análogamente definimos la distribución marginal de la variable aleatoria Y, la que se obtiene sumando la columna correspondiente.

$$p_{*j} = p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$$

Si ya conocemos que la variable X ha tomado el valor x_i, esta información modificará la distribución de probabilidad de la variable Y. De hecho, de toda la tabla de valores que puede tomar el vector aleatorio nos restringiremos a la fila de x_i. Sobre ella calcularemos las probabilidades condicionadas, las que construyen la *Tabla de Distribuciones Condicionadas*, y constituirán la distribución de Y condicionada a que $X = x_i$.

$$P(Y = y_j \ / \ X = x_i) = \frac{P(X = x_i \ , \ Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{i*}}$$

Como vemos, se obtiene dividiendo la fila de x_i por el total de la fila de pi•. De igual forma, podemos definir la distribución de X condicionada a que Y = y_j.

Ejemplo Nº 8

Realicemos el experimento consistente en lanzar dos dados perfectos y consideremos la variable aleatoria bidimensional o vector aleatorio (X, Y), donde X es el resultado del primer dado, e Y el menor resultado obtenido entre los dos dados.

Evidentemente, (X, Y), es una variable discreta, pues X e Y lo son. X toma valores 1,2,3,4,5 y 6, la variable (X, Y) tomará, en principio, los pares de valores (i, j), donde i = 1,…,6; y j =1,..,6.

X : variable aleatoria discreta, es el resultado del primer dado

Y : variable aleatoria discreta, el menor resultado obtenido entre los dos dados.

La función de probabilidad conjunta se puede calcular a partir de la probabilidad definida sobre Ω, así;

$$p(X = 1, Y = 1) = p[(1,1), (1,2), \ldots,(1,6)] = \frac{6}{36}$$

$$p(X = 1, Y = 2) = p(\Phi) = 0$$

Recuerde, que debe ser el menor resultado obtenido entre los dos dados, en este caso (X = 1), Y debe ser igual a 1, para cualquier otro valor no es posible determinar su probabilidad.

$$p(X = 2, Y = 1) = p[(2,1)] = \frac{1}{36}$$

De esta misma forma, podemos construir la Tabla de Distribución Conjunta, donde aparecen los valores de dicha función.

X \ Y	1	2	3	4	5	6	Probabilidad Marginal
1	6/36	0	0	0	0	0	1/6
2	1/36	5/36	0	0	0	0	1/6
3	1/36	1/36	4/36	0	0	0	1/6
4	1/36	1/36	1/36	3/36	0	0	1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36	0	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
Probabilidad Marginal	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

Se puede comprobar que esta tabla proporciona realmente una función de probabilidad conjunta, ya que todos los valores que aparecen dentro de la misma están comprendidos entre 0 y 1, y su suma es la unidad (1).

En la última columna y en la última fila de la tabla, se encuentran los valores de la función de probabilidad marginal de X y de Y, respectivamente, obtenidos al sumar las correspondientes filas y columnas.

Determinada la función de probabilidad, pueden calcularse probabilidades relativas a (X,Y), por ejemplo:

$$P(2.5<X\leq 4,\ 1\leq Y<3) = p(X=3,\ Y=1)+p(X=4,Y=1)+p(X=3,Y=2)+p(X=4,Y=2)$$

$$= 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 = 4 / 36 = 0.11111$$

La probabilidad es de un 11,11%.

5.3 Vectores Aleatorios Continuos

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional (vector aleatorio) y F su función de distribución. Se dice que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua si:

- F es una función continua en cada variable.
- Existen sus primeras y segundas derivadas parciales respecto de ambas variables.
- La integral de la segunda derivada, con respecto a ambas variables, es igual a 1.

Estas condiciones no serán verificadas en este material de estudio, sólo son expresadas como marco teórico y de base para el alumno.

Las variables bidimensionales continuas toman valores en todo el plano real o en un subconjunto del mismo. Pequeñas variaciones en x o en y producen pequeñas variaciones en $F_{(x,y)}$ (de hecho, el rectángulo [X ≤ x, Y ≤ y], cuya probabilidad es la función de distribución, varía al variar x o y). Es por ello que ninguno de los puntos del plano R^2 aporta cantidades significativas de probabilidad. La continuidad de $F_{(x,y)}$ es la propiedad relevante de las variables continuas, dando nombre a las mismas; las otras dos condiciones de la definición, se exigen para hacer operativas a este tipo de variables.

La función de distribución es de difícil manejo en el cálculo de las probabilidades. De ahí que sea conveniente definir una nueva *función de densidad conjunta*, que nos permita trabajar con comodidad.

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continúa, su función de densidad conjunta es una aplicación de:

$$f : R^2 \longrightarrow R$$

Que se define como:

$$f(x,y) = \frac{d^2}{dxdy} F(x,y)$$

Donde F es la función de distribución de (X,Y).

Ejemplo Nº 9

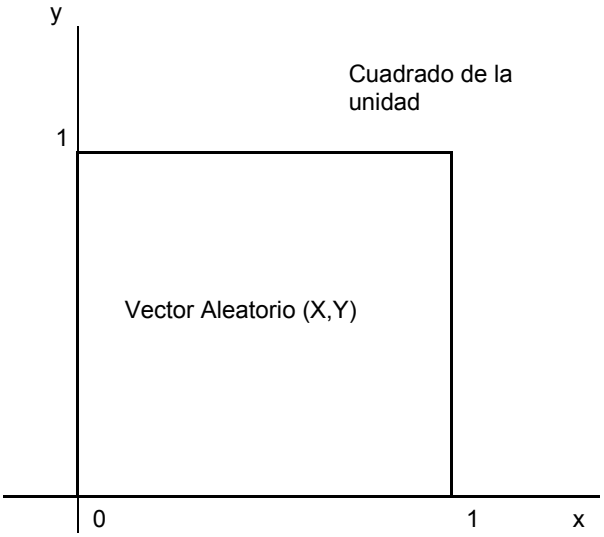
Se eligen al azar y separadamente dos números en el intervalo (0,1). Sean X e Y las variables aleatorias que indican cada una de las elecciones, y consideremos la variable aleatoria bidimensional o vector aleatorio continuo (X, Y).

Los valores que toma dicha variable son los del rectángulo (0,1) x (0,1) de $R^{2,}$ que se denomina el *cuadrado de la unidad*. Su función de distribución se presenta como:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ x * y & \text{si } 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le y \le 1 \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \text{ , } y > 1 \\ y & \text{si } x > 1 \text{ , } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \text{ , } y > 1 \end{cases}$$

La elección de esta función de distribución será explicada a continuación, de manera que el alumno comprenda como se construyo ésta.

Los valores que puede tomar el vector se encuentran en el siguiente rectángulo:



Al observar el cuadrado de la unidad, posibles valores que puede tomar la variable aleatoria bidimensional, podemos ir construyendo nuestra función de distribución:

Cuando la variable (X, Y), toma valores menores a 0, podemos observar que estos puntos ((X(ω), Y(ω)) no se encuentran dentro del cuadro de la unidad, por lo tanto, la función de distribución es igual a 0.

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0$$

Cuando la variable (X, Y), toma valores mayores a 1, podemos observar que estos puntos ((X(ω), Y(ω)) se encuentran en el cuadrante superior al cuadro de la unidad, por lo tanto, la función de distribución –que es acumulativa tanto hacia la derecha como hacia arriba- es igual a 1. Recordemos que el cuadrado de la unidad suma 1.

$$F(x,y) = 1 \qquad \text{si } x > 1,\ y > 1$$

Analicemos ahora, cuando una o ambas variables se encuentran dentro del cuadrado de la unidad.

Cuando la variable (Y) toma valores mayores a 1, y la variable (X) está dentro del cuadrado de la unidad (por ejemplo el punto (0.5, 3)). En este caso, la función de distribución toma el valor de x.

$$F(x,y) = x \qquad \text{si } 0 \le x \le 1,\ y > 1$$

Cuando la variable (X) toma valores mayores a 1, y la variable (Y) está dentro del cuadrado de la unidad (por ejemplo el punto (3, 0.5)). En este caso, la función de distribución toma el valor de y.

$$F(x,y) = y \qquad \text{si } x > 1,\ 0 \le y \le 1$$

Cuando la variable (X, Y), toma valores entre 0 y 1, podemos observar que estos puntos ((X(ω), Y(ω)) se encuentran en el cuadro de la unidad, por lo tanto, la función de distribución -que representa un cuadrado, y que significa la integral de la función de densidad- puede ser calculada como el área que comprende el vector (X, Y) determinado. Recordemos que el área se calcula x * y.

$$F(x,y) = x * y \qquad \text{si } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$

Obsérvese, que esta función de distribución, asigna como probabilidad de un subconjunto del cuadrado de la unidad “su área”.

Realice ejercicios Nº 19 al 22

CLASE 08

6. LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS Y TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

6.1. Ley de los Grandes Números

Un resultado básico de la teoría de probabilidades es que la probabilidad de un suceso puede aproximarse por una frecuencia relativa. Establezcamos intuitivamente el fundamento de esta aproximación con un ejemplo.

Ejemplo Nº 10

Tomemos una urna que contenga bolas idénticas en su forma, pero unas de un color A, y el resto de otro color B. Supongamos que el número de bolas de cada color se desconoce, pero se designa como p la proporción de bolas de color A, por lo que, la proporción de bolas de color B será 1 – p.

El experimento consiste en extraer una bola de la urna, anotar su color y reintegrarla a la urna, a esta variable le asociamos la distribución de Bernoulli:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la bola es de color A} \\ 0 & \text{si la bola es de color B} \end{cases}$$

Donde:

$E(X) = p$

$\sigma^2 = p\,(1-p)$

X = variable aleatoria que representa el resultado de la bola desde la extracción de la urna, la que toma los siguientes valores numéricos; x = 1, si sale el color A en la i-ésima extracción, y x = 0, si sale el color B en la i-ésima extracción.

Todas ellas tendrán la misma esperanza matemática y varianza, porque como en cada prueba de la bola se reintegra a la urna, cada extracción es independiente de cualquiera otra.

Cada valor particular de la sucesión de variables X_1, X_2, …, X_n será un conjunto ordenado de n números, ceros o unos, tal como 1, 1, 0, 1,…, 0, y la expresión:

$$U = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Es una variable aleatoria, cuyos valores representan la frecuencia relativa de aparición del color A en las n pruebas. En este caso, se demuestran los dos resultados siguientes:

a) Para cada número real ε > 0, el suceso $A_n = \{|U - E(X)| \leq \varepsilon\}$, para un subíndice n fijo y, suficientemente grande, tiene una probabilidad próxima a la unidad.

b) Para cada número real $\varepsilon > 0$, todos los sucesos A_n , definidos antes tienen a partir de un subíndice n, simultáneamente, una probabilidad próxima a la unidad.

La interpretación de estos resultados, el punto a) una forma débil, y el b) una forma fuerte, son de la llamada ley de los grandes números, en donde la frecuencia relativa experimental converge hacia p = E(X) (esperanza matemática).

Estos resultados justifican, por otra parte, la asignación de una probabilidad por medio de frecuencias relativas, cuando el número n de repeticiones del experimento es grande.

Nota: cuanto mayor sea n, más garantías hay de que la aproximación:

$$\frac{1}{n} \sum x_i$$, sea aceptable.

6.2 Teorema Central del Límite

Uno de los teoremas más importantes de la teoría de probabilidades es el teorema central del límite, que precisa la ley de los grandes números. En su forma más simplificada constituye el teorema de Moivre.

Supongamos que X_1, X_2, …, X_n son variables de Bernoulli, independientes, donde la variable $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tiene una distribución binomial

$$B\left(np, \sqrt{npq}\right)$$

Considerando ahora la variable normalizada:

$$Z_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$$

Pues bien, el teorema de Moivre afirma que:

$$\lim_{n \to \infty} p\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2} dt$$

Es decir, la variable Z_n tiende a la distribución normal N(0, 1), cuando n crece indefinidamente. Este teorema ha sido posteriormente generalizado.

En general, se dice que la sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, …, X_n sigue el teorema central del límite, si para valores fijos t_1 y t_2 cualesquiera, se cumple que:

$$\lim_{x \to \infty} p\left(\frac{\sum X_i - \sum \mu_i}{\sigma_{x_i}} \leq x \in (t_1, t_2)\right) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2} dt$$

Donde μ_i es la esperanza matemática de la variable X_i.

Intuitivamente, el teorema central del límite establece que la suma de un gran número de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, de media y varianza finitas, es una normal. Puesto que en la práctica cualquier carácter analizado tiene un recorrido finito, su varianza será finita. Así, la condición anterior impuesta para la varianza carece de importancia.

CLASE 09

7. MODELO ESTOCÁSTICO DISCRETO Y CONTINUOS

Uno de los objetivos del cálculo de probabilidades es determinar distribuciones que puedan servir de modelos a los distintos fenómenos aleatorios que se presentan en las diversas ramas del saber. Muchas variables aleatorias asociadas con experimentos estadísticos tienen propiedades similares y pueden describirse esencialmente con la misma distribución de probabilidad.

En la práctica, se han elaborado una serie de distribuciones tipo, en las cuales se integran la mayoría de las variables aleatoria con las cuales trabajamos. Se denominan distribuciones tipos porque la determinación de sus funciones de probabilidad o densidad, según sea el caso, depende de los valores que se asignen a ciertas constantes desconocidas, constantes que se denominan parámetros.

Ejemplo Nº 11

Supongamos que lanzamos una moneda y desconocemos su grosor, podríamos definir una variable aleatoria X, que describiera los tres resultados posibles:

x = 1	si se obtiene cara
x = 0	si su resultado es sello
x = 0.5	si la moneda cae de canto

Por lo que podríamos construir su función de probabilidad de la siguiente forma:

$$X = \begin{cases} 1 & p(x=1) = p \\ 0.5 & p(x=0.5) = r \\ 0 & p(x=0) = q \end{cases}$$

Donde esta función de probabilidad depende, en principio, de tres parámetros, *p*, *q* y *r*. Realmente, sólo depende de dos de ellos porque, como los valores de la función de probabilidad deben sumar la unidad, se cumple que:

$$p + q + r = 1$$

y, por tanto:

$$q = 1 - p - r$$

En definitiva, la función de probabilidad depende, únicamente, de los valores de p y r.

Dado nuestra función de probabilidad, podemos asignar distintos valores a los parámetros definidos, y de esta forma, describir el comportamiento aleatorio de diferentes monedas.

Supongamos que p = 0.2 y r = 0.6, se tienen que q = 1 - 0.2 - 0.6 = 0.2; de esta forma, diremos que se trata de una moneda con forma de tubo, es decir, que posee un gran grosor.

¿Qué valor debe tener r, para que la moneda no tenga probabilidad de caer de canto?

La respuesta, sería que r = 0, de esta forma sólo existe probabilidad de que la moneda caiga sello o cara.

Cuando se intenta asociar a un fenómeno aleatorio un modelo que explique su comportamiento probabílistico, la práctica habitual consiste en asignarle una distribución tipo que sea razonable, es decir, se buscan los valores de los parámetros que mejor se ajusten a la información disponible sobre el fenómeno.

A continuación, se estudiarán algunas de estas distribuciones en forma separada para el caso de variables discretas y continuas.

7.1 Distribución Uniforme Discreta

Si una variable aleatoria X toma N valores, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, con la misma probabilidad de ocurrencia, se dice que X sigue una *Distribución Uniforme Discreta* de parámetro N, para N = 1, 2,…; su función de probabilidad es, por tanto, $p(X = x_i) = k$, para todo i = 1,…,N.

El valor de la constante k se calcula con facilidad, pues la suma de todos los valores de la función de probabilidad ha de ser igual a la unidad, esto es:

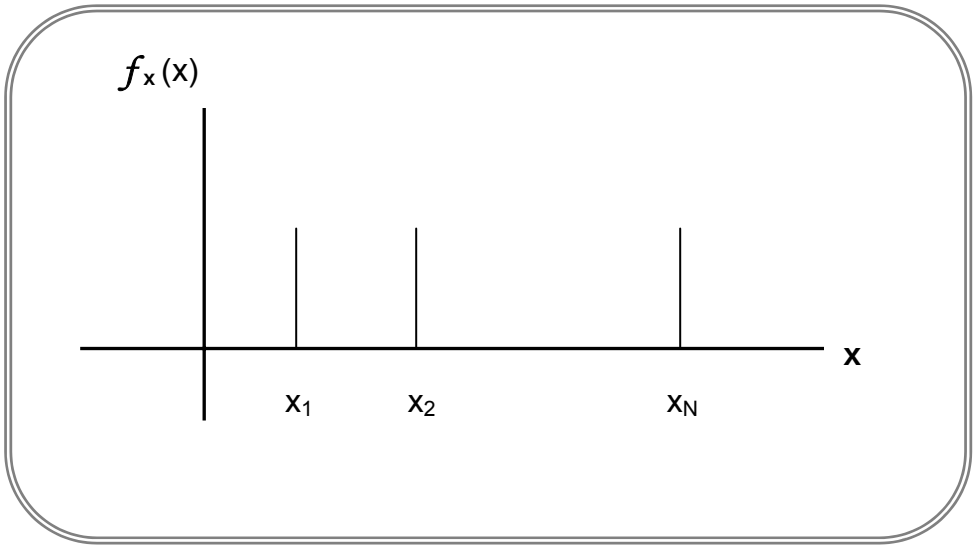
$$\sum_{i=1}^{N} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{N} k = N * k = 1$$

Por tanto, $k = 1/N$. La función de probabilidad de una distribución uniforme discreta queda determinada como:

$$f_x(x_i) = p(X = x_i) = 1 / N \quad \text{para } i = 1,\ldots, N.$$

Si suponemos ordenados los valores de la variable, es decir, $x_1 < x_2, < x_3, \ldots < x_N$, en donde la representación gráfica de dicha función de probabilidad se presenta en el siguiente cuadro:

Cuadro Nº 10 : Función de Probabilidad para una Distribución Uniforme discreta



Por acumulación de la función de probabilidad puede obtenerse la función de distribución, que resulta ser:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ 1/N & x_1 \leq x \leq x_1 \\ . & \\ . & \\ . & \\ k/N & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ . & \\ (N-1)/N & x_{N-1} \leq x < x_N \\ 1 & x \geq x_N \end{cases}$$

A continuación, calcularemos las principales características de esta variable sin más que aplicar sus definiciones:

Esperanza:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i * p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i * \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Varianza:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Por lo tanto, debemos calcular $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{N} x^2_i * p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{N} x^2_i * \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^2_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^2_i - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \right]^2$$

Función característica:

$$E(e^{itx}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{itx_j}$$

Ejemplo Nº 12

Supongamos que la variable X, que describe el resultado de la tirada de un dado perfecto, es decir, cada uno de los lados del dado tiene igual probabilidad de salir.

En este caso, estamos hablando de una variable con distribución uniforme discreta, con:

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum x_i \Big|_{i=1}^{N}, \quad Var(X) = \frac{1}{N} \sum x^2_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i}{N} \right]^2$$

De esta forma, podemos escribir la función de probabilidad como:

$p(X = k) = 1 / N$, para nuestro ejemplo

$p(x = 1) \ldots = p(x = 6) = 1/6$

7.2 Distribución de Bernoulli

Con frecuencia, no interesa estudiar cuál ha sido el resultado concreto del experimento, sino sólo si éste ha ocurrido o no. Es decir, las variables aleatorias que con distribución de Bernoulli, poseen una función de distribución discreta que asume dos valores, éxito o fracaso.

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de Bernoulli con parámetro p (que varía $0 \leq p \leq 1$), si x puede tomar únicamente los valores de 0 y 1, y las probabilidades asociadas son:

$P(x = 1) = p$ $\qquad$ $P(x = 0) = 1 - p = q$

Gráficamente, se puede representar como:

x	0	1
p(x) = P(X = x)	1-p	p

La función de probabilidad asociada a la variable aleatoria x, se puede escribir de la siguiente forma:

$$p(x) = \begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

En este momento, es posible verificar si esta función es, efectivamente, una función de probabilidad, mediante la comprobación de las condiciones básicas:

$p(x) \geq 0$, que para nuestra distribución se cumple.

$\sum_{x=0}^{1} p(x) = 1$, en donde: $p(0) + p(1) = (1 - p) + p = 1$

A continuación, calcularemos las principales características de esta variable sin más que aplicar sus definiciones:

Esperanza:

El valor esperado de la variable que se distribuye de forma Bernoulli con parámetro P, se encuentra definida por:

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{x=0}^{1} x * p(x) = \sum_{x=0}^{1} x * p^{x}(1-p)^{1-x} \\ &= o * p^{o}(1-p)^{1-o} + 1 * p^{1}(1-p)^{1-1} \\ &= o + p \end{aligned}$$

$$E(X) = P$$

Varianza:

La variación de una variable x que se distribuye Bernoulli es dado por:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^{1} x^2 p(x) = \sum_{x=0}^{1} x^2 \cdot p^2 (1-p)^{1-x} \\ &= 0^2 * p^0 (1-p)^{1-0} + 1^2 \cdot p^1 (1-p)^{1-1} \\ &= 0 + p \end{aligned}$$

$$E(X^2) = p$$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1 - p) = p*q$$

Función de Probabilidad:

$$f_x(x) = p(X = x) = p^x (1 - p)^{1 - x}$$

Ejemplo Nº 13

Realicemos el experimento aleatorio, consistente en lanzar una moneda ordinaria al aire, cuya variable discreta "X: resultado del lanzamiento de la moneda" se asocia de manera natural a una distribución Bernoulli; donde los posibles resultados son:

$$\mathbf{X} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{si \quad sale \quad cara} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si \quad sale \quad cruz} \end{cases}$$

Recordemos que, la distribución de probabilidad p es tal que:

$$p(X = x) = p^{x} (1 - p)^{1 - x}$$

Donde para x = 1, tenemos:

$$p(X = 1) = p^{1} (1 - p)^{1 - 1}$$

$$p(X = 1) = p^{1} (1 - p)^{0}$$

$$p(X = 1) = \overbrace{p^{1} * 1}^{} = p$$

$$p(X = 0) = p^{0} (1 - p)^{1 - 0}$$

$$p(X = 0) = p^{0} (1 - p)^{1 - 0}$$

$$p(X = 0) = 1 - p$$

Por lo tanto, se tiene igual probabilidad para ambos sucesos, por lo que podemos decir que:

$$p\ (X = 1) = p\ (X = 0) = ½ = 0.5$$

Veamos otro ejemplo, un posible experimento de Bernoulli sería el lanzamiento de un tiro libre por parte de un jugador de baloncesto, ya que los posibles resultados son *conseguir canasta (éxito) y no conseguir canasta (fracaso)*.

Se sabe además que, según se deduce de los partidos de liga que sean disputados hasta el momento, dicho jugador tiene aproximadamente un 80% de aciertos.

Este último dato nos permite asociar la variable X : número de aciertos a realizar un tiro libre, cuya distribución es:

$$\mathbf{X} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{p(X=1) = p(canasta) = 0.8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p(X=0) = 1 - p(nocanasta) = 0.2} \end{cases}$$

La variable de Bernoulli se asocia, generalmente, a aquellos experimentos en los que sólo se tiene en cuenta un suceso A (éxito) y su contrario (fracaso), haciéndole corresponder el valor 1 al suceso A y 0 a su contrario. Esta variable se denomina a veces indicador del suceso A e interviene con frecuencia en la estadística matemática para la construcción de otras variables aleatorias discretas. Por ejemplo, la variable binomial, que estudiamos a continuación, puede considerarse como una suma de variables de Bernoulli.

La distribución de Bernoulli se denota como:

$$X \sim b\ (p)$$

CLASE 10

7.3 Distribución Binomial

Supongamos que se realizan n experimentos independientes, en cada uno de los cuales únicamente ocurre un determinado suceso A con probabilidad constante p, o su contrario, suceso B, con probabilidad q = 1 – p.

Consideremos la variable aleatoria X, que designa el número exacto de veces que aparece A en el curso de los n experimentos, a la cual se le denomina Binomial, de forma de determinar su ley de probabilidad o función de cuantía.

La distribución de la variable X se denomina *Distribución Binomial* de parámetros *n* y *p*. En donde el parámetro n es el número de veces que se realiza el experimento (número entero positivo), y el parámetro p la probabilidad de éxito en un experimento (un valor entre cero y la unidad).

El hecho que X siga una distribución con parámetros *n* y *p*, lo denotaremos abreviadamente como:

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Esta distribución se presenta de diferentes formas, pues no importa el orden en que A ocurre, y cada una de estas formas tiene una probabilidad de aparecer igual a $p^k \cdot q^{n-k}$, por ser los experimentos independientes.

Por ejemplo, si son tres los experimentos realizados, el suceso B_2, A ocurre exactamente dos veces, puede ocurrir si se produce cualquiera de los tres siguientes: AAA^c, AA^cA y A^cAA, cada uno de los cuales tiene una probabilidad de aparecer igual a $p^2 \cdot q^{3-2} = p^2 \cdot q$.

El número de formas diferentes que dan lugar a B_k es precisamente el número de combinaciones posibles de n elementos tomados de k en k.

$$C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Es decir, el número de formas diferentes de colocar k veces el suceso A en una secuencia de n posiciones en total. Por lo que estas son formas diferentes de presentarse B_k, las cuales son mutuamente excluyentes.

La probabilidad de este suceso (A), dada la independencia de los experimentos, es:

$$p(A\ldots^{k}\ldots AA^c\ldots^{n-k}\ldots A^c) = p(A)\ldots^{k}\ldots p(A)\,p(A^c)\ldots^{n-k}\ldots p(A^c)$$

$$= p^k(1-p)^{n-k}$$

Para todos los sucesos, la probabilidad es la misma ($p^k(1-p)^{n-k}$). Por tanto, la función de probabilidad de una distribución binomial de parámetro *n* y *p* es:

$$f_x(k) = p(X = x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{, para } k = 0,1,2,\ldots,n$$

La función de distribución correspondiente es F(x) = p(X ≤ x).

La ley de probabilidad de la variable binomial es idéntica a la que corresponde a la suma de variables aleatorias independientes de Bernoulli. En efecto, supongamos, por simplicidad, que el número de repeticiones del experimento que da origen al suceso A, con probabilidad p, y A^c, con probabilidad q = 1 - p, se reduce a tres, y que estas pruebas son independientes.

Asociemos a cada una de ellas la variable indicador de A:

$$I_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{si ha salido A en la primera prueba} \\ 0 & \text{si ha salido } A^c \text{ en la primera prueba} \end{cases}$$

$$I_2(A) = \begin{cases} 1 & \text{si ha salido A en la segunda prueba} \\ 0 & \text{si ha salido } A^c \text{ en la segunda prueba} \end{cases}$$

$$I_3(A) = \begin{cases} 1 & \text{si ha salido A en la tercera prueba} \\ 0 & \text{si ha saildo } A^c \text{ en la tercera prueba} \end{cases}$$

Como los experimentos son independientes, $p[I_i(A)=1] = p$, y $p\ [I_i(A)=0] = q=1-p$, donde i=1,2,3. Los valores posibles de la variable $Y = I_1+I_2+I_3$ (variable que se construye a partir de la suma de los indicadores de A) con sus correspondientes probabilidades, son:

Y	1-1-1	1-1-0	1-0-1	0-1-1	1-0-0	0-1-0	0-0-1	0-0-0
F(y)	p^3	p^2q	p^2q	p^2q	pq^2	pq^2	pq^2	q^3

La función de probabilidad de Y tiene de media *p* y varianza *p*q*, el resultado anterior nos permiten hallar la media y varianza de la binomial (B(n,p)).

Esperanza:

El valor esperado de la variable que se distribuye de forma Binomial, se encuentra definida por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p} = \mathbf{n} * \mathbf{p}$$

Varianza:

La variación de una variable x que se distribuye Binomial es dado por:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p\cdot(1-p) = n\cdot p\cdot(1-p)$$

Función de Probabilidad:

$$f_x(k) = p(X = x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{, para } k = 0,1,2,\ldots,n$$

Un ejemplo de variable aleatoria que se distribuye Binomial, sería la variable X: que representa el número de caras obtenido al lanzar una moneda 100 veces, cuando se garantiza que los lanzamientos son independientes y que los sucesivos lanzamientos no modifican la probabilidad de obtener cara en cada uno de los siguientes.

Ejemplo Nº 14

Sigamos con el ejemplo del jugador de baloncesto, quien realiza una serie de 5 tiros libres. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste al menos dos?

Lo primero es determinar la variable aleatoria y sus parámetros

X : número de aciertos en los 5 lanzamientos

n : 5, cantidad total de lanzamientos (tiros libres)

p : 0.8, porcentaje aproximado de aciertos en tiros libres del jugador, en lo que va de la liga.

Utilizando la función de probabilidad para variables Binomial, podemos calcular la probabilidad de que el jugador de baloncesto acierte al menos 2 de los 5 tiros libres.

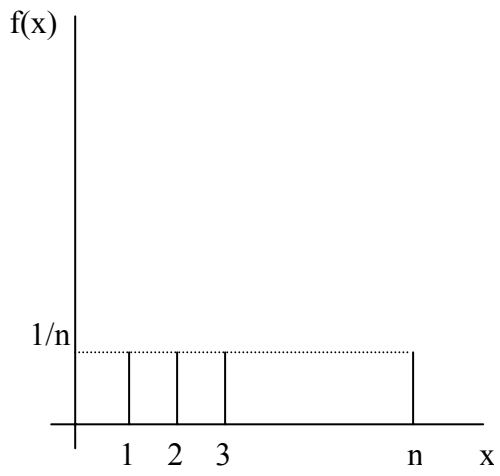
$$f_x(k) = p(X = x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{, para } k = 0,1,2,\ldots,n$$

$$f_x(2) = p(X \geq 2) = \binom{5}{2} 0.8^2 (1-0.8)^{5-2} = 0.99328$$

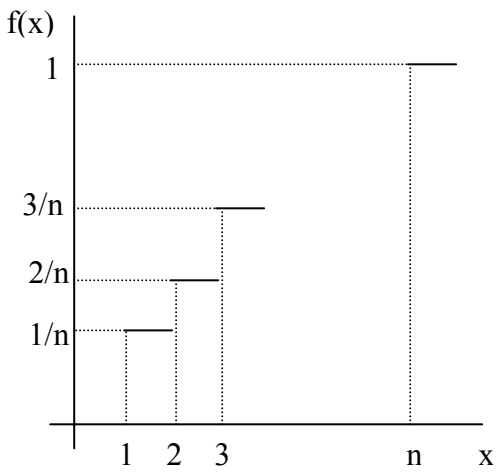
7.4. Distribución Rectangular Discreta

Sea E un experimento aleatorio con n resultados posibles $\omega_1, \omega_2, ...\omega_n$, cada uno de los cuales con idéntica probabilidad de aparición. Al experimento E se le asocia, de una manera natural, una variable aleatoria X, llamada rectangular discreta, cuyos valores posibles son 1, 2, …, n, según que como resultado del experimento ocurra $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, respectivamente, y cuya función de probabilidad (f(x)) viene dada por:

Cuadro Nº 10: Función de Distribución Rectangular Discreta



A) Función de cuantía de la variable rectangular discreta



B) Función de distribución de la variable rectangular discreta

La representación gráfica de la función de probabilidad es un diagrama de barras, y la de la función es la que corresponde a una función escalona (observe el cuadro Nº10).

A continuación, calcularemos las principales características de esta variable sin más que aplicar sus definiciones:

Esperanza:

El valor esperado de este tipo de variables, se encuentra definida por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot (1 + 2 + ... + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n+1}{2}$$

Varianza:

La variación de una variable rectangular discreta, es dado por

$$\text{Var(X)} = \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot \frac{1}{n} - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

Su Función de Distribución es:

$$f_x(\text{X}) = p(X \le x) = \frac{i-1}{n} \quad \text{si} \quad i-1 \le x < i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

CLASE 11

7.5 Distribución de Poisson

En el campo de las aplicaciones, son frecuentes las ocasiones en las que los experimentos independientes que originan la variable binomial B(n, p) son muy numerosos, a la vez que la probabilidad del suceso A es muy pequeña. Esto ocurre en experimentos cuyos sucesos están distribuidos al azar en el tiempo, como las llamadas en una línea telefónica, los accidentes de automóvil, o los defectos de las piezas producidas por máquinas automáticas, etc. En estos casos, a causa de que *p* es pequeño y *n* es grande, la fórmula para calcular la probabilidad binomial de que A haya ocurrido exactamente k veces, pierde su utilidad.

Cuando el promedio de apariciones del suceso A para distintos valores de n se mantiene constante, es decir, cuando el producto $n*p = \lambda$ es constante al aumentar el número de pruebas, es posible calcular la probabilidad a que nos acabamos de referir mediante el uso de una nueva variable discreta, llamada "*De Poisson*", cuya distribución de probabilidad es el límite, como veremos a continuación, de la distribución binomial cuando *n* tiende a infinito.

Si una variable sigue esta distribución lo denotaremos por:

$$\boxed{X \sim \mathcal{P}(\lambda)}$$

A continuación, desarrollaremos el límite de la función de probabilidad de una variable binomial discreta, cuando *n* tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot p^k(1-p)^{n-k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^k\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\cdot p^k\cdot\frac{\left(1-\frac{np}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{np}{n}\right)^k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\lambda^k\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}\right\}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$

Se llama variable *De Poisson*, a la variable que designa el número exacto de veces que aparece el suceso A en un número *n* muy grande de pruebas independientes, en cada una de las cuales ocurre A con una probabilidad muy pequeña, de modo que el producto *n*p* = λ se mantiene constante. Se trata, por tanto, de una variable discreta que toma los valores posibles 0, 1, 2,…,n.

Esperanza:

De igual forma, la esperanza de una variable de Poisson es el límite de la esperanza de una variable binomial, cuando n tiende a infinito, por lo tanto:

$$\mu = E(x) = \lambda;$$

Varianza

Lo mismo ocurre con la varianza de una variable de Poisson, que se calcula mediante el límite de la varianza de una variable binomial, cuando n tiende a infinito, por lo tanto:

$$\text{Var(X)} = \lim_{n\to\infty}(npq) * \lim_{n\to\infty}[\lambda(1-p)] = \lambda$$

Función de Probabilidad

En resumen, la función de probabilidad de la variable de Poisson, de parámetro λ, que se denota como $P(\lambda)$, es:

$$f_x(X) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} & \text{si } x = k, \quad k = 0,1,2,... \\ 0 & \text{si } x \neq k, \quad k = 0,1,2,... \end{cases}$$

En la práctica, basta que $n \geq 100$ y $p \leq 0{,}05$, y que $\lambda = n*p$ permanezca constante, para que la aproximación de Binomial B(n, p) a la distribución de Poisson $P(\lambda)$, sea lo suficientemente precisa. Las probabilidades determinadas por la función de distribución de Poisson están tabuladas para diferentes valores de *k* y de λ .

Ejemplo Nº 15

Nuestro experto jugador de baloncesto tiene una media de “un acierto o enceste por temporada desde una distancia de diez metros”. Supongamos que el número de canastas en lanzamientos de este tipo sigue una distribución de Poisson, ¿Cuál es la probabilidad de que haga dos encestes desde dicha distancias, en la próxima temporada?

X : es la variable número de canastas en tiros desde 10 metros.

λ : parámetro de la variable que representa, en este caso, la temporada; es decir, la variable es la media de encestes *por temporada* (1).

k : la cantidad de aciertos desde 10 metros, para la próxima temporada.

De esta forma, el enunciado nos pide calcular la probabilidad de que nuestro jugador enceste dos canastas desde 10 metros, en la próxima temporada de baloncesto; cuya función de probabilidad sería:

$$p(X = 2) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} = \frac{1^2}{2!} * e^{-1}$$

$$p(X = 2) = 0.1839$$

A continuación, se abordarán algunos modelos estocásticos para variables continuas. Las variables aleatorias unidimensionales que se estudiarán, son las más utilizadas en las aplicaciones, tanto en la modelización de los fenómenos aleatorios de tipo continuo, como la inferencia estadística.

CLASE 12

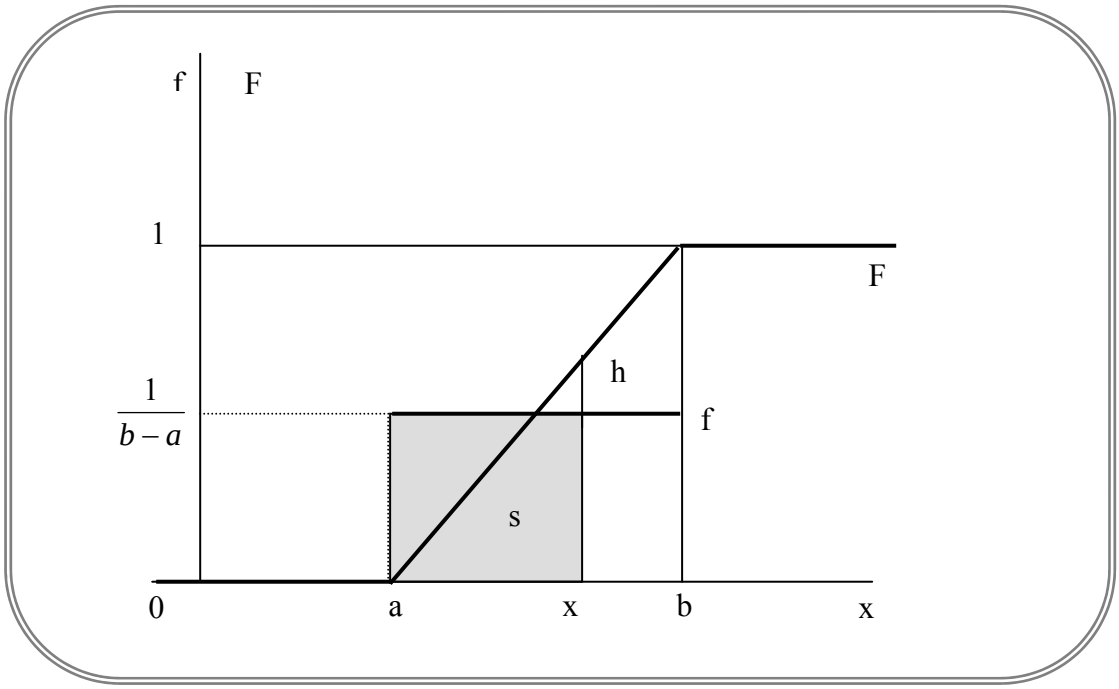
7.6 Distribución Uniforme Continua

Una variable aleatoria continua X se distribuye uniformemente en el intervalo *(a,b)* de la recta real, si su función de densidad es constante en dicho intervalo y nula fuera de él, es decir:

$$f_x(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de distribución es tal que, la ordenada en cada punto, es la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales al punto en cuestión. Esta misma probabilidad es también el área limitada por la función de densidad, el eje *OX* y dicha ordenada (observe el cuadro Nº11):

Cuadro Nº11: Función de Densidad y Distribución de la Variable Aleatoria Uniforme



Donde:

$$\mathbf{h = F(x) = p(\{\omega / X(\omega) \leq x\}) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} \cdot dt = \frac{x-a}{b-a} \cdot s}$$

En particular, cuando dividimos el intervalo (a,b) en un número cualquiera de sub-intervalos de igual longitud, la probabilidad de que X tome un valor perteneciente a cualquiera de estos sub-intervalos es la misma para todos ellos.

Esperanza:

La esperanza matemática de la variable uniforme es:

$$E(X) = \int_a^x x \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^x x \cdot \frac{dx}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

Varianza:

Su varianza esta dada por:

$$\text{Var(X)} = \int_a^x [x - E(X)]^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^x \left[x - \left(\frac{a+b}{2} \right) \right]^2 \cdot \frac{dx}{b-a}$$

$$\text{Var(X)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Función de Probabilidad:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

La distribución uniforme permite precisar el azar del experimento consistente en señalar un punto cualquiera del segmento (a, b). En efecto, dado que la probabilidad de señalar un punto dado es nula, cualquiera que sea el punto, lo más natural es asignar al suceso un número cualquiera del segmento (x_1, x_2), donde $a \leq x\ 1$ y $x\ 1 \leq b$, que denotamos por A, una probabilidad proporcional a su longitud:

$$p(A) = k * L(x_1, x_2)$$

Si B designa el suceso, donde B es el punto señalado, uno cualquiera del segmento(a, b), se tiene que:

$$p(B) = 1 = k * L(a, b)$$

De donde se obtiene que:

$$k = \frac{1}{L(a, b)}$$

Por tanto, la probabilidad[4] de A es:

$$p(A) = \frac{L(x_1, x_2)}{L(a,b)} = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

Pero precisamente esta probabilidad coincide con la dada por la distribución uniforme:

$$p(A) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

Un caso particular importante se tiene cuando a = 0 y b = 1, siendo f(x) = 1 para todo valor x de este intervalo. Entonces, la esperanza matemática y la varianza son, respectivamente, E(X) = ½, Var(X) = 1/12.

Ejemplo Nº 16

Aunque Juan vive muy cerca de su lugar de trabajo, siempre hace ese trayecto en auto. En el trayecto hay dos semáforos que cambian su color cada 2 minutos, permaneciendo en cada color ½ minuto. Dichos semáforos están sincronizados, de modo que, el segundo de ellos se pone en rojo a los 2 1/2 minutos de que el primero se pone en verde.

Si Juan ha tenido que detenerse en el primero, y el tiempo que tarda en recorrer la distancia que los separa sigue una distribución uniforme en el intervalo (1,4), ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que pararse también en el segundo semáforo?

Para resolver este problema basta considerar que, puesto que el segundo semáforo se coloca en rojo a los dos minutos y medio de ponerse verde el primero, y permanecen rojo medio minuto, Juan no tendrá más remedio que detener su auto cuando le tome entre 2.5 y 3 minutos ir de un semáforo a otro.

[4] Esta forma de asignar probabilidades bajo la interpretación de "probabilidad igual" como cantidades proporcionales a longitudes, áreas, etc., se conoce como probabilidad "geométrica".

Es decir, denotando por X la variable que designa este tiempo, la probabilidad pedida es:

$$p(2.5 < X < 3) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$$

$$p(2.5 < X < 3) = F(3) - F(2.5) = \frac{3-2.5}{4-1} = 0.166$$

Por lo que, la probabilidad de que Juan deba parar en el segundo semáforo es de 16,6%.

7.7. Distribución Normal

Una variable aleatoria continua, que se denota X, se dice que sigue la ley de Gauss-Laplace, o que es una variable aleatoria con distribución normal de la forma *N(μ, σ)*,[5] si está definida en toda la recta real, en donde su función de densidad es:

$$f_x(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En esta definición, *μ* y *σ* son dos parámetros numéricos con *σ* > 0. Por lo que, esta función presenta un máximo en el punto:

$$M\left(\mu, \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)$$

Además, esta función es simétrica respecto a la recta x = μ. La esperanza matemática y la varianza son, respectivamente, E(X) = μ y Var(X) = σ^2.

[5] La variable aleatoria normal viene asociada de forma natural al error de medición.

Un caso, especialmente importante, es el de la variable aleatoria normal *N(0, 1),* que es la que normalmente se utiliza, por estar tabulada. La normalización de las restantes variables a normales, se realiza mediante el cambio de variable Z.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Siempre y cuando su media y varianza sean finitas. Una vez que se ha realizado la normalización de la variable, se dice que se ha *tipificado la variable*. Así, consultando la tabla de la distribución normal (N(0, 1)), se pueden calcular probabilidades relacionadas.

Ejemplo Nº 17

La probabilidad del suceso:

$$\mathbf{B} = \{\mu - 3\sigma < \mathbf{X}(\omega) < \mu + 3\sigma\}$$

Cuando X es una normal, con parámetros *μ* y *σ* , es decir se denota como X $\sim$ N(μ, σ). Cabe señalar que μ - 3σ es nuestra variable X, por lo tanto, para tipificar esta variable se debe seguir los siguientes pasos:

Paso 1

Tipificar la variable, mediante la variable Z, para lo que debemos convertir nuestra variable X (ω) en Z. De esta forma, se resta μ, en todas las partes de la desigualdad del suceso B.

$$\mathbf{B} = \{\mu - 3\sigma - \mu < \mathbf{X}(\omega) - \mu < \mu + 3\sigma - \mu\}$$

Realizamos la operación básica de restar los términos semejantes, nos queda:

$$\mathbf{B} = \{-3\sigma < \mathbf{X}(\omega) - \mu < 3\sigma\}$$

Paso 2

Dividimos por σ todas las partes de la desigualdad, tenemos:

$$\mathbf{B = \{-3\sigma/\sigma < (X(\omega) - \mu)/\sigma < 3\sigma/\sigma\}}$$

Se simplifica, nos queda:

$$\mathbf{B = \{-3 < (X(\omega) - \mu)/\sigma < 3\}}$$

Paso 3

Se reemplaza expresión del medio de la desigualdad por nuestra variable Z, que se distribuye normal con parámetros 0 y 1.

$$\mathbf{B = \{-3 < Z < 3\}}$$

Paso 4

Se busca su valor tabla, es decir, la tabla normal se encuentra toda calculada por lo que simplifica el desarrollo de nuestro problema.

$$\mathbf{P(B) = P(z)\{Z < 3\} - P(z)\{Z < -3\}}$$

Cuando z < 0, por tratarse de una función de densidad simétrica con respecto al cero, el valor tabla resulta ser 1 – p(Z < z).

$$\mathbf{P(B) = P(z)\{Z < 3\} - (1 - P(z)\{Z < 3\})}$$

Para los valores tabla aproximados, de un nivel de confianza del 95%, tenemos que:

$$\mathbf{P(B) = 0.98856 - (1 - 0.98856) = 0.98856 - 0.01144 = 0.97712}$$

El resultado encontrado para la probabilidad del suceso B significa que es prácticamente imposible obtener un valor de X que difiera de μ en más de 3σ, puesto que la probabilidad del suceso contrario de B es 0,02288, prácticamente despreciable.

La importancia de la distribución normal radica en que, en la práctica, un gran número de variables aleatorias son normales. Ello se debe a que dichas variables resultan ser la suma de otras idénticas, distribuidas normal y mutuamente independientes.

Realice ejercicios Nº 23 al 30