CÁLCULO I

UNIDAD I

MATRICES

1. MATRICES

En el largo desarrollo de las matemáticas, que abarca varios milenios, el surgimiento de las matrices es más bien reciente: A mediados del siglo XIX surgen las bases de esta gran herramienta, y algunas de sus aplicaciones. En esta unidad conoceremos qué son y para qué se pueden utilizar.

1.1 Definición e interpretación de matrices

Probablemente, usted ya ha conocido o trabajado con alguna base de datos, probablemente en excel, donde tiene una gran cantidad de información ordenada en columnas y filas, ya sea de clientes, documentos emitidos o notas de los alumnos, etc. Bueno, una matriz no es muy diferente de aquellas bases de datos.

Las matrices son herramientas matemáticas que permiten manejar de forma más fácil una gran cantidad de datos numéricos de forma ordenada. Estas se expresan con una letra en mayúscula (A, B, C, etc) y poseen un orden mxn.

El orden de una matriz corresponde a la cantidad de filas y columnas que posee la misma. Es decir, una matriz de orden mxn posee m filas y n columnas.

Ejemplo:

Considere la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Esta matriz posee 3 filas y 2 columnas, por lo que se dice que A es una matriz de orden 3x2.

Asimismo, cada número que integra una matriz puede ser expresado por la forma Aij , donde i representa la fila y j la columna donde se encuentra el número buscado.

En el ejemplo anterior, entonces, se tiene que:

$a_{11} = 2$

$a_{12} = 3$

$a_{21} = 2$

$a_{22} = 1$

$a_{31} = 3$

$a_{32} = 6$

Por lo tanto, una matriz A, de orden *mxn* estará, de manera general, expresado de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrices especiales:

Dentro de las matrices, hay algunas que son importantes de conocer específicamente, como las matrices cuadradas y la matriz identidad.

Las matrices cuadradas son aquellas que tienen igual cantidad de filas y columnas, por lo que son del orden *nxn*.

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

Las matrices triangulares son las que constan de valores sólo en una mitad superior derecha o inferior izquierda de la matriz (Incluyendo la línea diagonal), mientras que la otra mitad son sólo ceros. Cuando la parte que tiene números es la superior derecha, se le llama matriz triangular superior, mientras que cuando es la inferior izquierda, se le llama matriz triangular inferior.

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz triangular superior (El que tenga un 0 en el elemento a_{23} no afecta esta situación).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz triangular inferior.

También podría darse el caso de una matriz como esta:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

A este tipo se le llama matriz triangular superior e inferior.

La matriz identidad es aquella matriz triangular superior e inferior que posee sólo unos en su diagonal.

Por ejemplo, una matriz identidad de orden 3x3:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

Sea una matriz de cualquier orden. El rango de la matriz corresponde al número de filas independientes que posea aquella matriz. Es decir, aquellas filas que no:

1. Sean igual o múltiplos de otras filas.
2. Sean una combinación de otras filas (Es decir, que sea el resultado de sumar 2 otras filas, o sumar una fila con un múltiplo de otra)

En esos casos, se considera que esas filas no cuentan para el rango de la matriz. Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, la fila 3 es igual a la fila 1, por lo que no es independiente. En este caso, el rango de la matriz es 2.

Si $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 14 & 3 \end{pmatrix}$, la fila 3 es igual a 2 veces la segunda más la primera, siendo no independiente. En este caso, la matriz tiene un rango 2.

1.2 Álgebra de Matrices

A las matrices se les puede realizar distintas operaciones, como la suma y la multiplicación.

Suma de matrices.

Sean 2 matrices, A y B, del mismo orden, mxn. Si:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar una matriz C, tal que:

$$C = A + B$$

Entonces, C será:

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, cada elemento de la matriz se suma con su elemento correspondiente.

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, encuentre $C = A + B$

Solución:

Debemos encontrar una matriz C de 2 x 3, ya que las matrices A y B son de 2 x 3. Esta será entonces:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Donde cada elemento es la suma de los elementos correspondientes, en este caso:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 3 + 4 = 7$$

$c_{12} = a_{12} + b_{12} = 1 + 2 = 3$

$c_{13} = a_{12} + b_{13} = 2 + 2 = 4$

$c_{21} = a_{21} + b_{21} = 1 + 4 = 5$

$c_{22} = a_{22} + b_{22} = 2 + 0 = 2$

$c_{23} = a_{23} + b_{23} = 3 + 5 = 8$

Por lo tanto, la matriz C será:

$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de matrices

Si tenemos 3 matrices, A, B y C, todas del orden $m \; x \; n$, se observan las siguientes propiedades en la suma de matrices:

1. Asociatividad

$A + (B + C) = (A + B) + C$

Veamos si se cumple en un ejemplo:

Ejemplo:

Si tenemos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, tendríamos que:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, da lo mismo qué pareja de matrices se suma primero, el resultado será el mismo.

2. Conmutatividad: el orden de los integrantes de la suma no afecta al resultado.

$$(A + B) = (B + A)$$

3. Elemento neutro: Frente a una matriz A, del orden mxn, existe otra del mismo orden, llamada 0, que sumada a la primera, da como resultado la misma matriz A. O sea:

$$A + 0 = A$$

Esta matriz será de la forma:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4. Inverso Aditivo: Frente a una matriz A, del orden mxn, existirá otra del mismo orden, que llamaremos -A, que sumada a la primera, da como resultado la matriz 0. Es decir:

$$A + (-A) = 0$$

Esta matriz será de la forma:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación por un escalar.

Sea una matriz A, de orden mxn:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Además, se tiene un número real *k* cualquiera. Si se quiere obtener una matriz D, tal que:

$$D = k * A$$

La matriz B será:

$$D = \begin{pmatrix} k * A_{11} & \cdots & k * A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k * A_{m1} & \cdots & k * A_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, se multiplica por el valor k a cada elemento de la matriz.

Ejemplo 3:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \\ -4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, encontrar $B = 5 * A$

Solución:

Luego, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$, donde:

$b_{11} = 5 * a_{11} = 5 * 2 = 10$

$b_{12} = 5 * a_{12} = 5 * -3 = -15$

$b_{21} = 5 * a_{21} = 5 * 6 = 30$

$b_{22} = 5 * a_{22} = 5 * 5 = 25$

$b_{31} = 5 * a_{31} = 5 * -4 = -20$

$b_{32} = 5 * a_{32} = 5 * 3 = 15$

$b_{41} = 5 * a_{41} = 5 * 2 = 10$

$b_{42} = 5 * a_{42} = 5 * 7 = 35$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 30 & 25 \\ -20 & 15 \\ 10 & 35 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación por un escalar.

Si tenemos las Matrices A y B, de rango mxn, y los escalares *k* y *p,* pertenecientes a los números reales, tenemos las siguientes propiedades:

1. Asociatividad

$$(k * p) * A = k * (p * A)$$

Demostrémoslo con el siguiente ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, probar que:

$$(5 * 2) * A = 5 * (2 * A)$$

Tenemos que:

$$10 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 5 * \left[2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} = 5 * \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}$$

2. Distributividad respecto a la suma de matrices

$$k * (A + B) = (k * A) + (k * B)$$

Veámoslo con un ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determinar que:

$$3 * (A + B) = (3 * A) + (3 * B)$$

Tenemos que:

$$3 * \left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = \left[3 * \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\right] + \left[3 * \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$3 * \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 21 \\ -9 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ 3 & 15 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 21 \\ 15 & 36 \\ -9 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 21 \\ 15 & 26 \\ -9 & 21 \end{pmatrix}$$

3. Distributividad respecto a la suma de escalares.

$$(k+p)*A=(k*A)+(p*A)$$

Ejemplo:

Sean $k=3;\ \ p=6;\ \ A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, mostrar que se cumple la propiedad anterior.

Solución:
$$(k+p)*A=(k*A)+(p*A)$$

$$(3+6)*\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}=\left(3*\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}\right)+\left(6*\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$9*\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 15 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & 30 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}18 & 45 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 45 & 9\end{pmatrix}$$

4. Existencia de elemento neutro. Si a la matriz A se le multiplica por el escalar 1, se tiene que:

$$1*A=A$$

Multiplicación de matrices

2 matrices distintas, A y B, pueden ser multiplicadas entre sí, de forma tal que:

$$C=A\ x\ B$$

Sólo en el caso en que la primera matriz (A) posea una cantidad de columnas igual que la cantidad de filas que posee B. Es decir, A debe ser de la forma $m\ x\ n$, mientras que B de la forma $n\ x\ p$.

¿Por qué esta restricción? Muy simple. En la multiplicación de matrices los elementos no se multiplican entre sí, sino que cada unidad en la matriz resultado es el producto de multiplicar todos los elementos de una fila de la primera matriz con una columna de la segunda.

¿Cuesta entenderlo? Veamos la situación general, y luego continuemos con el ejemplo de rigor.

Tenemos 2 matrices. A, de forma $m\ x\ n$, y B, de forma $n\ x\ p$, es decir, el número de columnas de A es igual al número de filas de B, tal que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Cada elemento de la matriz C será el resultado de la sumatoria de la multiplicación de los elementos de una fila de A con los de una columna de B. Es decir, que C21 será el resultado de multiplicar, en orden, los elementos de la fila 2 de A con los de la columna 1 de B. Entonces, la matriz resultante C será del orden $m\ x\ p$ (Numero de filas de la matriz A y Número de columnas de la matriz B):

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + \cdots + a_{1n} * b_{n1} & \cdots & a_{11} * b_{1p} + a_{12} * b_{2p} + \cdots + a_{1n} * b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * b_{11} + a_{m2} * b_{21} + \cdots + a_{mn} * b_{n1} & \cdots & a_{m1} * b_{1p} + a_{m2} * b_{2p} + \cdots + a_{mn} * b_{np} \end{pmatrix}$$

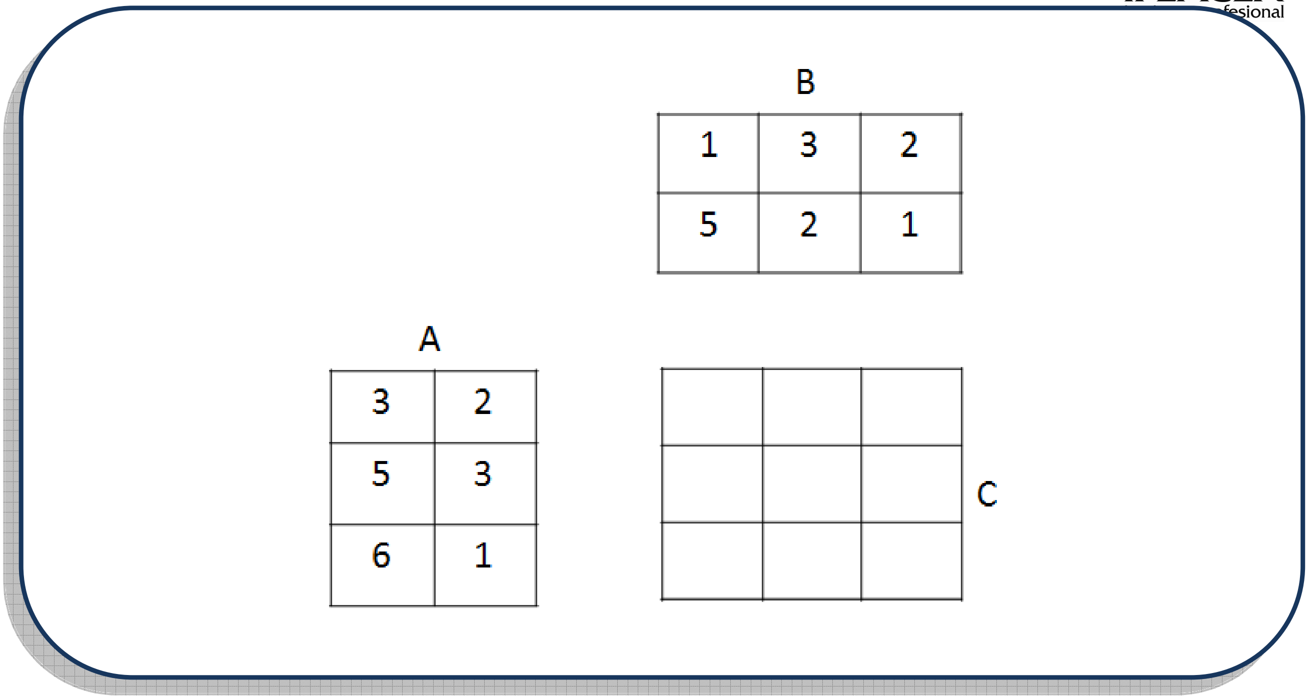
Veámoslo con un ejemplo:

Si tenemos las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $C = A * B$

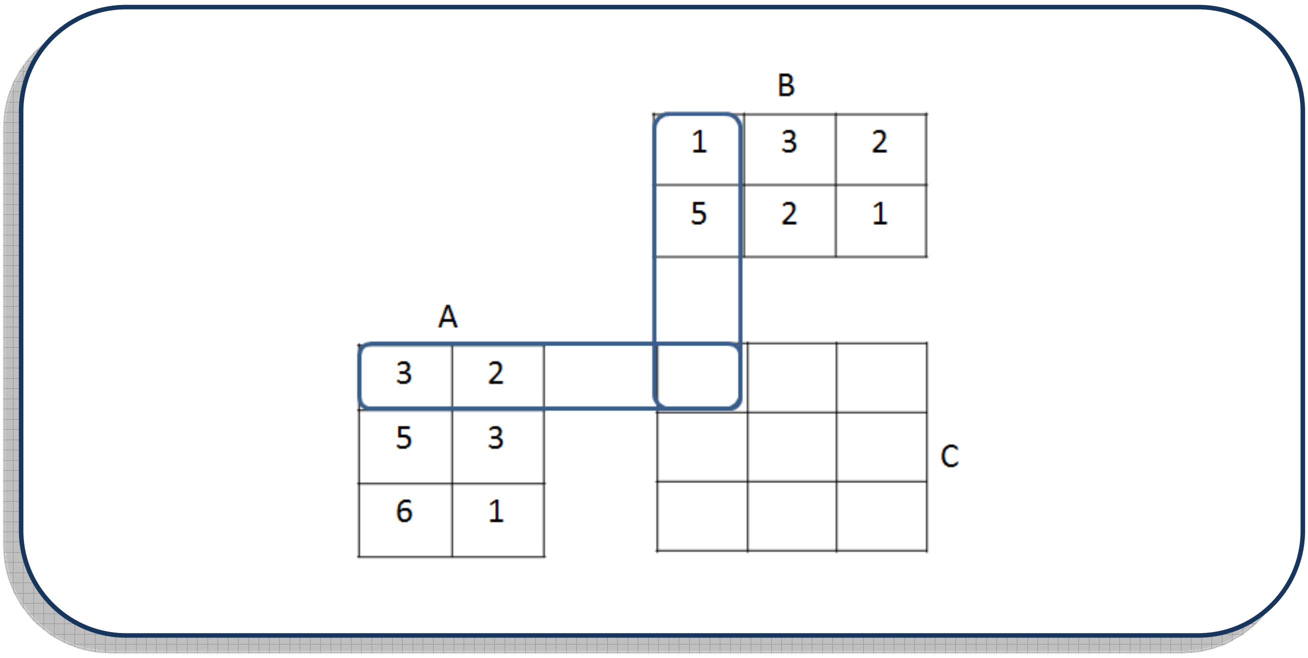
Solución: Dado que la primera matriz es de 3 x 2 y la segunda de 2 x 3, sabemos que la matriz C tendrá un orden 3 x 3, el cual será:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Para simplificar el cálculo, y explicar de forma más clara el proceso de multiplicación, podemos dibujar un diagrama:



Acá podemos apreciar las matrices de forma ordenada con respecto a la forma de llenado de C. Con eso, podemos aplicar la regla mostrada anteriormente, donde, para cada cuadro de C, debemos multiplicar en orden, cada elemento de la primera fila correspondiente de A y la columna correspondiente de B. Gráficamente, para calcular c_{11}, es de la siguiente forma:



Acá, para llenar ese primer cuadro, se debe multiplicar el primer elemento de la fila de A con el primer elemento de la columna de B y sumándole la multiplicación del segundo elemento de la fila de A con el segundo elemento de la fila de B, es decir:

$$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} = 3 * 1 + 2 * 5 = 13$$

Luego, hay que hacer el mismo proceso para cada cuadro o elemento integrante de C:

$$c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} = 3 * 3 + 2 * 2 = 13$$

$$c_{13} = a_{11} * b_{13} + a_{12} * b_{23} = 3 * 2 + 2 * 1 = 9$$

$$c_{21} = a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{12} = 5 * 1 + 3 * 5 = 20$$

$$c_{22} = a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} = 5 * 3 + 3 * 2 = 21$$

$$c_{23} = a_{21} * b_{13} + a_{22} * b_{23} = 5 * 2 + 3 * 1 = 13$$

$$c_{31} = a_{31} * b_{11} + a_{32} * b_{21} = 6 * 1 + 1 * 5 = 11$$

$$c_{32} = a_{31} * b_{12} + a_{32} * b_{22} = 6 * 3 + 1 * 2 = 20$$

$$c_{33} = a_{31} * b_{13} + a_{32} * b_{23} = 6 * 2 + 1 * 1 = 13$$

Por lo tanto, la matriz C es:

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 9 \\ 20 & 21 & 13 \\ 11 & 20 & 13 \end{pmatrix}$$

La principal regla para determinar si las matrices pueden ser multiplicadas entre sí, como ya lo indicamos, es que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz participante. Esto implica 2 cosas:

1. 2 matrices que no tengan igual número de filas o columnas no pueden ser multiplicadas entre sí. Por ejemplo, una matriz de 3 x 2 no puede ser multiplicada por otra de 4 x 5.

2. 2 matrices cuadradas del mismo orden siempre podrán ser multiplicadas entre sí. Esto es lógico, dado que ambas tendrán el mismo número de filas y columnas. Además, la matriz resultado será una cuadrada del mismo orden.

La multiplicación entre matrices tiene las siguientes propiedades:

1. La multiplicación de matrices NO es conmutativa:

   $A * B \neq B * A$

   Veámoslo en un ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, calcular $C = A * B$ y $D = B * A$, y determinar que $C \neq D$.

Calculemos primero C. Dado que las matrices A y B son matrices cuadradas de 2 x 2, pueden ser multiplicadas entre sí, y el resultado C también tendrá el orden 2 x 2:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, los integrantes de C serán:

$$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} = 1 * 2 + 2 * 8 = 18$$

$$c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} = 1 * 6 + 2 * 4 = 14$$

$$c_{21} = a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} = 3 * 2 + 4 * 8 = 30$$

$$c_{22} = a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} = 3 * 6 + 4 * 4 = 34$$

Por lo que C es:

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$$

Para el caso de D, donde las matrices B y A son cuadradas de 2 x 2, también el resultado será una cuadrada de 2 x 2:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

$$d_{11} = b_{11} * a_{11} + b_{12} * a_{21} = 2 * 1 + 6 * 3 = 20$$

$$d_{12} = b_{11} * a_{12} + b_{12} * a_{22} = 2 * 2 + 6 * 4 = 28$$

$$d_{21} = b_{21} * a_{11} + b_{22} * a_{21} = 8 * 1 + 4 * 3 = 20$$

$$d_{22} = b_{21} * a_{12} + b_{22} * a_{22} = 8 * 2 + 4 * 4 = 32$$

Luego,

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 20 & 32 \end{pmatrix}$$

Y como,

$$\begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 30 & 34 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 20 & 32 \end{pmatrix}$$

Se observa que la multiplicación no es conmutativa.

2. Todas las matrices cuadradas tienen un elemento neutro, dado por la matriz Identidad (I) de su mismo orden, de tal forma que:

$$A * I = A$$

Veamos:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, demostrar la propiedad.

Dado que A es una matriz cuadrada de 3 x 3, la matriz identidad que cumple la función de elemento neutro es la que tiene el rango 3, por lo que es:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Llamaremos, por el momento, B al resultado de $A * I$. B será una matriz de orden 3 x 3, donde sus elementos son:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Luego, los elementos de B serán:

$$b_{11} = a_{11} * I_{11} + a_{12} * I_{21} + a_{13} * I_{31} = 2 * 1 + 2 * 0 + 9 * 0 = 2$$

$$b_{12} = a_{11} * I_{12} + a_{12} * I_{22} + a_{13} * I_{23} = 2 * 0 + 2 * 1 + 9 * 0 = 2$$

$$b_{13} = a_{11} * I_{13} + a_{12} * I_{23} + a_{13} * I_{33} = 2 * 0 + 2 * 0 + 9 * 1 = 9$$

$$b_{21} = a_{21} * I_{11} + a_{22} * I_{21} + a_{23} * I_{31} = 0 * 1 + 1 * 0 + -2 * 0 = 0$$

$$b_{22} = a_{21} * I_{12} + a_{22} * I_{22} + a_{23} * I_{32} = 0 * 0 + 1 * 1 + -2 * 0 = 1$$

$$b_{23} = a_{21} * I_{13} + a_{22} * I_{23} + a_{23} * I_{33} = 0 * 0 + 1 * 0 + -2 * 1 = -2$$

$$b_{31} = a_{31} * I_{11} + a_{32} * I_{21} + a_{33} * I_{31} = -4 * 1 + 3 * 0 + 5 * 0 = -4$$

$$b_{32} = a_{31} * I_{12} + a_{32} * I_{22} + a_{33} * I_{32} = -4 * 0 + 3 * 1 + 5 * 0 = 3$$

$$b_{33} = a_{31} * I_{13} + a_{32} * I_{23} + a_{33} * I_{33} = -4 * 0 + 3 * 0 + 5 * 1 = 5$$

La matriz B será:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La cual es igual a la original A.

3. Propiedad asociativa. Si hay 3 matrices, A, B y C, donde la cantidad de filas de B es igual al número de columnas de A y la cantidad de columnas de B es igual al número de filas de C, se cumple que:

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2, & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Determinar que se cumple la prioridad.

Para verificarlo, hagamos primero el lado izquierdo de la igualdad y después el derecho. En el lado izquierdo de la igualdad hay que multiplicar primero la matriz B y C. Ya que B es de 1 x 2, mientras que C es de 2 x 2, pueden multiplicarse entre sí y el resultado (que llamaremos temporalmente D) será del orden 1 x 2.

$$B * C = D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \end{pmatrix}$$

En donde:

$$d_{11} = b_{11} * c_{11} + b_{12} * c_{21} = -2 * 3 + 4 * 2 = 2$$

$$d_{12} = b_{11} * c_{12} + b_{12} * c_{22} = -2 * 1 + 4 * 8 = 30$$

Entonces:

$$(B * C) = D = \begin{pmatrix} 2 & 30 \end{pmatrix}$$

Luego, para resolver el lado de la igualdad, debemos multiplicar:

$$A*(B*C)=A*D=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2 & 30\end{pmatrix}$$

En este caso A tiene un orden de 3 x 1, mientras que D un orden de 1 x 2, por lo que la matriz resultado (que llamaremos E) será del orden 3 x 2.

$$A*(B*C)=A*D=E=\begin{pmatrix}e_{11} & e_{12}\\e_{21} & e_{22}\\e_{31} & e_{32}\end{pmatrix}$$

Aplicando la regla para la multiplicación de matrices, tenemos:

$$e_{11}=a_{11}*b_{11}=-3*2=-6$$

$$e_{12}=a_{11}*b_{12}=-3*30=-90$$

$$e_{21}=a_{21}*b_{11}=2*2=4$$

$$e_{22}=a_{21}*b_{12}=2*30=60$$

$$e_{31}=a_{31}*b_{11}=1*2=2$$

$$e_{32}=a_{31}*b_{12}=1*30=30$$

Luego,

$$A*(B*C)=A*D=E=\begin{pmatrix}-6 & -90\\4 & 60\\2 & 30\end{pmatrix}$$

Veámoslo por el lado derecho de la igualdad. Por este lado, las matrices que se deben multiplicar primero son A y B. Ya que la primera es del orden 3 x 1 y la segunda del orden 1 x 2, el resultado (Que llamaremos F) será del orden 3 x 2:

$$(A*B)=F=\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12}\\f_{21} & f_{22}\\f_{31} & f_{32}\end{pmatrix}$$

Donde los elementos de F corresponden a:

$$f_{11}=a_{11}*b_{11}=-3*-2=6$$

$f_{12} = a_{11} * b_{12} = -3 * 4 = -12$

$f_{21} = a_{21} * b_{11} = 2 * -2 = -4$

$f_{22} = a_{21} * b_{12} = 2 * 4 = 8$

$f_{31} = a_{31} * b_{11} = 1 * -2 = -2$

$f_{32} = a_{31} * b_{12} = 1 * 4 = 4$

Entonces, la matriz F será:

$$(A * B) = F = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos la multiplicación para terminar resolviendo este lado de la igualdad.

$$(A * B) * C = F * C = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Dado que F es una matriz de 3 x 2 y C una de 2 x 2, tenemos que el resultado de la multiplicación de ellas (Que llamaremos G) será una matriz de 3 x 2:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{pmatrix}$$

Donde:

$g_{11} = f_{11} * c_{11} + f_{12} * c_{21} = 6 * 3 + -12 * 2 = -6$

$g_{12} = f_{11} * c_{12} + f_{12} * c_{22} = 6 * 1 + -12 * 8 = -90$

$g_{21} = f_{21} * c_{11} + f_{22} * c_{21} = -4 * 3 + 8 * 2 = 4$

$g_{22} = f_{21} * c_{12} + f_{22} * c_{22} = -4 * 1 + 8 * 8 = 60$

$g_{31} = f_{31} * c_{11} + f_{32} * c_{21} = -2 * 3 + 4 * 2 = 2$

$g_{32} = f_{31} * c_{12} + f_{32} * c_{22} = -2 * 1 + 4 * 8 = 30$

Entonces:

$$(A * B) * C = F * C = G = \begin{pmatrix} -6 & -90 \\ 4 & 60 \\ 2 & 30 \end{pmatrix}$$

Podemos apreciar que $F = G$, por lo que se comprueba la propiedad mostrada.

Esta propiedad explicada es muy importante, ya que en el caso de multiplicar 3 o más matrices entre sí, para no hacer excesivamente complejo el proceso, deben seleccionarse 2 matrices adyacentes para multiplicarse primero y luego seguir con las otras, siempre en parejas. En ese caso, pueden existir distintas duplas que se pueden elegir, pero la longitud del ejercicio puede ser distinto. En el ejemplo que vimos arriba, la primera forma era más rápida y menos compleja que la segunda, a pesar de llegar al mismo resultado.

4. Existencia de matriz inversa: Ciertas matrices cuadradas A presentan una inversa, denominada A^{-1}, de tal forma que:

   $A * A^{-1} = I$

   Para saber qué matrices tienen inversa y como calcularla, debemos conocer primero las otras operaciones matriciales.

Transposición de matrices

El proceso de transponer matrices es muy sencillo: Consiste en transformar las filas de una matriz en columnas correspondientes y viceversa. La transpuesta de A se denomina A^T.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, determinar A^T

Como estaba indicado, A es una matriz que tiene 3 filas y 2 columnas, por lo que transpuesta tendrá 2 filas y 3 columnas, donde cada fila será la misma columna en orden. Es decir, la primera fila de A será la primera columna de A^T leyéndose de arriba abajo y de izquierda a derecha. En consecuencia:

$A^T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.2 Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada es un valor numérico que resulta de obtener todos los múltiplos posibles de los elementos de una matriz, en base a una serie de restricciones. El determinante de una matriz A se denota $|A|$ o $\det(A)$.

1.2.1 Cálculo de Determinantes

Las formas de cálculo de determinante más adecuadas para una matriz variarán de acuerdo al rango que ésta tenga:

Matrices de rango 2

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces $|A| = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$

O sea, multiplicamos los extremos superior izquierdo con inferior derecho, a lo cual le restamos la multiplicación del extremo superior derecho con el inferior izquierdo.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, encontrar su determinante.

$\det(A) = |A| = 1 * 6 - 5 * -2 = 6 + 10 = 16$

Regla de Sarrus (Matrices de Rango 3)

Este caso es similar al de rango 2, pero con un poco más de complejidad.

Si tenemos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, el determinante será:

$$|A| = a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{13} * a_{21} * a_{32} - a_{13} * a_{22} * a_{31} - a_{12} * a_{21} * a_{33} - a_{11} * a_{23} * a_{32}$$

Viéndolo gráficamente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Inicialmente se multiplican los elementos en el sentido de las líneas de color, los 3 en la flecha azul se multiplican entre sí, los 3 de la verde y los 3 de la roja también. Estas multiplicaciones van sumadas en la fórmula.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego, se multiplican los elementos en el sentido contrario, como muestran las flechas. Estos 3 productos se restan en la fórmula del determinante.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar su determinante.

$$|A| = 2 * 5 * 2 + -3 * 1 * 6 + 4 * 0 * -4 - 4 * 5 * 6 - -3 * 0 * 2 - 2 * 1 * -4$$

$$|A| = 20 - 18 + 0 - 120 - 0 + 8 = -110$$

Método de los cofactores

Si quisiéramos aplicar una regla semejante a la usada en las anteriores, para una matriz de rango 4, deberíamos hacer 24 multiplicaciones distintas. Esto, obviamente, es un ejercicio que enreda fácilmente, haciendo gastar tiempo excesivo, sin una utilidad mayor.

Para facilitar las cosas, hay que conocer los conceptos de menor y cofactor.

La menor de un elemento de una matriz es la matriz que resulta de eliminar a la original la fila y la columna en la que se encuentra el mismo elemento. A la menor de cualquier elemento a_{ij} se le denomina M_{ij} y su determinante será $|M_{ij}|$

Por ejemplo, si tenemos la matriz del ejercicio anterior, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, si quisiéramos determinar el determinante de la menor del elemento a_{23}, lo que deberíamos hacer es, primero, eliminar de la matriz la segunda fila y la tercera columna, lo que quedaría así:

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Luego, le calculamos el determinante:

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 2 * -4 - -3 * 6 = 10$$

Asimismo, podemos también calcular los otros 8 menores y sus determinantes:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 5 * 2 - 1 * -4 = 14$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 * 2 - 1 * 6 = -6$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 * -4 - 5 * 6 = -30$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -3 * 2 - -3 * 6 = 10$$

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 * 2 - 6 * 4 = -20$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 * 1 - 4 * 5 = -23$$

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 * 1 - 4 * 0 = 2$$

$$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 * 5 - -3 * 0 = 10$$

Con estos determinantes de las matrices, podemos calcular los cofactores, que son el producto de la siguiente relación, denotados por $cof(a_{ij})$:

$$cof(a_{ij}) = |M_{ij}| * (-1)^{i+j}$$

De ella se aprecia que para calcular el cofactor lo que se le hace a la determinante del menor es multiplicarlo por -1 elevado a (i+j). Esto, lo que hace es transformar el signo de la determinante cuando la suma de la columna con la fila del elemento es impar y mantiene el signo cuando esa suma es par.

Por ejemplo, en el caso anterior:

$$Cof(a_{11}) = |M_{11}| * (-1)^{1+1} = 14 * (-1)^2 = 14 * 1 = 14$$

$$Cof(a_{12}) = |M_{12}| * (-1)^{1+2} = -6 * (-1)^3 = -6 * -1 = 6$$

$$Cof(a_{13}) = |M_{13}| * (-1)^{1+3} = -30 * (-1)^4 = -30 * 1 = -30$$

$$Cof(a_{21}) = |M_{21}| * (-1)^{2+1} = 10 * (-1)^3 = 10 * -1 = -10$$

$$Cof(a_{22}) = |M_{22}| * (-1)^{2+2} = -20 * (-1)^4 = -2 * 1 = -20$$

$$Cof(a_{23}) = |M_{23}| * (-1)^{2+3} = 10 * (-1)^5 = 10 * -1 = -10$$

$$Cof(a_{31}) = |M_{31}| * (-1)^{3+1} = -23 * (-1)^4 = -23 * 1 = -23$$

$$Cof(a_{32}) = |M_{32}| * (-1)^{3+2} = 2 * (-1)^5 = 2 * -1 = -2$$

$$Cof(a_{33}) = |M_{33}| * (-1)^{3+3} = 10 * (-1)^6 = 10 * 1 = 10$$

Ahora se preguntará, ¿para qué sirven todos estos cofactores? Simple: Para toda matriz, el determinante estará denominado por la siguiente fórmula:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} * cof(a_{ij}); \quad \forall\, i \leq n$$

En palabras simples, se considera cualquier fila de la matriz original A, se multiplica cada elemento con su cofactor correspondiente, para luego sumarlos.

Probemos con el ejemplo, para cada fila.

En el caso de la primera fila, esto sería:

$$|A| = a_{11} * cof(a_{11}) + a_{12} * cof(a_{12}) + a_{13} * cof(a_{13}) = 2 * 14 + -3 * 6 + 4 * -30 = -110$$

Para la segunda fila, tenemos:

$$|A| = a_{21} * cof(a_{21}) + a_{22} * cof(a_{22}) + a_{23} * cof(a_{23}) = 0 * -10 + 5 * 20 + 1 * -10 = -110$$

Y para la tercera fila, será:

$$|A| = a_{31} * cof(a_{31}) + a_{32} * cof(a_{32}) + a_{33} * cof(a_{33}) = 6 * -23 + -4 * -2 + 2 * 10 = -110$$

Es decir, no importa cuál fila se use, el resultado debiese ser el mismo (Que corresponde al valor del determinante calculado con la regla de Sarrus). Esto es importante para reducir la carga de trabajo de encontrar el determinante, ya que se aprecia que no es necesario obtener todos los cofactores para realizar el cálculo, sino que solamente los de la fila que se va a utilizar. Por ello, hay filas que pueden reducir enormemente el esfuerzo, especialmente aquellas que poseen ceros en sus elementos iniciales. En el caso anterior, podríamos haber realizado el cálculo con la segunda fila, sólo calculando 2 cofactores, los del elemento a_{22} y a_{23}, ya que el primer elemento, al ser nulo, iba a dar resultado cero.

La definición de qué herramienta se utilizará en las matrices de rango 3 dependerá de la persona que realice el cálculo, ya que habrá algunas en las que será más rápido utilizar la regla de Sarrus y en otras más rápido usar los cofactores. Sin embargo, en matrices de rango 4 o superior, debería trabajarse siempre con este último método.

Los menores en una matriz de rango cuatro serán de rango 3, a los cuales se les puede usar la regla de Sarrus para calcular su determinante, con el cual se obtienen los cofactores; los menores de una matriz de rango 5 serán de rango cuatro, a los que para calcularles el determinante, hay que realizar el mismo proceso de calcular la menor de esas “submatrices” y obtener sus cofactores, y así sucesivamente.

En definitiva, se puede utilizar este método para encontrar el determinante de matrices cuadradasde cualquier tamaño.

1.2.2 Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz y su traspuesta es el mismo:

   $|A| = |A^T|$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, determinar que se cumple la prioridad.

Lo que vamos a hacer es calcular el determinante para ambas matices, pero primero hay que calcular su transpuesta.

$$|A^T| = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, sacamos sus determinantes:

$$\begin{aligned} |A| &= -2*1*5+4*0*2+3*5*-4-3*1*2-4*5*5--2*0*-4 \\ &= -10+0-60-6-100-0=-176 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A^T| &= -2*1*5+5*-4*3+2*4*0-2*1*3-5*4*5--2*-4*0 \\ &= -10-60+0-6-100-0=-176 \end{aligned}$$

Luego, la determinante de ambas es igual.

2. El determinante del producto de 2 matrices será igual al producto de sus respectivos determinantes:

   $|A*B| = |A|*|B|$

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinar si se cumple la propiedad.

Primero, calculemos el determinante de ambas matrices:

$$\begin{aligned} |A| &= -1*1*2+2*2*-3+0*3*4-0*1*-3-2*3*2--1*2*4 \\ &= -2-12+0-0-12+8=-18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| &= 4*2*1+1*3*-4+2*3*0-2*2*-4-1*3*1-4*3*0 \\ &= 8-12+0+16-3-0=9 \end{aligned}$$

Ahora, saquemos el resultado de la multiplicación entre ambas matrices:

Sea $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ el resultado de la multiplicación de las matrices A y B.

$c_{11} = -1 * 4 + 2 * 3 + 0 * -4 = 2$

$c_{12} = -1 * 1 + 2 * 2 + 0 * 0 = 3$

$c_{13} = -1 * 2 + 2 * 3 + 0 * 1 = 4$

$c_{21} = 3 * 4 + 1 * 3 + 2 * -4 = 7$

$c_{22} = 3 * 1 + 1 * 2 + 2 * 0 = 5$

$c_{23} = 3 * 2 + 1 * 3 + 2 * 1 = 11$

$c_{31} = -3 * 4 + 4 * 3 + 2 * -4 = -8$

$c_{32} = -3 * 1 + 4 * 2 + 2 * 0 = 5$

$c_{33} = -3 * 2 + 4 * 3 + 2 * 1 = 8$

Luego, la matriz $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 11 \\ -8 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Ahora, se calcula la determinante de C:

$$\begin{aligned} |C| &= 2 * 5 * 8 + 4 * 7 * 5 + 3 * 11 * -8 - 4 * 5 * -8 - 3 * 7 * 8 - 2 * 11 * 5 \\ &= 80 + 140 - 264 + 160 - 168 - 110 = -162 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$|A| * |B| = |C|$

$-18 * 9 = -162$

$-162 = -162$

Se cumple la propiedad.

3. El determinante de una matriz es cero, si la matriz cumple con alguna de estas condiciones:

    i. Posee 2 líneas iguales

    ii. Posee una línea donde todos los elementos son nulos.

    iii. Los elementos de una línea es una combinación de las otras que conforman la matriz.

El cómo se da esta propiedad en el caso ii. Es fácil de observar. Si quisiéramos usar el método del cofactor en una matriz con una línea nula, podríamos utilizar esa línea para calcular el determinante y, dado que se multiplican los elementos que conforman la línea con su respectivo cofactor, daría cero siempre. En los otros 2 casos, no es tan simple. Verifiquémoslo con un ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz con una fila repetida, la primera y la tercera. Calcular su determinante.

El determinante será:

$$\begin{aligned} |A| &= 2*2*1+3*0*2+1*4*3-1*2*2-3*4*1-2*0*3 \\ &= 4+0+12-4-12-0=0 \end{aligned}$$

4. El determinante de una matriz triangular es el producto de todos los elementos que conforman la diagonal.

Consideremos una matriz triangular $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular su determinante.

$$\begin{aligned} |A| &= 2*2*1+-1*3*0+4*0*0-4*2*0-2*3*0--1*0*1 \\ &= 4+0+0+0+0+0=4 \end{aligned}$$

Lo cual es igual a la multiplicación entre los elementos de la diagonal principal.

5. Si a los elementos de una línea se le suman los elementos de otra línea de la matriz, multiplicados por un valor numérico, el determinante no cambia.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar sus determinantes.

La matriz B corresponde a la misma matriz A, pero a los elementos de la fila 1 se le sumaron los elementos de la fila 3.

La determinante de A es:

$$\begin{aligned} |A| &= 1*2*1+2*0*3+2*-4*2-2*2*3-1*0*2-2*-4*1 \\ &= 2+0-16-12-0+8=-18 \end{aligned}$$

En el caso de B, su determinante es:

$$\begin{aligned} |B| &= 4*2*1+4*0*3+3*-4*2-3*2*3-4*-4*1-4*0*2 \\ &= 8+0-24-18+16-0=-18 \end{aligned}$$

Los determinantes son iguales.

6. Si se intercambian 2 filas entre sí, el determinante cambia de signo.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dos matrices, donde B se diferencia de A en que su fila 2 está intercambiada con la tercera fila. Calcular sus determinantes.

La matriz A tiene por determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= -1*1*2+2*0*0+3*5*3-2*5*2-3*1*0--1*0*3 \\ &= -2+0+45-20-0-0=23 \end{aligned}$$

Mientras tanto, la determinante de B es:

$$\begin{aligned} |B| &= -1*3*0+2*2*5+3*0*0-3*3*5-2*0*0--1*2*1 \\ &= -0+20+0-45-0+2=-23 \end{aligned}$$

7. Si una fila o columna se multiplica por un número real, el determinante se multiplica por ese número.

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ dos matrices, donde la diferencia está que en B, la segunda columna está multiplicada por 2. Encontrar sus determinantes.

El determinante de A es:

$$|A| = -1 * 2 * 2 + 3 * 3 * 2 + 2 * 1 * 2 - 2 * 2 * 2 - 3 * 1 * 2 - -1 * 3 * 2$$
$$= -4 + 18 + 4 - 8 - 6 + 6 = 10$$

Por su parte, el determinante de B es:

$$|B| = -1 * 4 * 2 + 6 * 3 * 2 + 2 * 1 * 4 - 2 * 4 * 2 - 6 * 1 * 2 - -1 * 3 * 4$$
$$= -8 + 36 + 8 - 16 - 12 + 12 = 20$$

Entonces, el determinante de B es el doble del de A.

1.3 Transformación de matrices

A las matrices se les pueden realizar ciertas transformaciones o cambios internos, siempre y cuando no afecten ni el orden ni el rango de la misma.

Las transformaciones permitidas son:

1. Intercambiar filas. Se escribe $Fa \leftrightarrow Fb$, donde a y b son el número de las filas que se intercambian.

Por ejemplo, si tenemos una matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, podemos intentar $F2 \leftrightarrow F3$, con los que nos quedaría:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Multiplicar una fila por un valor real distinto de cero. Se escribe $Fa \rightarrow kFa$, donde k es la constante.

Si a la misma matriz del ejemplo anterior le intentamos hacer $F1 \rightarrow 2F1$, manteniendo los cambios previos, nos deja:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Sumar una fila con otra fila, expresado como $Fa \rightarrow Fa + Fb$

Podemos continuar con el mismo ejemplo, aplicándole $F2 \rightarrow F2 - F1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Sumar una fila con el múltiplo de otra fila, que se escribe $Fa \rightarrow Fa + kFb$

Intentemos ahora $F1 \rightarrow F1 + 2F3$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Estas transformaciones las podemos aprovechar, junto con las propiedades de los determinantes, para calcularlos de forma aún más fácil.

Si sabemos que el sumar una fila con otra, esté esta otra multiplicada o no, no cambia el determinante, y además sabemos que el determinante de una matriz triangular es el múltiplo de todos los elementos que forman la diagonal principal, ¿porqué no transformar una matriz en triangular para calcular su determinante? Eso es factible, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Apliquemos primero $F3 \to F3 - F1$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos la transformación $F2 \to F2 - \frac{3}{5}F1$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, realicemos $F2 \to F2 - \frac{25}{11}F1$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{11} \end{pmatrix}$$

Aquí nos queda una matriz triangular superior. Dado las propiedades que ya mencionamos, su determinante es:

$$|A| = 5 * \frac{11}{5} * -\frac{23}{11} = -23$$

Con esto, presentamos 3 formas distintas de calcular la determinante de una matriz de rango 3, de las cuales 2 sirven para matrices de rango 4 hacia arriba. Elegir cuál es más conveniente en un momento determinado es una decisión individual.

1.4 Matriz de cofactores y adjunta.

Los cofactores que ya vimos en páginas anteriores pueden colocarse en una matriz del mismo orden que la original, dado que cada elemento posee un cofactor. Esta es llamada matriz de cofactores, denominada $cof(A)$.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 8 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar su matriz de cofactores.

Debemos, entonces, determinar cuáles son sus cofactores:

$$cof(a_{11}) = (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 * -8 = -8$$

$$cof(a_{12}) = (-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 * 4 = -4$$

$$cof(a_{13}) = (-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 12 = 12$$

$$cof(a_{21}) = (-1)^{2+1} * \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 * 2 = -2$$

$$cof(a_{22}) = (-1)^{2+2} * \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 * -25 = -25$$

$$cof(a_{23}) = (-1)^{2+3} * \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 * -11 = 11$$

$$cof(a_{31}) = (-1)^{3+1} * \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 * 14 = 14$$

$$cof(a_{32}) = (-1)^{3+2} * \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -1 * -47 = 47$$

$$cof(a_{33}) = (-1)^{3+3} * \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 1 * -13 = -13$$

Luego, la matriz de cofactores será:

$$cof(A) = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 12 \\ -2 & -25 & 11 \\ 14 & 47 & -13 \end{pmatrix}$$

De la matriz de cofactores podemos desprender la matriz adjunta. Esta se denomina $adj(A)$ y corresponde a:

$$adj(A) = (cof(A))^T$$

Es decir, es la matriz de cofactores traspuesta.

Volviendo al ejemplo:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 14 \\ -4 & -25 & 47 \\ 12 & 11 & -13 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se vuelve relevante para calcular la inversa.

1.5 Matriz Inversa.

Como vimos anteriormente, muchas matrices cuadradas poseen una inversa, denominada A^{-1}, de forma tal que:

$$A * A^{-1} = I$$

Sin embargo, no todas las matrices cuadradas tienen una inversa. Las que la tienen son llamadas matrices invertibles. Son invertibles aquellas que poseen un determinante distinto de cero. Las cuyo determinante es cero, por otro lado, son llamadas matrices singulares o degeneradas.

Volvamos al ejemplo anterior: Si queremos saber si la matriz es invertible, debemos encontrar su determinante y ver si es distinta de cero.

Aplicando regla de los cofactores, ya que los tenemos calculados de antemano, en la primera fila:

$$|A| = a_{11} * cof(a_{11}) + a_{12} * cof(a_{12}) + a_{13} * cof(a_{13}) = -3 * -8 + 2 * -4 + 4 * 12$$
$$= 24 - 8 + 48 = 64$$

Luego, como su determinante es distinto de cero, podemos decir que tiene una inversa.

La fórmula de la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * adj(A)$$

Es decir, a cada elemento de la adjunta de A se le divide por el determinante para encontrar cada elemento.

En nuestro ejemplo sería:

$$A^{-1} = \frac{1}{64} * \begin{pmatrix} -8 & -2 & 14 \\ -4 & -25 & 47 \\ 12 & 11 & -13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{32} & \frac{7}{32} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{25}{64} & \frac{47}{64} \\ \frac{3}{16} & \frac{11}{64} & -\frac{13}{64} \end{pmatrix}$$

Demostremos que esta matriz es la inversa de A. Para ello, debemos resolver:

$$A * A^T = B$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 8 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{32} & \frac{7}{32} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{25}{64} & \frac{47}{64} \\ \frac{3}{16} & \frac{11}{64} & -\frac{13}{64} \end{pmatrix} = B$$

Donde:

$$b_{11} = -3 * -\frac{1}{8} + 2 * -\frac{1}{16} + 4 * \frac{3}{16} = \frac{3}{8} - \frac{2}{16} + \frac{12}{16} = 1$$

$$b_{12} = -3 * -\frac{1}{32} + 2 * -\frac{25}{64} + 4 * \frac{11}{64} = \frac{3}{32} - \frac{25}{32} + \frac{22}{32} = 0$$

$$b_{13} = -3 * \frac{7}{32} + 2 * \frac{47}{64} + 4 * -\frac{13}{64} = -\frac{21}{32} + \frac{47}{32} - \frac{26}{32} = 0$$

$$b_{21} = 8 * -\frac{1}{8} + -1 * -\frac{1}{16} + 5 * \frac{3}{16} = -1 + \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = 0$$

$$b_{22} = 8 * -\frac{1}{32} + -1 * -\frac{25}{64} + 5 * \frac{11}{64} = -\frac{8}{32} + \frac{25}{64} + \frac{55}{64} = 1$$

$$b_{23} = 8 * \frac{7}{32} + -1 * \frac{47}{64} + 5 * -\frac{13}{64} = \frac{56}{32} - \frac{47}{64} - \frac{65}{64} = 0$$

$$b_{31} = 4 * -\frac{1}{8} + 1 * -\frac{1}{16} + 3 * \frac{3}{16} = -\frac{4}{8} - \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 0$$

$$b_{32} = 4 * \frac{7}{32} + 1 * \frac{47}{64} + 3 * -\frac{13}{64} = \frac{28}{32} + \frac{47}{64} - \frac{39}{64} = 1$$

Entonces, la matriz B será:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La cual es igual a la matriz identidad. Entonces, estamos frente a la inversa de la matriz.

Otra forma de calcular la inversa de una matriz es por medio de las transformaciones que vimos anteriormente. Para ello, se construye un sistema matricial de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

Es decir, a la izquierda de la barra se ubica la matriz inicial, mientras que a la derecha se ubica la matriz identidad. Luego, para encontrar la matriz inversa hay que realizar transformaciones a la original que la lleven a transformarse en la identidad. Cuando eso haya sucedido, lo que quede a la derecha (Donde se encontraba I_n antes de hacer las transformaciones) será la inversa.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar, por medio del método de transformaciones, su inversa A^{-1}.

Primero, verifiquemos que la matriz A es invertible. Para eso, calculamos su determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= 2*5*1 + -4*2*-4 + 3*1*2 - 3*5*-4 - -4*1*1 - 2*2*2 \\ &= 10 + 32 + 6 + 60 + 4 - 8 = 104 \end{aligned}$$

Luego, como $|A| \neq 0$, es una matriz invertible. Con esto, podemos crear el sistema de matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego, le empezamos a realizar transformaciones:

i) $F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ii) $F_2 \to F_2 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

iii) $F_3 \rightarrow F_3 + 4F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 22 & 9 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

iv) $F_2 = F_2/-14$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 22 & 9 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

v) $F_3 = F_3 - 22F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{52}{7} & \frac{11}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{array}\right)$$

vi) $F_3 = \left({}^{7}/_{52}\right) * F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{array}\right)$$

Aquí ya logramos construir una matriz triangular superior, y la diagonal está formada solamente por números 1, ahora debemos eliminar los números de la parte superior de la matriz.

vii) $F_1 \rightarrow F_1 - 5F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{23}{14} & \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{array}\right)$$

viii) $F_2 \rightarrow 14 * F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{23}{14} & \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 14 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{array}\right)$$

ix) $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{23}{14} & \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 14 & 0 & -\frac{63}{52} & \frac{49}{26} & -\frac{7}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{array}\right)$$

x) $F_2 \rightarrow F_2 / 14$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{23}{14} & \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{104} & \frac{7}{52} & -\frac{1}{104} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{array}\right)$$

xi) $F_1 \rightarrow F_1 * 14$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 0 & 23 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{104} & \frac{7}{52} & -\frac{1}{104} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{array}\right)$$

xii) $F_1 \rightarrow F_1 - 23F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 0 & 0 & \frac{7}{52} & \frac{35}{26} & -\frac{161}{52} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{104} & \frac{7}{52} & -\frac{1}{104} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{array}\right)$$

xiii) $F_1 \rightarrow F_1/14$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{104} & \frac{5}{52} & -\frac{23}{104} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{104} & \frac{7}{52} & -\frac{1}{104} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{array}\right)$$

Luego, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{104} & \frac{5}{52} & -\frac{23}{104} \\ -\frac{9}{104} & \frac{7}{52} & -\frac{1}{104} \\ \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{pmatrix}$$

Demostremos que esta es la matriz inversa. Como sabemos, para eso debe cumplirse:

$$A * A^{-1} = I_n$$

Llamemos B a la matriz resultado de $A * A^{-1}$, de orden 3.

Esta será:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{104} & \frac{5}{52} & -\frac{23}{104} \\ -\frac{9}{104} & \frac{7}{52} & -\frac{1}{104} \\ \frac{11}{52} & \frac{3}{26} & \frac{7}{52} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$b_{11} = 2 * \frac{1}{104} + -4 * -\frac{9}{104} + 3 * \frac{11}{52} = 1$$

$$b_{12} = 2 * \frac{5}{52} + -4 * \frac{7}{52} + 3 * \frac{3}{26} = 0$$

$$b_{13} = 2 * -\frac{23}{104} + -4 * -\frac{1}{104} + 3 * \frac{7}{52} = 0$$

$$b_{21} = 1 * \frac{1}{104} + 5 * -\frac{9}{104} + 2 * \frac{11}{52} = 0$$

$$b_{22} = 1 * \frac{5}{52} + 5 * \frac{7}{52} + 2 * \frac{3}{26} = 1$$

$$b_{23} = 1 * -\frac{23}{104} + 5 * -\frac{1}{104} + 2 * \frac{7}{52} = 0$$

$$b_{31} = -4 * \frac{1}{104} + 2 * -\frac{9}{104} + 1 * \frac{11}{52} = 0$$

$$b_{32} = -4 * \frac{5}{52} + 2 * \frac{7}{52} + 1 * \frac{3}{26} = 0$$

$$b_{33} = -4 * -\frac{23}{104} + 2 * -\frac{1}{104} + 1 * \frac{7}{52} = 0$$

Por lo tanto:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Por lo que la matriz encontrada es la inversa de A.

1.6 Sistemas de Ecuaciones Lineales.

La gran pregunta que se hace uno después de estudiar las matrices es, ¿cuál es la utilidad de todo esto? Si bien las matrices son utilizadas en amplios campos de distintas ciencias, hay un uso en particular que nos interesará en este ramo: Los sistemas de ecuaciones.

Es muy probable que se haya enfrentado alguna vez a un sistema de ecuaciones simple: 2 ecuaciones que tienen 2 variables distintas, como el siguiente:

$$x + y = 2$$

$$2x - 3y = 1$$

En este sistema se deben encontrar 2 números desconocidos, x e y, sujetos a 2 condiciones:

1) La suma de ambos números es 2
2) El resultado de restarle a 2 veces el primero, el segundo multiplicado por 3, es 1.

Aplicando cualquiera de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones aprendidos en la escuela, que no vienen al caso mencionar, tendremos que $x = {}^{7}/_{5}$ e $y = {}^{3}/_{5}$.

Para sistemas de 2 incógnitas, es relativamente rápido encontrar las soluciones. Sin embargo, podríamos encontrarnos con sistemas como el siguiente:

$$x - 2y + 2z + t = 4$$

$$x + y + z - t = 5$$

$$x - y - z + t = 6$$

$$6x - 3y - 3z + 2t = 32$$

Usualmente, el resolver sistemas de ecuaciones, bajo los métodos estudiados en la escuela,significa una importante carga de trabajo, por lo que hay que buscar algún sistema que permita calcular más rápidamente. Para eso aplicamos las matrices.

Existen 2 métodos que se pueden utilizar para resolver los sistemas de ecuaciones lineales, por medio de las matrices. Estos son la Regla de Cramer y las Transformaciones de Gauss.

1.6.1 Regla de Cramer

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales de 2 variables, como el siguiente:

$$x + y = 3$$

$$x - y = 5$$

Este sistema de ecuaciones lineales, aunque a simple vista no lo parezca, podemos transformarlo en una igualdad entre matrices, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Si usted multiplica las matrices de la izquierda, verá que le da las partes de la izquierda de las ecuaciones. En general, se construye una matriz, donde cada fila equivale a una ecuación, con los valores numéricos que acompañan a cada incógnita (si están sumados es positivo; si están restados, negativo). A esta se multiplica por otra matriz de una sola columna que tiene listado (en orden) las incógnitas. Al otro lado de la igualdad está en una matriz de columna única los resultados de las ecuaciones.

Sea:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Estas se pueden expresar como matrices así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si en cualquier ecuación no aparece una incógnita, el coeficiente que se debe poner en la matriz es un 0.

A la matriz que aparece en la izquierda, se le llama matriz de coeficientes, la segunda es la matriz de variables y la tercera la matriz de resultados. Sin embargo, podemos obviar las variables y considerar solo las de coeficientes y resultados, de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

A esta matriz se le llama matriz aumentada.

La regla de Cramer implica que el valor de cada variable x_i estará determinado por la siguiente relación entre determinantes:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Donde A_j es la matriz resultante de modificar la columna j de la matriz de coeficientes A por la columna de valores independientes B.

Por ejemplo, si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x_1 + x_2 = 4$$

$$3x_1 + 8x_2 = 3$$

Podemos escribirlo de la forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Su matriz aumentada será de la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 3 \end{array}\right)$$

La regla de Cramer implica que:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{4 * 8 - 1 * 3}{2 * 8 - 1 * 3} = \frac{32 - 3}{16 - 3} = \frac{29}{13}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2 * 3 - 4 * 3}{2 * 8 - 1 * 3} = \frac{6 - 12}{16 - 3} = -\frac{6}{13}$$

En rojo está marcada la columna que ha sido cambiada en cada cálculo de determinante.

Podemos aplicar el mismo proceso para sistemas de 3 incógnitas con 3 variables.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 15$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 22$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = -12$$

La matriz aumentada sería la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 15 \\ 2 & 5 & 2 & 22 \\ -1 & -1 & 3 & -12 \end{array}\right)$$

Aplicando la forma de resolución expresada anteriormente, tenemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 2 & -5 \\ 22 & 5 & 2 \\ -12 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{15 * 5 * 3 + 2 * 2 * -12 + -5 * 22 * -1 - -5 * 5 * -12 - 2 * 22 * 3 - 15 * 2 * -1}{3 * 5 * 3 + 2 * 2 * -1 + -5 * 2 * -1 - -5 * 5 * -1 - 2 * 2 * 3 - 3 * 2 * -1}$$

$$= \frac{225 - 48 + 110 - 300 - 132 + 30}{45 - 4 + 10 - 25 - 12 + 6} = -\frac{115}{20} = -\frac{23}{4}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 15 & -5 \\ 2 & 22 & 2 \\ -1 & -12 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{3 * 22 * 3 + 15 * 2 * -1 + -5 * 2 * -12 - -5 * 22 * -1 - 15 * 2 * 3 - 3 * 2 * -12}{3 * 5 * 3 + 2 * 2 * -1 + -5 * 2 * -1 - -5 * 5 * -1 - 2 * 2 * 3 - 3 * 2 * -1}$$

$$= \frac{198 - 30 + 120 - 110 - 90 + 72}{45 - 4 + 10 - 25 - 12 + 6} = \frac{160}{20} = 8$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 22 \\ -1 & -1 & -12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{3 * 5 * -12 + 2 * 22 * -1 + 15 * 2 * -1 - 15 * 5 * -1 - 2 * 2 * -12 - 3 * 22 * -1}{3 * 5 * 3 + 2 * 2 * -1 + -5 * 2 * -1 - -5 * 5 * -1 - 2 * 2 * 3 - 3 * 2 * -1}$$

$$= \frac{-180 - 44 - 30 + 75 + 48 + 66}{45 - 4 + 10 - 25 - 12 + 6} = -\frac{65}{20} = -\frac{13}{4}$$

Por lo tanto, las soluciones serán $x_1 = -\frac{23}{4}$; $x_2 = 8$ y $x_3 = -\frac{13}{4}$

1.6.2 Método de Transformaciones de Gauss

Con la Regla de Cramer, se pueden resolver los sistemas de ecuaciones del tamaño que se quiera. Sin embargo, si el sistema de ecuaciones lineales es muy grande, puede que sea mejor utilizar el método de Transformaciones de Gauss.

El método de resolución de sistema de ecuaciones lineales, usando transformaciones consta de lo siguiente:

1) Se construye la matriz aumentada, formada por la de coeficiente y la de valores independientes.

Consideremos el sistema de ecuaciones que mostramos al inicio de este capítulo:

$$x - 2y + 2z + t = 4$$

$$x + y + z - t = 5$$

$$x - y - z + t = 6$$

$$6x - 3y - 3z + 2t = 32$$

En ese caso, la matriz aumentada sería:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 6 & -3 & -3 & 2 & 32 \end{array}\right)$$

2) Se le aplican distintas transformaciones elementales para transformar la matriz en escalonada (Triangular superior), las cuales ya fueron vistas en el capítulo anterior.

La meta en este paso es transformar la matriz en algo que posea ceros en la parte inferior de la misma. Para eso pueden existir muchas maneras de alcanzar ese resultado, lo cual dependerá de la observación del que resuelve y sus preferencias. Acá mostraremos una de ellas:

Partiendo desde

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 6 & -3 & -3 & 2 & 32 \end{array}\right)$$

Realizaremos las siguientes transformaciones:

i. $F_4 \rightarrow F_4 - 6F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

ii. $F_3 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

iii. $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

iv. $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

v. $F_3 \to F_3 - 2F_2$ y $F_4 \to F_4 - 3F_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & -10 \end{array}\right)$$

vi. $F_3 \to F_3/2$ y $F_4 \to F_4/3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 4 & -4/3 & -10/3 \end{array}\right)$$

vii. $F_4 \to F_4 - F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & -5/6 \end{array}\right)$$

Cada transformación realizada fue pensada en cumplir uno de 2 propósitos: O simplificar el cálculo o eliminar algún elemento de los casilleros que eran no deseados.

3) Cuando la matriz está ya escalonada, pasar las filas de aquella a forma de ecuación.

En nuestro ejemplo, esto quedaría:

$$x - 2y + 2z + t = 4$$

$$y - 3z = 2$$

$$4z - t = -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{1}{3}t = -\frac{5}{6}$$

4) Las ecuaciones resultantes se van resolviendo desde abajo hacia arriba, descubriéndose el valor de una variable en cada ecuación.

Volviendo al ejemplo, las soluciones a las incógnitas serán:

En la cuarta ecuación:

$$-\frac{1}{3}t = -\frac{5}{6}$$

$$t = \frac{5}{2}$$

En la tercera ecuación:

$$4z - t = -\frac{5}{2}$$

$$4z - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$4z = 0$$

$$z = 0$$

En la segunda ecuación:

$$y - 3z = 2$$

$$y - 3 * 0 = 2$$

$$y = 2$$

En la primera ecuación:

$$x - 2y + 2z + t = 4$$

$$x - 2 * 2 + 2 * 0 + \frac{5}{2} = 4$$

$$x - 4 + 0 + \frac{5}{2} = 4$$

$$x = 4 + 4 - \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{11}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones (x, y, z, t) serán $\frac{11}{2}, 2, 0, \frac{5}{2}$.

1.6.3 Sistemas de ecuaciones sin solución única.

Si revisa nuevamente la fórmula de la regla de Cramer, verá que cada resultado se obtiene dividiendo por el determinante de la matriz de coeficientes. Sin embargo, ¿qué pasa cuando el determinante es cero?

Cuando el determinante de la matriz de coeficientes es 0, como vimos en las propiedades de los determinantes, es cuando su rango es menor que su orden. Decíamos que esto sucede cuando una de las filas de la matriz (Que corresponde a una de las ecuaciones del sistema) es una combinación, o un múltiplo de otras filas de la misma matriz. Para un sistema de ecuaciones, por lo tanto, es irrelevante tener 2 filas distintas que sean múltiplos una de otras, ya que en ellas cada ecuación es una “restricción” que nos acerca al resultado único y el que se repita no sirve para restringir los valores.

La regla principal para resolver sistemas de ecuaciones es que debe existir igual cantidad de ecuaciones independientes que la cantidad de variables. Un determinante de la matriz de coeficientes que es 0 significa que alguna de esas ecuaciones no es independiente.

Cuando hay menos ecuaciones independientes que el número de incógnitas, se dice que el sistema de ecuaciones posee infinitas soluciones, las cuales se pueden encontrar por medio del método de transformaciones.

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$$

$$5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 25$$

$$4x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 20$$

Construimos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 10 \\ 5 & 2 & -4 & 25 \\ 4 & 6 & -4 & 20 \end{array}\right)$$

Primero, calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = 2*2*-4+3*-4*4+-2*5*6--2*2*4-3*5*-4-2*-4*6$$
$$= -16-48-60+16+60+48 = 0$$

Con esto, tenemos determinado que no existe una solución única. Ahora se intenta encontrar las soluciones con el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 10 \\ 5 & 2 & -4 & 25 \\ 4 & 6 & -4 & 20 \end{array}\right)$$

$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 10 \\ 5 & 2 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$F_1 \rightarrow F_1 * 5$

$F_2 \rightarrow F_2 * 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & -10 & 50 \\ 10 & 4 & -8 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$F_2 \rightarrow F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & -10 & 50 \\ 0 & -11 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Con la matriz escalonada, procedemos a despejar las ecuaciones:

$10x_1 + 15x_2 - 10x_3 = 50$

$-11x_2 - 10x_3 = 0$

Despejando la primera, nos queda que:

$-11x_2 - 10x_3 = 0$

$-11x_2 = 10x_3$

$x_2 = -x_3$

Usando este valor en la primera ecuación, el resultado es:

$$10x_1 + 15x_2 - 10x_3 = 50$$

$$10x_1 - 15x_3 - 10x_3 = 50$$

$$10x_1 - 25x_3 = 50$$

$$10x_1 = 50 + 25x_3$$

$$x_1 = 5 + \frac{5}{2}x_3$$

Entonces, no existe un trío de números único que solucione este sistema de ecuaciones, sino que infinitos tríos, que respondan a la siguiente relación: $(x_1; x_2; x_3) = \left(5 + \frac{5}{2}x_3; -x_3; x_3\right)$.

Si consideramos que $x_3 = 5$, los otros valores serán $x_2 = -5$; $x_1 = 17{,}5$. Si pensamos que tiene otro valor, los otros 2 resultados cambiarán también, pero también estarán en equilibrio con las condiciones del sistema de ecuaciones.

Hay, además, otros sistemas de ecuaciones que, al igual que los vistos anteriormente, los coeficientes de 2 o más líneas están relacionados entre sí, pero el valor independiente de las líneas respectivas no lo está. Esto indica que el sistema es inconsistente, ya que está dando 2 restricciones que son incompatibles entre sí, lo que conlleva que el sistema de ecuaciones no tiene soluciones.

Por ejemplo:

Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8$$

$$4x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4$$

$$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$

Se incorporan los valores numéricos en una matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 8 \\ 4 & 4 & -6 & 4 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante:

$$|A| = 2*4*2 + 2*-6*6 + -3*4*-3 - -3*4*6 - 2*4*2 - 2*-6*-3$$
$$= 16 - 72 + 36 + 72 - 16 - 36 = 0$$

Al ser el determinante cero, sabemos que el sistema de ecuaciones no tiene una solución única. Para ver que solución puede tener, aplicamos las transformaciones gaussianas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 8 \\ 4 & 4 & -6 & 4 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Y aquí entramos en un problema. La segunda ecuación, si la dejáramos hasta aquí, indica que $0 = -12$, lo que es una aberración matemática. Esto implica que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Esto era lógico, dado que la segunda ecuación corresponde a la primera, pero con los elementos de la incógnita multiplicados por 2, pero cuyo resultado está dividido en 2. Esto implica que si tenemos unos valores y a todos ellos los duplicamos, el resultado se divide. En el caso de ecuaciones lineales con números reales, eso es un absurdo.

CÁLCULO I

UNIDAD II

SUCESIONES Y LÍMITES

1. SUCESION

En la unidad anterior, al hablar de matrices, indicamos que ellas correspondían a lo que en la vida real llamamos bases de datos, esas grandes planas de 2 dimensiones, llenos de información. Sin embargo, la información no siempre se presenta de aquella forma. Mucho más comunes son las listas, ya sean de cosas que hacer, recetas de cocina, de asistencia o cualquiera que pueda imaginar.

En matemáticas, también se trabaja con listas, pero en este caso, de expresiones matemáticas. Por ejemplo, podríamos tener una lista del estilo:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots$$

Un análisis más amplio de los números que forman esa lista nos indica que, están de mayor a menor y que cada número es el resultado de sumar los 2 inmediatamente anteriores (2 = 1+1; 3 = 2+1; 21 = 13+8, etc.). Este conjunto que vemos es lo que llamamos una serie o sucesión.

1.1 Definición y notación de sucesión

Una sucesión es una lista ordenada de objetos matemáticos. Nada más, nada menos. Es una idea sumamente simple en el papel, pero en la realidad puede llegar a ser muy poderosa.

Para ejemplificar esta enunciación, volvamos a la sucesión expresada anteriormente. Ese listado de números es sumamente particular, porque aparece a plenitud en la naturaleza y el arte. Por ejemplo, la gran mayoría de las flores tiene una cantidad de pétalos de 2, 3, 5, 8, 13, 21 ó 34, siendo una rareza las flores que tienen un número distinto. También podemos apreciarlo en la cantidad de abejas que surgen en un panal, o en las obras de diversos escultores y arquitectos de la antigüedad. Esta es la llamada “Sucesión de Fibonacci”.

Ahora bien, si por cualquier razón quisiéramos hablar del cuarto elemento de esta sucesión, no necesitamos decir “El cuarto elemento de la sucesión de Fibonacci”. Para referirnos a ello, debemos considerar los siguientes principios para nombrar una sucesión cualquiera.

1) Todas las sucesiones pueden ser nombradas con una letra en mayúscula. Para este caso, usaremos la F.
2) Cada elemento es nombrado por la letra de la sucesión y, en un subíndice, el número de la posición que ocupa el elemento aquél.

Por lo tanto, en el ejemplo, podemos decir que:

$$F = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots)$$

Y luego, indicar que:

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = 2$$
$$F_4 = 3$$

Y así sucesivamente. Luego, para referirse al cuarto elemento de la sucesión de Fibonacci, podemos usar el término F_4.

Estos principios que expresamos tiene una implicancia muy importante: En una sucesión importa el orden de los términos a utilizar, ya que sus componentes son distintos. Por ejemplo, supongamos que tenemos 2 sucesiones que tienen los mismos números dentro:

$$A = (3, 2, 1) \text{y} B = (1, 2, 3)$$

Sus términos serían:

$$A_1 = 3 \text{y} B_1 = 1$$
$$A_2 = 2 \text{y} B_2 = 2$$
$$A_3 = 1 \text{y} B_3 = 3$$

Si bien ambas sucesiones comparten el que su segundo término es igual, el resto no lo es, por lo que son distintas.

1.1.1 Tipos de sucesión por número de elementos.

Las sucesiones se pueden clasificar en función de la cantidad de elementos que poseen, los cuales son:

- Sucesión Finita: Esta sucesión tiene una cantidad determinada de elementos, por lo que tiene fin.

Ejemplo:

$$A = (1, 3, 5, 7, 9)$$

Esta es una sucesión de todos los números impares mayores que 0 y menores que 10. Sólo tiene 5 elementos.

- Sucesión infinita: Estas sucesiones tienen una cantidad de elementos infinita, y no tiene fin.

Ejemplo:

$$B = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \dots)$$

Esta es una sucesión de todos los impares mayores que 0, que sigue hasta el infinito (Los puntos suspensivos son su indicación), por lo que tiene infinitos elementos.

1.1.2 Formas de cambio de términos de la sucesión.

Existen también distintos tipos de sucesiones, en función del cambio que tienen los valores a medida que se avanza en la sucesión. Estos son:

- Progresión aritmética: En estas sucesiones, el cambio se produce sumando un número constante al valor anterior de la misma.

  Ejemplo:

$$A = (5, 8, 11, 14, 17 \dots)$$

En esta sucesión, la sucesión aumenta de 3 en 3, partiendo desde el 5.

- Progresión geométrica: El cambio se produce al multiplicar el valor anterior de la sucesión por un número constante

  Ejemplo:

$$B = (2, 6, 18, 54, 162 \ldots)$$

En este ejemplo, partiendo desde el 2, se va multiplicando cada elemento por 3.

- Cuadrados, cubos perfectos: Los números aumentan de forma exponencialmente, creciendo en forma cuadrática o cúbica.
  Ejemplo:

$$C = (4, 9, 16, 25, 36, 49 \ldots)$$

En este ejemplo, partiendo del cuadrado de 2, se va subiendo hacia el infinito con los cuadrados de 3, 4, 5, 6, 7, etc.

- Cambios de signo: Los números pueden ir cambiando de la forma que sea, pero además sus signos se van alternando.

  Ejemplo:

$$D = (1, -2, 3, -4, 5, -6 \ldots)$$

Como se aprecia, siendo una progresión aritmética, donde a los valores absolutos de cada elemento se le suma 1 para el siguiente, el signo del mismo se va alternando.

1.1.3 Término general de una sucesión.

Las sucesiones que son relevantes de estudiar, dentro de las matemáticas, son aquellas que tienen algún tipo de progresión constante, como las vistas en el punto anterior.

Estas sucesiones con progresión definida se pueden resumir en una expresión algebraica, llamada término general. Explicaremos el concepto del término general con un ejemplo:

$$A_n = 5 + 2(n - 1)$$

Esta expresión implica una sucesión con progresión de carácter aritmético. Para determinar los elementos que conforman la sucesión, se reemplaza el valor n con el número correspondiente a la ubicación dentro de la misma, partiendo por el 1. En este caso sería:

$$A_1 = 5 + 2 * (1 - 1) = 5$$

$$A_2 = 5 + 2 * (2 - 1) = 7$$

$$A_3 = 5 + 2 * (3 - 1) = 9$$

$$A_4 = 5 + 2 * (4 - 1) = 11$$

Y así hasta donde se quiera, pero con ello nos damos cuenta que la sucesión parte desde el 5 y va subiendo de 2 en 2. Entonces, esta sucesión es:

$$A = (5, 7, 9, 11, 13 \ldots)$$

La principal virtud de usar el término general en vez de estar escribiendo la sucesión, es que nos permite saber rápidamente cualquier término de la misma, sin importar lo lejano que se encuentre. Por ejemplo, si quisiéramos conocer el 125° término de la sucesión, podemos hacerlo rápidamente:

$$A_{125} = 5 + 2 * (125 - 1) = 253$$

Si quisiéramos escribir la sucesión para encontrar ese valor, nos tomaría un importante tiempo calcularla.

1.2 Regla de formación de una sucesión

Las sucesiones que nos interesan en este capítulo son aquellas en las que se presenta alguna forma de regularidad matemática, como las que vimos recién. Estas sucesiones tienen la particularidad de tener una cierta facilidad en el proceso de determinar su término general. Para encontrarlas, se debería seguir la siguiente regla, paso a paso:

1) Verificar si la sucesión tiene una progresión aritmética.

Si al ver los números que forman la sucesión, se tiene que estos aumentan o disminuyen en una cierta cantidad constante, entonces estamos en presencia de ese tipo de progresión. Para ver qué se debe hacer en ese caso, probemos con un ejemplo:

Sea $A = (5, 3, 1, -1, -3 \ldots)$ una sucesión infinita, su cambio entre los términos es:

$$A_2 - A_1 = 3 - 5 = -2$$
$$A_3 - A_2 = 1 - 3 = -2$$
$$A_4 - A_3 = -1 - 1 = -2$$
$$A_5 - A_4 = -3 - -1 = -2$$

Se observa que el cambio en la sucesión entre término y término es $d = -2$, partiendo desde el término $A_1 = 5$.

En el caso de las progresiones, su término general estará siempre determinado por la relación:

$$A_n = A_1 + d(n - 1)$$

O sea, para encontrar el n-ésimo término de la sucesión, al primer elemento de la misma se le suma el valor de las diferencias entre términos, multiplicado por $n - 1$.

En el caso del ejemplo sería:

$$A_n = 5 - 2(n - 1)$$

2) Comprobar que la sucesión tenga progresión geométrica.

Si ya vimos que la sucesión no crece de forma constante, por lo que no tiene progresión aritmética, hay que ver que ésta sea geométrica, es decir, que su valor se esté multiplicando o dividiendo. Para ello, hay que verificar su crecimiento dividiendo cada término por el inmediatamente anterior.

Por ejemplo:

$$A = (2, 6, 18, 54, 162 \ldots)$$

En ella se aprecia que:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{A_4}{A_3} = \frac{54}{18} = 3$$

Es decir, cada término es el triple del término anterior, al cual llamaremos $r = 3$, con $A_1 = 2$. Para este tipo de progresión geométrica, el término general es:

$$A_n = A_1 * r^{n-1}$$

En el ejemplo será:

$$A_n = 2 * 3^{n-1}$$

3) Comprobar que la sucesión esté formada sólo por potencias perfectas.

En este caso es muy simple. Por ejemplo, veamos la siguiente sucesión:

$$A = (8, 27, 64, 125, \ldots)$$

Aquí podemos transformar los elementos de la sucesión en números elevados a la misma potencia:

$$A = (2^3, 3^3, 4^3, 5^3 \ldots)$$

Es decir, los números van en crecimiento, partiendo desde el 2, en que a cada término se le va sumando uno, y todo elevado a la tercera potencia. Ante ello, lo que hay que hacer es mantener constante la potencia (En este caso, los cubos) y transformar a un término general el cambio dentro de la base, como está en los puntos anteriores. En la secuencia de la base, se aprecia que es una progresión aritmética. En el punto 1, vimos que una progresión aritmética tiene definido su término general como:

$$A_n = A_1 + d(n-1)$$

Luego, dado que todos los términos de la sucesión están elevados a 3, el término general de la sucesión estará determinado por:

$$A_n = (A_1 + d(n-1))^3$$

Que, en este caso, con un $A_1 = 2$ (Ya que el término completo está elevado al cubo, sólo se considera los valores de la base), y una $d = 1$, tenemos que:

$$A_n = (2 + (n-1))^3$$

4) Comprobar que la sucesión tiene números muy cercanos a las potencias vistas en el punto anterior.

Hay que verificarlo, ya que su forma de resolverlo es también simple. Basándonos en el ejemplo anterior, si tuviéramos:

$$A = (10, 29, 66, 127 \ldots)$$

Es fácil darse cuenta que la sucesión corresponde a la misma que en el punto anterior, con la diferencia de que a cada término se le sumó 2. Si quisiéramos transformarlo en potencia, deberíamos dejarlo de la siguiente forma:

$$A = (2^3 + 2, 3^3 + 2, 4^3 + 2, 5^3 + 2 \ldots)$$

Aplicamos la regla anterior, lo que es constante entre los términos se deja constante y sólo se aplica un valor algebraico a lo que varía. En este caso es:

$$A_n = (2 + (n - 1))^3 + 2$$

5) Verificar si los términos cambian consecutivamente de signo.

En el caso que se encuentren elementos en progresión de cualquier tipo encontrados arriba, pero además sus signos van cambiando constantemente, pasando de positivo a negativo y viceversa, primero se le debe transformar a una sucesión donde se encuentren los términos en valor absoluto (Todos los valores en su forma positiva, p.e: Si el número es -3, su valor absoluto es 3). Por ejemplo:

$$A = (-2, 4, -8, 16, -32.64 \ldots)$$

Como indicamos, calcularemos B, el cual es la sucesión de los valores absolutos de A.

$$B = (2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots)$$

Aplicando la metodología de los puntos anteriores, observamos que esta es una progresión geométrica, donde cada elemento es el doble del anterior, con inicio 2. Luego, calculamos su término general:

$$B_n = 2 * 2^{n-1} = 2^n$$

Después, para incorporarle el cambio de signo al término general, aB_n para que sea A_n, debemos multiplicar por -1, elevado a una potencia, la cual variará de acuerdo a si el primer término es positivo o negativo:

- Si el primer término es positivo, al término general calculado se multiplica por $(-1)^{n-1}$.
- Si el primer término es negativo, al término general calculado se multiplica por $(-1)^n$

Esto porque si -1 es elevado a un número par, da positivo, mientras que si es elevado a un número impar es negativo.

Entonces, el término general de la sucesión A es:

$$A_n = 2^n * (-1)^n = (-2)^n$$

6) Si la sucesión es una serie de fracciones en la cual el numerador está en progresión y el denominador en una progresión distinta.

Puede darse el caso en que hayan series de fracciones a las cuales no le pueden ser aplicables las propiedades anteriores, sin embargo, si se consideran solo los numeradores, sí están en progresión, a la vez que los denominadores, pero en una progresión distinta. Por ejemplo:

$$A = \left(\frac{1}{128}; \frac{-1}{64}; \frac{-3}{32}; \frac{-5}{16}; \frac{-7}{8} \dots\right)$$

A esta sucesión la podemos dividir en 2: Una con los numeradores B, y otra con los denominadores, C:

$$B = (1, -1, -3, -5, -7 \dots)$$

Esta es una progresión aritmética, que parte de 1 y va restando 2 por cada término. Entonces, su término general es:

$$B_n = 1 - 2(n-1)$$

En el caso de B, se tiene:

$$C = (128, 64, 32, 16, 8 \dots)$$

Al aplicar el punto 2), se puede visualizar que, partiendo de 128, a cada término se le va dividiendo por 2, o multiplicando por $1/2$ Por ello, su término general es:

$$C_n = 128 * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Luego, el término general de la fracción corresponderá a la fracción del término general de los numeradores partido por el término general de los denominadores. En el ejemplo será:

$$A_n = \frac{B_n}{C_n} = \frac{1 - 2(n-1)}{128 * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

En general, a las series se les debe observar este proceso y repetirlos muchas veces dentro, ya que hay que desarrollar lo que sea variable dentro de la sucesión, mientras que lo que se puede dejar constante permanece constante en el término general.

1.3 Operatoria de sucesiones

A las series, en su forma general, se les puede realizar operaciones como con cualquier término algebraico, de las formas conocidas. Estas operaciones son: Suma, resta, multiplicación y división.

1.3.1 Suma / Resta.

Los términos generales de una sucesión se pueden sumar entre sí, sumando todos los valores numéricos entre ellos y sumando los factores algebraicos que sean posible sumar.

Ejemplo:

$$A_n = 2n + 3$$
$$B_n = 5 + 2(n-1)$$

Encontrar $C_n = A_n + B_n$

Dijimos que se suman los términos de forma algebraica, es decir:

$$A_n + B_n = 2n + 3 + 5 + 2(n-1)$$

Reordenando los elementos de la suma, tenemos:

$$A_n + B_n = 4n + 6$$

Propiedades de la suma de sucesiones:

- Conmutatividad:

$$A_n + B_n = B_n + A_n$$

- Asociatividad:

$$A_n + (B_n + C_n) = (A_n + B_n) + C_n$$

- Elemento Neutro

$$A_n + 0 = A_n$$

- Opuesto aditivo

$$A_n + -A_n = 0$$

1.3.2 Multiplicacion / División.

De la misma forma que con la suma, las operaciones de multiplicación de sucesiones se aplican multiplicando los términos generales de las respectivas sucesiones.

Ejemplo:

Sea $A_n = (2n + 3)$ y $B_n = (n - 5)$, encontrar $C_n = A_n * B_n$

En este caso, como dijimos, se multiplican los términos como polinomios, por lo que queda:

$$C_n = (2n+3) * (n-5) = 2n^2 - 10n + 3n - 15 = 2n^2 - 7n - 15$$

Propiedades de la multiplicación de sucesiones:

- Conmutatividad:

$$A_n * B_n = B_n * A_n$$

- Asociatividad:

$$A_n * (B_n * C_n) = (A_n * B_n) * C_n$$

- Elemento Neutro:

$$A_n * \mathbf{1} = A_n$$

- Distributiva con respecto a la adición:

$$A_n * (B_n + C_n) = A_n * B_n + A_n * C_n$$

1.4 Clasificación de sucesiones

Además de las clasificaciones que vimos en los puntos anteriores, que se refieren a formas de progresión específicas (Aritmética, Geométrica, etc.), también existen otras clasificaciones realizadas en características más generales de las sucesiones. Estas son:

1.3.1 Sucesiones Acotadas

- Si en una serie todos sus términos son mayores que un número k denominado cota inferior de la sucesión, se dice que es una sucesión acotada inferior. Si esta cota es uno de los términos de la sucesión, se dice que ese valor es el mínimo.

  Ej:$A_n = 2n + 1$, la cual corresponde a $A = (3, 5, 7, 9, 11 \ldots)$, todos los elementos de $A_n \geq 3$, por lo que es acotada inferiormente, con un mínimo de 3.

- Si en una serie todos sus términos son menores que un número k denominado cota superior de la sucesión, se dice que es una sucesión acotada superior.

Ej: $A_n = -n + 8$, la cual corresponde a $A = (7, 6, 5, 4, \ldots)$, donde todos los elementos de $A_n \leq 7$, por lo que es acotada superiormente, con un máximo de 7.

- Si una serie es acotada superior e inferior, se dice simplemente que es una serie acotada.

  Ej: La serie $A = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots)$tiene todos sus términos $A_n \geq -1$, por lo que es acotada inferiormente, pero también tiene todos sus términos$A_n \leq 1$, por lo que es acotada superiormente. Ante ello, se dice que es una serie acotada, con extremos $-1 \leq A_n \leq 1$.

1.3.2 Sucesiones Constantes

Una sucesión constante es aquella en que todos sus términos son los mismos.

Ejemplo: $A = (-2, -2, -2, -2, -2, -2 \ldots)$

En estas sucesiones, su término general es el valor constante. En este caso, $A_n = -2$

1.3.3 Sucesiones Crecientes

Una sucesión es creciente siempre y cuando cada término, a partir del segundo, sea mayor o igual que el término inmediatamente anterior:

$$A_n \geq A_{n-1}$$

Por ejemplo $A = (1, 2, 2, 5, 8, 10, 12)$ es una sucesión creciente.

Si, además, cada término es superior al anterior (no igual), se dice que se está frente a una sucesión estrictamente creciente.

$$A_n > A_{n-1}$$

Por ejemplo: $A = (-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7)$ es una sucesión estrictamente creciente.

1.3.4 Sucesiones Decrecientes

Una sucesión es decreciente siempre y cuando cada término, a partir del segundo, sea menor o igual que el término inmediatamente anterior:

$$A_n \leq A_{n-1}$$

Por ejemplo $A = (12, \ 10, 8, 8, 6, 4, 2, 1)$ es una sucesión decreciente.

Si, además, cada término es inferior al anterior (pero no igual), se dice que se está frente a una sucesión estrictamente decreciente.

$$A_n < A_{n-1}$$

Por ejemplo: $A = (100, 90, 80, 70, 60, 50)$ es una sucesión estrictamente creciente.

1.3.5 Sucesiones Monótonas

Si una sucesión es Creciente, Estrictamente Creciente, Decreciente o Estrictamente Decreciente, es una sucesión monótona.

1.3.6 Sucesiones Convergentes

Una sucesión convergente es aquella en la que, si se continúa esa serie hacia el infinito, los valores de la mismas se acercan a algún valor constante.

Ejemplo:

$$A_n = 2 + {}^{1}/_{n}$$

Este término general corresponde a la sucesión:

$$A = (3; 2{,}5; \ 2{,}33333; \ 2{,}25 \ldots)$$

Si quisiéramos encontrar el término n°100 de la misma, sería:

$$A_{100} = 2 + {}^{1}/_{100} = 2{,}01$$

Si quisiéramos encontrar el término n° 500, este será:

$$A_{100} = 2 + {}^{1}/_{500} = 2{,}002$$

Como se observa, esta sucesión se acercará siempre a 2, sin llegar a tocarlo. Ante esto, se dice que es una sucesión convergente.

1.3.7 Sucesiones Divergentes

Una sucesión es divergente cuando, si se continúa la serie hasta el infinito, no tiende a un número en particular, y por el contrario, sigue cambiando y no para.

Ejemplo:

$$A_n = n^2 - 100$$

Este término general corresponde a la sucesión:

$$A = (-99, -94, -91, -84 \ldots)$$

Si quisiéramos encontrar el vigésimo término de la sucesión, sería:

$$A_{20} = 20^2 - 100 = 300$$

El término n° 70 de la sucesión es:

$$A_{70} = 70^2 - 100 = 4800$$

Como se ve, la sucesión continúa subiendo y aumenta de forma cada vez mayor, por lo que cuando llegue al infinito elemento, su valor será infinito. Ante ello, se habla de que A es una sucesión divergente.

1.3.8 Sucesiones Oscilantes

Se dice que una sucesión es oscilante cuando no es convergente ni divergente. Estas van cambiando de mayor a menor y viceversa, por lo que no se puede decir que, a medida que se vaya avanzando en la serie, los valores suban o bajen hasta el infinito o se dirijan hacia un número determinado.

Ejemplo: La sucesión $A = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 \ldots)$ es una sucesión oscilante, ya que siempre está cambiando el sentido en el que está creciendo, no dirigiéndose hacia el infinito o hacia algún valor fijo.

1.3.9 Sucesiones Invertibles

Una sucesión es invertible si, y solo sí, todos los elementos de la misma son distintos de 0.

$$A_n \neq 0, \forall n$$

Esto, porque la inversa de una sucesión se construye al dividir 1 por cada elemento de la misma.

$$(A)^{-1} = \left(\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_3} \ldots\right)$$

Ejemplo:

$$A_n = -3 + 2(n-1)$$

Esto corresponde a la sucesión:

$$A = (-3, -1, 1, 3, 5, 7 \ldots)$$

Dado que todos los elementos de la serie son distintos a 0, es posible invertirla. En este caso, la inversa es:

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{3}; -1; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7} \ldots\right)$$

1.5 Sucesiones y el concepto de funciones

A lo largo de esta parte de la unidad, hemos visto el concepto de serie o sucesión. Una parte importante del mismo es el término general de la sucesión, que es una “transformación” de la ubicación del término (n) en el valor que pertenece al n-ésimo elemento de la serie.

En la segunda parte de la unidad trabajaremos con un concepto análogo al del término general de la sucesión, pero aún más amplio y útil: Las Funciones.

Las funciones trabajan de la misma forma que el término general lo hace en una sucesión, transformando valores, con 2 salvedades:

1) Las funciones pueden transformar números reales, no sólo enteros.
2) Las funciones son susceptibles de ser graficadas por líneas rectas.

Una función se escribe de la forma $f(x) = \cdots$, que se trabaja de la misma forma que en el caso del término general, donde x es llamado la "variable independiente" y $f(x) = y$ es llamada la variable dependiente. Esto es, porque a medida que modifiquemos el valor x, su valor y será distinto producto de la transformación realizada por la función.
Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 2$$

Veamos cómo cambia $y = f(x)$, a medida que vamos modificando el valor x.

$$x = 1 \rightarrow f(1) = (1)^2 + 2 = 3$$

$$x = \frac{10}{3} \rightarrow f\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 2 = \frac{118}{9}$$

$$x = \sqrt{100} \rightarrow f(\sqrt{100}) = (\sqrt{100})^2 + 2 = 12$$

Al analizar este ejemplo, se aprecia claramente: El valor de x es el que queremos elegir, no pende de nada más, pero el valor de y depende del valor que tome x. Además, podemos ver que se puede trabajar con valores independientes (x) que no sean enteros sin mayor problema.

En la siguiente unidad profundizaremos la noción de función, al desarrollar el concepto de límites.

2. LIMITE DE FUNCIONES

En la unidad anterior, al hablar de sucesiones, tratamos la existencia de series convergentes y divergentes. Dijimos que cuando una sucesión continúa hasta el infinito en sus términos, pero los valores se van acercando todos a un valor fijo, es una serie convergente, y es divergente si pasa al infinito. Esa noción de valor al que se dirige la sucesión cuando va al infinito es una de las formas de lo que se conoce como límite, aunque no solamente se pueda aplicar a series, sino que también se puede aplicar a las funciones.

2.1 Introducción al límite mediante el problema de la recta tangente

Para poder comprender más fácilmente el concepto de límite, veámoslo desde un problema en particular: La búsqueda de la pendiente de la recta tangente a una curva.

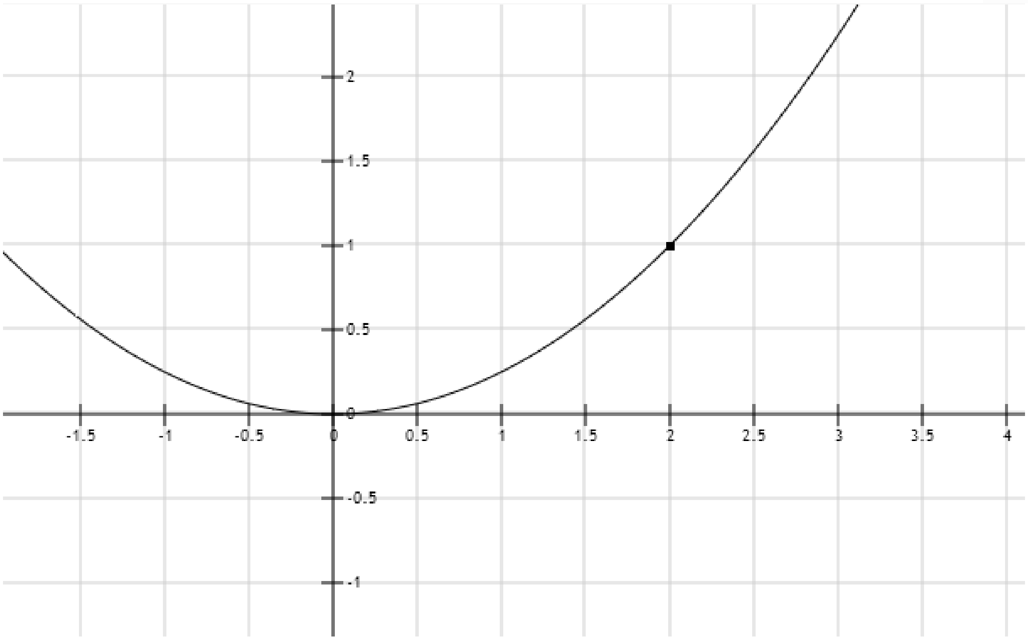
La tangente es una recta que indica cual es la pendiente (la inclinación) que está teniendo esa curva en un punto determinado. A medida que se consideran distintos puntos, la pendiente irá cambiando. Esta tangente se grafica directamente sobre la curva, pasando solamente por el punto en el cual se está tirando la línea de pendiente. Sin embargo, la geometría nos indica que por un punto pasan infinitas rectas. ¿Cómo saber cuál de todas las posibles es la correcta?

Para ir resolviendo este problema hay que tener en cuenta el otro principio de la geometría: Cuando existen 2 puntos, hay una única línea recta que los une. Entonces, lo que podría hacer es marcar 2 puntos de la curva, uno en el lugar que queremos dibujar la tangente y otro en cualquier otro punto, al cual iremos acercando al primero hasta que estén tan cerca que sean prácticamente un solo punto.

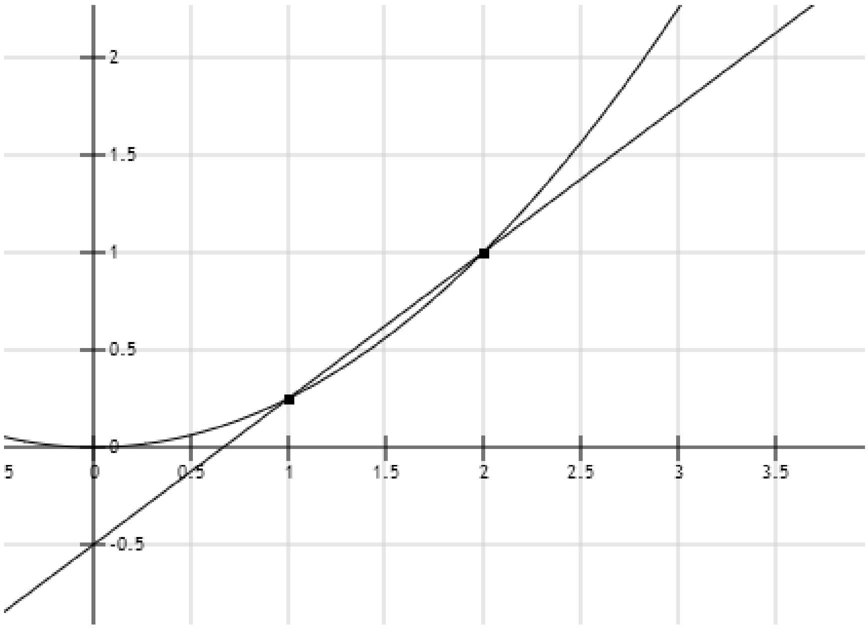
Veamos esta situación con un ejemplo. Para simplificar los cálculos, consideraremos solo la pendiente de la recta, que corresponderá al final a la pendiente de la curva en el punto denominado O.

Sea la función curva $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto $x = 2$.

Primero, grafiquemos la curva.



En el punto marcado, $x = 2$, su valor $y = f(x) = 1$. Ese punto será el base para tirar las distintas líneas. Ahora consideremos cualquier otro punto, llamado x_1. Vamos a hacerlo en ambos sentidos. Primero, tomando un punto que esté a la izquierda de $x = 2$. Por ejemplo, $x_1 = 1$, donde $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{4}$ y tiraremos una recta entre esos 2 puntos.



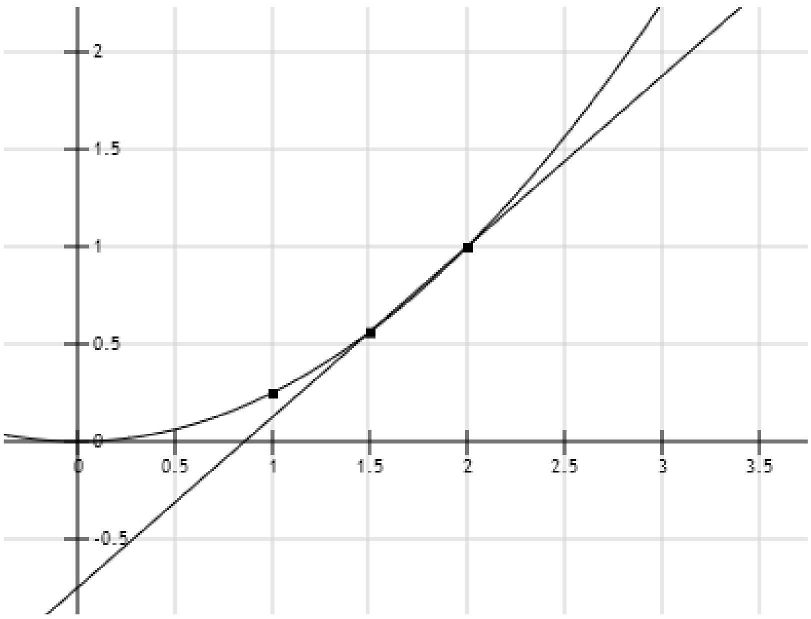
La pendiente de una línea recta, m, que pasa entre 2 puntos determinados, es:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

En este caso, entonces, la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 0{,}75$$

Ahora, vayamos acercando de a poco el punto x_1 hacia el otro punto. Por ejemplo, si $x_1 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, tendríamos que $y_1 = f(x_1) = \frac{9}{16}$, lo que en el gráfico sería:



Luego, la pendiente de esta nueva recta es:

$$m = \frac{1 - \frac{9}{16}}{2 - \frac{3}{2}} = 0{,}875$$

Lo mismo podemos hacer de manera casi infinita, pero para no llenar esta unidad de cálculos, se resumirán en la siguiente tabla (De todas formas, se puede usar la fórmula anterior para revisar los cálculos.

x_1	y_1	m
1,75	0,765625	0,9375
1,9	0,9025	0,975
1,99	0,990025	0,9975
1,999	0,99900025	0,99975
1,9999	0,9999000025	0,999975

Podemos apreciar que a medida que nos acercamos a que los 2 valores sean iguales, el valor de la pendiente se acerca a 1. Para verificar, elegimos otro punto, pero a la derecha. Usemos primero, el punto $x_1 = 3$, cuyo $y_1 = f(x_1) = \frac{9}{4}$:

$$m = \frac{1 - \frac{9}{4}}{2 - 3} = 1{,}25$$

Luego, igual como hicimos anteriormente, movamos este punto a un $x_1 = 2{,}5 = \frac{5}{2}$, donde $y_1 = f(x_1) = \frac{25}{16}$

$$m = \frac{1 - \frac{25}{16}}{2 - \frac{5}{2}} = 1{,}125$$

Y podemos seguir acercándonos más hasta el valor 2, donde:

x_1	y_1	m
2,25	1,265625	1,0625
2,1	1,1025	1,025
2,01	1,010025	1,0025
2,001	1,00100025	1,00025
2,0001	1,0001000025	1,000025

No podemos evaluar la pendiente que tendría una recta que pase sólo por el punto 2, ya que, como explicamos anteriormente, una recta debe pasar por 2 puntos distintos por lo que si aplicamos la fórmula, nos quedaría un resultado $\frac{0}{0}$, el cual es indeterminado.

Sin embargo, al irnos acercando al 2 desde la izquierda y desde la derecha pudimos encontrar que la pendiente de la recta tiende a valer 1. Ese es el concepto de límite.

2.2 Concepto intuitivo de límite

El concepto intuitivo de límite va muy unido a lo visto en el tema de series convergentes y divergentes y lo que tratamos recién, en el caso del problema de la recta tangente. El límite es aquel valor al que "tiende" una sucesión o función cuando se acerca a un número determinado. Su notación es la forma:

$$\lim_{x \to n} (f(x)) = L$$

El valor n al que puede tender la variable x puede ser cualquier valor de la recta de los números reales, desde donde se construye la función $f(x)$, incluyendo el infinito.

Lo primero que implica el concepto de límite de una función es que si esta se encuentra bien definida en un punto en particular, o sea, $y_n = f(n)$ existe, a la vez que es una función continua en ese punto, el límite de la función será:

$$\lim_{x \to n} (f(x)) = L = y_n$$

Es decir, el límite de la función que se encuentra definida en un punto n, es el valor de la función en $x = n$.

2.3 Límites Laterales

Hay funciones las cuales, además de realizar una transformación interna, van cambiando según el valor que tome x. Por ejemplo, la función:

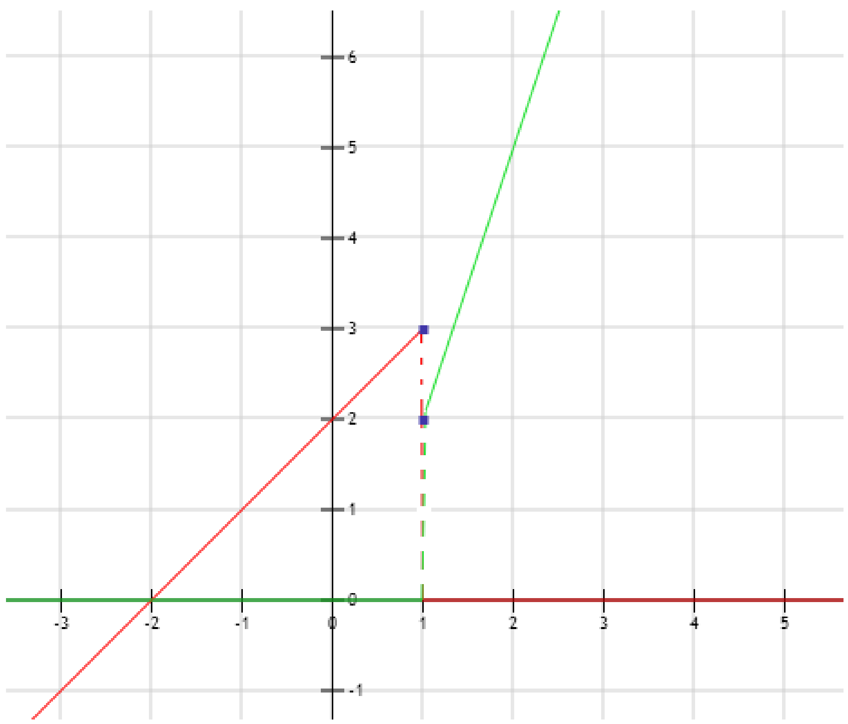
$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1 \\ 3x-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función indica que cuando x sea menor que 1, su función será $x+2$, pero que a contar del 1, y desde ese número, su función será $3x-1$. En este tipo de funciones que está definida por partes, su cálculo de límites es más complejo que el evaluarla en un solo punto.

Si quisiéramos evaluar:

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

Primero, grafiquemos la función:

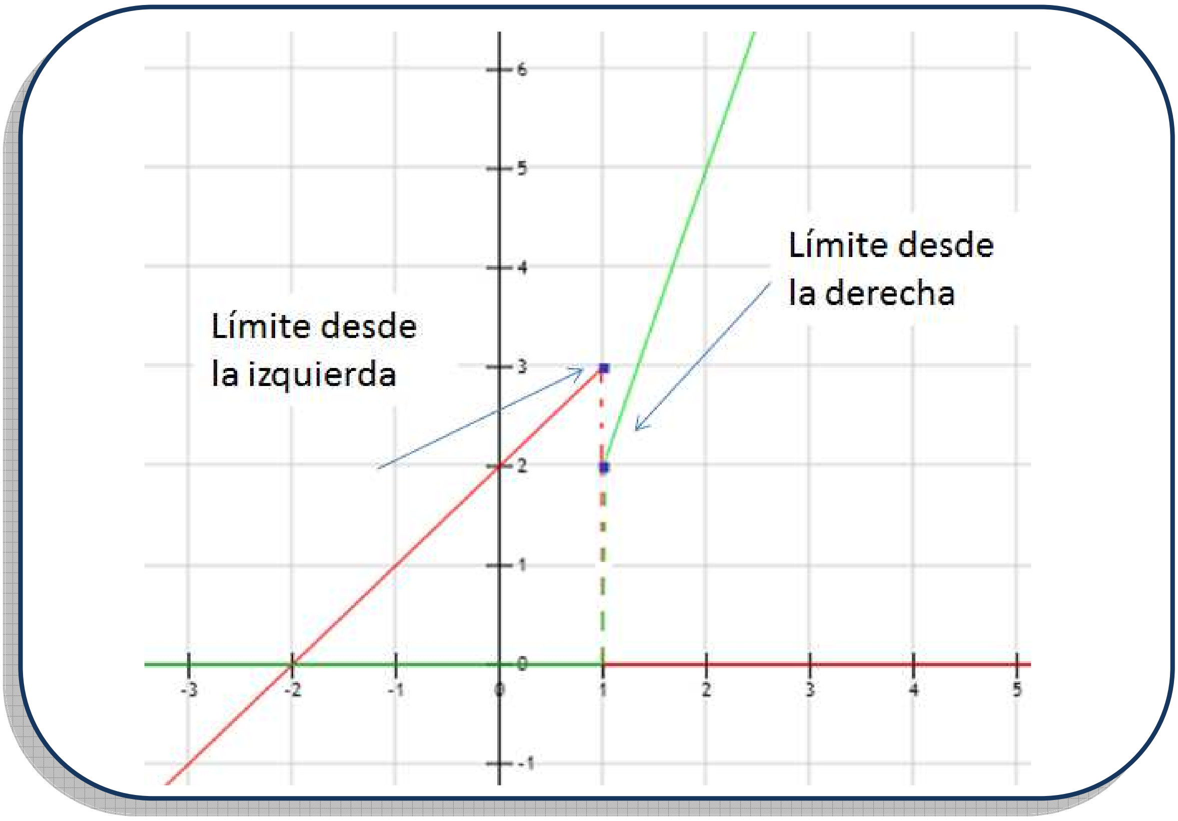


Al ver la función, vemos que el punto $x = 1$pertenece al segundo segmento, por lo que al evaluar la función en ese punto, nos dará:

$$f(1) = 3 * 1 - 1 = 2$$

Si nos quedáramos ahí podríamos decir que ese es el límite de la función, pero hay que verificarlo tal como lo hicimos al tratar el problema de la recta tangente: Calcular el límite de la función por ambos lados.

Si hacemos el recorrido desde la derecha, veremos que sigue la línea de la segunda función, por lo que desde ese lado su límite es 2, como ya lo calculamos.



Al hacer el recorrido desde la derecha, nos vamos siempre por la primera parte función y su valor tenderá al correspondiente al resultado de $x = 1$ correspondiente a la primera parte:

$$x + 2 = 1 + 2 = 3$$

Entonces su límite desde la izquierda es 3, mientras que desde la derecha es 2.

Lo que calculamos, el límite sólo desde la izquierda o sólo desde la derecha, es lo que llamamos límites laterales. Se escriben de la forma:

$$\lim_{x \to n^+} (f(x))$$

$$\lim_{x \to n^-} (f(x))$$

Fíjese que la principal diferencia en la notación es la presencia de un + o – al lado del número al que tiende x. Cuando estamos frente a la presencia de $-$, significa que se está evaluando el límite desde la izquierda (O los números menores al evaluado) y si es un +, desde la derecha.

En nuestro caso, los límites laterales serán:

$$\lim_{x \to 1^+} (f(x)) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} (f(x)) = 2$$

La regla de los límites laterales indica que una función tiene un límite en un punto determinado, siempre y cuando:

$$\lim_{x \to n^+} (f(x)) = \lim_{x \to n^-} (f(x))$$

En el ejemplo, al ser distintos, no existe un límite total, sólo laterales.

2.4 Propiedades de los límites

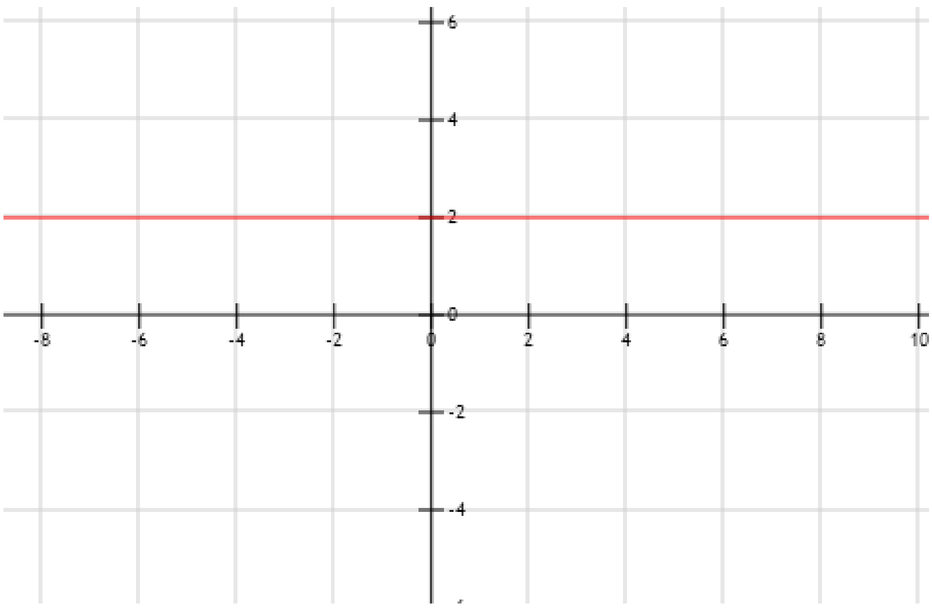
Así como la mayoría de las relaciones matemáticas, el cálculo de límites tiene distintas propiedades que conviene analizar.

2.4.1 Límite de una constante.

Sea k un valor constante. Entonces:

$$\lim_{x \to c} k = k$$

Esto se puede explicar porque la función $f(x) = k$ está definida en todo el plano y a cualquier valor de x, dará siempre el mismo valor k. Si, por ejemplo, $k = 2$, se graficaría:



Luego, haciendo cualquier cálculo de límites nos dará la constante.

2.4.2 Límite de la función identidad.

Sea $f(x) = x$ llamada función identidad, ya que a cualquier valor de x, el valor correspondiente de y será el mismo. En este caso:

$$\lim_{x \to c} x = c$$

Esto es claramente explicado por la forma de resolver los problemas de límites en que se indica que si la función está definida en algún punto en particular, el valor del límite es el resultado de calcular la función en ese punto. En este caso, la función identidad está siempre definida a lo largo de la recta.

2.4.3 Límite del producto de una función por una constante.

Sea $f(x)$ una función cualquiera, con límite L cuando $x \to c$. Además, sea k un número constante cualquiera. Luego:

$$\lim_{x \to c} \left(k * f(x)\right) = k * \lim_{x \to c} \left(f(x)\right) = k * L$$

O sea, si se multiplica una función por una constante, sus límites también son multiplicados.

2.4.4 Límite de la suma de funciones.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ 2 funciones distintas. El límite de su suma estará definido por:

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to c} \left(f(x)\right) + \lim_{x \to c} \left(g(x)\right)$$

Es decir, el límite de la suma de las funciones es igual a la suma de los límites de cada una de ellas.

Ejemplo:

Sea $f(x) = 2x + 6$ y $g(x) = x^2 + 2$, encontrar el límite de $f(x) + g(x)$ cuando x tiende a 6.

Intentemos resolver esto de las 2 formas posibles. Primero, calculemos la suma de las funciones y saquemos su límite.

Si $h(x) = f(x) + g(x)$, entonces:

$$h(x) = 2x + 6 + x^2 + 2 = x^2 + 2x + 8$$

Para calcular el límite, lo primero que hay que hacer es evaluar la función en el punto que se está calculando el límite, en este caso $x = 6$. Entonces:

$$\lim_{x \to 6}(h(x)) = 6^2 + 2 * 6 + 8 = 56$$

Ahora, calculemos el límite de cada función por separado.

$$\lim_{x \to 6}(f(x)) = f(6) = 2 * 6 + 6 = 18$$

$$\lim_{x \to 6}(f(x)) = f(6) = 6^2 + 2 = 38$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 6} f(x) + \lim_{x \to 6} g(x) = 18 + 38 = 56$$

2.4.5 Límite de la resta de funciones.

El caso de la resta de funciones se trabaja de forma similar que la de la suma. Sean $f(x)$ y $g(x)$ 2 funciones distintas. El límite de su resta estará definido por:

$$\lim_{x \to c}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x \to c}\left(f(x)\right) - \lim_{x \to c}\left(g(x)\right)$$

O sea, el resultado del límite de la resta de funciones es igual a la resta de los límites respectivos.

2.4.6 Límite de la multiplicación de funciones.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ 2 funciones distintas. El límite de su multiplicación estará definido por:

$$\lim_{x\to c}\left(f(x)g(x)\right) = \lim_{x\to c}\left(f(x)\right) * \lim_{x\to c}\left(g(x)\right)$$

Es decir, el límite de una multiplicación de funciones estará determinado por la multiplicación de sus respectivos límites.

Ejemplo:

Sean:

$$f(x) = x^2 + 5x + 1$$

$$g(x) = \frac{2}{x} - 4$$

Calcular

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)g(x)\right)$$

Para comprobar la propiedad, hay que realizar el cálculo en ambos sentidos.

Primero multipliquemos las 2 funciones:

$$f(x) * g(x) = (x^2 + 5x + 1) * \left(\frac{2}{x} - 4\right) = 2x + 10 + \frac{2}{x} - 4x^2 - 20x - 4 = -4x^2 - 18x + \frac{2}{x} + 6$$

Como se aprecia, la parte de $\frac{2}{x}$ se indetermina cuando $x = 0$, por lo que cuando $x = 2$ no hay ningún problema para evaluar la función en ese punto y, por consiguiente, su límite.

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)g(x)\right) = -4 * 2^2 - 36 * 2 + \frac{2}{2} + 6 = -16 - 36 + 1 + 6 = -45$$

Luego, calculemos el límite por separado:

$$\lim_{x\to 2}(f(x)) = 2^2 + 5 * 2 + 1 = 15$$

$$\lim_{x\to 2}(g(x)) = \frac{2}{2} - 4 = -3$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 2}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to 2}(f(x)) * \lim_{x\to 2}(g(x)) = 15 * -3 = -45}$$

Se cumple la propiedad.

2.4.7 Límite de la división de funciones.

Por otro lado, si nos encontramos con una división de funciones, la propiedad es la misma que la multiplicación, pero con una diferencia fundamental:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ 2 funciones distintas. El límite de su división estará definido por:

$$\boxed{\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to c}(f(x))}{\lim_{x\to c}(g(x))}; si \ \lim_{x\to c}(g(x)) \neq 0}$$

Es decir, el límite se puede calcular dividiendo las 2 funciones, o dividiendo los límites por separado. Lo importante es que en el segundo caso, el límite de la función divisora no puede ser 0.

2.4.8 Límite de la potencia de funciones.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ 2 funciones distintas. El límite de la potencia del primero elevado al segundo estará definido por:

$$\boxed{\lim_{x\to c}(f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to c}(f(x))^{\lim_{x\to c}(g(x))}; si \ f(x) > 0}$$

Esto implica que el límite de una función elevada a otra función corresponderá al límite de la primera función elevado al límite de la segunda función, siempre y cuando el valor de $f(x)$ sea positivo.

2.5 Límites infinitos y en el infinito

El infinito es una concepción matemática que representa a los conjuntos que no tienen final, o sea, cuya cantidad de elementos no es fija sino que pueden ser contadas de forma ilimitada. Un ejemplo clásico de conjunto infinito son los números, ya sean naturales o reales. Podremos siempre encontrar números más grandes que otros.

Un número infinito es una abstracción del mismo tipo. Corresponde a un número tan grande que no existe uno mayor a ese. Obviamente, no hay un valor definido que cumpla esa condición, por lo que no se le puede tratar como un elemento algebraico (Infinito más infinito no es igual a 2 infinitos, por ejemplo). Sin embargo, sirve para representar la existencia de números más grandes que nuestro conocimiento y se expresan con el signo ∞. Como contraparte, también existe el infinito negativo, que representa el menor número que pueda existir, expresado como $-\infty$.

Al realizar análisis con el infinito, hay que tener presente algunas reglas importantes, resultado de los cálculos matemáticos, que serán relevantes más adelante:

Si a es cualquier número real, entonces:

- $a + \infty = \infty$
- $a + (-\infty) = -\infty$
- $a - \infty = -\infty$
- $a - (-\infty) = \infty$

Estos cuatro implican que, si a cualquier valor se le suma o se le resta infinito, el signo de infinito tiene preponderancia.

- $\frac{a}{\infty} = 0$
- $\frac{a}{-\infty} = 0$

Acá se implica que si se divide cualquier número real por el infinito en ambas formas, al ser una división tan gigantesca, su valor terminará siendo 0 (o tendiendo a 0).

- $a * \infty = \infty$ y $a * -\infty = -\infty$, siempre y cuando $a > 0$
- $a * \infty = -\infty$ y $a * -\infty = \infty$, siempre y cuando $a < 0$

Estas 2 aseveraciones indican que cuando se multiplica un valor distinto de cero por infinito, el infinito se mantiene, pero el signo del mismo dependerá de los signos de ambas partes.

- $\infty + \infty = \infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

La suma de 2 números infinitos del mismo signo dan como resultado el mismo número infinito con el mismo signo (No 2 infinitos).

- $\infty * \infty = \infty$
- $(-\infty) * (-\infty) = \infty$

La multiplicación de números infinitos da lugar al infinito.

Por otro lado, hay otros términos que se trabajan en el infinito que son indeterminados, ya que no se puede saber qué valor tiene, ya que, en algunos casos, habría que asumir que alguno de los infinitos es mayor que el otro, lo cual es imposible:

- $0 * \infty$
- $0 * (-\infty)$
- $\infty + (-\infty)$
- $\infty - \infty$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $(\pm\infty)^0$
- $1^{\pm\infty}$

El número infinito tiene una gran utilidad en el trabajo con límites, porque permite acercarnos al concepto de convergencia y a límites que no se pueden resolver de la forma tradicional, como por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x-3}{x-2} \right)$$

Si queremos resolver este límite, deberíamos primero evaluar la función en el punto $x = 2$:

$$f(2) = \frac{2-3}{2-2} = \frac{-1}{0}$$

El problema es que, en el cálculo de los números reales, no se puede dividir por 0. Ante eso, nos queda calcular sus límites laterales, para ello hay que calcular el límite de la función avanzando desde la izquierda, tomando valores menores a 2 para luego irse acercando, y hacer lo mismo desde la derecha, tomando valores mayores a 2 para luego acercarse.

Hagámoslo primero por la izquierda, partiendo desde el 1 y acercándonos:

$$f(1) = \frac{1-3}{1-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$f(1{,}5) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}-3}{\frac{3}{2}-2} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = 3$$

Se puede continuar acercándose hasta el 2, lo que se resume en la siguiente tabla:

x_1	$f(x_1)$
1,75	5
1,9	11
1,99	101
1,999	1001
1,9999	10001

Como se ve, los números aumentan muy, muy rápidamente con variaciones pequeñas mientras más nos acercamos a 2. Si estuviésemos hablando de una serie, diríamos que ese acercamiento no converge a un número en particular. Entonces, eso significa que el límite va a llegar a ∞ (Al infinito positivo)

Luego, habría que hacer lo mismo por la izquierda. Partamos desde el 3 y nos acercamos:

$$f(3) = \frac{3-3}{3-2} = \frac{0}{1} = 0$$

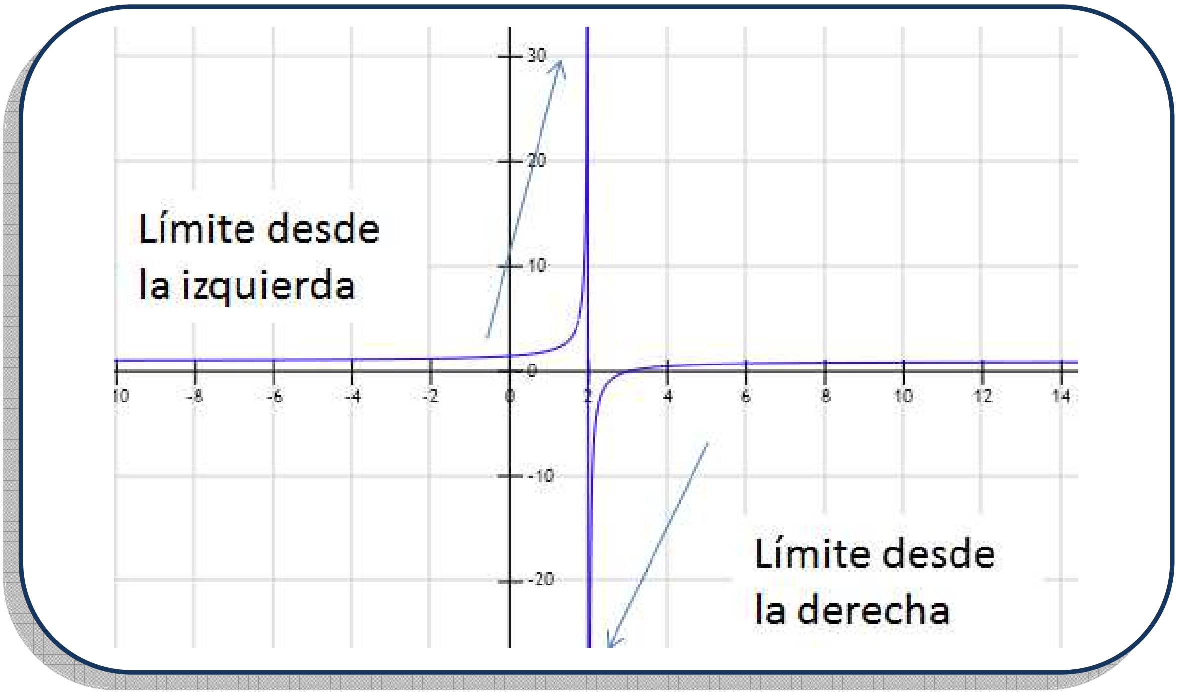
$$f(2{,}5) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}-3}{\frac{5}{2}-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$$

Sigámonos acercándonos al 2, resumido en la siguiente tabla:

x_1	$f(x_1)$
2,25	-3
2,1	-9
2,01	-99
2,001	-999
2,0001	-9999

Como se puede apreciar, los números van disminuyendo muy apresuradamente mientras nos acercamos al 2, por lo que se puede decir que no converge. En este caso, el límite será $-\infty$ (Al infinito negativo)

Esto queda más claro cuando se grafica la función explicada, se ve que por ambos lados la función crece hacia extremos distintos, aumentando hacia el infinito por la izquierda, pero disminuyendo hacia el infinito si se viene desde la derecha.:



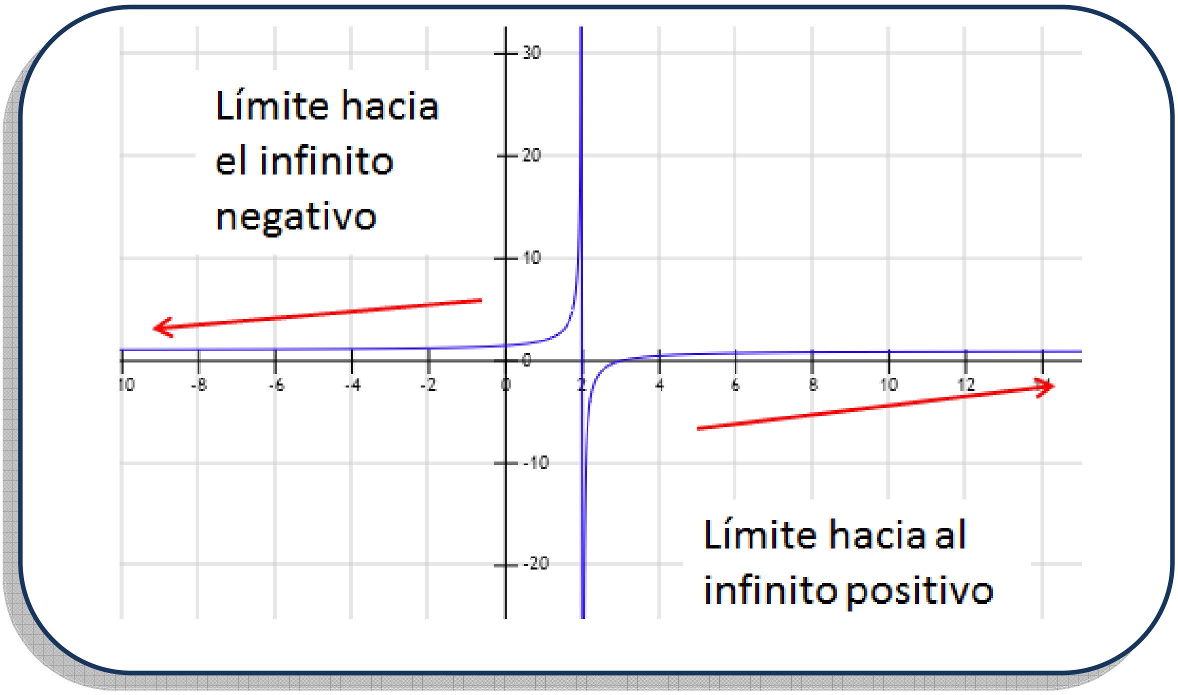
Lo primero que se puede concluir es que esta función no tiene un límite total (Ya que ambos son distintos, uno positivo y el otro negativo). Lo segundo, es que una división por 0 tenderá a dar números infinitos a medida que nos vayamos acercando a 0. Esta segunda propiedad será muy importante más adelante.

A pesar de que la función no tiene un límite definido, sí tiene 2 límites laterales distintos y bien definidos, cada uno por su lado. Estos se pueden escribir como:

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x-3}{x-2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x-3}{x-2} \right) = -\infty$$

Por otro lado, podemos intentar evaluar esta misma función cuando sigue hacia el infinito. Volvamos a ver el gráfico:



Las flechas indican hacia donde debemos mirar: el infinito positivo se encuentra mucho más a lo largo de la derecha de lo que vemos, y el infinito negativo está mucho más a la izquierda. Cuando en la unidad anterior hablamos de convergencia de series, dijimos que si se acercaba a algún valor al avanzar al infinito, la sucesión era convergente, mientras que si no, era divergente. Hagamos ese mismo ejercicio acá:

Primero intentemos calcular hacia donde tiende la función, si es que se sigue moviendo hacia la izquierda, o sea, hacia el infinito negativo. Para ello, volvamos a realizar la tabla, pero añadiendo cada vez números negativos con valor absoluto más grande:

x_1	$f(x_1)$
-10	1,08333333333
-100	1,00980392156
-1000	1,00099800399
-10000	1,00009998000
-10000000	1,00000009999

Como se aprecia, el valor de la función es siempre mayor y se acerca a 1, pero sin tocarla. Si quisiéramos seguir hacia adelante, podríamos ver que seguirá la misma tendencia. Por ello, decimos que la función es convergente en ese lado y que cuando $x \to \infty$, su límite es 1. Esto se escribe de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x-3}{x-2} \right) = 1$$

Por el otro lado, hacemos lo mismo con los valores más a la derecha de la recta de x, viajando hacia el infinito positivo.

x_1	$f(x_1)$
10	0,875
100	0,98979591836
1000	0,99899799599
10000	0,99989997999
10000000	0,99999989999

Aquí vemos prácticamente lo mismo, que la función es siempre menor a 1, pero se va a acercando sin tocarla. Eso implica que su límite cuando x tiende a ∞es 1. Esto se expresa:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-3}{x-2}\right) = 1$$

Se puede poner $+\infty$ para expresar el infinito positivo, o ∞ sin el signo, es irrelevante.

Obviamente, para calcular los límites de este tipo, que tienden al infinito o cuyos valores terminan siendo infinito, existen algunas reglas que simplifican la resolución de problemas, las cuales veremos brevemente en el siguiente listado:

a) Sea a cualquier número real:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a}{x}\right) = 0$$

b) Sean a y b números reales:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a}{x^b}\right) = 0; si\ b > 0$$

c) Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones, donde el grado (El mayor exponente que se puede encontrar en la función) de $f(x)$ es menor que el de $g(x)$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$$

d) Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones, donde el grado de $f(x)$ es mayor que el de $g(x)$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \infty$$

e) Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones, donde el grado de $f(x)$ es igual que el de $g(x)$, a la vez que a es el coeficiente numérico de la mayor potencia de $f(x)$ y b es el de $g(x)$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b}$$

f) Sea a un número real y n un entero positivo:

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{a}{x^n} \right) = +\infty$$

g) Sea a un número real y n es un entero positivo par:

$$\lim_{x \to 0-} \left(\frac{a}{x^n} \right) = +\infty$$

h) Sea a un número real y n es un entero positivo impar:

$$\lim_{x \to 0-} \left(\frac{a}{x^n} \right) = -\infty$$

Para los puntos i) al l), asuma que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales, mientras que a y c son números reales, con $c \neq 0$, tal que $\lim_{x \to a}(g(x)) = c$, a la vez que $\lim_{x \to a}(f(x)) = 0$:

i) .Si $c > 0$ y $f(x)$ tiende a 0, pero desde los números positivos:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = +\infty$$

j) .Si $c > 0$ y $f(x)$ tiende a 0, pero desde los números negativos:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = -\infty$$

k) .Si $c < 0$ y $f(x)$ tiende a 0, pero desde los números positivos:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = -\infty$$

l) .Si $c < 0$ y $f(x)$ tiende a 0, pero desde los números negativos:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = +\infty$$

Para los puntos m) al p), sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales, tales que $\lim_{x \to a}(f(x)) = c$ y $\lim_{x \to a}(g(x)) = +\infty$:

m)

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$$

n) Si $c > 0$:

$$\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = +\infty$$

o) Si $c < 0$

$$\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = -\infty$$

p)

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$$

Para los puntos q) al t), sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales, tales que $\lim_{x \to a}(f(x)) = c$ y $\lim_{x \to a}(g(x)) = -\infty$:

q)

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$$

r) $c > 0$:

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$$

s) Si $c < 0$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty$$

t)

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$$

Para los puntos u) y v), sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales, tales que $\lim_{x\to a}(f(x)) = +\infty$ y $\lim_{x\to a}(g(x)) = +\infty$:

u)

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$$

v)

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty$$

Para los puntos w) y x), sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales, tales que $\lim_{x\to a}(f(x)) = -\infty$ y $\lim_{x\to a}(g(x)) = -\infty$:

w)

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$$

x)

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty$$

Si se realiza una observación más acabada de cada uno de los puntos anteriores, se puede observar que son una aplicación de las reglas de cálculo con números infinitos que vimos anteriormente. A la vez, se aprecia que los límites que no se mencionaron, como por ejemplo el límite de la resta en los últimos 4 puntos, no se ubicaron porque, al aplicar las propiedades de los límites y las reglas de cálculo del infinito, darían situaciones que son indeterminadas.

2.6 Límites especiales.

Además de los vistos anteriormente, hay límites particulares que no se pueden calcular de las formas anteriores, pero que son importantes de tener en cuenta cual es su valor determinado. Por ejemplo, uno de los límites que se pueden usar y que tienen un valor determinado es:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

El número e es constante, llamado número de Euler, de carácter irracional, cuyo valor es $2{,}71828\ldots$

Ante la presencia de un límite de este tipo, hay que simplemente tener presente que e es el resultado del mismo.

Por otro lado, también existen otras funciones que tienen importancia en el estudio matemático, las cuales son las funciones trigonométricas. Si bien la trigonometría se escapa al estudio de este curso, se debe conocer que es parte del estudio geométrico de ángulos, donde, para lo que nos interesa, hay que conocer que existen 3 razones trigonométricas:

- Seno del ángulo determinado, escrito como $\tan x$.
- Coseno de un ángulo determinado, escrito como $\cos x$
- Tangente de un ángulo determinado, escrito como $\tan x$

Las relaciones de límites especiales de razones trigonométricas son:

a)

$$\lim_{x \to \infty} \left[x * sen\left(\frac{2\pi}{x}\right) * \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right] = 2\pi$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = 1$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right) = 1$$

d)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}\right) = 1$$

e)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

2.6 Cálculo de límites por distintos métodos.

El cálculo de límites puede ser sencillo, si se presenta alguna de las funciones aparecidas anteriormente. Sin embargo, en general, no serán tan fáciles de resolver, por lo que habrá de transformarse la función a alguna forma de las que se han visto, o realizar algún cálculo previo.

Para ello se pueden realizar distintos métodos de resolución:

- Método Algebraico
- Cambio de variables
- Límites especiales

2.6.1 Método algebraico.

Este método consiste en transformar límites indeterminados en límites calculables, usando factorizaciones o racionalizaciones.

Estas factorizaciones se pueden realizar gracias a las propiedades de los polinomios que revisaremos brevemente:

- Factor común: Si se encuentra un factor que es igual a todos los elementos de un polinomio, se puede "extraer" del mismo y transformarlo en 2 polinomios multiplicados. Por ejemplo:

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1)$$

- Cuadrado de binomios: Si a un binomio (Polinomio de 2 elementos) se multiplica consigo mismo, dará el primero al cuadrado, más (o menos, según sea el signo que se encuentre entre los factores del binomio) 2 veces el resultado de la multiplicación del primero con el segundo, sumado al segundo al cuadrado:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

- Suma por su diferencia: Si a un binomio se le multiplica el mismo binomio pero con el signo cambiado, dará como resultado el primer elemento al cuadrado, menos el segundo elemento al cuadrado.

$$(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$$

- Multiplicación de binomios: Si se multiplican 2 binomios de la forma:

$$(x \pm a) * (x \pm b) = x^2 \pm (a + b)x \pm a * b$$

Los signos dependerán de si está en suma o resta los factores a y b. Si ambos son positivos, las 2 sumas del resultado serán positivos. Si ambos son negativos, el primero será negativo y el segundo positivo. Si son de distinto signo, el segundo signo del resultado será negativo, pero el primero dependerá de si el valor que acompaña a la resta es mayor que el que acompaña a la suma. Si lo es, entonces es negativo; si no, será positivo.

- Cubo de binomios: Si hay un binomio de la forma: $(a \pm b)$, su cubo será:

$$(a \pm b)^3 = (a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3)$$

Es decir, el primer elemento al cubo, más o menos (dependiendo del signo en el binomio original) 3 veces el primero al cuadrado por el segundo, más 3 veces el primero por el segundo al cuadrado, más o menos el segundo elemento al cubo.

- Diferencia de cubos: Si se multiplica un binomio con un trinomio (Polinomio de 3 elementos), de la forma:

$$(a-b)*(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Esto significa que, cuando se encuentran elementos de la forma que se presenta, el resultado es el primer elemento al cubo, menos el segundo elemento al cubo.

Todas estas propiedades se pueden utilizar en el sentido opuesto, es decir, ante un polinomio dado, definir que se encuentra frente a una de las circunstancias mostradas anteriormente y aplicar la misma para separar sus respectivos factores.

En este caso, es conveniente seguir los siguientes pasos:

1) Observar si existe alguna letra o factor numérico común dentro de ella. Por ejemplo:

$$x+2x^2=x*(1+2x)$$

$$4x+2=2*(2x+1)$$

2) Verificar la existencia de un cuadrado de binomios. En este caso, con un polinomio reducido al máximo (Esto es, sumado todo lo que se podría sumar antes de evaluar), revisar si, primero, hay 3 elementos en el polinomio, luego ver si el primero y el tercero son números cuadráticos o un cuadrado de un factor algebraico, para terminar verificando que el segundo valor sea el resultado de la multiplicación de las raíces de los factores por 2 (Sin considerar hasta ese momento el signo del mismo). Por ejemplo:

$$x^2-4x+4$$

Acá podemos apreciar estas 3 condiciones: Son 3 elementos, el primer es un factor cuadrático (Es el cuadrado de x), mientras que el tercero también lo es (Es el cuadrado de 2), a la vez que el elemento del medio es el resultado de multiplicar x con el factor 2, 2 veces. Además, dado que el signo del segundo elemento es negativo, el cuadrado será de un binomio con resta:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2) * (x - 2) = (x - 2)^2$$

3) Corroborar que se encuentra frente a una suma por su diferencia. Para ello, hay que verificar que sean 2 elementos los conformantes del binomio, que se pueda calcular la raíz de cada uno, y que se estén restando. Por ejemplo:

$$x^2 - 16$$

Podemos ver que se cumplen las 3 condiciones, donde sus raíces son x y 4. Por ello, se pueden factorizar como:

$$x^2 - 16 = (x + 4) * (x - 4)$$

4) Verificar que este sea una multiplicación de binomios simples. Para ello, hay que verificar que se cumplan unas cuantas condiciones: Primero, que tenga 3 elementos, que el primero sea cuadrático de la forma x^2, y que existan 2 números tales que la suma de ellos den como resultado el número del medio (que acompaña a la x) y que su multiplicación dé como resultado el número del final (El que no tiene x a su lado), teniendo en cuenta el signo. Por ejemplo:

$$x^2 - 2x - 24$$

Entonces, al darnos cuenta que se cumplen la primera y segunda condición, hay que buscar 2 números tales que su suma sea -2 y su multiplicación dé -24. Después de ir probando números, uno puede encontrarse que los factores que cumplen la condición son -6y 4, por lo que la factorización es:

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6) * (x + 4)$$

5) Probar la existencia de cubo de binomios: Si se encuentra frente a una expresión en la cual están los elementos ubicados de la forma anteriormente vista, con 4 elementos en el polinomio, se puede factorizar la expresión de la forma visto anteriormente. Por ejemplo, si tenemos la expresión:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

Podemos apreciar que el primer elemento y el último son cubos de otros (De xy 3, respectivamente) y que los 2 elementos cumplen las condiciones dadas. Por ello, se puede determinar qué:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$$

6) Determinar si se encuentra frente a una diferencia de cubos. Si estamos frente a la presencia de 2 elementos elevados al cubo, donde el segundo se encuentra restado, se puede factorizar de la forma dada anteriormente. Por ejemplo, si tenemos:

$$x^3 - 64$$

Se puede ver que el primer elemento es el cubo de x, mientras que el segundo es el cubo de 4, por lo que se puede transformar la expresión en:

$$x^3 - 64 = (x - 4) * (x^2 + 4x + 16)$$

Con esto en cuenta, podemos realizar ejercicios que requieran la factorización de polinomios, que nos permitan simplificar límites indeterminados, de forma tal de poder calcularlos. Por ejemplo, tengamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x - 4}{x^2 - 7x + 12} \right)$$

Lo primero que se debe hacer siempre es tratar de evaluar la función en el punto al que tiende x. En el ejemplo, $x = 4$

$$f(4) = \frac{4-4}{4^2 - 7 * 4 + 12} = \frac{0}{0} = indeterminado$$

Se puede apreciar que la función en ese punto es indeterminada, por lo que no se puede sacar el límite así de fácil. Ante ello, lo que se puede hacer es factorizar el denominador de la función. Al aplicar las reglas expresadas más arriba, se puede observar que sólo se cumple la última, de multiplicación de binomios. Acá se buscan 2 números que sumados den -7 y multiplicados tengan como resultado 12. Luego de buscar, se puede apreciar que los valores que lo determinan son -3 y -4. Por ello, el límite factorizado es:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{(x-4)}{(x-3)(x-4)} \right)$$

Aquí podemos simplificar la función, eliminando a ambos lados de la función el factor $(x-4)$. Con ello, nos queda un límite:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{(x-3)} \right)$$

Ahora podemos evaluar el límite en el punto $x = 4$

$$f(4) = \frac{1}{4-3} = 1$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x-4}{x^2 - 7x + 12} \right) = 1$$

Este fue un ejemplo de cómo resolver este tipo de límites fraccionarios, encontrando algún tipo de factor común.

Por otro lado, podríamos encontrarnos ante un problema que implica raíces. Si se requiere sacar de la indeterminación un problema como este, se debe racionalizar el problema. Esto implica multiplicar una fracción que contenga elementos racionales (raíces) por otro polinomio que permita aprovechar las propiedades de las multiplicaciones de polinomios (como vimos anteriormente) y permita eliminar el obstáculo que se hace presente en los ejercicios. Por ejemplo, si tenemos el límite:

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Al evaluar la función en el punto determinado, tenemos:

$$f(1)=\frac{1^2-\sqrt{1}}{1-\sqrt{1}}=\frac{0}{0}$$

Dado que es indeterminada, debemos tratar de racionalizar la función para tratar de transformarla en algo que nos permita cambiar de límite.

Aprovechamos una de las propiedades de la multiplicación de binomios, como es la suma por su diferencia (Al multiplicar un par de binomios con signo cambiado, quedan los 2 elevados al cuadrado. Si alguno de ellos es una raíz, ¡se eliminó la raíz!). Nos quedaría, entonces:

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x \to 1}\left(\frac{(x^2-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})}*\frac{(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}\right)=\lim_{x \to 1}\left(\frac{(x^2-\sqrt{x})*(1+\sqrt{x})}{1-x}\right)$$

Luego, volvemos a hacer la racionalización, pero arriba, con el otro elemento que nos da 0 al aplicar el límite:

$$=\lim_{x \to 1}\left(\frac{(x^2-\sqrt{x})*(1+\sqrt{x})}{(1-x)}*\frac{(x^2+\sqrt{x})}{(x^2+\sqrt{x})}\right)=\lim_{x \to 1}\left(\frac{(x^4-x)*(1+\sqrt{x})}{(1-x)*(x^2+\sqrt{x})}\right)$$

Podemos aplicar factor común en el primer polinomio arriba. Ante esto, nos quedará:

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{-x * (1 - x^3) * (1 + \sqrt{x})}{(1 - x) * (x^2 + \sqrt{x})} \right)$$

Pero el polinomio $(1 - x^3)$ es una diferencia de cubos, donde el primero es el cubo de 1 y el segundo lo es de x. Ante ello, podemos factorizar de la forma:

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{-x * (1 - x) * (1 + x + x^2) * (1 + \sqrt{x})}{(1 - x) * (x^2 + \sqrt{x})} \right)$$

Acá podemos eliminar a ambos lados de la fracción el $(1 - x)$, con lo que nos queda:

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{-x * (1 + x + x^2) * (1 + \sqrt{x})}{(x^2 + \sqrt{x})} \right)$$

Ahora podemos intentar de nuevo calcular el límite de la función cuando x tiende a 1. Esto significa que:

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{-x * (1 + x + x^2) * (1 + \sqrt{x})}{(x^2 + \sqrt{x})} \right) = f(1) = \frac{-x * (1 + 1 + 1) * (1 + \sqrt{1})}{(1 + \sqrt{1})}$$

$$= \frac{-1 * 3 * 2}{2} = -3$$

Luego, el límite de la función es 3.

2.6.2 Método por cambio de variables.

Otra opción es utilizar un método de cambio de variables, para resolver los límites indeterminados. Este método es uno en el que a parte de la expresión matemática se transforma en otra con otra variable, que permita eliminar más rápidamente la causa de la indeterminación. Para comprenderlo, mejor ver un ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[5]{1 + x} - 1}{1 - \sqrt{1 + x}} \right)$$

Si queremos evaluar el límite en ese punto, tendremos:

$$f(0) = \frac{\sqrt[3]{1+0}-1}{1-\sqrt{1+0}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}, \textit{indeterminado}$$

Por ello, debemos usar algún método para obtener su límite. Podemos intentar una racionalización, pero será muy largo, dado que tenemos raíces cúbicas. Entonces, lo que se puede hacer es encontrar una variable que reemplace a alguna otra, que permita eliminar lo que indetermine al límite. En este caso, para eliminar tanto las raíces cuadradas como las cúbicas, creemos una variable u^6, tal que :

$$u^6 = 1 + x$$

Con ello, el límite sería:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{u^6}-1}{1-\sqrt{u^6}} \right)$$

Pero aún x tiende a 0, por lo que no podemos hacer nada con las u. Pero, ¿qué le pasa a u cuando x tiende a cero?. Evaluemos cuánto vale u al $x = 0$. Para ello, aplicamos la misma regla que definimos recién:

$$u^6 = 1 + x = 1 + 0 = 1$$
$$u = \sqrt[6]{1} = 1$$

Por lo tanto, u tenderá a 1, cuando x tienda a 0. Ante ello, podemos modificar el límite:

$$\lim_{u \to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{u^6}-1}{1-\sqrt{u^6}} \right)$$

Aún no se puede evaluar la función, pero podemos empezar a resolverlo, calculando las raíces de la variable elevada.

$$\lim_{u \to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{u^6}-1}{1-\sqrt{u^6}}\right)=\lim_{u \to 1}\left(\frac{u^2-1}{1-u^3}\right)$$

Ahora, podremos ver que arriba se encuentra una suma por su diferencia, mientras que abajo hay una diferencia de cubos. Por ello, podemos factorizar:

$$\lim_{u \to 1}\left(\frac{(u+1)(u-1)}{(1-u)(u^2+u+1)}\right)$$

Arriba, podemos sacar un signo menos, para cambiar de signo los elementos de la expresión $(u-1)$, por lo que nos quedaría:

$$\lim_{u \to 1}\left(\frac{-(u+1)(1-u)}{(1-u)(u^2+u+1)}\right)$$

Ahora podemos eliminar los factores comunes, con lo que sale:

$$\lim_{u \to 1}\left(\frac{-(u+1)}{(u^2+u+1)}\right)$$

Ahora se puede evaluar la función, en ese punto, con lo que el límite es:

$$\lim_{u \to 1}\left(\frac{-(u+1)}{(u^2+u+1)}\right)=\frac{-(1+1)}{(1^2+1+1)}=-\frac{2}{3}$$

3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Para poder adentrarnos en el concepto de continuidad de funciones, hay dos conceptos que es importante conocer (o recordar) brevemente antes de tratar el tema:

- Dominio de una función: Son todos los valores que puede tomar la variable independiente x, de tal forma que exista un resultado válido. Por ejemplo, una función de la forma:

$f(x) = \sqrt{x}$

No puede tomar valores de x negativos, ya que la raíz cuadrada de números negativos no existe en los reales. Tampoco puede ser 0, por la misma razón. Ante ello, los únicos valores que puede tomar x son números positivos mayores que 0. Esto se expresa de la siguiente forma:

$D: f(x) =]0, +\infty[$

Donde el corchete apuntando hacia afuera indica que el rango del dominio abarca hasta ese punto, sin considerarlo (Los rangos que llegan hasta infinito deben tener el corchete hacia afuera, ya que es imposible que exista un valor determinado como infinito, fue tratado en el capítulo anterior).

- Recorrido de una función: Son todos los valores que puede tomar la variable dependiente $y = f(x)$ a lo largo de la recta de valores independientes. Por ejemplo, la forma:

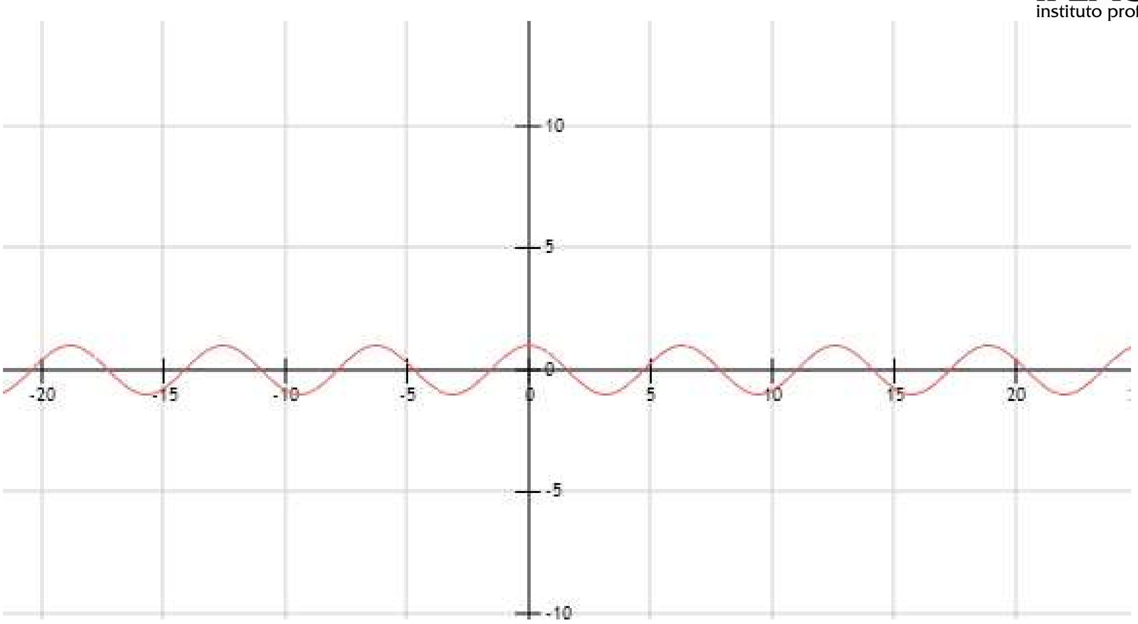
$f(x) = x^2$

Si grafica la función, se dará cuenta que es una parábola que, al analizarla desde los números negativos) viene desde el infinito hacia arriba, hasta llegar al 0, para luego volver a subir hasta el infinito. Nunca llegará hasta los negativos. Es decir, su recorrido irá desde el 0 (Incluyéndolo) hasta el infinito positivo. Esto se escribe:

$R: f(x) = [0, +\infty[$

3.1 Definición de continuidad

El concepto intuitivo de continuidad de funciones es muy fácil de entender. Corresponde a que, si se grafica la función en la recta de los reales, se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, lo que implica que no se corta en ninguna parte. Una gráfica de función continua podría ser:



La función expresada arriba, $f(x) = \cos(x)$ es continua, porque se puede seguir dibujando por toda la recta de los números reales.

Matemáticamente, por otro lado, también es relativamente simple el concepto de continuidad. En general, las funciones tienen puntos clave que las hacen ser discontinuas, por lo que cualquier evaluación de esta condición se debe hacer en esos puntos determinados. Una función $f(x)$ cualquiera es continua en un punto $x = a$ si se dan las siguientes condiciones:

1) La función está definida en $f(a)$. Esto implica que a debe estar dentro del rango del dominio de la función. Si, por ejemplo, tuviéramos la función:

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$

Y quisiéramos evaluarla en $x = 2$. Al evaluarla, nos da $f(2) = \sqrt{0}$, lo cual no existe. Su dominio, por lo tanto, no incluye el valor 2. Con ello, ya podemos decir que la función no es continua en ese punto.

2) La función posee un límite en el punto $x = a$. Si tenemos una función en la cual su límite por la derecha es igual al límite por la izquierda, podemos decir que la función tiene un límite en el lugar que queremos evaluar. Por ejemplo, la función parcial:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 0 \\ x+5, & x \geq 0 \end{cases}$$

Si queremos evaluar su continuidad en el punto $x = 0$, debemos verificar primero si la función está definida en ese lugar. Al calcular, obtenemos que $f(0) = 5$. Sin embargo, al sacar los límites, con la metodología aprendida en el capítulo anterior, obtenemos que desde la izquierda su límite es 2, mientras que por la derecha es 5. Al ser números distintos, no posee límite y, por lo tanto, la función no es continua.

3) El límite de la función es igual al valor de $f(a)$. Esta es la condición final para evaluar la continuidad, la que indica que los valores calculados anteriormente, de existir, deben ser iguales entre sí. Si no, no es una función continua. Por ejemplo, con la función parcial:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < -1 \\ 5, & x = -1 \\ x+1, & x \geq -1 \end{cases}$$

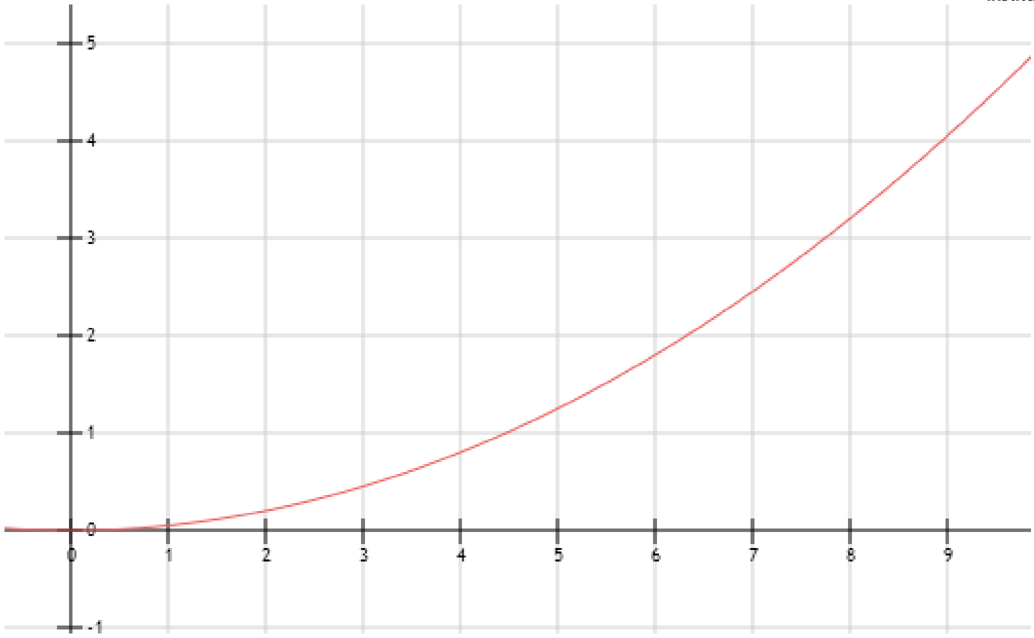
Si queremos evaluar la continuidad en el punto $x = -1$, debemos pasar por los 2 pasos anteriores primero. $f(-1) = 5$, por lo que el punto es parte del recorrido. Además, al evaluar el límite desde la izquierda (Considerando la primera función) da el mismo valor que el límite desde la derecha (Considerando la tercera función), que es 0. Sin embargo, el límite de la función no es igual al límite de la imagen de la misma por lo que no es una función continua.

3.2 Interpretación geométrica

Este concepto también tiene una definición geométrica, que parte de la base de cualquier plano con una curva de función dibujada en el. Vayámoslo viendo con un ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{20}x^2$$

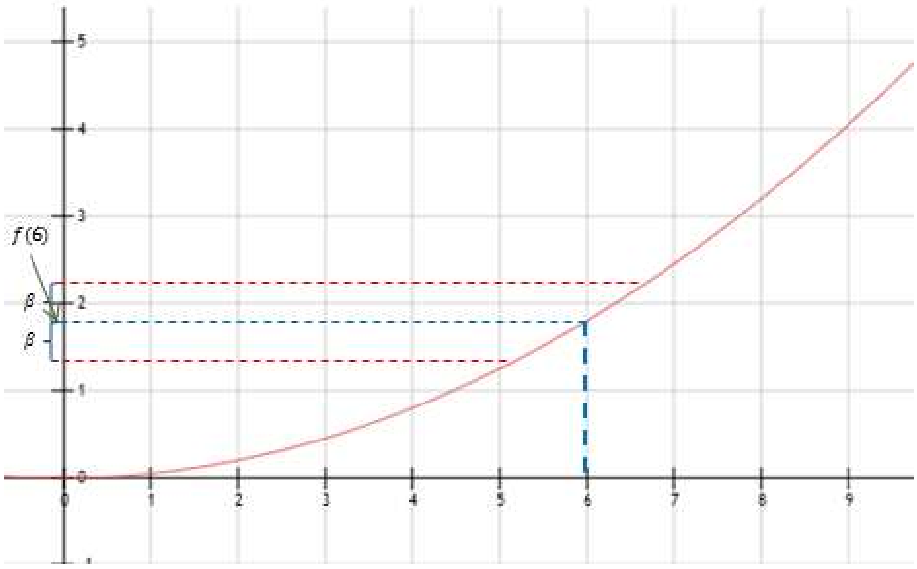
Esta función tendrá el siguiente gráfico en el plano cartesiano:



La continuidad de una función en un punto $x = a$ estará definido de manera geométrica como:

Para todo entorno de centro $f(a)$y radio ß, existe un entorno de centro a y radio τ tal que todos sus puntos x tienen su imagen $f(x)$ dentro del entorno de centro $f(a)$ y radio ß.

Esta definición de continuidad se ve muy compleja, así que la analizaremos paso a paso, en base al ejemplo. Primero consideremos un valor en el cual vamos a evaluar la función. Por ejemplo, en $x = 6$. En ese punto, $f(6) = 1{,}8$. Luego, se crea un “radio” en el eje y, alrededor del punto donde llega $f(x)$, que en este caso es 1,8, al cual se llama β. Asumamos que $\beta = 0{,}5$. Gráficamente se verá que:



Acá queda un intervalo sobre el eje de la y que abarca desde 1,3 a 2,3. Ese intervalo se puede proyectar sobre la función para ver a qué valores de x corresponde. Para descubrirlo hay que desarrollar las siguientes ecuaciones:

$$f(x_1) = 1{,}3$$

$$\frac{1}{20}x_1^2 = 1{,}3$$

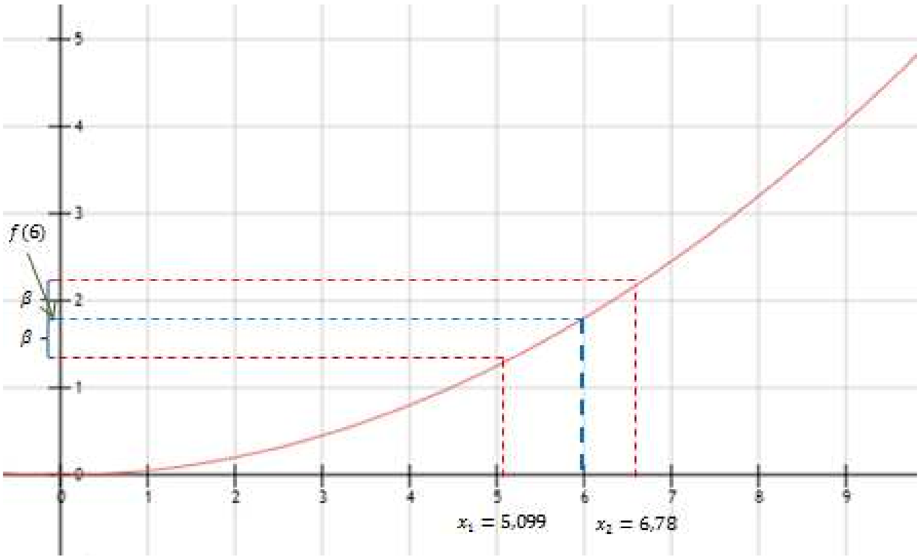
$$x_1 = 5{,}099$$

$$f(x_2) = 2{,}3$$

$$\frac{1}{20}x_2^2 = 2{,}3$$

$$x_2 = 6{,}78$$

Por lo tanto, las proyecciones caen sobre la línea de las x de la siguiente forma:



Luego, podemos considerar todos los x que se encuentren dentro del rango $(5{,}099; 6{,}78)$. Si encontramos que la diferencia entre ese $f(x)$ y $f(6)$ es siempre menor que β, podemos decir que la función es recta continua en ese punto.

Por ejemplo, podríamos considerar el punto $x = 5{,}5$ Veríamos que:

$$f(5{,}5) = \frac{1}{20}(5{,}5)^2 = 1{,}5125$$

Si vemos cual es la diferencia con $f(6)$, sería:

$$f(6) - f(5{,}5) = 1{,}8 - 1{,}5125 = 0{,}2875$$

En este punto, la diferencia es menor a β, por lo que no se puede declarar que la recta es discontinua y habría que seguir evaluando alrededor de ese punto.

3.3 Propiedades de la continuidad

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el punto $x = a$, a la vez que b es un número real. Se cumplen las siguientes propiedades:

1) El resultado de la multiplicación de una función por un escalar es continuo en el punto c. Es decir, $b * f(x)$ y $b * g(x)$ son continuos en $x = c$

2) El resultado de la suma de funciones continuas da como resultado una función continua. Es decir:

$$f(x) \pm g(x)\ continua\ en\ x = c$$

3) El producto de 2 funciones continuas da como resultado una función continua. Es decir:

$$f(x) * g(x)\ continua\ en\ x = c$$

4) Si $g(c) \neq 0$, entonces, la división entre las 2 funciones da como resultado una función continua. Es decir:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\ continua\ en\ x = c$$

3.4 Discontinuidad reparable o irreparable

Existen funciones que poseen discontinuidades que pueden ser modificadas de forma tal de que se transforme en una función continua, pero hay otras que no pueden serlo, debido a ciertas condiciones. Las veremos y analizaremos brevemente.

3.4.1 Discontinuidad reparable

Una función discontinua en el punto $x = a$ será reparable si ésta posee un límite finito, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) \exists \neq \infty \ => \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

Y su razón de discontinuidad sea una de las siguientes:

a) La función no se encuentra definida en el punto $x = a$. Por ejemplo, se podría tener la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Si quisiéramos evaluar la continuidad de la función en el punto $x = 0$, veríamos que la misma no está definida en ese punto, por lo que no puede ser evaluada ahí. Sin embargo, si calculamos su límite, veremos que desde la derecha su valor es 0, mientras que desde la izquierda también lo es, por lo que éste existe. Ante ello, podemos hacer una modificación muy pequeña para hacer continua la función. Esta consiste en modificar una de las líneas para que incorpore el valor $x = 0$. Por ejemplo, podríamos modificar la segunda línea y nos quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos hacer lo mismo con la primera línea, y sería lo mismo.

b) La imagen de la función (El valor de $f(x)$) es distinto del límite de la misma. Si, por ejemplo, tuviéramos la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

Si evaluamos la función en ese punto, nos da $f(2) = 1$, mientras que su límite por la izquierda y la derecha da 4, dándose que sean distintos valores, por lo que la función no es continua. Esto se puede también modificar simplemente, por ejemplo, moviendo el punto de $f(2)$ al que corresponde según sus límites, que es 4. Entonces, una función reparada podría ser:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 4, & x = 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

3.4.2 Discontinuidad irreparable

Asimismo, hay funciones que no pueden ser reparadas bajo el método anterior. Estas serán en las que existan diferencias entre los límites de la función desde la derecha y desde la izquierda. Es decir:

$$\left|\lim_{x\to n+} f(x) - \lim_{x\to n} f(x)\right| \neq 0 => \lim_{x\to n} f(x) \nexists$$

Esto implica que el límite general de la función no existe.

Estas funciones discontinuas se pueden clasificar en 3 categorías:

a) Discontinuidad irreparable de salto finito: En estas funciones, la diferencia entre los límites es un valor numérico, por lo que es medible.
b) Discontinuidad irreparable de salto infinito: En este tipo de funciones discontinuas, los límites se distancian por un valor infinito, ya sea porque uno de los límites tiende al infinito, o los 2.
c) Discontinuidad esencial: Estas discontinuidades irreparables se dan cuando una función no posee un límite lateral, ya que la función tiene un dominio definido en un segmento de la recta de los números reales y está siendo evaluado en uno de los extremos de ese segmento.